

## ЭЛЕКТРОННЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

**Горова Я.В.,**

*студентка 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь  
Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент*

Ключевые слова. Дифференциальное исчисление, матричные группы, группа Ли, алгебра Ли, локально обратная функция, диффеоморфизм.

Keywords. Differential calculus, matrix groups, Lie group, Lie algebra, locally inverse function, diffeomorphism.

Для успешной подготовки дипломных и конкурсных студенческих работ, использующих теорию групп и алгебр Ли, необходимо иметь электронный ресурс, который содержит конспект лекций по этой теории. Данный электронный ресурс должен обеспечить работу студентов по самостоятельному изучению теоретического материала. Цель данной работы – рассказать про подготовку второго раздела электронного конспекта лекций, в котором формулируется теорема об обратной функции, а также анализируется соотношение между группой  $GL(V)$  и алгеброй  $gl(V)$ .

**Материал и методы.** Используются первая глава учебника [1] и электронный ресурс <https://www.multitran.com>.

**Результаты и их обсуждение.** Для разработки электронного ресурса мы используем англоязычный учебник [1], в котором излагается теория матричных групп, дифференцируемых многообразий, групп и алгебр Ли. Первая глава учебника посвящена теории дифференцируемых отображений  $n$ -мерных евклидовых пространств.

В электронном конспекте понятия дифференциального исчисления представлены в терминах линейной алгебры. Так, например, первые производные функций из одного евклидова пространства в другое задаются как линейные преобразования, а производные второго порядка задаются как билинейные формы. Некоторые детали доказательств мы опускаем, и в то же время приводим много примеров, из области матричных групп и алгебр Ли.

В первом разделе приводятся следующие определения: локально обратная функция в точке, диффеоморфизм класса, аналитические диффеоморфизмы. Также рассматриваются (а некоторые и доказываются) теоремы: об обратной функции и о неявной функции. Например, теорема об обратной функции формулируется следующим образом. Пусть  $U$  открыто в  $V$ , пусть  $p \in U$ , и пусть  $f: U \rightarrow W$  – класса  $C^r$  на  $U$ . Если  $Df(p) \in Hom(V, W)$  является обратимым линейным преобразованием, то  $f$  является локально обратимой класса  $C^r$  в точке  $p$ . Кроме того, если  $g$  есть локально обратимая к  $f$  и  $q = f(p)$ , то  $Dg(q) = [Df(p)]^{-1}$ .

Во втором разделе при помощи предыдущих результатов о функции  $\exp$  и присоединенной неассоциативной алгебре  $gl(V)$  общей линейной группы  $GL(V)$  анализируется соотношение между группой  $GL(V)$  и алгеброй  $gl(V)$ , доказываются свойства для элементов, принадлежащих алгебре  $gl(V)$ . Анализ разбивается на следующие этапы:

(1) Отображение  $\exp$  используется, чтобы показать, что глобальное умножение в  $GL(V)$  использует локальное аналитическое умножение в  $End(V)$ .

(2) Мы используем вторую производную локального умножения в  $End(V)$ , чтобы получить билинейное умножение  $\tau$  в  $End(V)$ , которые вместе порождают алгебру  $gl(V)$ .

(3) Свойства  $GL(V)$  используются, чтобы получить формулу для  $\tau$  и тождества, которым оно удовлетворяет.

(4) В заключении мы показываем, как автоморфизмы  $GL(V)$  используют автоморфизмы  $gl(V)$  и выводим некоторые важные формулы.

Конспект сопровождается несложными упражнениями, выполнение которых позволит закрепить изученный материал.

Данная работа является продолжением работы по созданию полномасштабного электронного конспекта лекций, начатой выпускницами ФМиИТ Черных В.В., Гаджиевой Ф.С. и Ивановой Е.А. Полученные результаты, вместе с изучением автоподобий и автоизометрий различных четырехмерных алгебр Ли (см. работы [2] – [5]) были представлены на Республиканские конкурсы научных работ студентов 2019–2021 годов, и им были присвоены две первых и одна вторая категории.

**Заключение.** В данной работе мы рассказали про продолжение создания электронного конспекта лекций по теории групп и алгебр Ли, который играет важную роль в организации индивидуального изучения теории студентами выпускных курсов и студентов второй ступени высшего образования при работе над курсовыми и конкурсными работами, а также дипломными проектами. Работа по созданию электронного конспекта будет продолжена в текущем учебном году.

1. Sagle, A.A. Introduction to Lie groups and Lie algebras / A.A. Sagle, R.E. Wadle. – NY-London: Academic Press, 1973, – 361 p.
2. Подоксёнов, М.Н. Автоподобия и автоизометрии одной четырехмерной алгебры Ли VI типа Бианки / М.Н. Подоксёнов, Ф.С. Гаджиева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 124–130. URL: <https://elib.psu.by/bitstream/123456789/23754/5/124-130.pdf> (дата обращения: 31.08.2022)
3. Подоксёнов, М.Н. Автоизометрии и автоподобия алгебры Ли  $A(1) \oplus \mathbb{R}^2$  / М.Н. Подоксёнов, В.В. Черных // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 1(53). – С. 25–30. URL: [https://rep.vsu.by/bitstream/123456789/28672/1/jrn58\\_репозиторий\\_Подоксенов\\_2021.pdf](https://rep.vsu.by/bitstream/123456789/28672/1/jrn58_репозиторий_Подоксенов_2021.pdf) (дата обращения: 31.08.2022)
4. Подоксёнов, М.Н. Инвариантные подпространства однопараметрической группы подобий пространства Минковского / М.Н. Подоксёнов, Е.А. Иванова // Математические структуры и моделирование. – 2021. – № 1(57). – С. 41–45. – Режим доступа: [https://rep.vsu.by/bitstream/123456789/27673/1/ИНВАРИАНТНЫЕ%20ПОДПРОСТРАНСТВА\\_2021.pdf](https://rep.vsu.by/bitstream/123456789/27673/1/ИНВАРИАНТНЫЕ%20ПОДПРОСТРАНСТВА_2021.pdf). – Дата доступа: 31.08.2022.
5. Подоксёнов, М.Н. Автоизометрии четырехмерной алгебры Ли IV типа Бианки / М.Н. Подоксёнов, Е.А. Иванова // Математические структуры и моделирование. – 2021. – № 2(58). – С. 28–36. – Режим доступа: <https://rep.vsu.by/bitstream/123456789/26870/1/48-50.pdf>. – Дата доступа: 31.08.2022.

## MAXIMAL GROUP OF ISOMETRIES OF THE LORENTZIAN LIE GROUP $A(1) \times A(1)$

*Gorovaya Y.V.,*

*студентка 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь  
Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент*

Ключевые слова. Группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, однопараметрическая группа изометрий, самоподобное многообразие.

Keywords. Lie group, left-invariant Lorentzian metric, one-parameter isometry group, self-similar manifold.

Any Lie group  $G$  endowed with a left-invariant metric is a homogeneous manifold on which the Lie group itself acts simply and transitively. This means that the stationary subgroup  $G_e$  is trivial. Therefore, the question is of interest: does there exist a left-invariant metric on the Lie group such that the resulting homogeneous manifold has a group of motions whose dimension is greater than that of the Lie group itself, and this is equivalent to the fact that  $G_e$  contains a one-parameter subgroup.

The purpose of this paper is to indicate the metric tensor on the Lie group  $G_{IV} = A^+(1) \times A^+(1)$ , under which it admits a one-parameter group of motions that leave the identity element of the Lie group fixed, and write out the action of this one-parameter group in the coordinates associated with the matrix representation of this Lie group. For all other left-invariant Lorentzian metrics, the connected component of the group of motions of the resulting manifold is isomorphic to the Lie group  $G_{IV}$  itself.

**Material and methods.** We consider the 4-dimensional Lie group  $G_{IV} = A^+(1) \times A^+(1)$  and its Lie algebra. We use methods of differential geometry.

**Results and its discussion.** Let the Euclidean or Lorentz scalar product be introduced in the Lie algebra  $\mathcal{G}$ . A linear transformation  $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  is called an autoisometry if it is both an