МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ К. Д. УШИНСКОГО

На правах рукописи

Г. Л. АГАФОНОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОСОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(006—геометрия и топология)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль
1968

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ К. Д. УШИНСКОГО

На правах рукописи

Г. Л. АГАФОНОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОСОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(006 — геометрия и топология)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль
1968

Работа выполнена на кафедре геометрии Ярославского государственного педагогического института имени К. Д. Ушинского.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук профессор З. А. СКОПЕЦ.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук профессор В. В. РЫЖКОВ

кандидат физико-математических наук доцент А. А. ДАДАЯН.

Ведущее высшее учебное заведение — Калининградский государственный университет.

Автореферат разослан „22" ноября 1968 г.

Защита диссертации состоится „26" декабря 1968 г. на заседании Совета Ярославского государственного педагогического института имени К. Д. Ушинского (Ярославль, ул. Республиканская, 108, Голубой зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета — Н. П. КРАЙНЕР

Референруемая диссертация посвящена рассмотрению в n-мерном проективном пространстве обобщенного проектирования одного специального вида, получившего в литературе название «косого проектирования».

Возможность такого рода обобщенного проектирования в трехмерном пространстве была отмечена впервые, повидимому, Steiner'ом [10], идея которого основывается на следующем простом геометрическом факте: почти каждой точке трехмерного пространства инцидентна единственная прямая, пересекающая пару фиксированных скрещивающихся прямых. Таким образом, фиксированная пара скрещивающихся прямых в трехмерном пространстве определяет некоторое обобщенное проектирование. Если при этом выбрать в пространстве произвольную пару плоскостей общего положения, то между ними будет установлено точечное соответствие, которое оказывается квадратичным вследствие того, что произвольная прямая пространства проектируется линейчатой квадрикой.

Позднее аналогичные конструкции были рассмотрены в пространствах более высокой размерности в связи с изучением вопросов многомерной начертательной геометрии, а также для получения различных нелинейных преобразований.

В работе Horninger'a [9] рассмотрено в четырехмерном пространстве косое проектирование, определенное тремя двумерными плоскостями общего положения. Эта же конструкция была использована О. А. Котием [2] при классификации кремоновых преобразований. В работах З. А. Скопеца [6] и его учеников косое проектирование использовалось для получения различных кремоновых преобразований и нелинейных моделей проективных пространств. Так И. С. Герасимова [1] рассматривала в четырехмерном пространстве косое проектирование, определенное заданием скрещивающихся двумерной плоскости и прямой; Е. В. Потоскуев [3, 4] рассматривал различные типы косого проектирования в пятимерном и шестимерном пространствах.

Целью настоящей работы является изложение основных результатов, относящихся к косому проектированию в n-мерном проективном пространстве.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Первая глава «АППАРАТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ПОРЯДКИ ПОРОЖДАЕМЫХ ИМИ КОСЫХ ПРОЕКТИРОВАНИЙ» посвящена определению важнейшего для данной работы понятия аппарата проектирования и нахождению порядков косых проектирований, порождаемых различными типами аппаратов проектирования.

Первый параграф этой главы содержит необходимые для дальнейшего соглашения об обозначениях и основные определения. Мы пользуемся теоретико-множественными символами включения, пересечения и принадлежности для обозначения пересечений и инцидентностей в проективном пространстве, что не приводит к недоразумениям в рассматриваемом нами круге вопросов. Плоскости обозначаются большими латинскими буквами; нижний индекс всегда обозначает размерность. Все построения проводятся в действительном проективном пространстве.

Проектирование прямыми в самом общем виде можно определить заданием в проективном пространстве семейства прямых, обладающего следующим свойством: каждой (точнее почти каждой) точке пространства инцидентна единственная прямая данного семейства. Такие семейства получили в литературе название гиперсетей.

Мы рассматриваем гиперсети, следующим образом определяемые системами плоскостей. Будем задавать в пространстве систему плоскостей, обладающую следующим основным свойством: каждой точке пространства, за исключением, быть может, точек некоторых поверхностей, инцидентна единственная прямая, пересекающая все плоскости данной системы. Такую систему плоскостей назовем для краткости p — системой. Гиперсеть в этом случае определяется как множество прямых, пересекающих все плоскости p — системы. Проектирование, определенное такого рода гиперсетью будем называть **косым проектированием**.

Вообще говоря p — система может содержать произвольное (даже бесконечное) число плоскостей. Именно поэтому понятие p — системы слишком общо для формулировки каких-либо содержательных выводов о том или ином типе косого проектирования.

Определение. Систему плоскостей $P_{d_1}, \ldots, P_{d_m}, \ldots, P_{d_l}$ назовем **аппаратом проектирования**, если эта система есть p — система, и при любом $m=1,\ldots, l$ система плоскостей $P_{d_1}, \ldots, P_{d_m+1}, \ldots, P_{d_l}$ не есть p — система. Здесь P_{d_m+1}, — любая плоскость размерности d_m+1, включающая P_{d_m}.

Будем считать два аппарата проектирования различными, если они отличаются числом плоскостей или наборами размерностей $d_1, \ldots, d_l$ при одинаковом числе плоскостей. Имеют место следующие положения.

I. Для любого аппарата проектирования

$$\sum_{m=1}^{l} d_m = (l-1)(n-l).$$

II. Число различных аппаратов проектирования в P_n есть $p(n-1)$; здесь $p(n-1)$ — известная [8] комбинаторная функция — число представлений числа $n-1$ в виде суммы целых положительных слагаемых без учета порядка. Каждому представлению числа $n-1$ в виде суммы целых положительных слагаемых

$$n-1 = t_1 + \ldots + t_l$$

соответствует аппарат проектирования $P_{n-1-t_1}, \ldots, P_{n-1-t_l}$, и обратно. Мы договариваемся обозначать этот аппарат проектирования символом Сегре $[(1, \ldots, 1), (1, \ldots, 1), \ldots, (1, \ldots, 1)]$. Здесь в первых круглых скобках t_1 единиц, во вторых — t_2 единиц и так далее.

Таким образом, формально устанавливается взаимно однозначное соответствие между типами аппаратов проектирования в P_n и типами невырожденных неспециальных коллинеаций в P_{n-2}. В конце третьей главы мы укажем геометрическую конструкцию, осуществляющую это соответствие.

III. Аппарат проектирования $P^1_{n-2}, \ldots, P^{n-1}_{n-2}$ (символ Сегре $[1, \ldots, 1]$) является в P_n наиболее общим в том смысле, что гиперсеть, соответствующая аппарату проектирования любого другого типа, может быть получена при некотором специальном расположении плоскостей $P^1_{n-2}, \dots, P^{n-1}_{n-2}$.

IV. **Теорема 1**. Плоскости $P^1_{n-2}, \dots, P^{n-1}_{n-2}$ образуют p — систему (или, что в данном случае тоже самое, аппарат проектирования) тогда и только тогда, когда существуют гиперплоскости $P^1_{n-1}, \dots, P^{n-1}_{n-1}$ такие, что

$$1) \qquad P^i_{n-1} \supset P^i_{n-2} \quad (i = 1, \dots, n-1);$$

$$2) \qquad \bigcap_{i=1}^{n-1} P^i_{n-1} \equiv P_1;$$

$$3) \qquad P^i_{n-2} \not\supset P_1 \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Второй и третий параграфы настоящей главы посвящены нахождению порядков косых проектирований. Под порядком косого проектирования мы понимаем порядок гиперповерхности, которой при данном типе проектирования проектируется произвольная плоскость P_{n-2}

Теорема 2. Прямые, принадлежащие n линейным комплексам (достаточно общего положения) прямых в P_n, образуют гиперповерхность порядка n—1.

Отсюда следует, что порядок косого проектирования при наиболее общем аппарате $P^1_{n-2}, \dots, P^{n-1}_{n-2}$ равен n—1. В третьем параграфе формулируется общая теорема о порядке косого проектирования.

Теорема 3. Порядок косого проектирования равен числу плоскостей, составляющих аппарат проектирования.

Из этой теоремы можно получить следующую теорему общего характера о гиперповерхностях, определяемых заданием некоторой системы плоскостей. Пусть в P_n задана система плоскостей $P_{d_1}, \dots, P_{d_m}, \dots, P_{d_l}$, обладающая следующими двумя свойствами:

1) прямые, пересекающие все плоскости данной системы образуют гиперповерхность Γ в P_n; для краткости будем говорить, что плоскости $P_{d_1}, \dots, P_{d_m}, \dots, P_{d_l}$ определяют гиперповерхность;

2) при любом $m = 1, \dots, l$ плоскости $P_{d_1}, \dots, P_{d_m+1}$,

$\dots, P_{d_l}$ не определяют гиперповерхности; здесь P_{d_m+1} — любая плоскость размерности $d_m + 1$, включающая плоскость P_{d_m}.

В условиях 1) и 2) имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Порядок гиперповерхности Γ равен $l-1$.

Заметим, что условие 2) существенно. Можно, например, указать в P_3 четыре (или больше) прямых, являющихся образующими одной серии некоторой линейчатой квадрики; прямые, пересекающие эти четыре данные прямые образуют данную квадрику. Условие 2) исключает из рассмотрения ситуации такого типа.

Четвертый параграф первой главы позволяет взглянуть на изложенные выше результаты с более широкой точки зрения. В этом параграфе мы говорим о косом проектировании κ — мерными плоскостями. Будем рассматривать в P_n систему плоскостей, обладающую следующим свойством: каждой (точнее почти каждой) точке пространства инцидентна единственная κ — мерная плоскость, пересекающая все плоскости данной системы по плоскостям размерности $\kappa-1$; такую систему плоскостей назовем для краткости p_κ — системой. Определим **аппарат проектирования κ-мерными плоскостями,** как систему плоскостей, являющуюся p_κ — системой и теряющую это свойство при увеличении размерности любой входящей в нее плоскости. Порядком косого проектирования в этом случае мы называем порядок гиперповерхности, проектирующей произвольную плоскость $P_{n-\kappa-1}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Порядок косого проектирования (независимо от размерности проектирующих плоскостей) равен числу плоскостей, составляющих аппарат проектирования.

Тот или иной тип косого проектирования может быть использован для установления нелинейных алгебраических соответствий между плоскостями P_m и P'_m при погружении этих плоскостей в пространство P_n более высокой размерности $n>m$. Изложенные выше результаты позволяют сформулировать следующую общую теорему.

Теорема 6. Максимально возможный порядок косого отображения плоскости P_m на P'_m в пространстве любой размерности равен m. Косое отображение порядка

12. Косая перспектива в пятимерном проективном пространстве Уч. зап. Ярославского пед-та, вып. 61. Геометрия. Ярославль, 1967.

13. Косое проектирование в n—мерном проективном пространстве. Уч. зап. Ярославского пед-та, вып. 67. Геометрия. Ярославль, 1968 (в печати).

14. Многообразия специального вида в нечетномерных проективных пространствах. Уч. зап. Ярославского пед-та, вып. 67. Геометрия. Ярославль, 1967 (в печати).

ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ СДЕЛАНЫ СЛЕДУЮЩИЕ СООБЩЕНИЯ:

1. Обобщение косого проектирования в многомерных проективных пространствах. VI науч. конф. математических кафедр институтов Поволжья, Астрахань, май 1965.

2. Косое проектирование в пятимерном пространстве. VII науч. конф. математических кафедр институтов Поволжья, Горький, 1966.

3. О порядках косых проектирований. Науч. семинар при кафедре геометрии Ярославского пед-та, 1968.

4. Обобщение косого проектирования в n—мерном проективном пространстве. IX науч. конф. математических кафедр институтов Поволжья, Ярославль, июнь 1968.