Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА: ПЛАНИМЕТРИЯ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2022

УДК 514.112(075.8)
ББК 22.151.01я73
Э45

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 4 от 05.05.2022.

Составители: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук, доцент **Л.Л. Ализарчик;** заведующий кафедрой математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Т.Б. Караулова;** старший преподаватель кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова **Т.А. Александрович**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры информационных технологий и управления бизнесом ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Е.А. Витько*

Э45 **Элементарная математика: планиметрия :** методические рекомендации / сост.: Л.Л. Ализарчик, Т.Б. Караулова, Т.А. Александрович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – 36 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами дисциплин: «Элементарная математика», «Элементарная математика и практикум по решению задач», «Методы решения математических задач», «Методы решения геометрических задач», «Элементарная математика: планиметрия», «Методика преподавания математики», «Дополнительные главы методики преподавания математики» специальностей I ступени высшего образования. Вначале приведены примеры решения задач, затем предложены задания для самостоятельного решения.

УДК 514.112(075.8)
ББК 22.151.01я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная цель данного издания – систематизировать и обобщить знания, полученные студентами при изучении курса геометрии, сформировать практические умения с помощью общих и частных методов решать планиметрические задачи различных типов и уровней сложности.

Для достижения этой цели предполагается:

- обеспечить изучение студентами различных методов решения планиметрических задач;
- сформировать у студентов умения решать одну задачу различными способами;
- выработать навыки классификации и систематизации задач по отдельным темам школьной математики;
- научить студентов дифференцировать задачи как по уровням трудности, так и в соответствии с профилями обучения математике;
- развивать творческие способности студентов путем систематического решения задач повышенной сложности и нестандартных задач;
- сформировать общие приемы поиска решения математических задач.

При решении предложенных в методических рекомендациях задач у студентов формируется умение использовать различные методы: опорных задач, площадей (использование площадей заданных фигур), вспомогательного элемента (например, вспомогательной окружности), доказательства «от противного», подобия, алгебраический (составление уравнения или системы уравнений), координатно-векторный, геометрический (на дополнительные построения), тригонометрический, поэтапно-вычислительный (разбиение на ряд подзадач), комбинированный.

Методические рекомендации построены по следующему принципу: вначале предложены подробные решения задач различных типов, затем представлены задания для самостоятельного решения.

Адресовано студентам Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, обучающимся по специальностям:

1-31 03 03-02 14 Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность). Методика преподавания математики и информатики.

1-02 05 01 Математика и информатика.

Данное издание может успешно использоваться для подготовки к занятиям по дисциплинам: «Элементарная математика», «Элементарная математика и практикум по решению задач», «Методы решения математических задач», «Методы решения геометрических задач», «Элементарная математика: планиметрия», «Методика преподавания математики», «Дополнительные главы методики преподавания математики».

1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Задача 1.1. В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найти: углы треугольника ABC; 2) медианы треугольника ABC; 3) биссектрисы треугольника ABC; 4) высоты треугольника ABC; 5) радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решение.

1. По заданным сторонам, используя теорему косинусов, находим углы: $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, откуда $\alpha = \arccos\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\beta = \arccos\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\gamma = \arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

2. Найдем медиану BM (рис. 1.1) треугольника ABC. По теореме косинусов для треугольника ABM имеем:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB\cdot AM\cos\alpha = c^2 + \frac{b^2}{4} - 2c\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$$= c^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}.$$

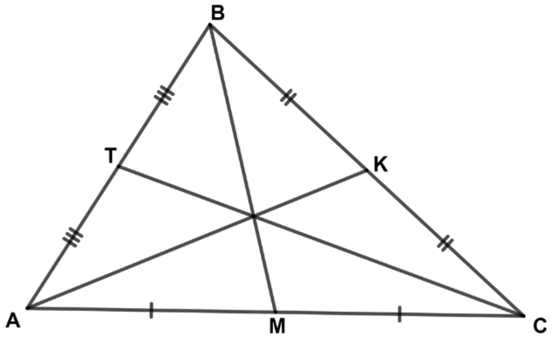

Рисунок 1.1

Отсюда

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}.$$

Аналогично находим две другие медианы AK и CT:

$$m_a = AK = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$

$$m_c = CT = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

3. Найдем биссектрису BB_1 (рис. 1.2) треугольника ABC. В треугольнике ABB_1 известны сторона $AB = c$ и углы $\angle A = \alpha$, $\angle ABB_1 = \frac{\beta}{2}$. Тогда по теореме синусов для этого угла $\frac{AB}{\sin \angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin \angle A}$,

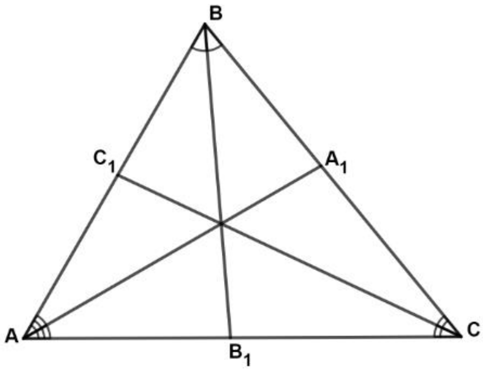

Рисунок 1.2

Откуда

$$l_b = BB_1 = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{\sin\left(180° - \alpha - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Аналогично находим остальные биссектрисы:

$$l_a = AA_1 = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)}; \ l_c = CC_1 = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

4. Найдем высоту BB_2 (рис. 1.3) треугольника ABC. В треугольнике ABB_2 известны гипотенуза $AB = c$ и острый угол α, тогда

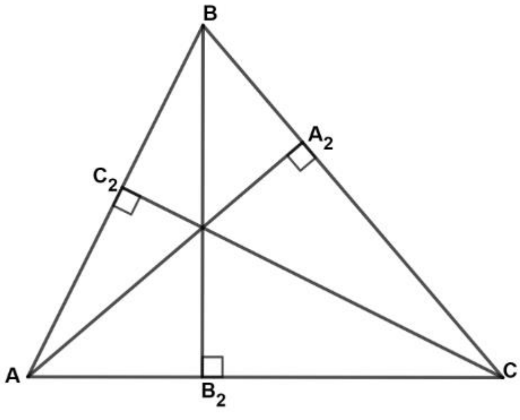

Рисунок 1.3

$$h_b = BB_2 = c \cdot \sin\alpha = c\sqrt{1-\cos^2\alpha} = c\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}\ .$$

Аналогично для других высот:

$$h_a = AA_2 = c \cdot \sin\beta = c\sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}\ ;$$

$$h_c = CC_2 = b \cdot \sin\alpha = b\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}\ .$$

5. Найдем радиусы вписанной и описанной окружностей. Радиус R описанной окружности можно определить, используя теорему синусов:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} \text{ или, например, } R = \frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}}\ .$$

Для нахождения радиуса вписанной окружности рассмотрим рис. 1.4.

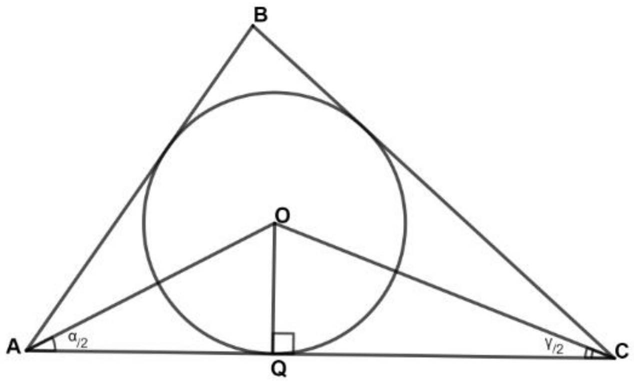

Рисунок 1.4

В треугольнике AOC $\angle AOC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle OCA = \frac{\gamma}{2}$ (поскольку центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис). Тогда

$$AQ = QO \cdot ctg\frac{\alpha}{2} = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2},\ CQ = OQ \cdot ctg\frac{\gamma}{2} = r \cdot ctg\frac{\gamma}{2}.$$

Отсюда $b = AC = AQ + QC = r\left(ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}\right)$, или $r = \dfrac{b}{ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}}$, где

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{(a-b+c)(a+b-c)}},$$

$$ctg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{(c+a-b)(c+b-a)}}.$$

Задача 1.2. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* и *CF*. Найти отношение площадей треугольников *ABC* и *AFD*, если *AB* = 21, *AC* = 28, *CB* = 20.

Решение. При решении задачи используется метод площадей: площади треугольников, имеющих одинаковые высоты, относятся как основания.

Треугольники *ABD* и *ADC* (рис. 1.5) – треугольники, имеющие одинаковые высоты. Следовательно,

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}}=\frac{DC}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$$

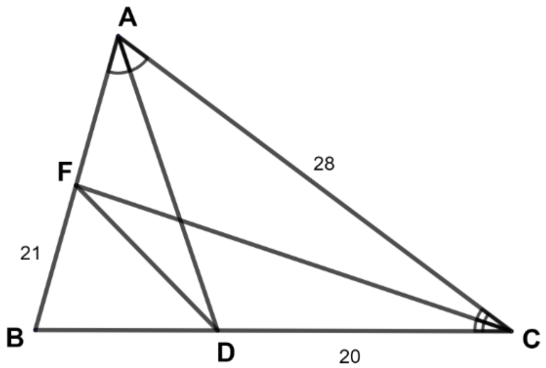

Рисунок 1.5

(использовали свойство биссектрисы *AD*: $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$). Значит, $S_{ABD}=\frac{3}{7}S_{ABC}$

ΔADF и ΔDFB – треугольники, имеющие одинаковую высоту, опущенную из вершины *D* на сторону *AB*.

Таким образом, $\frac{S_{ADF}}{S_{DFB}}=\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{CB}=\frac{28}{20}=\frac{7}{5}$.

Поэтому $S_{ADF}=\frac{7}{12}S_{ABD}=\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{7}S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{ABC}$. Откуда $\frac{S_{ABC}}{S_{ADF}}=\frac{4}{1}$.

Ответ: 4:1.

Задача 1.3. Доказать, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия, равным косинусу общего угла.

Доказательство. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC, а $\angle ABC = \beta$ (рис. 1.6).

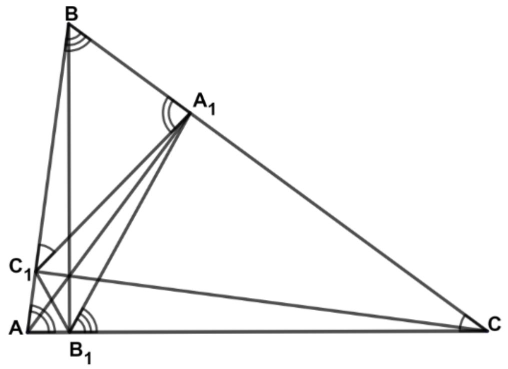

Рисунок 1.6

Прямоугольные треугольники BA_1A и CC_1B имеют общий угол β, поэтому они подобны, а значит,

$$\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \cos\beta .$$

Отсюда следует, что

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC} = \cos\beta ,$$

т. е. в треугольниках C_1BA_1 и ABC стороны, прилежащие к общему углу β, пропорциональны. А тогда по второму признаку подобия треугольников $\Delta C_1BA_1 \sim \Delta ABC$, причем коэффициент подобия равен $\cos\beta$. Аналогичным образом доказывается, что $\Delta A_1CB_1 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle BCA$, а $\Delta B_1AC_1 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle CAB$.

Замечание 1.3.1. Так как в подобных треугольниках против соответственных сторон лежат равные углы, то из доказательства свойства следует (рис. 1.6), что $\angle A_1C_1B = \angle BCA$, $\angle BA_1C_1 = \angle CAB$. Справедливо также и равенство $\angle CB_1A_1 = \angle ABC$.

Замечание 1.3.2. Так как каждый из треугольников C_1BA_1, A_1CB_1 и B_1AC_1 подобен треугольнику ABC, то все эти треугольники подобны между собой.

Задача 1.4. (Теорема Менелая). Пусть дан треугольник ABC и прямая l пересекает стороны BC, AB и продолжение стороны AC в точках A_1, C_1 и B_1 соответственно (рис. 1.7). Доказать, что

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1.$$

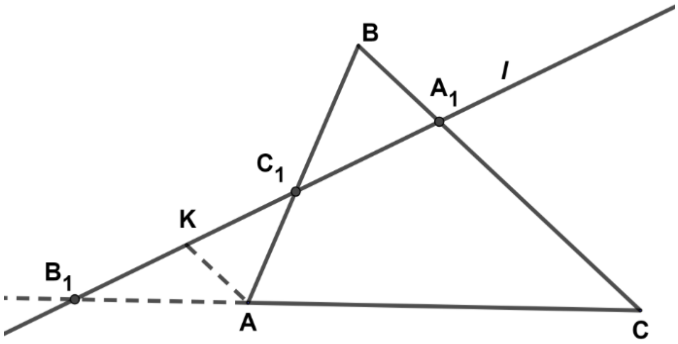

Рисунок 1.7

Доказательство. Проведем отрезок $AK \parallel BC$, $K \in l$.

Так как $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta KAC_1$ и $\Delta B_1KA \sim \Delta B_1A_1C$ (по двум углам), $\dfrac{BC_1}{AC_1} = \dfrac{A_1B}{KA}$ и $\dfrac{B_1A}{B_1C} = \dfrac{KA}{A_1C}$. Перемножив почленно указанные пропорции, получим $\dfrac{BC_1}{C_1A} \cdot \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{A_1B}{CA_1}$, откуда $\dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} \cdot \dfrac{AB_1}{B_1C} = 1$.

Замечание 1.4.1. При составлении произведения трех отношений теоремы Менелая можно начинать с любой из шести точек (трех вершин треугольника и трех точек пересечения прямой *l* с прямыми, содержащими стороны треугольника) и двигаться по контуру либо по часовой, либо против часовой стрелки. При этом вершины треугольника и точки пересечения должны чередоваться.

Задача 1.5. На сторонах AB и AD прямоугольника взяты соответственно точки *K* и *M*, такие, что $AK = KB$, $AM : MD = 2:1$. Отрезки DK и BM пересекаются в точке *E* (рис. 1.8). Найти площадь треугольника *KBE*, если площадь прямоугольника равна 240.

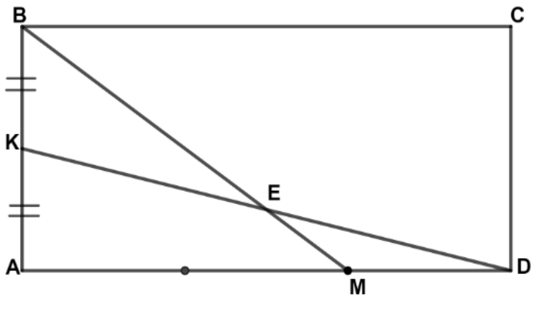

Рисунок 1.8

Решение. $S_{ABCD} = AD \cdot AB, S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AM \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}AD \cdot AB =$

$= \dfrac{1}{3}AD \cdot AB = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} = 80$.

Применим теорему Менелая к треугольнику ABM, где прямая KD пересекает стороны AB и BM и продолжение стороны AM. Получим: $\frac{ME}{EB}\cdot\frac{BK}{KA}\cdot\frac{AD}{DM}=1$, $\frac{ME}{EB}\cdot 1\cdot\frac{3}{1}=1$, $\frac{ME}{EB}=\frac{1}{3}$. Тогда $\frac{BE}{BM}=\frac{3}{4}$, $\frac{BK}{BA}=\frac{1}{2}$.

Применим свойство площадей треугольников, имеющих общий угол:
$S_{KBE}=\frac{BE}{BM}\cdot\frac{BK}{BA}\cdot S_{ABM}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 80=30$.

Ответ: 30.

Задача 1.6. Доказать, что во всякой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть AD и BC – основания трапеции, K – точка пересечения продолжений боковых сторон, L – точка пересечения диагоналей трапеции, M и N – точки пересечения прямой KL с основаниями BC и AD соответственно (рис. 1.9). Докажем, что M и N – середины отрезков BC и AD.

Действительно, так как треугольники BKM и AKN, а также треугольники MKC и NKD, подобны, то $\frac{BM}{AN}=\frac{KM}{KN}$, $\frac{MC}{ND}=\frac{KM}{KN}$ и, значит, $\frac{BM}{AN}=\frac{MC}{ND}$.

С другой стороны, так как подобными являются треугольники BML и DNL, а также треугольники CLM и ALN, то справедливы равенства $\frac{BM}{ND}=\frac{ML}{LN}$, $\frac{MC}{AN}=\frac{ML}{LN}$, поэтому $\frac{BM}{ND}=\frac{MC}{AN}$.

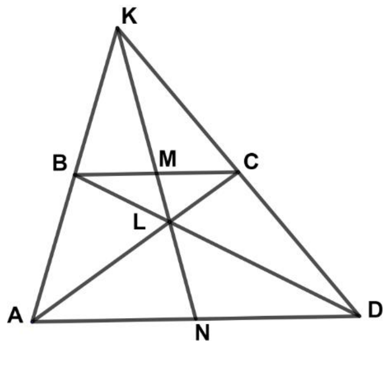

Рисунок 1.9

Но тогда, перемножая соответственно левые и правые части полученного равенства и равенства $\frac{BM}{AN}=\frac{MC}{ND}$, имеем $\frac{BM^2}{AN\cdot ND}=\frac{MC^2}{AN\cdot ND}$, откуда следует, что $BM=MC$ и, следовательно, что $AN=ND$. А это и завершает доказательство.

Задача 1.7. Доказать, что во всякой трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований трапеции.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данная трапеция и пусть для определенности $BC < AD$, а E и F – основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C соответственно на прямую AD (рис. 1.10 – 1.12).

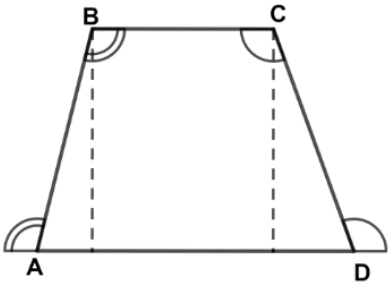

Рисунок 1.10

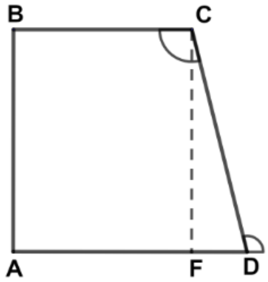

Рисунок 1.11

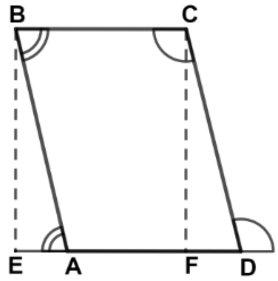

Рисунок 1.12

Из треугольников BCD и ABC по теореме косинусов имеем:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC.$$

Но в таком случае (учитывая, что $BC = EF$)

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC(EF - CD \cdot \cos\angle BCD - AB \cdot \cos\angle ABC).$$

Рассмотрим три возможности: оба угла при нижнем основании AD острые (рис. 1.10), один из углов (пусть $\angle BAD$) прямой (рис. 1.11), один из этих углов (пусть $\angle BCD$) тупой (рис. 1.12). Во всех трех случаях угол $\angle BCD$ тупой и $(-CD) \cdot \cos\angle BCD = CD \cdot \cos\angle ADC = FD$.

В первом случае

$$(-AB) \cdot \cos\angle ABC = AB \cdot \cos\angle BAD = AE,$$

во втором случае

$$AB \cdot \cos\angle ABC = 0,$$

в третьем случае

$$(-AB) \cdot \cos\angle ABC = -AB \cdot \cos\angle BAE = -AE.$$

Таким образом, очевидно, что в любом случае

$$EF - CD \cdot \cos\angle BCD - AB \cdot \cos\angle ABC = AD,$$

что и требовалось доказать.

Задача 1.8. В данный треугольник вписать квадрат таким образом, чтобы две его вершины лежали на основании треугольника, а две другие вершины – на боковых сторонах треугольника.

Решение. Анализ. Пусть $DEFG$ – искомый квадрат (рис. 1.13). Тогда очевидно, что преобразование подобия с центром в точке A переводит вершины D, E и G квадрата $DEFG$ в соответствующие вершины D_1, E_1, G_1 подобного ему квадрата $D_1E_1F_1G_1$, которые лежат на сторонах треугольника ABC.

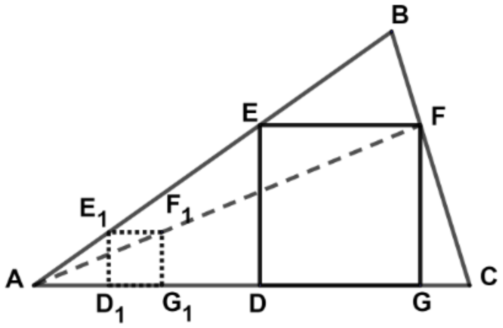

Рисунок 1.13

Что же касается точки F, то при выбранном преобразовании она переходит в точку F_1, не лежащую на стороне треугольника ABC.

Но именно это обстоятельство и позволяет составить план решения задачи. Так, внутри угла CAB сначала строим квадрат $D_1E_1F_1G_1$ такой, что три его вершины лежат на сторонах указанного угла.

Затем преобразованием подобия увеличиваем (уменьшаем) размеры квадрата таким образом, чтобы четвертая вершина оказалась лежащей на стороне треугольника (для этого достаточно провести прямую AF_1, точка F пересечения которой с прямой BC и будет искомой точкой).

Заметим, что коэффициент требуемого преобразования – это число $k = \dfrac{AF}{AF_1}$.

Построение. Из произвольной точки E_1 стороны AB треугольника ABC опустим перпендикуляр E_1D_1 на сторону AC и затем построим квадрат $D_1E_1F_1G_1$. Далее через точки A и F_1 проводим прямую, которая пересекает отрезок BC в точке F.

Из точки F опускаем перпендикуляр FG на отрезок AC, а затем из той же точки проводим прямую, параллельную прямой AC, которая пересекает отрезок AB в точке E.

Если теперь из точки E опустить перпендикуляр ED на отрезок AC, то четырехугольник $DEFG$ и будет искомым квадратом.

Доказательство. Из подобия треугольников AEF и AE_1F_1, а также подобия треугольников AFG и AF_1G_1 следует, что $\dfrac{EF}{E_1F_1} = \dfrac{AF}{AF_1}$, $\dfrac{FG}{F_1G_1} = \dfrac{AF}{AF_1}$ и, значит, $\dfrac{EF}{E_1F_1}=\dfrac{FG}{F_1G_1}$. Но в таком случае $\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{E_1F_1}{F_1G_1}=1$, откуда и следует, что четырехугольник *DEFG* – действительно квадрат.

Исследование. Очевидно, что задача имеет единственное решение.

Задача 1.9. Доказать, что если через некоторую точку окружности провести касательную и хорду, то каждый из двух углов, образованных этими касательной и хордой, равен половине дуги, заключенной между сторонами соответствующего угла.

Доказательство. Пусть *AB* – хорда окружности, *EC* – касательная к окружности с точкой касания *A*, *AD* – диаметр окружности (рис. 1.14).

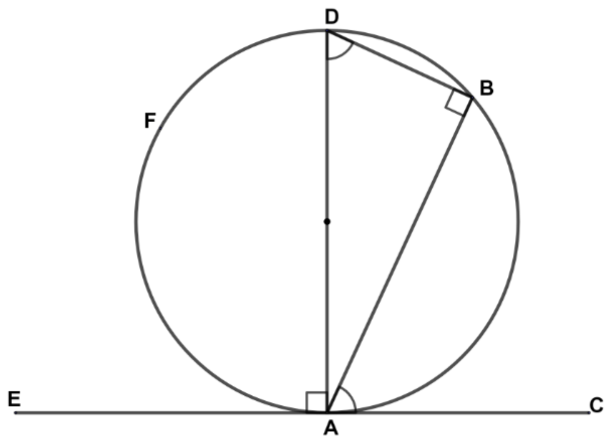

Рисунок 1.14

Тогда так как стороны углов *ADB* и *CAB* соответственно перпендикулярны, то эти углы равны. Но угол *ADB* является вписанным и, значит, он равен половине дуги *AB*, на которую он опирается. Но в таком случае угол *CAB* также равен половине дуги *AB*.

Что же касается угла *BAE*, то рассуждения здесь следующие. Так как $\angle BAE=\angle BAD+\angle DAE$, то с учетом того, что $\angle DAE=90°=\dfrac{1}{2}\cup AFD$, а $\angle BAD=\dfrac{1}{2}\cup DB$, имеем $\angle BAE=\dfrac{1}{2}(\cup AFD+\cup DB)=\dfrac{1}{2}\cup AFB$. А это и требовалось доказать.

Задача 1.10. Две окружности s_1 и s_2 пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *A* проведены хорды *AC* и *AD*, касающиеся данных окружностей. Доказать, что $AC^2\cdot DB=AD^2\cdot BC$.

Решение. Угол *BAC* как угол между касательной *AC* к окружности s_1 и ее хордой *AB* (рис. 1.15) равен половине дуги *AB* и, следовательно, он равен вписанному углу *ADB*, опирающемуся на ту же дугу.

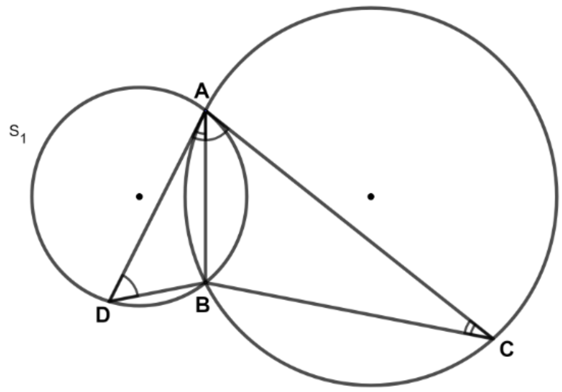

Рисунок 1.15

Аналогично $\angle DAB = \angle ACB$. Значит $\Delta ABD \sim \Delta CBA$ и, таким образом, $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{AC}$. Отсюда $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD^2}{AC^2}$ или $AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC$, что и требовалось доказать.

Задача 1.11. Две окружности s_1 и s_2 касаются в точке A. К ним проведена общая внешняя касательная, касающаяся окружностей в точках B и C. Доказать, что угол CAB равен $90°$.

Решение. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей s_1 и s_2 соответственно (рис. 1.16).

Тогда $\angle BCA = \dfrac{1}{2}\angle CO_2A$, $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle BO_1A$. Отсюда следует, что $\angle ABC + \angle BCA = \dfrac{1}{2}\left(\angle BO_1A + \angle CO_2A\right)$. Далее, поскольку $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$, то $O_1B \perp O_2C$. Но в таком случае $\angle BO_1A + \angle CO_2A = 180°$, поэтому $\angle ABC + \angle BCA = 90°$ и, таким образом, $\angle CAB = 90°$.

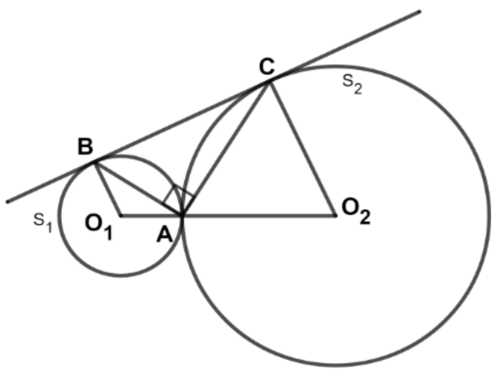

Рисунок 1.16

Задача 1.12. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол. Через две точки касания этих окружностей со сторонами угла, которые лежат на разных сторонах этого угла и на разных окружностях, проведена прямая. Доказать, что эта прямая отсекает на окружностях равные хорды.

Решение. Пусть A – вершина данного угла, B, C, D, E – точки касания окружностей со сторонами угла, а F и G – точки пересечения секущей BE с окружностями (рис. 1.17).

Тогда, воспользовавшись тем фактом, что произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной, имеем $BE \cdot BG = BC^2$, $BE \cdot FE = DE^2$.

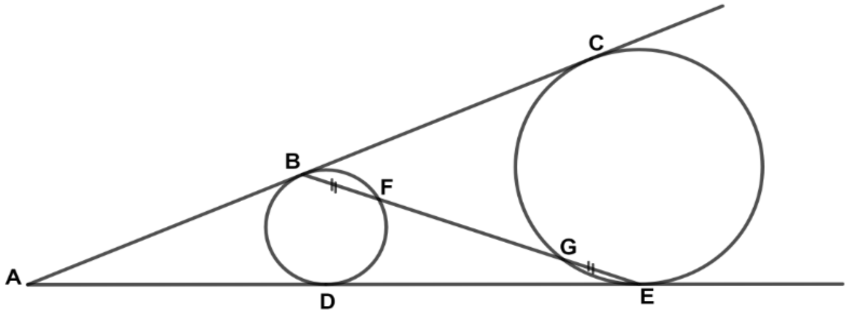

Рисунок 1.17

Но поскольку $AB = AE$, а $AC = AE$, то $BC = DE$ и поэтому $BE \cdot BG = BC^2 = BC \cdot DE$, $BE \cdot FE = DE^2 = DE \cdot BC$. Полученные же соотношения означают, что $BG = FE$ и, следовательно, $BF = GE$.

Задача 1.13. Сформулировать и доказать теорему косинусов для четырёхугольников.

Доказательство. Докажем теорему с использованием векторов. Для любых четырех точек $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$. Возведением в квадрат получаем:

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + 2\overline{AB} \cdot \overline{CD} + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Освобождаясь от скалярных произведений и переходя к принятым обозначениям, имеем:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2ac\cos\omega - 2bc\cos C, \qquad (1)$$

где ω – угол между прямыми AB и CD (рис. 1.18), B и C – углы четырехугольника $ABCD$ при вершинах B и C.

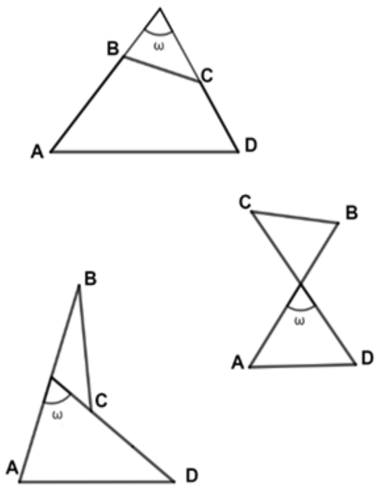

Рисунок 1.18

Таким образом, *квадрат стороны четырехугольника равен сумме квадратов трех других его сторон без удвоенных произведений этих сторон, взятых попарно, и косинусов углов между ними*.

Это соотношение, называемое теоремой косинусов для четырехугольника, имеет место как для выпуклых, так и для невыпуклых четырехугольников, а также для четырехугольников с *самопересечением* сторон (рис. 1.18). Угол ω во всех случаях равен $\pi-\left(A+D\right)$. Поэтому зависимость (1) можно записать в эквивалентном ей виде:

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos B-2bc\cos C+2ac\cos\left(A+D\right).$$

Задача 1.14. Построить треугольник по стороне c, высоте h_b и медиане m_a, проведённым к двум другим сторонам (рис. 1.19).

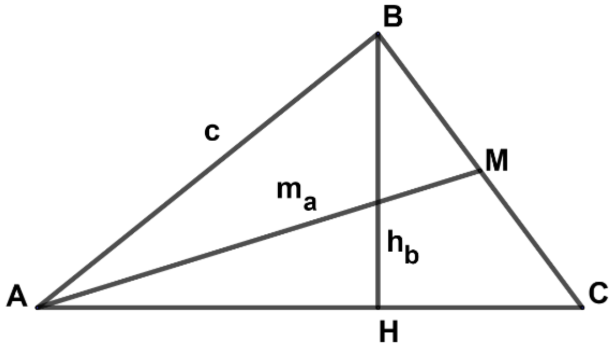

Рисунок 1.19

Анализ.

1.Чтобы построить треугольник, достаточно построить его вершины. Если построить треугольник ABH (по гипотенузе $AB = c$ и катету $BH = h_b$), то будут построены вершины A и B и *с точностью до прямой AH* известно расположение вершины C.

2. Чтобы построить точку C, достаточно найти расположение точки M – середины стороны BC $\left(C=AH\cap BM\right)$. $M=Окр.\left(A,m_a\right)\cap n$, где прямая n содержит среднюю линию треугольника ABH, проходит через точку N и параллельна AH.

Построение.

В результате построения получили два различных треугольника ABC_1 и ABC_2 (рис. 1.20).

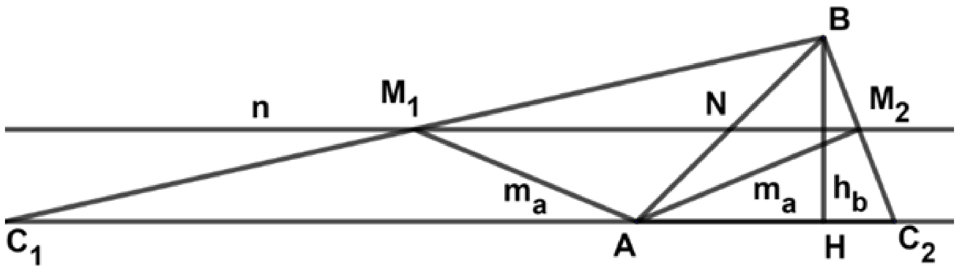

Рисунок 1.20

Доказательство.

1. $AB = c$ (по построению), следовательно, AB – заданная сторона.

2. $BH = h_b$ (по построению), $BH \perp AC_1$, следовательно, BH – заданная высота.

3 $BM_2 = MC_2$ (по теореме Фалеса), $AM_2 = m_a$, следовательно, AM_2 – заданная медиана.

Исследование.

Рассмотрим частные случаи:

1. $c = h_b$, получаем прямоугольный треугольник (рис. 1.21).

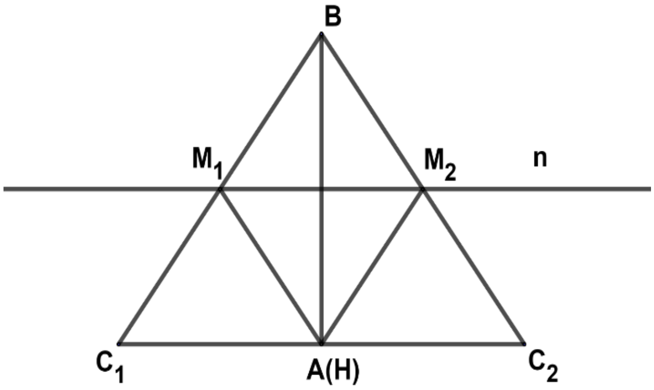

Рисунок 1.21

Так как получили два равных треугольника, то решение *одно*.

Очевидно, в этом случае, если $m_a \leq \frac{h_b}{2}$, то решения не будет, так как либо не будет точек пересечения $M = Окр.\left(A, m_a\right) \cap n$ или точка M совпадет с серединой отрезка AB (если $m_a \leq \frac{h_b}{2}$). Случай вырожденного треугольника в школьном курсе геометрии не рассматривается.

2. $c > h_b$ и $m_a = \frac{h_b}{2}$ (рис. 1.22).

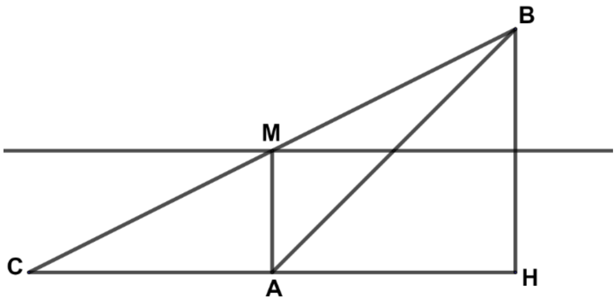

Рисунок 1.22

Так как получили одну точку пересечения M, то получим *одно* решение.

3. $c > h_b$ и $m_a = \frac{c}{2}$ (рис. 1.23).

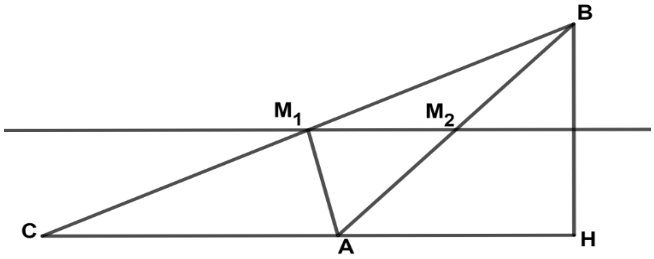

Рисунок 1.23

Так как точка M_2 совпадает с серединой отрезка AB, то решение *одно*.

4. $c > h_b$, $m_a < \frac{c}{2}$ и $m_a > \frac{h_b}{2}$ (рис. 1.24).

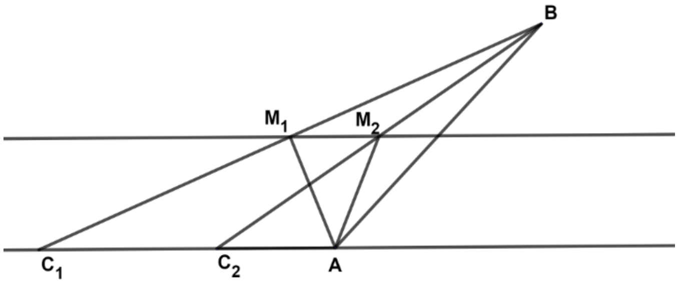

Рисунок 1.24

Так как в этом случае получили две точки пересечения и треугольники ABC_1 и ABC_2 различны, то решений – *два*.

Все рассмотренные случаи можно оформить в виде таблицы:

Нет решений	**Одно решение**	**Два решения**
1. $h_b > c$ ***или*** **2.** $m_a < \frac{h_b}{2}$ ***или*** **3.** $\begin{cases} c = h_b, \\ m_a \le \frac{h_b}{2}. \end{cases}$	**1.** $\begin{cases} c = h_b, \\ m_a > \frac{h_b}{2}. \end{cases}$ ***или*** **2.** $\begin{cases} c > h_b, \\ m_a = \frac{h_b}{2}. \end{cases}$ ***или*** **3.** $\begin{cases} c > h_b, \\ m_a = \frac{c}{2}. \end{cases}$	$\begin{cases} c > h_b, \\ m_a > \frac{h_b}{2}, \\ m_a \ne \frac{c}{2}. \end{cases}$

Задача 1.15. Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма будет наибольшей?

Решение. Пусть *ABC* – данный треугольник с основанием *AC* = *a* и высотой *BG* = *H* (рис. 1.25), четырехугольник *ADEF* – вписанный в треугольник параллелограмм с высотой *EK* = *h*.

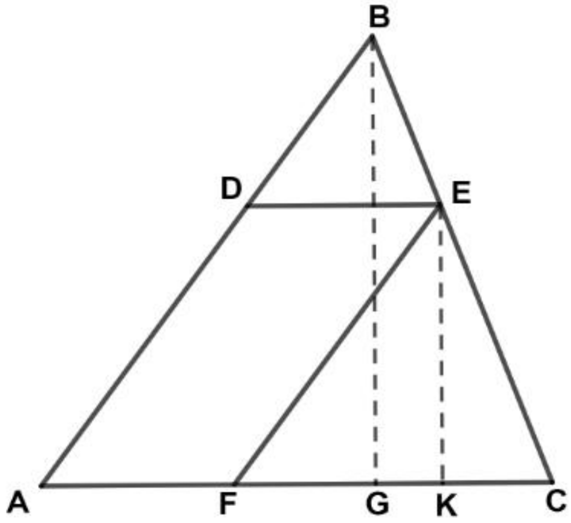

Рисунок 1.25

Так как треугольник *FEC* подобен треугольнику *ABC* с некоторым коэффициентом подобия x $(0 < x < 1)$, то $FC = x \cdot AC$, $h = x \cdot H$ и, значит, площадь параллелограмма $S_{ADEF} = AF \cdot h = (1-x) \cdot x \cdot a \cdot H$.

Отсюда следует, что поскольку *a* и *H* фиксированы, то площадь параллелограмма будет наибольшей, когда значение квадратного трехчлена $f(x) = (1-x) \cdot x = -x^2 + x$ на промежутке $0 < x < 1$ будет наибольшим. А это, очевидно, будет тогда, когда $x = \frac{1}{2}$, то есть когда $h = \frac{H}{2}$.

Ответ: при условии, что $h = \frac{H}{2}$, где *h* – высота параллелограмма, а *H* – высота треугольника, или, что, то же самое, при условии, когда одна из сторон параллелограмма совпадает со средней линией треугольника.

Задача 1.16. Доказать, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением прилежащих сторон и произведением отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону.

Решение. Пусть $AD = l_a$ – биссектриса треугольника *ABC*, $AC = b$, $AB = c$, $BD = c'$, $DC = b'$ (рис. 1.26).

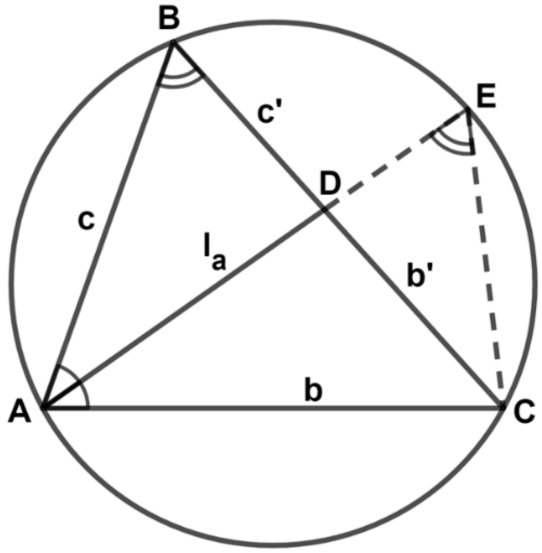

Рисунок 1.26

Опишем около треугольника *ABC* окружность и продолжим биссектрису *AD* до пересечения с окружностью в точке *E*. Вписанные углы *AEC* и *ABC* опираются на одну и ту же дугу *AC* и, таким образом, равны, равны по условию углы *CAE* и *EAB*, поэтому $\Delta CAE \sim \Delta DAB$ и, значит, $\dfrac{l_a}{b} = \dfrac{c}{l_a + DE}$ или $l_a{}^2 + l_a \cdot DE = bc$. Но поскольку по свойству хорд имеем $l_a \cdot DE = DC \cdot BD = b' \cdot c'$, то предыдущее равенство можно переписать в виде $l_a{}^2 = bc - b' \cdot c'$, что и требовалось доказать.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ

1. Доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке (центр треугольника, центр тяжести) и делятся в этой точке в отношении 2:1.

2. Доказать, что три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (Доказать, что около всякого треугольника можно описать окружность и только одну).

3. Доказать, что три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

4. Доказать, что в любой треугольник можно вписать окружность и только одну.

5. В прямоугольном треугольнике катеты равны a и b. Вычислить радиус вписанной окружности. *Ответ:* $\dfrac{a\cdot b}{a+b\sqrt{a^2+b^2}}$.

6. Доказать, что для любого треугольника выполняется равенство: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$, где a – длина стороны треугольника, α – величина противолежащего ей угла, R – радиус описанной окружности.

7. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

8. Доказать, что отрезки, соединяющие точку пересечения медиан треугольника с его вершинами, делят данный треугольник на три равновеликих треугольника.

9. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника (решить без тригонометрии). *Ответ:* 60°, 30°.

10. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся прямой AB в точке M. Пусть точка K диаметрально противоположна точке M на вписанной окружности. Доказать, что прямая CK пересекает прямую AB в такой точке N, что $AC + AN = BC + BN$.

11. Пусть AM и BK – высоты остроугольного треугольника ABC. Доказать, что равны углы CAB и CMK.

12. Найти периметр треугольника, если известны радиусы описанной и вписанной окружностей (R и r) и один из углов равен 60°. *Ответ:* $\sqrt{3}(R+r)$.

13. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD угла BAC и CF угла ACB. Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD, если $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$. *Ответ:*4:1.

14. Заданы два треугольника, в которых две стороны и угол не между ними одного равны соответственно двум сторонам и углу не между ними другого. Равны ли треугольники?

15. В треугольнике ABC величины углов B и C равны по 40°. Доказать, что, если отрезок BD – биссектриса угла B, то $BD + DA = BC$ (решить без тригонометрии).

16. Найти площадь треугольника, если угол между двумя его медианами, равными m и n, равен α. *Ответ:* $\frac{2}{3} m \cdot n \cdot \sin \alpha$.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол ACB равен 90°, заданы катет $BC = a$ и радиус вписанной окружности r. Найти катет AC. *Ответ:* $\frac{2r(a-r)}{a-2r}$.

2. В прямоугольном треугольнике заданы радиусы описанной и вписанной окружностей – R и r. Найти периметр и площадь этого треугольника. *Ответ:*$2r + 4R$; $r^2 + 2R \cdot r$

3. В треугольнике ABC известно, что угол A в два раза больше угла C, сторона BC на 2 больше стороны AB, $AC = 5$. Найти стороны AB и BC. *Ответ:*4; 6.

4. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найти площадь треугольника ABC. *Ответ:*60 кв.ед.

5. Точка K лежит на стороне CD квадрата $ABCD$. Биссектриса угла BAK пересекает сторону BC в точке L. Доказать, что $BL + KD = AK$ (без тригонометрии).

6. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислить площадь заданного пятиугольника. *Ответ:* $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через D, пересекает прямую AC в точке E. Найти EC, если $AD = 1$ (без тригонометрии). *Ответ:*2.

8. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки длиной 6 и 8. Найти радиус описанной окружности. *Ответ:*8,125.

9. Основание треугольника равно 20, медианы боковых сторон равны 18 и 24. Найти площадь треугольника. *Ответ:*288.

10. В параллелограмме с периметром 84 высоты относятся как 3:4. Найти меньшую сторону. *Ответ:*18.

11. В трапеции длины оснований 9 и 12, длины диагоналей 10 и 17. Найти площадь трапеции. *Ответ:*84.

12. Найти длину основания равнобедренного треугольника, в котором длина боковой стороны равна $4\sqrt{2}$, а медианы боковой стороны равны 5. *Ответ:* $\sqrt{34}$.

13. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Проверить истинность равенства: $CD2 = BC \cdot AC - BD \cdot AD$.

4. СУЩНОСТЬ МЕТОДА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОТ ПРОТИВНОГО И ЕГО ОСОБЕННОСТИ

Доказать утверждения, используя метод от противного.

1. Если заданная прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и вторую.

2. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

3. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точке касания.

4. Точка пересечения двух касающихся окружностей принадлежит линии центров этих окружностей.

5. Через данную точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную заданной.

6. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность (признак вписанного четырёхугольника).

7. В пространстве две прямые, параллельные заданной прямой, параллельны между собой.

8. В пространстве две прямые, параллельные заданной прямой, параллельны между собой.

9. Если сумма внутренних односторонних углов при двух данных прямых и секущей меньше 180°, то эти прямые пересекаются.

10. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

11. Если для точек A, B и C верно равенство $AB = AC + BC$, то эти три точки лежат на одной прямой. При этом точка C лежит между точками A и B.

5. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Доказать, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов треугольника, вершинами которого являются основания высот заданного треугольника.

2. Доказать, что если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

3. Доказать, что если в треугольнике ABC стороны AB и BC не равны, то его биссектриса BD лежит между медианой BM и высотой BH.

4. Доказать, что если точка O – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, то $\angle ABC + \angle AOC = 180°$, $\angle BCA + \angle BOA = 180°$, $\angle CAB + \angle COB = 180°$.

5. BD – медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). K – точка касания стороны AD треугольника ABD с окружностью, вписанной в него. Найти углы треугольника ABC, если точка K делит AD пополам. *Ответ:* $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$.

6. Доказать, что медианы треугольника разбивают его на 6 равновеликих треугольников.

7. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведенных из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.

8. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

9. Периметры треугольников ABM, BCM и ACM, где M – точка пересечения медиан треугольника ABC, равны. Доказать, что треугольник ABC правильный.

10. Докажите, что $h_a + h_b + h_c \geq 9r$, где h_a, h_b, h_c – высоты треугольника ABC, проведенные соответственно к сторонам a, b, c, r – радиус вписанной окружности.

11. Пусть O – центр вписанной окружности в треугольник ABC, $\angle CAB = \alpha$. Найти $\angle COB$. *Ответ:* $\frac{\alpha}{2} + 90°$.

12. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

13. Высота BH и медиана BD треугольника ABC образуют равные углы со сторонами AB и BC соответственно. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если медиана равна m. *Ответ:* m.

14. Пусть BD биссектриса треугольника ABC. Доказать, что $AB > AD$ и $CB > CD$.

6. РАВЕНСТВО, ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно некоторой прямой. Доказать равенство треугольников:

1) AA_1B и A_1AB_1 2) ABB_1 и A_1B_1B

2. Доказать признак равенства треугольников по медиане и двум углам, на которые разбивает эта медиана угол треугольника.

3. В трапеции *ABCD* основания $AD = 15$ и $BC = 5$, $\angle CDA = 60°$. Через вершину *B* и середину *CD* – точку *O* – проведена прямая до пересечения с продолжением *AD* в точке *E*. $\angle ABE = 90°$, $\angle CBE = 30°$. Найти периметр трапеции. *Ответ:* 40.

4. Найти площадь треугольника по двум сторонам 6 и 8 и медиане, равной 5, проведенной к третьей стороне. *Ответ:*24 кв.ед.

5. Найти площадь треугольника, сторонами которого служат медианы заданного треугольника с площадью *S*. *Ответ:* $\frac{3}{4}S$.

6. В квадрате *ABCD* заданы точки *M*, *N*, *P*, *K* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *AD*. Какую часть площади квадрата составляет площадь четырёхугольника, образованного пересечением прямых *AP*, *CM*, *BK*, *DN*? *Ответ:* $\frac{1}{5}$.

7. Верно ли утверждение: «Если две стороны и угол, лежащий против большей из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, другого треугольника, то такие треугольники равны»?

8. Длины двух сторон треугольника равны *a*, длина третьей стороны равна *b*. Найти радиус его описанной окружности. *Ответ.* $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

9. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной b, проведены биссектрисы углов при основании. Отрезок между точками пересечения биссектрис с боковыми сторонами равен m. Найти основание треугольника. *Ответ:* $\frac{m \cdot n}{b - m}$.

10. Из вершин *A* и *C* остроугольного треугольника *ABC* проведены высоты *AM* и *CN*. Вычислить сторону *AC*, если периметр треугольника *ABC* равен 15, периметр треугольника *BMN* равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника *BMN*, равен 1,8. *Ответ:*4,8.

11. В параллелограмме *ABCD* точка *K* – середина стороны *BC*. Отрезок *AK* пересекает диагональ *BD* в точке *O*. Найти площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь треугольника *BOK* равна 2. *Ответ:*24 кв.ед.

12. Катет *BC* прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *BCA* разделён точками *D* и *E* на три равных отрезка. Найти сумму углов *AEC*, *ADC* и *ABC*, если $BC = 3AC$. *Ответ:* 90°.

13. Через вершины *B* и *C* треугольника *ABC* проходит окружность, пересекающая стороны *AB* и *AC* в точках *K* и *M* соответственно. Найти *MK* и *AM*, если $AB = 2$, $BC = 4$, $AC = 5$, $AK = 1$. *Ответ:* $\frac{4}{5}, \frac{2}{5}$.

14. В трапеции *ABCD* заданы основания $BC = 20$, $AD = 30$ и боковые стороны $AB = 6$, $CD = 8$. Найти радиус окружности, проходящей через точки *A* и *B* и касающейся стороны *CD*. *Ответ:*15.

15. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре внешним образом построена полуокружность, на которой взяты точки K и L, делящие полуокружность на три равные дуги. Доказать, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

7. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и K, такие, что $AM : MB = 3:1$, $AK : KC = 2:3$. Отрезки BK и CM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника OCK, если площадь треугольника ABC равна 70. *Ответ:* 27 кв.ед.

2. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ взяты соответственно точки M и K, такие, что $AK = KB$, $AM : MD = 2:1$. Отрезки DK и BM пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника KBE, если площадь прямоугольника равна 240. *Ответ:* 30 кв.ед.

3. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

4. Докажите, если в треугольник вписана окружность, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

5. Точки B' и C' лежат на сторонах соответственно AC и AB ΔABC, причем $AB' : B'C = AC' : C'B$. Прямые BB' и CC' пересекаются в точке O.

а) Доказать, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найти отношение площади четырехугольника $AB'OC'$ к площади ΔABC, если $AB' : B'C = AC' : C' = 1:2$. *Ответ:*1:6.

6. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки K и M, такие, что $AK : KB = 2:3$, $BM : MC = 1:2$. Отрезки AM и CK пересекаются в точке O, прямая BO пересекает сторону AC в точке N. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника CNO равна 22 кв.ед. *Ответ:* 88 кв.ед.

7. Точка L лежит на стороне AB ромба $ABCD$ так, что $AL = 18$ и $BL = 19$. Через точку L проведена прямая, перпендикулярная отрезку AB, которая делит диагональ AC в отношении 1:3, считая от вершины A. Найти площадь ромба $ABCD$. *Ответ:* 444 кв.ед.

8. Прямая, проходящая через вершину K треугольника KMN, делит его медиану MA в отношении 8:3, считая от вершины M, и пересекает сторону MN в точке B. Найти площадь треугольника KMN, если площадь треугольника KMB равна 16. *Ответ:* 28 кв.ед.

9. Точки M и N лежат на сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ так, что $AN : NB = AM : MD = 1:2$. Площадь треугольника CMN равна 45. Найти площадь параллелограмма $ABCD$. *Ответ:* 162 кв.ед.

10. В прямоугольнике $ABCD$ точка N – середина стороны AD. Отрезок BN пересекает диагональ AC в точке O. Найти площадь четырёхугольника $ONDC$, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна 468. *Ответ:* 195 кв.ед.

11. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ точка пересечения её диагоналей делит диагональ AC на отрезки длиной 5 и 2. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если площадь треугольника ABC равна 14. *Ответ:* 49 кв.ед.

12. Заданы стороны треугольника. $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 8$. В треугольнике проведены высоты AN и CM. Найти MN. *Ответ:* $\frac{8}{7}$.

13. В параллелограмме с острым углом 45° точка пересечения диагоналей удалена от прямых, содержащих неравные стороны, на расстояния $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 5. Найти площадь параллелограмма. *Ответ:* 20 кв.ед.

14. Две медианы треугольника равны 3 и 6, а одна из его сторон 8. Найти две другие стороны треугольника. *Ответ:* $2\sqrt{7}; \sqrt{22}.$

8. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ОКРУЖНОСТИ

1. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 6$. Точка M – середина стороны AC. Найти длину хорды окружности, описанной около треугольника ABC, проходящей через точки B и M. *Ответ:* $\frac{37\sqrt{7}}{14}$.

2. И одной точки C проведены две касательные к окружности. A и B – точки касания, $AC = 12$, $AB = 14{,}4$. Определить радиус окружности. *Ответ:* 9.

3. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены касательная AB и секущая AD. Расстояние от точки A до точки касания B равно 16, а от точки A до дальней точки пересечения секущей с окружностью равно 32. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5. *Ответ:* 13.

4. Окружность проходит через вершины A и C прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$, $AC = 4\sqrt{3}$, $BC = 12$) и пересекает гипотенузу AB в точке K так, что $AK : KB = 3:1$. Найти радиус окружности. *Ответ:* $2\sqrt{7}$.

5. Дана окружность $R = \frac{3}{\pi}$. Из точки M, лежащей на окружности, проведены касательная и секущая к окружности. Угол между касательной и секущей равен 60°. Найти длину меньшей дуги, отсекаемой секущей. *Ответ:* 2.

6. Окружность с центром в точке B проходит через вершину A треугольника ABC и пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найти $\angle AMN$, если $\angle BAC = 40°$. *Ответ:* 50°.

7. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Доказать, что отрезки A_1C_1 и B_1D_1 взаимно перпендикулярны.

8. Треугольник ABC вписан в окружность. Прямая LK – касательная к окружности в очке A. Хорда MN, параллельная LK, пересекает стороны AB и AC в точках P и T соответственно. Найти угол $\angle PTC$, если $\angle B$=40°. *Ответ:*140°.

9. На радиусе заданной окружности как на диаметре построили окружность. Из их общей точки проведена хорда большей окружности. В каком отношении она делится меньшей окружностью? *Ответ:* 1:1.

10. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = b$ и углом при основании α. Вторая окружность касается первой и основания треугольника в его середине D и расположена вне треугольника. Найти радиус второй окружности. *Ответ:* $\frac{b}{4} \cdot ctg\alpha$.

11. Две окружности касаются внешним образом в точке K. AB – внешняя касательная, KM – внутренняя, где M – точка пересечения этих касательных. Найти KM и AB, если радиусы окружностей равны R и r. *Ответ:* $\sqrt{R \cdot r}$; $2\sqrt{R \cdot r}$.

12. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка C лежит на прямой AB, но не отрезке AB. Доказать, что длины всех отрезков касательных от точки C до окружностей равны.

13. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой m, которая пересекает окружности в точках C, D, E и M. Найти сумму углов DBE и CAM. *Ответ:* 180°.

14. Доказать, что для любой хорды AB окружности радиуса R отношение $AB^2 : AD$, где AD – расстояние от точки A до касательной к окружности в точке B, есть величина постоянная.

15. К двум окружностям проведены внешняя касательная AB и две внутренние касательные, пересекающие отрезок AB в точках C и D. Доказать, что $AC = DB$.

16. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) внешне касаются в точке A. Через точку B на большей окружности проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти BC, если $AB = a$. *Ответ:* $a\sqrt{\frac{r+R}{R}}$.

9. МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O на стороне AD. Найти площадь параллелограмма, если $BC = 4$, $\angle A = 60°$. *Ответ:* $4\sqrt{3}$ кв.ед.

2. Площадь четырёхугольника, вершинами которого служат середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равна S. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$. *Ответ:* $2S$ кв.ед.

3. Полосу с размерами 2×10 разрезать так, чтобы из полученных частей можно было составить квадрат.

4. В параллелограмме площадью $4\sqrt{2}$ см^2 отношение сторон равно отношению диагоналей. Меньшая из диагоналей перпендикулярна одной из сторон параллелограмма. Найти его стороны. *Ответ:* $2,\ 2\sqrt{3}$.

5. В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырёх углов. Найти площадь четырёхугольника, ограниченного биссектрисами. *Ответ:* $\frac{1}{2}(a-b)^2$ кв.ед.

6. Найти площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины – на катетах треугольника). *Ответ:* $\dfrac{a^2 \cdot b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2+ab)^2}$ кв.ед.

7. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно таким образом, что отрезки MC и NC делят ромб на три равновеликие фигуры. Найти MN, если $BD = d$. *Ответ:* $\frac{d}{3}$.

8. Доказать, что если для трапеции существуют вписанная и описанная окружности, то высота трапеции есть среднее геометрическое между ее основаниями.

9. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в нее можно вписать окружность и вокруг нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной вокруг трапеции окружности (расположен ли он внутри или вне, или же на одной из сторон трапеции). Найти также отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности. *Ответ:* $\frac{3\sqrt{14}}{5}$.

10. В трапеции $ABCD$ $\angle BAD = 90°$, $OC = 6$, $OD = 8$, где O – центр вписанной окружности. Найти площадь трапеции. *Ответ:* 94,08 кв.ед.

11. Площадь равнобокой трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 100 см^2. Найти высоту трапеции. *Ответ:* 10.

12. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4 см, одна из её диагоналей равна 5 см. Найти площадь трапеции. *Ответ:* $16\frac{2}{3}$ кв.ед.

13. Около окружности описана прямоугольная трапеция. Через вершину ее острого угла провести прямую так, чтобы она делила трапецию на две равновеликие части.

14. Биссектрисы углов трапеции делят каждое из ее оснований на три равные части. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1. *Ответ:* $\frac{9\sqrt{7}}{7}$ кв.ед.

15. Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике? *Ответ:* 3.

16. Найти сторону и площадь правильного многоугольника через радиус R описанной окружности. Найти a_3, a_4, a_6. *Ответ:* $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{3}$, R, $\frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\frac{360°}{n}$.

17. Найти сторону и площадь правильного многоугольника через радиус r вписанной окружности. Найти a_3, a_4, a_6. *Ответ:* $2r\sqrt{3}$, $2r$, $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, $r^2 \cdot n \cdot tg\frac{180°}{n}$.

18. Продолжите предложения:

a. В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он ….

b. Около параллелограмма можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он ….

c. Около ромба можно описать окружность тогда и только тогда, когда он ….

d. В прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он ….

19. Около окружности описан шестиугольник, пять последовательных сторон которого равны a, b, c, d, f. Чему равна шестая сторона?
Ответ: $a+c+f-b-d$.

20. В прямоугольной трапеции большее основание равно $3a$, наклонная боковая сторона равна $2a$. Можно ли в эту трапецию вписать окружность?

21. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с радиусом 3. Сторона AD является диаметром окружности, сторона $CD = 4$. Найти AB и BC, если они равны. *Ответ:* $\sqrt{6}$.

22. Доказать, что во вписанном четырёхугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей (теорема Птолемея).

23. Около окружности описан четырёхугольник $ABCD$, в котором
$\angle A = 90°$, $\angle C = 60°$, $AB = 2$, $AD = 3$. Найти периметр четырёхугольника. *Ответ:* 3.

24. Около окружности описана равнобедренная трапеция с острым углом 60°. Найти отношение длин оснований. *Ответ:* 3:1.

10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

1. Построить треугольник по стороне b, высоте h_b и медиане m_b, проведённым к этой стороне.

2. Построить треугольник по высотам h_a, h_b к двум сторонам и медиане $\boldsymbol{m_c}$, проведённой к третьей стороне.

3. Построить треугольник по высотам h_a, h_b к двум сторонам и медиане $\boldsymbol{m_a}$, проведённой к одной из этих сторон.

4. Построить треугольник по стороне a, медиане m_a, проведенной к этой стороне, и радиусу R окружности, описанной около него.

5. Построить ромб по стороне a и радиусу r вписанной в него окружности.

6. Через точку M, находящуюся внутри заданного угла ABC построить отрезок с концами на сторонах угла так, чтобы точка M была его серединой.

7. С помощью линейки с единичными делениями провести биссектрису заданного угла.

8. Построить

а) $x = \sqrt[4]{abcd};$

б) $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ (считать единичный отрезок заданным);

в) $x = \dfrac{abc}{de}.$

9. Построить треугольник по двум сторонам, если известно, что угол, лежащий против одной из этих сторон, в 3 раза больше угла, лежащего против другой стороны.

10. Построить общую касательную к двум заданным непересекающимся окружностям.

11. Построить трапецию по основаниям и боковым сторонам.

12. Построить отрезок AB, концы которого были бы симметричны относительно прямой s и лежали бы на заданных прямой a и окружности ω.

13. Заданы три попарно пересекающиеся прямые a, b, c. Построить отрезок, перпендикулярный прямой b, с серединой на b и концами на a и c.

14. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

15. Построить треугольник ABC, если заданы углы A и C и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH.

16. Построить треугольник по трём заданным высотам.

17. Прямые m и n параллельны. С помощью одной линейки разделить пополам отрезок AB, принадлежащий прямой m.

18. С помощью одной линейки через заданную точку C провести прямую, параллельную прямой m, если на ней задан отрезок AB и его середина точка K.

19. С помощью одной линейки построить одну треть стороны BC треугольника ABC, если построена средняя линия, параллельная BC.

20. Дан параллелограмм. C помощью одной линейки через точку пересечения диагоналей провести прямую, параллельную одной из его сторон.

21. С помощью двусторонней линейки построить биссектрису заданного угла AOB.

22. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($AC = AB$) с углом $\angle BAC = \alpha$, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых (с помощью циркуля и линейки).

23. Постройте равносторонний треугольник ABC с вершинами на трех данных параллельных прямых (с помощью циркуля и линейки).

11. НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. ЗАДАЧИ НА ГМТ. ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

1. Найти геометрическое место вершин треугольников с общим основанием AB и общей площадью, равной S.

2. Даны две точки A и B и угол α, величина которого меньше 90°. Построить геометрическое место всех вершин углов, равных α, обе стороны которых проходят через точки A и B.

3. Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через заданную точку.

4. Даны две точки A и B. Две окружности касаются прямой AB в точках A и B и касаются друг друга в точке M. Найти геометрическое место таких точек M.

5. На плоскости даны две пересекающиеся прямые l и m. Найти геометрическое место таких точек M плоскости, для которых расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точки M на прямые l и m, равно заданной величине a.

6. Найти геометрическое место центров прямоугольников (точка пересечения диагоналей), вписанных в прямоугольный треугольник и имеющих с ним общий угол.

7. На плоскости отмечены две точки A и B. Найти геометрическое место точек C плоскости таких, что медиана к стороне BC треугольника ABC перпендикулярна стороне AC.

8. Найти геометрическое место середин всевозможных отрезков, концы которых расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC.

9. Найти геометрическое место середин всевозможных отрезков, концы которых расположены на сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$.

10. На стороне AC треугольника ABC взята точка K, а на медиане BD – точка P так, что площадь треугольника APK равна площади треугольника BPC. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AP и BK.

11. Периметр треугольника равен 20. В треугольник вписана окружность. Найти наибольшее значение отрезка касательной, отсекаемой боковыми сторонами, которая проведена параллельно основанию треугольника. *Ответ:* 2,5.

12. В треугольнике известно основание $a = 6$ и высота $h = 4$, проведенная к этому основанию. Найти наибольшую площадь прямоугольника, который можно вписать в этот треугольник так, что две его вершины принадлежат основанию, а две другие боковым сторонам. *Ответ:* 6 кв.ед.

13. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади. *Ответ:* длины сторон параллелограмма $R\sqrt{2}, \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

14. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $AC = 3$, $BC = 4$. На гипотенузе взята точка M, из которой опущены перпендикуляры на катеты – отрезки MN и MK ($N \in AC$, $K \in BC$). При какой длине отрезка AM отрезок NK будет наименьшим? *Ответ:* 1,8.

15. Сторона треугольника равна 8, а угол при противолежащей вершине равен 60°. Найти величину наибольшей биссектрисы, проведенной к этой стороне. *Ответ:* $4\sqrt{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азаров, А.И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8-11 классы / А.И. Азаров, В.В. Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Мн.: Аверсэв, 2005. – 336 с.
2. Амелькин, В.В. Геометрия на плоскости: Теория, задачи, решения: учеб. пособие по математике / В.В. Амелькин, В.Л. Рабцевич, В.Л. Тимохович. – Мн.: ООО «Асар», 2003. – 592 с.
3. Гордин, Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы / Р.К. Гордин. – М.: МЦМНО, 2004. – 416 с.
4. Казаков, В.В. Геометрия: учеб. пособие для 9-го класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В.В. Казаков. – Мн.: Народная асвета, 2019. – 191 с.
5. Понарин, Я.П. Элементарная геометрия: в 2 т / Я.П. Понарин. – М.: МЦМНО, 2004. – Т.1: Планиметрия, преобразования плоскости. – 312 с.
6. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. – М.: МЦМНО, 2001. – 584 с.
7. Рогановский, Н.М. Элементарная математика: учеб. пособие / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Мн.: Адукацыя і выхаванне, 2003. – Ч. III. Геометрия на плоскости. – 336 с.
8. Шарыгин, И.Ф. Сборник задач по математике с решениями / И.Ф. Шарыгин. – М: ООО «Издательство Астрель», 2001. – 400 с.
9. Централизованное тестирование. Математика: полный сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний Министерства образования Респ. Беларусь. – Мн.: Аверсэв, 2021. – 229 с.

Учебное издание

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА: ПЛАНИМЕТРИЯ

Методические рекомендации

Составители:

АЛИЗАРЧИК Лилия Львовна

КАРАУЛОВА Татьяна Борисовна

АЛЕКСАНДРОВИЧ Татьяна Алиевна

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.В. Рудницкая*

Подписано в печать 10.10.2022. Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,10. Уч.-изд. л. 1,14. Тираж 35 экз. Заказ 182.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.