УДК 512.552.5

А. Д. Кондратова

Об изоморфном вложении (M, N)-колец

Весьма актуальной в алгебре является проблема о вложении одной алгебраической системы в другую. Подтверждением тому является серия работ, посвященных вложениям полугрупп в группы и колец в тела, среди которых особое место занимают работы А.И.Мальцева [1], А.К.Сушкевича [2], Б.Л.Ван дер Вардена [3], О.Оре [4], Л.А.Бокутя [5], Г.Кромбеца и Тимма [6], и др. (см., например, [7, 8]).

К указанному направлению примыкает и настоящая статья. В ней вводится понятие (M,N)-кольца, являющееся естественным обобщением понятий (F,G)-кольца Н.Целакоского [9] и (m,n)-кольца Г.Чупоны [10], и устанавливается критерий существования (M,N)-колец частных (см. теорему 1), позволяющий решить задачу об изоморфном вложении Ω-ассоциативного (M,N)-кольца в (M,N)-тело (см. теорему 2). Отметим, что из теоремы 1 вытекает также известная теорема О.Оре, а из теоремы 2 - теорема 3.2 из [6] о вложении (m,n)-области целостности в (m,n)-поле.

Все обозначения согласованы с [9,11].

Пусть X - непустое множество, и пусть Σ и Ω - два множества операций на X. Тогда тройка $\langle X,\Sigma,\Omega\rangle$ называется (Σ,Ω)-алгеброй ([9], с.5). Через Σ_m и Ω_n обозначим подмножества всех m-арных и n-арных операций на X в Σ и Ω соответственно.

Будем считать, что $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \varnothing$, $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \varnothing$, $\Omega_n \neq \varnothing$ и $\Sigma_m \neq \varnothing$ для некоторых $n \geq 2$ и $m \geq 2$. Тогда обозначим через

$$M = \{m \mid m \in N \setminus \{1\} \ и \ \exists \Sigma_m \neq \varnothing\},\ N = \{n \mid n \in N \setminus \{1\} \ и \ \exists \Omega_n \neq \varnothing\}.$$

Определение 1. Алгебра $\langle X,\Sigma\rangle$ называется Σ-ассоциативной, если выполняются следующие условия:

1) для любых операций $\sigma \in \Sigma_m$, $\sigma' \in \Sigma_p$ $(m, p \in M)$ и любой последовательности $x_1^{m+p-1} \in X_1^{m+p-1}$ имеет место равенство

$$\left((x_1^m)^\sigma\ x_{m+1}^{m+p-1}\right)^{\sigma'} = \left(x_1^i (x_{i+1}^{i+m})^\sigma\ x_{i+m+1}^{m+p-1}\right)^{\sigma'} \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

(будем обозначать $\left(x_1^{m+p-1}\right)^{\sigma\sigma'} = \left((x_1^m)^\sigma\ x_{m+1}^{m+p-1}\right)^{\sigma'}$);

2) для любых таких $\sigma_1 \in \Sigma_{g_1}$, $\sigma_2 \in \Sigma_{g_2}$, ..., $\sigma_r \in \Sigma_{g_r}$, $\sigma'_1 \in \Sigma_{q_1}$, ..., $\sigma'_s \in \Sigma_{q_s}$, что

$$g_1 + (g_2 - 1) + \ldots + (g_r - 1) = k = q_1 + (q_2 - 1) + \ldots + (q_s - 1),$$

верно равенство

$$\left(x_1^k\right)^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r} = \left(x_1^k\right)^{\sigma'_1\sigma'_2\ldots\sigma'_s}$$

для каждой последовательности $x_1^k \in X^k$ (см. [9], с.6).

Определение 2. Σ-Ассоциативная алгебра $\langle X,\Sigma\rangle$ называется M-группой, если для любых $\sigma \in \Sigma_m$ и $a_1^{m-1}a \in X^m$, где $m \in M$, каждое из уравнений

$$\left(xa_1^{m-1}\right)^\sigma = a\ ,\ \left(a_1^{m-1}y\right)^\sigma = a$$

разрешимо в X (см.[9],с.8).

На основании определения 1.3 [11] можно заключить, что если <X,Σ> - M-группа, то для любой операции $\sigma \in \Sigma_m$, где $m \in M$, $\langle X, \sigma \rangle$ является m-арной группой. M-Группа <X,Σ> называется абелевой, если для любой $\sigma \in \Sigma_m$ m-арная группа <X,σ> является абелевой.

Введем теперь понятие (M,N)-кольца, являющееся обобщением понятий (m,n)-кольца [10, 6] и (F,G)-кольца [9].

Определение 3. (Σ,Ω)-Алгебру R=<X,Σ,Ω> будем называть (M,N)-кольцом, если выполняются условия:

1) алгебра <X,Σ> является абелевой M-группой;

2) для любых $\sigma \in \Sigma_m$, $\omega \in \Omega_n$ (где $m \in M$, $n \in N$) и $a_1^{n-1}b_1^m \in X^{m+n-1}$ имеет место равенство

$$\left(a_1^{i-1}(b_1^m)^\sigma a_i^{n-1}\right)^\omega = \left(\left(a_1^{i-1}b_1a_i^{n-1}\right)^\omega \left(a_1^{i-1}b_2a_i^{n-1}\right)^\omega \dots \left(a_1^{i-1}b_ma_i^{n-1}\right)^\omega\right)^\sigma$$

для любого i=1, 2, ..., n.

(M,N)-Кольцо $R = \langle X, \Sigma, \Omega \rangle$ называется Ω-ассоциативным, если <X,Ω> является Ω-ассоциативной алгеброй.

В (M,N)-кольце R с нулем 0 элемент $g \in X$ называется регулярным, если он не является "делителем" нуля, т.е. если для любых $\omega \in \Omega_n$, $b_1^{n-1} \in X^{n-1}$ и i=1,2,...,n, из равенства

$$\left(b_1^{i-1}gb_i^{n-1}\right)^\omega = 0$$

всегда следует включение $0 \in \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$.

Множество всех регулярных элементов R обозначим через G. Ясно, что $0 \notin G$.

Если R не имеет нуля, то будем считать регулярными все элементы X. Имеет место

Предложение 1. Пусть в Ω-ассоциативном (M,N)-кольце $R = \langle X, \Sigma, \Omega \rangle$ множество регулярных элементов G непусто. Если в Ω существует такая n-арная операция ω (где $n \in N$), что n>2, то все отличные от нуля элементы множества X регулярны, т.е. G=X\{0}.

Определение 4. (M,N)-Кольцо R называется (M,N)-кольцом с условием сокращения для множества $S \subseteq X$ относительно операции $\omega \in \Omega_n$, если для любых $a, c \in X$ и $b_1^{n-1} \in S^{n-1}$, i=1, 2, ..., n из равенства

$$\left(b_1^{i-1}ab_i^{n-1}\right)^\omega = \left(b_1^{i-1}cb_i^{n-1}\right)^\omega$$

всегда следует a = c.

В дальнейшем под (M,N)-кольцом R будем понимать Ω-ассоциативное (M,N)-кольцо $R = \langle X, \Sigma, \Omega \rangle$.

Предложение 2. (M,N)-Кольцо R с условием сокращения для S относительно некоторой операции $\omega \in \Omega$ является (M,N)-кольцом с условием сокращения для S относительно всех операций из Ω, если S замкнуто относительно Ω.

Предложение 3. Если для элемента b (M,N)-кольца R с единицей e имеет место равенство

$$\left(bb_1^{n-1}\right)^{\omega}=e \qquad \left(\ \left(b_1^{n-1}b\right)^{\omega}=e\ \right) \tag{1}$$

для некоторой операции $\omega \in \Omega_n$ и последовательности $b_1^{n-1} \in X^{n-1}$, то для любой операции $\gamma \in \Omega_s$ найдется такая $c_1^{s-1} \in X^{s-1}$, что

$$\left(bc_1^{s-1}\right)^{\gamma}=e \quad \text{(соответственно, } \left(c_1^{s-1}b\right)^{\gamma}=e\text{).}$$

Определение 5. Элемент b (M,N)-кольца R с единицей e будем называть обратимым справа (слева), если найдутся такие $\omega \in \Omega_n$ и $b_1^{n-1} \in X^{n-1}$ (где $n \in N$), что будет иметь место равенство (1).

Если b обратим и справа, и слева, то будем его просто называть обратимым в R.

Определение 6. Гомоморфизм f (M,N)-колец $R=<X,\Sigma,\Omega>$ и $K=<Y,\Sigma^*,\Omega^*>$ будем называть изоморфным вложением R в K, если f является взаимно однозначным отображением R в K.

Введем теперь

Определение 7. Будем говорить, что (M,N)-кольцо R обладает правым (M,N)-кольцом частных $Q=<Y,\Sigma^*,\Omega^*>$, если существует такое изоморфное вложение f:R→Q, что для каждого регулярного элемента b из R элемент fb обратим в Q и

$$Y=\left\{\left(fa\,c_1^{n-1}\right)^{\omega^*} \middle| a \in R,\ \omega^* \in \Omega_n^*, \text{ и существует такой регулярный элемент } c \in R \text{, что } \left(fc\,c_1^{n-1}\right)^{\omega^*}=\left(c_1^{n-1}\,fc\right)^{\omega^*}=e\right\}.$$

Нами получен критерий существования (M,N)-кольца частных, а именно

Теорема 1. Ω-Ассоциативное (M,N)-кольцо $R=<X,\Sigma,\Omega>$ с единицей e и условием сокращения для множества регулярных элементов $G \subseteq X$ обладает правым (M,N)-кольцом частных тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: для некоторой n-арной операции $\omega \in \Omega$, где $n \in N$, любых $a \in X$, $b_1^{n-1} \in G^{n-1}$ существуют такие $c_1^{n-1} \in G^{n-1}$ и $d \in X$, что имеет место равенство

$$\left(ac_1^{n-1}\right)^{\omega}=\left(b_1^{n-1}d\right)^{\omega}. \tag{2}$$

Если M={2} и N={2}, то условие (2) становится условием Оре, и из теоремы 1 вытекает известная теорема Оре ([5],с.100).

Если (M,N)-кольцо R коммутативно, то для d=a и $c_i=b_i$ (i=1,2,...,n-1) всегда имеет место равенство (2). Поэтому из теоремы 1 вытекает предложение 2.1 ([6], с.201), и, в частности, известная теорема из работы [8] (с.61).

(M,N)-Кольцо $R=<X,\Sigma,\Omega>$ называется (M,N)-телом, если N-полугруппа $<X,\Omega>$ без нуля (если R имеет нуль) является N-группой.

Теорема 2. Пусть в (M,N)-кольце R с единицей e выполняется условие сокращения для

$$G=\begin{cases} X, & \text{если } 0 \notin X, \\ X\setminus\{0\}, & \text{если } 0 \in X. \end{cases}$$

Тогда R изоморфно вкладывается в (M,N)-тело тогда и только тогда, когда для некоторой операции $\omega \in \Omega_n$, где $n \in N$, и любых $a \in X$, $b_1^{n-1} \in G^{n-1}$ существуют такие $c_1^{n-1} \in G^{n-1}$ и $d \in X$, что имеет место равенство (2).

Следствием этой теоремы является теорема 3.2 ([6], с. 202).

Если Σ состоит из одной m-арной операции σ и Ω состоит из одной n-арной операции ω, где $m \geq 2$ и $n \geq 2$, то (M,N)-кольцо R называется (m,n)-кольцом ([6], с. 200).

Гомоморфизм f (m,n)-кольца $R = < X, \sigma, \omega >$ в себя называется эндоморфизмом.

Из следующей теоремы вытекает результат из работы [8] (с.132), когда m=n=2.

Теорема 3. Всякое (m,n)-кольцо $R = < X, \sigma, \omega >$ с единицей e изоморфно вкладывается в (m,n)-кольцо эндоморфизмов своей m-арной группы $< X, \sigma >$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Мальцев А.И.*** Избранные труды. Том 1. Классическая алгебра. М.: Наука, 1976.
2. ***Сушкевич А.К.*** Теория обобщенных групп. ГНТИУкр., 1937.
3. ***Ван дер Варден Б.Л.*** Алгебра. М.: Наука, 1979.
4. ***Ore O.*** // Ann. of Math. 1931. Vol. 32. P. 463-477.
5. ***Бокуть Л.А.*** // Успехи мат. наук. 1987. Т.42, N 4. С. 87-111.
6. ***Crombez G., Timm J.*** // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1972. Vol. 37. P. 200-203.
7. ***Кон П.*** Универсальная алгебра. М.:Мир, 1968.
8. ***Курош А.Г.*** Лекции по общей алгебре. М.1962.
9. ***Celakoski N.*** // God. Sb. Mat. Fak. Skopje. 1977. Vol. 28. P. 5-15.
10. ***Чупона Г.*** // Билтен ДМФ на СРМ. 1965. Т. 16. С. 5-10
11. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы: силовская теория n-арных групп. Мн.: Наука и техника, 1992.

S U M M A R Y

In this paper we generalized the existence criterion of quotientrings to the case of Ω-associative (M,N)-ring R=$< X, \Sigma, \Omega >$. The criterion of isomorphic embedding the (M,N)-ring R into an (M,N)-field is given. An (m,n)-ring K=$< X, \sigma, \omega >$ ($m \geq 2$, $n \geq 2$) with e may be embedded into an (m,n)-ring of all endomorphisms of m-ary group $< Y, \sigma >$.