

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

ЭКОНОМЕТРИКА

Курс лекций

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2022*

УДК 330.43:519.863(075.8)

ББК 65в631я73

Э40

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 05.10.2022.

Составитель: старший преподаватель кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова **Т.А. Александрович**

Р е ц е н з е н т :

доцент кафедры информационных технологий и управления бизнесом
ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Е.А. Витько*

Эконометрика : курс лекций / сост. Т.А. Александрович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – 32 с.

Данное издание подготовлено для студентов, изучающих дисциплину «Эконометрика» специальности I ступени высшего образования. Кратко излагается теоретический материал, разобраны примеры решения ключевых задач.

УДК 330.43:519.863(075.8)

ББК 65в631я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. Корреляционно-регрессионный анализ	5
2. Эконометрический анализ на основе временных рядов	18
3. Системы одновременных уравнений	20
4. Линейные оптимизационные экономико-математические модели ..	27
ЛИТЕРАТУРА	31

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эконометрика – наука, изучающая количественные закономерности и взаимозависимости в экономике методами математической статистики. Можно считать, что эконометрика – «экономика» + «метрика». Это наука об измерении и анализе экономических явлений, о количественных выражениях тех связей и соотношений, которые раскрыты и обоснованы экономической теорией. Это сплав четырех компонент: экономической теории, статистических и математических методов, компьютерных вычислений.

Основная задача курса «Эконометрика» – обучение будущих менеджеров-экономистов информационным системам методам исследования экономических процессов, основанных на использовании реальных статистических данных и на положениях экономической теории. При изучении взаимосвязей между экономическими показателями применяются положения экономической теории, затем на основе выборочных (статистических) данных строятся модели, проводится оценка их составляющих. Итоговые результаты используются для прогнозирования, принятия решений и уточнения первоначальных положений. Основной особенностью эконометрических моделей является наличие в них случайных составляющих, обусловленное неучтенными факторами, ошибками измерений и др. При этом особую важность приобретает использование основ теории вероятностей и статистики.

В учебном издании излагается краткий курс лекций по эконометрике, в котором рассмотрены темы: «Корреляционно-регрессионный анализ», «Эконометрический анализ на основе временных рядов», «Системы одновременных уравнений», «Линейные оптимизационные экономико-математические модели».

Адресовано студентам Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, обучающимся по специальности 1-26 03 01 Управление информационными ресурсами.

Данное учебное издание может использоваться для подготовки к занятиям по дисциплине: «Эконометрика».

1. КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Модель парной линейной регрессии

Между двумя случайными величинами (СВ) X и Y существует два вида зависимости: функциональная и стохастическая (статистическая). Функциональная зависимость встречается, в основном, в области точных наук и здесь не рассматривается. В случае стохастической зависимости каждому значению одной СВ, например, значению x СВ X соответствует СВ Y_x , называемая условным распределением СВ Y при условии $X=x$. СВ X будем считать независимой (*объясняющей*) переменной или *фактором*, а СВ Y – зависимой (*объясняемой*) переменной или *признаком* (*откликом*).

В модели парной линейной регрессии зависимость между СВ X и Y в генеральной совокупности (ГС) представляется в виде

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon, \quad (1.1)$$

где X – неслучайная величина (*объясняющая переменная*), Y и ε – случайные величины Y – зависимая (*объясняемая*) переменная. Наличие в уравнении случайной составляющей (случайного члена) ε связано с воздействием на зависимую переменную неучтенных в уравнении факторов. Постоянные (β_0, β_1) – параметры уравнения. По выборочным данным оценивается выборочное уравнение регрессии

$$\overline{y}_x = b_0 + b_1 x. \quad (1.2)$$

Здесь (b_0, b_1) – оценки параметров (β_0, β_1). Метод нахождения оценок – метод наименьших квадратов (МНК).

Для того чтобы регрессионный анализ, основанный на МНК давал наилучшие из всех возможных результаты, должны выполняться *условия Гаусса – Маркова*.

1. Объясняющая переменная X есть величина не случайная.
2. Математическое ожидание случайного члена в любом наблюдении должно быть равно нулю, т.е. $M(\varepsilon_i) = 0 \quad (i = \overline{1, n})$, где i – номер наблюдения.
3. Дисперсия случайного члена должна быть постоянной для всех наблюдений, т.е. $D(\varepsilon_i) = M(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 = \text{const} \quad (i = \overline{1, n})$.

Условие *независимости* дисперсии случайного члена от номера наблюдения называется *гомоскедастичностью*. Зависимость дисперсии случайного члена от номера наблюдения называется *гетероскедастичностью*.

4. Случайные члены не коррелированы между собой: $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j)$.

5. Случайный член распределен нормально, т.е. $\varepsilon_i = N(0, \sigma^2)$.

При выполнении условий Гаусса – Маркова модель называется *классической нормальной регрессионной моделью*.

Рассмотрим теперь основы МНК. По выборочным данным $(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$ для каждой пары наблюдений определяем остатки e_i как разности между истинными и расчетными значениями $e_i = y_i - (b_0 + b_1 x_i)$. Суть МНК состоит в минимизации суммы квадратов остатков:

$$\delta(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Необходимые условия экстремума приводят к системе линейных уравнений для нахождения b_0, b_1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial b_0} = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial b_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_i x_i - \sum_i y_i = 0 \\ b_0 \sum_i x_i + b_1 \sum_i x_i^2 - \sum_i x_i y_i = 0 \end{cases}$$

Разделяя каждое из уравнений на n , приходим к системе

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y} \\ b_0 \bar{x} + b_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases} \text{ где } \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, & \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i, \\ \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2, & \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i \end{cases} \quad (1.3)$$

Можно предложить несколько способов решения системы (1.3).

1) Из 2-го уравнения вычтем 1-е, умноженное на \bar{x} :

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \quad (1.4)$$

2) Матричный способ. Для этого вводим три матрицы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}.$$

Матрицу Φ называют информационной матрицей, B – матрица-столбец из неизвестных коэффициентов регрессии; A – матрица столбец свободных членов. Отметим, что определитель матрицы Φ , равный $\det \Phi = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \sigma_x^2$ всегда отличен от нуля (он равен нулю лишь при условии, что $x_i = C = const$ ($i = \overline{1, n}$)). Тогда существует обратная матрица Φ^{-1} , причем

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2} \cdot \begin{pmatrix} \overline{x^2} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \Phi^{-1} \cdot A. \quad (1.5)$$

3) Построение регрессии на ЭВМ, например, в среде Excel: «Сервис», «Анализ данных», «Регрессия».

Замечание. Предположим теперь, что в модели парной линейной регрессии зависимость между СВ X и Y в ГС представляется в виде

$$Y = \beta_0 + \beta_1 f(X) + \varepsilon, \quad (1.6)$$

где, как и в (1.1), X – неслучайная величина (*объясняющая переменная*), $f(X)$ – известная скалярная функция, Y – зависимая (*объясняемая*) переменная (Y и ε – случайные величины). Путем замены $U = f(X)$ зависимость (1.6) сводится к линейной.

Замечание. Рассмотрим смысл коэффициентов регрессии (1.2). Предположим, что Y – объем выпускаемой продукции (ден. ед.), X – фактор, влияющий на производство (ден. ед.). Тогда увеличение значения фактора на 1 единицу приводит к увеличению объема выпускаемой продукции на b_1 ($b_1 > 0$) ден. ед.

Исследование парных регрессионных зависимостей

а) При исследовании линейных регрессионных зависимостей существенную роль играет сумма квадратов остатков

$$\delta(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2. \quad (1.7)$$

Представим выражения (1.4) через выборочный коэффициент корреляции $r_{xy} = r$:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}, \Rightarrow \bar{y}_x = \bar{y} + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta(b_0, b_1) &= \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y}) \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} n \sigma_{xy} + r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} n \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - r^2 n \sigma_y^2 = \delta(b_0, b_1). \end{aligned}$$

Так как $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = n \sigma_y^2$, то из последнего равенства

$$\delta(b_0, b_1) = n(1 - r^2) \sigma_y^2. \quad (1.8)$$

Учитывая, что $\delta(b_0, b_1) \geq 0$, из (1.8) получаем, что $1 - r^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq r \leq 1$. Соотношение (1.8) можно записать также в виде

$$n \sigma_y^2 = r^2 n \sigma_y^2 + \delta(b_0, b_1) = r^2 n \sigma_y^2 + (1 - r^2) n \sigma_y^2. \quad (1.9)$$

Таким образом, дисперсия признака Y представлена в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое $nr^2\sigma_y^2$ в (1.9) будет характеризовать разброс значений признака Y за счет изменения не случайного фактора X . Разделив его на число степеней свободы, равное 1, получим регрессионную дисперсию

$$S_{\text{regr}}^2 = \frac{nr^2\sigma_y^2}{1} = nr^2\sigma_y^2. \quad (1.10)$$

Величина $\delta(b_0, b_1)$ характеризует разброс значений признака Y за счет случайных (неучтенных) факторов. Число степеней свободы $\delta(b_0, b_1)$ равно $(n-2)$, так как для ее нахождения использовались два параметра b_0, b_1 , вычисленные по выборке. Разделив $\delta(b_0, b_1)$ на число степеней свободы, получим, так называемую, остаточную дисперсию

$$S_{\text{ost}}^2 = \frac{\delta(b_0, b_1)}{n-2} = \frac{n(1-r^2)\sigma_y^2}{n-2}. \quad (1.11)$$

Если дисперсия (1.10) превышает дисперсию (1.11), то регрессионную зависимость (1.2) можно считать адекватной исходным данным. Сравнение дисперсий проводим по критерию Фишера: если $\frac{S_{\text{regr}}^2}{S_{\text{ost}}^2} = \frac{r^2}{1-r^2}(n-2) > F_{1, n-2; 1-\alpha}$, где $F_{1, n-2; 1-\alpha}$ квантиль распределения Фишера, соответствующий уровню значимости α , то с вероятностью $1-\alpha$ $S_{\text{regr}}^2 > S_{\text{ost}}^2$ и регрессию (1.2) можно считать адекватной исходным данным.

Величину $B = r^2 = r_{xy}^2$ называют коэффициентом детерминации. Он определяет долю дисперсии признака Y , объясненную с помощью уравнения регрессии. Чем ближе B к 1, тем качественнее регрессионная модель, то есть регрессионная модель хорошо аппроксимирует исходные данные.

б) Рассмотрим теперь свойства коэффициентов регрессии b_0, b_1 . Так как они определяются по выборочным данным, то являются случайными величинами. Тот факт, что b_0, b_1 являются несмещенными оценками коэффициентов β_0, β_1 модели (1.1).

Здесь мы покажем, что при выполнении предпосылок РА точечной оценкой дисперсии коэффициента $b_j (j = 0, 1)$ является величина

$$D(b_j) = \sigma_{b_j}^2 = S_{\text{ost}}^2 \cdot (\Phi^{-1})_{j,j} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \sigma_{b_j} = \sqrt{S_{\text{ost}}^2 \cdot (\Phi^{-1})_{j,j} \cdot \frac{1}{n}}, \quad (1.12)$$

где $(\Phi^{-1})_{j,j}$ – диагональные элементы матрицы, обратной к информационной.

Для доказательства отметим, что, по 3-му из условий Гаусса–Маркова

$$D(y) = D(\varepsilon) = \sigma^2 \Rightarrow D(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}. \text{ Из (1.4), по свойствам дисперсии}$$

$$\begin{aligned} D(b_1) &= D\left(\frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2}\right) = \frac{1}{\sigma_x^4} \left(D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - \bar{x}^2 D(\bar{y}) \right) = \frac{1}{\sigma_x^4} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right) \frac{\sigma^2}{n} = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^4} \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2 \right) \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{\sigma_x^4} \sigma_x^2 \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{\sigma^2}{n} = (\Phi^{-1})_{1,1} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = (\Phi^{-1})_{1,1} \cdot \frac{S_{\text{ost}}^2}{n}, \end{aligned}$$

так как оценкой σ^2 является остаточная дисперсия S_{ost}^2 . Аналогично

$$D(b_0) = D(\bar{y} - b_1 \bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sigma_x^2} \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma_x^2 + \bar{x}^2}{\sigma_x^2} \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\overline{x^2}}{\sigma_x^2} \frac{\sigma^2}{n} = (\Phi^{-1})_{0,0} \cdot \frac{S_{\text{ost}}^2}{n}.$$

Для проверки значимости коэффициентов b_j ($j=0, 1$) введем гипотезу H_0 : коэффициент $b_j = 0$ ($j=0, 1$) при альтернативной гипотезе H_1 : $b_j \neq 0$ ($j=0, 1$). Гипотеза H_0 проверяется по t-критерию Стьюдента. Эмпирическое значение t-критерия для коэффициента b_j ($j=0, 1$) находится по формуле

$$T_{\text{emp}} = \frac{|b_j|}{\sigma_{b_j}}. \quad (1.13)$$

Теоретическим значением t-критерия является двусторонний квантиль распределения Стьюдента $t_{n-2, 1-\alpha}^{(2)}$. Если $T_{\text{emp}} > t_{n-2, 1-\alpha}^{(2)}$, то гипотеза H_0 отклоняется, т. е. коэффициент b_j значим ($b_j \neq 0$). В противном случае коэффициент b_j следует выбросить из уравнения регрессии, а сама регрессия принимает вид $\overline{y_x} = \bar{y}$.

Обозначим через β_j ($j=0, 1$) коэффициенты истинного уравнения регрессии (которых мы не знаем). Доверительные интервалы для них: с вероятностью $1-\alpha$

$$\beta_j \in \left(b_j - \sigma_{b_j} \cdot t_{n-2, 1-\alpha}^{(2)}; \quad b_j + \sigma_{b_j} \cdot t_{n-2, 1-\alpha}^{(2)} \right) \quad j=0, 1. \quad (1.14)$$

Пример. Статистические данные (таблица 1.1) описывают зависимость объема спроса на товар от его цены. Построить уравнение парной линейной регрессии и провести его исследование: а) «вручную»; б) с помощью программы Excel.

Таблица 1.1

Цена (ден. ед.)	99	82	77	69	52	44	31	29	28	27,5
Спрос (шт.)	100	115	210	270	323	478	544	564	570	574

Решение. а) Для нахождения коэффициентов системы (1.3) составляем расчетную таблицу

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	99	100	9801	9900	10000
2	82	115	6724	9430	13225
3	77	210	5929	16170	44100
4	69	270	4761	18630	72900
5	52	323	2704	16796	104329
6	44	478	1936	21032	228484
7	31	544	961	16864	295936
8	29	564	841	16356	318096
9	28	570	784	15960	324900
10	27,5	574	756,25	15785	329476
Суммы	538,5	3748	35197,25	156923	1741446

Из этой таблицы:

$$\bar{x} = \frac{538,5}{10} = 53,85; \quad \bar{y} = 374,8; \quad \overline{x^2} = 3519,725; \quad \overline{xy} = 15692,3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 3519,725 - 53,85^2 = 619,9025; \\ \sigma_{xy} &= \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 15692,3 - 53,85 \cdot 374,8 = -4490,68; \\ b_1 &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = -7,24417; \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 764,89863. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое выборочное уравнение регрессии имеет вид

$$\bar{y}_x = 764,89863 - 7,24417 \cdot x.$$

Для исследования полученного уравнения найдем выборочный коэффициент корреляции и F -статистику. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 619,9025; \quad \sigma_{xy} = -4490,68; \quad \sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 174144,6 - 374,8^2 = 33669,56, \\ \sigma_x &= \sqrt{619,9025} = 24,89784; \quad \sigma_y = \sqrt{33669,56} = 183,49267; \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -0,98295, \end{aligned}$$

$$F_{\text{emp}} = \frac{r^2}{1 - r^2} (n - 2) = \frac{(-0,98295)^2}{1 - (-0,98295)^2} (10 - 2) = 228,62963.$$

По таблице квантилей распределения Фишера находим теоретическое значение F-критерия: $F_{1,8;1-0,05} = 5,32$. Так как $F_{\text{emp}} > F_{1,8;1-0,05}$, то полученное уравнение регрессии адекватно исходным данным.

Из формул (1.5), (1.11), (1.12) стандартные отклонения коэффициентов регрессии

$$\sigma_{b_0} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{\frac{(1-r^2)x^2}{n-2}} = \frac{183,49267}{24,89784} \sqrt{\frac{(1-0,98295^2)3519,725}{8}} = 28,42345,$$

$$\sigma_{b_1} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{\frac{(1-r^2)}{n-2}} = \frac{183,49267}{24,89784} \sqrt{\frac{1-0,98295^2}{8}} = 0,479095.$$

Тогда эмпирические значения t-критерия для коэффициентов b_j ($j=0, 1$)

$$T_{\text{emp}} = \frac{|b_j|}{\sigma_{b_j}} \Rightarrow T(b_0) = \frac{|764,8986|}{28,42345} = 26,9108, T(b_1) = \frac{|-7,24417|}{0,479095} = 15,1205.$$

Теоретическим значением t-критерия является двусторонний квантиль распределения Стьюдента $t_{8,0,95}^{(2)} = 2,306$. Так как $T(b_0) > t_{8,0,95}^{(2)}$, $T(b_1) > t_{8,0,95}^{(2)}$, то оба коэффициента регрессии значимы.

По формуле (1.14) определяем 95%-е доверительные интервалы для истинных коэффициентов регрессии β_0, β_1 :

$$\beta_0 \in (764,89863 - 28,42345 \cdot 2,306; 764,89863 + 28,42345 \cdot 2,306) = (699,35403; 830,44323)$$

$$\beta_1 \in (-7,24417 - 0,479095 \cdot 2,306; -7,24417 + 0,479095 \cdot 2,306) = (-8,34897; -6,13937)$$

б) Для построения линейной регрессии в среде Excel на лист вычислений вводятся столбик значений независимой переменной X (используя, например, ячейки A1–A10) и столбик значений зависимой переменной Y (ячейки B1–B10). Для построения линейной регрессии воспользуемся встроенной процедурой «Регрессия»: «Сервис» – «Анализ данных» – «Регрессия» – «ОК». Заполняем открывшееся окно «Регрессия». Входной интервал Y: помечаем столбец B1–B10. Входной интервал X: помечаем столбец A1–A10. Уровень значимости: ставим флажок. Выходной интервал: любая свободная ячейка (например, A11). Далее «ОК». Результаты:

ВЫВОД ИТОГОВ						
Регрессионная статистика						
Множественный R	0,98295					
R-квадрат	0,96619					
Нормированный R-квадрат	0,96197					
Стандартная ошибка	37,721					
Наблюдения	10					
Дисперсионный анализ						
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значим. F</i>	
Регрессия	1	325312,6	325312,6	228,62963	3,621E-07	
Остаток	8	11383,04	1422,88			
Итого	9	336695,6				
<i>Коэффициенты</i>		<i>Станд. ошибка</i>	<i>t-стат.</i>	<i>P-значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
Y-пересечение	764,8986	28,4235	26,9108	3,91E-09	699,3540	830,443
Переменная X1	-7,24417	0,4791	-15,1205	3,62E-07	-8,34897	6,13937

Приведем в соответствие основные результаты полученной таблицы с введенными выше понятиями и обозначениями.

1. **Множественный R** – множественный коэффициент корреляции $R = \sqrt{r^2}$.

2. **R – квадрат** – коэффициент детерминации r^2 .

3. **Стандартная ошибка** – $\sqrt{\delta(b_0, b_1)/(n-2)}$.

4. ***df*** – число степеней свободы: для строки **Регрессия** – число факторов ($k=1$); для строки **Остаток** – $n - k - 1$; для строки **Итого** – $n - 1$.

5. ***SS*** – сумма квадратов отклонений: регрессионных значений от среднего для строки **Регрессия**; регрессионных значений от выборочных для строки **Остаток**; выборочных значений от среднего для строки **Итого**.

6. ***MS*** – дисперсии $MS = SS/df$.

7. $F = MS(\text{Регрессия})/MS(\text{Остаток})$ – расчетное значение F-критерия.

8. **Значимость F**: если Значимость *F* меньше принятого уровня значимости (например, 0,05), то регрессионная модель адекватна исходным данным.

Названия остальных результатов совпадают с общепринятыми. Отметим лишь, что если *P* – значение коэффициента регрессии меньше принятого уровня значимости, то этот коэффициент значим (отличен от нуля).

Как видно, результаты, полученные «вручную» полностью совпадают с результатами, полученными с помощью программы «Регрессия».

Модель множественной регрессии

В модели множественной линейной регрессии зависимость объясняемой переменной Y и факторами (объясняющими переменными) X_1, X_2, \dots, X_k в генеральной совокупности (ГС) представляется в виде

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon. \quad (1.15)$$

Данную модель можно представить в матричной форме. Для этого введем матрицу-столбец из коэффициентов $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^T$ и матрицу-строку из объясняющих переменных $X = (1, X_1, X_2, \dots, X_k)$, где $(M)^T$ – операция транспонирования матрицы M . Тогда модель (1.15) запишется в более короткой форме

$$Y = X \cdot \beta + \varepsilon. \quad (1.16)$$

В (1.15), (1.16) Y и ε – случайные величины Y – зависимая (*объясняемая*) переменная. Наличие в уравнении случайной составляющей (случайного члена) ε связано с воздействием на зависимую переменную неучтенных в уравнении факторов. Матрица-столбец β представляет собой вектор параметров уравнения. По выборочным данным оценивается выборочное уравнение регрессии

$$\overline{y_x} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k = B \cdot x. \quad (1.17)$$

Здесь $B = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_k)^T$ оценки параметров $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^T$. Как и выше, методом нахождения оценок является метод наименьших квадратов (МНК).

Для того чтобы регрессионный анализ, основанный на МНК давал наилучшие из всех возможных результаты, должны выполняться (как и в случае парной регрессии) **условия Гаусса–Маркова**.

1. Все факторы X_1, X_2, \dots, X_k (выборки их значений) являются детерминированными (неслучайными) величинами.

2. Математическое ожидание случайного члена в любом наблюдении должно быть равно нулю, т.е. $M(\varepsilon_i) = 0$ ($i = \overline{1, n}$), где i – номер наблюдения.

3. Дисперсия случайного члена должна быть постоянной для всех наблюдений, т.е. $D(\varepsilon_i) = M(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 = \text{const}$ ($i = \overline{1, n}$) (условие **гомоскедастичности**).

4. Случайные члены не коррелированы между собой: $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ ($i \neq j$).

5. Случайный член распределен нормально, т. е. $\varepsilon_i = N(0, \sigma^2)$.

Дополнительно предполагается, что факторы не коррелированы между собой.

При выполнении условий Гаусса–Маркова модель называется **классической нормальной регрессионной моделью**.

Исходными данными для построения модели (1.17) являются значения факторов $x_{i,j}$ ($i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,k$; $n > k+1$) и соответствующие им выборочные значения признака $Y: y_1, y_2, \dots, y_n$. Теоретические значения признака Y определяются по уравнению (1.17). Подставляя в это уравнение выборочные данные, получим систему из n уравнений, каждое из которых выполнено приближенно:

$$y_i \approx b_0 + b_1 x_{i,1} + b_2 x_{i,2} + \dots + b_k x_{i,k} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Введем остатки e_i :

$$e_i = b_0 + b_1 x_{i,1} + b_2 x_{i,2} + \dots + b_k x_{i,k} - y_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Как и выше, суть МНК состоит в минимизации суммы квадратов остатков

$$\delta(B) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_{i,1} + b_2 x_{i,2} + \dots + b_k x_{i,k} - y_i)^2. \quad (1.18)$$

Необходимые условия экстремума $\frac{\partial \delta(B)}{\partial b_j} = 0$ ($j=0, 1, 2, \dots, k$) дают

систему $(k+1)$ линейных уравнений с $(k+1)$ неизвестными $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$.

Выпишем эту систему

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 \cdot n + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i,1} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i,2} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{i,k} = \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{i,1} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i,1} x_{i,1} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i,2} x_{i,1} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{i,k} x_{i,1} = \sum_{i=1}^n y_i x_{i,1} \\ \vdots \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{i,k} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i,1} x_{i,k} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i,2} x_{i,k} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{i,k} x_{i,k} = \sum_{i=1}^n y_i x_{i,k} \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Разделим каждое уравнение на n и введем обозначения

$$\overline{x_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,j}, \quad \overline{x_j x_m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,j} x_{i,m}, \quad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{y x_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i x_{i,j}.$$

Тогда система (3.5) переписется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{b_0} + \overline{b_1 x_1} + \overline{b_2 x_2} + \dots + \overline{b_k x_k} = \overline{y} \\ \overline{b_0 x_1} + \overline{b_1 x_1 x_1} + \overline{b_2 x_2 x_1} + \dots + \overline{b_k x_k x_1} = \overline{y x_1} \\ \vdots \\ \overline{b_0 x_k} + \overline{b_1 x_1 x_k} + \overline{b_2 x_2 x_k} + \dots + \overline{b_k x_k x_k} = \overline{y x_k} \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Решение системы (1.20) можно записать в матричной форме, аналогичной (1.5). Для этого введем три матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \overline{x_1} & \cdots & \overline{x_k} \\ \overline{x_1} & \overline{x_1 x_1} & \cdots & \overline{x_k x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{x_k} & \overline{x_1 x_k} & \cdots & \overline{x_k x_k} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{yx_1} \\ \vdots \\ \overline{yx_k} \end{pmatrix}$$

и систему (1.20) запишем в виде $\Phi \cdot B = A$. Умножая это уравнение слева на Φ^{-1} , получим решение

$$B = \Phi^{-1} \cdot A. \quad (1.21)$$

Как видно, системы (1.19), (1.20) имеют довольно громоздкий вид. Для его упрощения вводят $(n \times (k+1))$ -матрицу X и транспонированную к ней матрицу X^T :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,k} \\ 1 & x_{2,1} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{k,1} & \cdots & x_{k,k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n,1} & \cdots & x_{n,k} \end{pmatrix}, X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{k,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1,k} & x_{2,k} & \cdots & x_{k,k} & \cdots & x_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Тогда левую часть системы (1.19) можно записать как $X^T X B$, а правую $X^T Y$. В результате получим матричное уравнение $X^T X B = X^T Y$, решение которого запишется в виде

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (1.22)$$

Чтобы формулы (1.21), (1.22) имели смысл, определители матриц Φ и $X^T X$ должны быть отличны от нуля. Легко видеть, что $\Phi = \frac{1}{n} X^T X$, т. е. достаточно чтобы $\det(X^T X) \neq 0$. Иногда это требование закладывается в условия Гаусса–Маркова.

Некоторые нелинейные многофакторные регрессионные модели

а) Регрессионные модели вида

$$Y = \beta_0 + \beta_1 f_1(X_1, X_2, \dots, X_k) + \dots + \beta_m f_m(X_1, X_2, \dots, X_k) + \varepsilon, \quad (1.23)$$

где

$$f_1(X_1, X_2, \dots, X_k), f_2(X_1, X_2, \dots, X_k), \dots, f_m(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

являются известными функциями от факторов, практически ничем не отличаются от модели (1.15). Некоторые однофакторные модели так же

записываются в виде (1.23) с той лишь разницей, что f_1, f_2, \dots, f_m являются функциями одной переменной.

б) Для моделирования и решения задач определения объема выпуска продукции в зависимости от капитальных затрат K и затрат труда L часто используют производственную функцию Кобба-Дугласа

$$Y = A \cdot K^{\beta_1} \cdot L^{\beta_2} \cdot \varepsilon, \quad A > 0, 0 < \beta_1 < 1, 0 < \beta_2 < 1. \quad (1.24)$$

Модель (1.24) сводится к (1.15) путем логарифмирования:

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln K + \beta_2 \ln L + \ln \varepsilon, \quad \beta_0 = \ln A.$$

Коэффициенты β_1, β_2 имеют смысл эластичности:

$$\frac{\partial Y}{Y} / \frac{\partial K}{K} = \beta_1, \quad \frac{\partial Y}{Y} / \frac{\partial L}{L} = \beta_2,$$

т.е. эластичность выпуска продукции по капиталу и труду равна соответственно β_1 и β_2 . Это означает, что увеличение затрат капитала на 1% приведет к росту выпуска продукции на $\beta_1\%$, а увеличение затрат труда на 1% – к росту выпуска продукции на $\beta_2\%$. Дополнительно, при росте масштаба производства в λ раз, т. е. при росте каждого из факторов K и L в λ раз, выпуск возрастает в $\lambda^{\beta_1 + \beta_2}$ раз. Это означает следующее: если $\beta_1 + \beta_2 > 1$, то функция (1.24) имеет *возрастающую* отдачу от масштаба производства; если $\beta_1 + \beta_2 < 1$, то функция (1.24) имеет *убывающую* отдачу от масштаба производства; если $\beta_1 + \beta_2 = 1$, то функция (1.24) имеет постоянную отдачу от масштаба производства.

Исследование множественных регрессий

Под исследованием регрессионных зависимостей понимается проверка построенной регрессии на адекватность исходным данным, установление значимости коэффициентов регрессии и построение доверительных интервалов для них. Приведем основные положения при исследовании.

а) Все исследования проводятся при некотором уровне значимости α . Основную роль при исследовании полученной эмпирической функции регрессии играет сумма квадратов остатков $\delta(B)$, определяемая формулой (1.14) с уже известными коэффициентами регрессии $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$. По сумме $\delta(B)$ строится остаточная дисперсия $S_{\text{ост}}^2$, равная сумме $\delta(B)$ деленной на число степеней свободы. Так как для определения суммы $\delta(B)$ по выборке вычислялись $(k+1)$ коэффициентов регрессии, то число степеней свободы суммы $\delta(B)$ равно $n - (k+1)$, т. е.

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{\delta(B)}{n - (k + 1)}. \quad (1.25)$$

Введем, далее, обозначения

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i,1} + b_2 x_{i,2} + \dots + b_k x_{i,k} \quad (i = 1, 2, \dots, n) -$$

теоретические значения признака (полученные по уравнению регрессии). Тогда общую сумму квадратов отклонений признака от среднего значения можно представить в виде

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 - 2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2.$$

Второе слагаемое равно нулю в силу условий (3.5). Третье слагаемое является суммой квадратов остатков и с его помощью строится остаточная дисперсия (1.25). С помощью первого слагаемого строится регрессионная дисперсия

$$S_{regr}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2. \quad (1.26)$$

Если дисперсия (1.26) превышает дисперсию (1.25), то регрессионную зависимость (1.16) можно считать адекватной исходным данным. Сравнение дисперсий проводим по критерию Фишера: если $\frac{S_{regr}^2}{S_{ost}^2} > F_{k, n-k-1; 1-\alpha}$, где $F_{k, n-k-1; 1-\alpha}$ квантиль распределения Фишера, соответствующий уровню значимости α , то с вероятностью $1 - \alpha$ $S_{regr}^2 > S_{ost}^2$ и регрессию (1.16) можно считать адекватной исходным данным.

б) Для исследования адекватности нелинейных регрессионных зависимостей обычно используют *среднюю относительную ошибку аппроксимации*

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\%.$$

Если $E < 10\%$, то регрессионную модель принято считать адекватной исходным данным.

в) Остановимся на свойствах коэффициентов регрессии. Покажем, что вектор B является несмещенной оценкой вектора β . Из (1.22)

$B = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Заменяя Y по формуле (1.16), будем иметь

$$B = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) = (X^T X)^{-1} X^T X\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon = \beta + C\varepsilon, \quad (1.27)$$

где $C = (X^T X)^{-1} X^T$. Тогда $M(B) = M(\beta) + CM(\varepsilon) = \beta + 0 = \beta$, так как вектор $\beta = const$, а $M(\varepsilon) = 0$ по условию 2 Гаусса–Маркова. Таким образом, $M(B) = \beta$, что и требовалось показать.

Рассмотрим теперь матрицу дисперсий–ковариаций $M((B - \beta)(B - \beta)^T)$. Диагональными элементами этой матрицы являются дисперсии коэффициентов регрессии $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$. Из (1.27) $B - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$.

Несложно показать, что при выполнении предпосылок регрессионного анализа точечной оценкой дисперсии коэффициента $b_j (j = 0, 1, \dots, k)$ является величина

$$\sigma_{b_j}^2 = S_{\text{ost}}^2 \cdot \left((X^T X)^{-1} \right)_{j,j} = S_{\text{ost}}^2 \cdot (\Phi^{-1})_{j,j} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \sigma_{b_j} = \sqrt{S_{\text{ost}}^2 \cdot (\Phi^{-1})_{j,j} \cdot \frac{1}{n}}, \quad (1.28)$$

где $(\Phi^{-1})_{j,j}$ – диагональные элементы матрицы, обратной к информационной.

Для проверки значимости коэффициентов $b_j (j = 0, 1, \dots, k)$ введем гипотезу H_0 : коэффициент $b_j = 0 (j = 0, 1, \dots, k)$ при альтернативной гипотезе H_1 : $b_j \neq 0 (j = 0, 1, \dots, k)$. Гипотеза H_0 проверяется по t-критерию Стьюдента. Эмпирическое значение t-критерия для коэффициента $b_j (j = 0, 1, \dots, k)$ находится по формуле

$$T_{\text{emp}} = \frac{|b_j|}{\sigma_{b_j}}. \quad (1.29)$$

Теоретическим значением t-критерия является двусторонний квантиль распределения Стьюдента $t_{n-k-1, 1-\alpha}^{(2)}$. Если $T_{\text{emp}} > t_{n-k-1, 1-\alpha}^{(2)}$, то гипотеза H_0 отклоняется, т. е. коэффициент b_j значим ($b_j \neq 0$). В противном случае коэффициент b_j следует выбросить из уравнения регрессии, а саму регрессию пересчитать.

Обозначим через $\beta_j (j = 0, 1, \dots, k)$ коэффициенты истинного уравнения регрессии (которых мы не знаем). Для них можно указать доверительные интервалы, т.е. с вероятностью $1-\alpha$

$$\beta_j \in \left(b_j - \sigma_{b_j} \cdot t_{n-k-1, 1-\alpha}^{(2)}; \quad b_j + \sigma_{b_j} \cdot t_{n-k-1, 1-\alpha}^{(2)} \right) \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (1.30)$$

2. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Основные понятия в теории временных рядов

Временной ряд – совокупность значений $Y(t)$ какого-либо показателя Y за несколько последовательных моментов времени $t = t_1, t_2, \dots, t_n$. Каждый уровень $Y(t)$ временного ряда формируется под влиянием длительных, кратковременных и случайных факторов. Для удобства временной ряд можно обозначать $Y_t = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$.

Длительные, постоянно действующие факторы оказывают на изучаемое явление определяющее влияние и формируют основную тенденцию – тренд $T(t)$. *Кратковременные*, периодические факторы формируют сезонные колебания ряда $S(t)$. *Случайные* факторы отражаются случайными изменениями уровней ряда $E(t)$.

Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечисленных компонент, т.е. $Y(t) = T(t) + S(t) + E(t)$, называется **аддитивной**.

Модель, в которой временной ряд представлен как произведение перечисленных компонент, т.е. $Y(t) = T(t) \cdot S(t) \cdot E(t)$, называется **мультипликативной**.

Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда сезонных колебаний приближенно *постоянная*, используют *аддитивную модель*. Если же амплитуда *возрастает* или *уменьшается*, используют *мультипликативную модель*.

Основная задача эконометрического исследования временного ряда – выявить каждую из перечисленных компонент ряда.

Исследование временного ряда начинают обычно с построения графика. По графику можно определить наличие тренда, сезонных колебаний а так же аддитивность (мультипликативность) модели. Если по графику трудно установить период сезонных колебаний, то это можно сделать вычислением последовательных коэффициентов автокорреляции, т. е. коэффициентов корреляции между рядом Y_t и рядами Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots , которые будем обозначать r_1, r_2, \dots . Если наибольшее значение имеет r_1 , то ряд содержит только тенденцию и не содержит сезонных колебаний. Если же наибольшее значение имеет r_m , то ряд содержит сезонные колебания с периодом m . Дальнейшее исследование временного ряда проводится по следующим алгоритмам.

Анализ аддитивной модели

Построение модели $Y = T + S + E$ включает в себя следующие шаги:

- 1) выравнивание исходного ряда методом скользящей средней;
- 2) расчет значений сезонной компоненты;
- 3) устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда $(Y - S)$ и получение выровненных данных $(T + E)$;
- 4) аналитическое выравнивание уровней $(T + E)$, т. е. построение тренда $T(t)$ и расчет значений $T(t)$ с использованием полученного уравнения тренда;
- 5) расчет полученных по модели значений $(T + S)$;
- 6) расчет абсолютных ошибок и качества модели.

Анализ мультипликативной модели

Построение модели $Y = T \cdot S \cdot E$ включает в себя следующие шаги:

- 1) выравнивание исходного ряда методом скользящей средней;
- 2) расчет значений сезонной компоненты;
- 3) устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда (Y / S) и получение выровненных данных ($T \cdot E$);
- 4) аналитическое выравнивание уровней ($T \cdot E$), т. е. построение тренда $T(t)$ и расчет значений $T(t)$ с использованием полученного уравнения тренда;
- 5) расчет полученных по модели значений ($T \cdot S$);
- 6) расчет абсолютных ошибок и качества модели.

3. СИСТЕМЫ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные понятия.

Классификация систем одновременных уравнений

Построение моделей экономических систем очень часто сводится к системам эконометрических соотношений, являющихся уравнениями и тождествами. Уравнение состоит из эндогенных и экзогенных переменных с неопределенными коэффициентами, которые следует определить по выборочным данным. Тождеством называют уравнение, не содержащее случайного члена и в котором все коэффициенты определены.

Наибольшее распространение получили *системы одновременных уравнений*. В таких системах одни и те же эндогенные (зависимые) переменные могут входить и в левую, и в правую части уравнений системы. Ниже буквами y_1, y_2, \dots будут обозначаться эндогенные (зависимые) переменные, x_1, x_2, \dots – экзогенные (независимые) переменные, c_i, b_{ij}, a_{ij} – неопределенные коэффициенты. Общий вид системы одновременных уравнений

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \dots + b_{1m}y_m + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \varepsilon_1 \\ y_2 = c_2 + b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2m}y_m + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ y_m = c_m + b_{m1}y_1 + \dots + b_{mm-1}y_{m-1} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \varepsilon_k \end{cases} \quad (3.1)$$

Систему (3.1) называют так же *структурной формой модели (структурной моделью)*. Коэффициенты структурной формы модели будем называть *структурными коэффициентами*. Рассмотрим некоторые частные случаи системы (3.1).

1) Система *независимых* уравнений характеризуется тем, что каждая эндогенная переменная выражена только через экзогенные переменные,

т.е. коэффициенты b_{ij} в правых частях (3.1) равны нулю. Вид системы независимых уравнений

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \varepsilon_1 \\ y_2 = c_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ y_m = c_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \varepsilon_k \end{cases} \quad (3.2)$$

Систему (3.2) называют так же **приведенной формой модели**.

2) Система **рекурсивных** уравнений характеризуется тем, что каждая эндогенная переменная является объясняющей в следующих за ней уравнениях:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \varepsilon_1 \\ y_2 = c_2 + b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \varepsilon_2 \\ y_3 = c_3 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3k}x_k + \varepsilon_3 \\ \vdots \\ y_m = c_m + b_{m1}y_1 + \dots + b_{m,m-1}y_{m-1} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \varepsilon_k \end{cases} \quad (3.3)$$

Основная задача, связанная с системами одновременных уравнений состоит в оценке коэффициентов c_i , b_{ij} , a_{ij} системы (3.1) по выборочным данным. Сложность этой задачи состоит в том, что в общем случае для оценки коэффициентов системы (3.1) неприменим обычный МНК, так как случайные остатки коррелируют с эндогенными переменными. *Если же применить МНК непосредственно к системе (3.1), то получаемые оценки коэффициентов будут смещенными и не состоятельными.* Для приведенной формы модели (3.2) каждое из уравнений можно рассматривать самостоятельно и к ним можно применять обычный МНК.

Отметим, что во многих случаях систему (3.1) можно привести к (3.2). Для этого систему (3.1) запишем в матричной форме $B \cdot Y = A \cdot X + C$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & \dots & -b_{1m} \\ -b_{21} & 1 & \dots & -b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Если $\det B \neq 0$, то (3.1) приводится к (3.2) т. е. $Y = B^{-1} \cdot X + B^{-1} \cdot C$. Обычно этот факт постулируется. При этом коэффициенты приведенной формы модели будут нелинейными функциями структурной формы модели. После оценки коэффициентов приведенной формы по МНК следует вернуться к оценке структурных коэффициентов, так как структурная система несет в себе больше информации, чем приведенная (в приведенной форме не учитывается влияние на каждую эндогенную переменную других эндогенных переменных). Здесь возникает проблема **идентификации**, т.е. задача определения структурных коэффициентов через коэффициенты приведенной формы модели.

Проблема идентификации

Возможны следующие ситуации.

1) Структурные коэффициенты однозначно выражаются через коэффициенты приведенной формы модели. В этом случае структурную модель называют **точно идентифицируемой**.

2) Некоторые из структурных коэффициентов не выражаются через коэффициенты приведенной формы модели. Такую структурную модель называют **неидентифицируемой**.

3) Структурные коэффициенты неоднозначно выражаются через коэффициенты приведенной формы модели. Тогда структурную модель называют **сверхидентифицируемой**.

Задача идентификации решается для каждого уравнения в отдельности. Обозначим через \hat{c}_i, \hat{a}_{ij} оценки коэффициентов приведенной формы модели, полученные по МНК, т.е.

$$\begin{cases} y_1 = \hat{c}_1 + \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \dots + \hat{a}_{1k}x_k \\ y_2 = \hat{c}_2 + \hat{a}_{21}x_1 + \hat{a}_{22}x_2 + \dots + \hat{a}_{2k}x_k \\ \vdots \\ y_m = \hat{c}_m + \hat{a}_{m1}x_1 + \hat{a}_{m2}x_2 + \dots + \hat{a}_{mk}x_k \end{cases} \quad (3.4)$$

Рассмотрим метод оценки коэффициентов идентифицируемых уравнений

Выпишем i -е уравнения систем (4.1) и (4.4):

$$y_i = c_i + b_{i,i_1}y_{i_1} + b_{i,i_2}y_{i_2} + \dots + b_{i,i_d}y_{i_d} + a_{i,j_1}x_{j_1} + a_{i,j_2}x_{j_2} + \dots + a_{i,j_s}x_{j_s}, \quad (3.5)$$

$$y_i = \hat{c}_i + \hat{a}_{i1}x_1 + \hat{a}_{i2}x_2 + \dots + \hat{a}_{ik}x_k = \hat{c}_i + \left(\hat{a}_{i,t_1}x_{t_1} + \hat{a}_{i,t_2}x_{t_2} + \dots + \hat{a}_{i,t_d}x_{t_d} \right) + \left(\hat{a}_{i,j_1}x_{j_1} + \hat{a}_{i,j_2}x_{j_2} + \dots + \hat{a}_{i,j_s}x_{j_s} \right). \quad (3.6)$$

В (4.6) через $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_d}$ ($d = k - s$) обозначены экзогенные переменные, отсутствующие в (4.5) (но присутствующие в других уравнениях структурной модели). Чтобы имелась возможность перейти от (4.6) к (4.5), экзогенные переменные, отсутствующие в (4.5) должны выражаться через эндогенные переменные $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$, присутствующие в правой части (4.5). Выпишем из (4.4) соотношения, связывающие экзогенные переменные $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_d}$ с эндогенными переменными $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$:

$$\begin{cases} y_{i_1} = \hat{c}_{i_1} + \hat{a}_{i_1,t_1}x_{t_1} + \dots + \hat{a}_{i_1,t_d}x_{t_d} + \hat{a}_{i_1,j_1}x_{j_1} + \dots + \hat{a}_{i_1,j_s}x_{j_s} \\ y_{i_2} = \hat{c}_{i_2} + \hat{a}_{i_2,t_1}x_{t_1} + \dots + \hat{a}_{i_2,t_d}x_{t_d} + \hat{a}_{i_2,j_1}x_{j_1} + \dots + \hat{a}_{i_2,j_s}x_{j_s} \\ \vdots \\ y_{i_g} = \hat{c}_{i_g} + \hat{a}_{i_g,t_1}x_{t_1} + \dots + \hat{a}_{i_g,t_d}x_{t_d} + \hat{a}_{i_g,j_1}x_{j_1} + \dots + \hat{a}_{i_g,j_s}x_{j_s} \end{cases} \quad (3.7)$$

Таким образом, решение задачи идентификации можно связать с системой (4.7). Для формулировки результатов введем матрицу $\hat{A}(g, d)$ из коэффициентов при экзогенных переменных $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_d}$ в системе (3.7):

$$\hat{A}(g, d) = \begin{pmatrix} \hat{a}_{i_1, t_1} & \hat{a}_{i_1, t_2} & \cdots & \hat{a}_{i_1, t_d} \\ \hat{a}_{i_2, t_1} & \hat{a}_{i_2, t_2} & \cdots & \hat{a}_{i_2, t_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{i_g, t_1} & \hat{a}_{i_g, t_2} & \cdots & \hat{a}_{i_g, t_d} \end{pmatrix}.$$

1. Если $d = g$ и $\det \hat{A}(d, d) \neq 0$, то уравнение (3.5) точно идентифицируемо. Действительно, в этом случае из уравнений (3.7) переменные $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_d}$ однозначно выражаются через эндогенные переменные $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$ и оставшиеся экзогенные переменные. Подставим найденные выражения в уравнение (3.6) и приведем подобные члены. Осуществляя после этого тождественное сравнение уравнений (3.5) и (3.6), мы найдем тем самым значения всех коэффициентов уравнения (3.5). Разобраный метод нахождения коэффициентов точно идентифицируемого уравнения называют в литературе **косвенным методом наименьших квадратов** (КМНК).

2. Если $g < d$ и ранг матрицы $\hat{A}(g, d)$ равен g , то в этом случае переменные $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_d}$ неоднозначно выражаются через $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$ и уравнение (3.5) будет сверхидентифицируемым. Для оценки коэффициентов сверхидентифицируемого уравнения обычно применяется **двухшаговый метод наименьших квадратов** (ДМНК). Суть его состоит в следующем. Предварительно для каждой эндогенной переменной $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$, входящей в правую часть уравнения (3.5), получаем по МНК выражения типа (3.4) приведенных форм этих переменных и по полученным приведенным формам определяем теоретические значения переменных $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$. Далее к уравнению (3.5) можно применять обычный МНК, так как теоретические значения эндогенных переменных являются детерминированными. Таким образом, МНК применяется дважды: один раз для определения приведенных форм эндогенных переменных, а второй раз непосредственно к уравнению (3.5).

3. Если $g > d$, то число уравнений системы (3.7) превосходит число неизвестных $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_d}$ и их невозможно выразить через $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$. В этом случае уравнение (3.5) неидентифицируемо.

Замечание. Дополнительно, уравнение (3.5) неидентифицируемо в следующих случаях: а) $d = g$ и $\det \hat{A}(d, d) = 0$; б) $g < d$ и ранг матрицы

$\widehat{A}(g, d)$ меньше g , так как в этих случаях эндогенные переменные $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_g}$ будут связаны линейной зависимостью.

Необходимые и достаточные условия идентификации

Укажем теперь необходимые и достаточные условия точной идентифицируемости, сверхидентифицируемости и неидентифицируемости. Эти условия относятся к каждому уравнению структурной модели, т.е. на идентифицируемость проверяется каждое уравнение системы. Если все уравнения системы точно идентифицируемы, то система будет точно идентифицируемой. Если одно или несколько уравнений системы сверхидентифицируемы, а остальные точно идентифицируемы, то и система будет сверхидентифицируемой. Если же хотя бы одно из уравнений неидентифицируемо, то и система неидентифицируема.

Необходимое условие идентификации. Пусть D – число не включенных в уравнение, но присутствующих в системе экзогенных переменных, а G – число включенных в уравнение эндогенных переменных. Если выполнено условие

$$D \geq G - 1, \quad (3.8)$$

то уравнение в структурной модели может быть идентифицировано. Здесь $G - 1$ – число эндогенных переменных в правой части исследуемого уравнения.

В частности:

- 1) если $D = G - 1$, то уравнение *точно идентифицируемо* (при выполнении достаточных условий идентификации);
- 2) если $D > G - 1$, то уравнение *сверхидентифицируемо* (при выполнении достаточных условий идентификации);
- 3) если же $D < G - 1$, то уравнение неидентифицируемо.

Достаточное условие идентификации. Пусть для рассматриваемого уравнения выполнено необходимое условие идентификации (3.8). Выбросим (мысленно) это уравнение из системы и составим матрицу из коэффициентов при переменных (эндогенных и экзогенных), отсутствующих в исследуемом уравнении. Если ранг полученной матрицы равен $m - 1$, где m – число эндогенных переменных, то рассматриваемое уравнение идентифицируемо.

Пример. Проверить на идентифицируемость каждое уравнение следующей структурной системы

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = c_2 + b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varepsilon_2 \\ y_3 = c_3 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{32}x_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

В данной системе 3 эндогенные переменные y_1, y_2, y_3 и 4 экзогенные переменные x_1, x_2, x_3, x_4 . Предварительно проверим, удовлетворяет ли каждое из уравнений необходимому условию идентификации.

1-е уравнение: $D = 3$, $G = 3$ – отсутствуют три экзогенные переменные x_2, x_3, x_4 , присутствуют три эндогенные переменные y_1, y_2, y_3 . $D > G - 1$, так как $3 > 3 - 1 \Rightarrow$ необходимое условие идентификации выполнено.

2-е уравнение: $D = 1$, $G = 2$ – отсутствует одна экзогенная переменная x_1 , присутствуют две эндогенные переменные y_1, y_2 . $D = G - 1$, так как $1 = 2 - 1 \Rightarrow$ необходимое условие идентификации выполнено.

3-е уравнение: $D = 3$, $G = 3$ – отсутствуют три экзогенные переменные x_1, x_3, x_4 , присутствуют три эндогенные переменные y_1, y_2, y_3 . $D > G - 1$, так как $3 > 3 - 1 \Rightarrow$ необходимое условие идентификации выполнено.

Проверка выполнения достаточных условий идентификации.

1-е уравнение: матрица из коэффициентов при x_2, x_3, x_4 во втором и третьем уравнениях имеет вид

$$\begin{array}{r} x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \text{2-е уравнение} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24} \cdot \\ \text{3-е уравнение} \quad a_{32} \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Минор 2-го порядка $M = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{vmatrix} = -a_{23} \cdot a_{32} \neq 0$, т.е. ранг матрицы

равен $2 = 3 - 1$. Достаточные условия идентификации выполнены для 1-го уравнения. Это уравнение сверхидентифицируемо.

2-е уравнение: матрица из коэффициентов при y_3, x_1 в первом и третьем уравнениях имеет вид

$$\begin{array}{r} y_3 \quad x_1 \\ \text{1-е уравнение} \quad b_{13} \quad a_{11} \cdot \\ \text{3-е уравнение} \quad -1 \quad 0 \end{array}$$

Так как определитель этой матрицы $\begin{vmatrix} b_{13} & a_{11} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \neq 0$, то ее ранг равен

$2 = 3 - 1$. Достаточные условия идентификации выполнены для 2-го уравнения. Это уравнение точно идентифицируемо.

3-е уравнение: матрица из коэффициентов при x_1, x_3, x_4 в первом и втором уравнениях имеет вид

$$\begin{array}{r} x_1 \quad x_3 \quad x_4 \\ \text{1-е уравнение} \quad a_{11} \quad 0 \quad 0 \cdot \\ \text{2-е уравнение} \quad 0 \quad a_{23} \quad a_{24} \end{array}$$

Минор 2-го порядка $M = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix} = a_{23} \cdot a_{11} \neq 0$, т.е. ранг матрицы

равен $2 = 3 - 1$. Достаточные условия идентификации выполнены для 3-го уравнения. Это уравнение сверхидентифицируемо.

Так как каждое уравнение системы идентифицируемо, причем первое и третье уравнения сверхидентифицируемы, то система сверхидентифицируема.

Методы оценки параметров системы одновременных уравнений

а) Пусть i -е уравнение системы (3.1) является точно идентифицируемым по необходимому условию идентификации. Будем считать, что в правой части этого уравнения присутствуют s эндогенных переменных $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_s}$ и отсутствуют s экзогенных переменных $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_s}$.

С помощью МНК оцениваем параметры приведенной системы:

$$\begin{cases} y_1 = \hat{c}_1 + \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \dots + \hat{a}_{1k}x_k \\ \vdots \\ y_i = \hat{c}_i + \hat{a}_{i1}x_1 + \hat{a}_{i2}x_2 + \dots + \hat{a}_{ik}x_k \\ \vdots \\ y_m = \hat{c}_m + \hat{a}_{m1}x_1 + \hat{a}_{m2}x_2 + \dots + \hat{a}_{mk}x_k \end{cases} \quad (3.9)$$

Здесь \hat{c}_i, \hat{a}_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}$) – численные значения оцененных параметров. Суть достаточных условий идентификации состоит в том, что определитель, составленный из коэффициентов при $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_s}$ в уравнениях для $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_s}$ должен быть отличен от нуля, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \hat{a}_{j_1, t_1} & \hat{a}_{j_1, t_2} & \dots & \hat{a}_{j_1, t_s} \\ \hat{a}_{j_2, t_1} & \hat{a}_{j_2, t_2} & \dots & \hat{a}_{j_2, t_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{j_s, t_1} & \hat{a}_{j_s, t_2} & \dots & \hat{a}_{j_s, t_s} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.10)$$

Тогда экзогенные переменные $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_s}$ однозначно выражаются через эндогенные переменные $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_s}$ и другие экзогенные переменные. Подставляя эти выражения в i -е уравнение системы (3.9), получим

$$\hat{y}_i = \hat{c}_i + \hat{b}_{i, j_1} y_{j_1} + \dots + \hat{b}_{i, j_s} y_{j_s} + \sum_u \hat{a}_{i, u} x_u + \varepsilon_i,$$

где сумма берется по всем $u \neq t_1, t_2, \dots, t_s$. В этом состоит суть **косвенного метода наименьших квадратов** (КМНК).

б) Пусть теперь i -е уравнение системы (3.1) является сверхидентифицируемым по необходимому условию идентификации. Будем считать, что в правой части этого уравнения присутствуют s эндогенных переменных $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_s}$ и отсутствуют u экзогенных переменных $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_u}$ ($u > s$). В этом случае параметры i -го уравнения системы (3.1) определяются неоднозначно. Одним из методов определения параметров сверхидентифицируемого уравнения является **двухшаговый метод наименьших квадратов** (ДМНК).

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Задача о назначениях

и ее решение с помощью алгоритма венгерского метода

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Имеется n работ и n исполнителей этих работ. Обозначим через i номер исполнителя ($i = 1, 2, \dots, n$), а через j – номер работы ($j = 1, 2, \dots, n$). Каждый исполнитель может выполнять любую из работ, но только одну. Каждая работа должна выполняться одним исполнителем. Известны числа C_{ij} – затраты (прибыли), связанные с выполнением j -й работы i -м исполнителем. Требуется так распределить исполнителей по работам, чтобы суммарные затраты (суммарная прибыль) были минимальны (была максимальной). Таким образом, задача о назначениях решается либо на максимум, либо на минимум в зависимости от смысла чисел C_{ij} . Из чисел C_{ij} можно составить матрицу, которую называют *матрицей эффективности*.

Математическая модель задачи о назначениях

Для построения математической модели введем неизвестные x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$) со следующим смыслом:

$x_{ij} = 0$, если i -й исполнитель не назначается на j -ю работу;

$x_{ij} = 1$, если i -й исполнитель назначается на j -ю работу.

Получаем задачу: найти план назначения x_{ij} , при котором минимизируется (максимизируется) суммарная полезность назначения, т.е.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min(\max)]$$

при следующих ограничениях. Каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = 1, 2, \dots, n).$$

Каждая работа выполняется только одним исполнителем:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, (j = 1, 2, \dots, n).$$

Условия неотрицательности и целочисленности:

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \{0; 1\}.$$

Алгоритм венгерского метода предназначен для решения задачи о назначениях по критерию минимизации суммарных затрат (задача на минимум). При решении задачи на максимум (если C_{ij} – прибыль), ее следует

свести к задаче на минимум. Для этого в каждом столбце матрицы определяем максимальный элемент и из него вычитаем все элементы столбца.

Суть задачи о назначениях состоит в том, чтобы построить матрицу назначений $X = [x_{ij}] (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$ с элементами x_{ij} , удовлетворяющими перечисленным выше условиям. Из них следует, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы X один из элементов равен 1, а остальные элементы равны 0.

Основной принцип венгерского метода – оптимальность назначения не нарушается при уменьшении или увеличении элементов строки (столбца) матрицы эффективности на одно и то же число. Уменьшением элементов строк и столбцов с сохранением условия $C_{ij} \geq 0$ стараются достичь того,

чтобы сумма $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C'_{ij} x_{ij} = 0$, где C'_{ij} – преобразованные элементы

матрицы эффективности, т.е., если $x_{ij} = 1$, то $C'_{ij} = 0$. Очевидно, что при этом условии сумма S будет минимальной. Алгоритм метода разбивается на несколько этапов.

1 этап. Приведение матрицы C .

Суть приведения – получение нулей в каждом столбце и в каждой строке матрицы C . Если задача на максимум сведена к задаче на минимум, то в каждом столбце матрицы C уже есть хотя бы один нуль. Если в какой-то из строк нулей не оказалось, то вычитанием из элементов этой строки минимального из них, получим хотя бы один нуль.

2 этап. Поиск назначения.

Выбираем один из нулей, помечаем его, например, точкой или звездочкой или обводим его другим цветом (в дальнейшем, звездочкой), а остальные нули строки и столбца, в которых стоит выбранный помеченный нуль, перечеркиваем. Далее переходим к следующему нулю. И так до тех пор, пока каждый нуль будет либо помечен, либо перечеркнут. Помеченные нули составят назначения, например, если помечен нуль в 3-й строке и 5-м столбце, то третий исполнитель назначается на 5-ю работу. Назначение может оказаться полным (количество помеченных нулей = n). Тогда задача решена. Если назначение неполное, переходим к следующему этапу.

Замечание. Пометку рекомендуется начинать со строк и столбцов, содержащих минимальное количество нулей.

3 этап. Выделение в матрице C подматрицы, не содержащей нулей.

По-другому, цель 3 этапа состоит в том, чтобы перечеркнуть все нули минимальным набором горизонтальных и вертикальных линий.

3а) помечаем (точкой, звездочкой) строки, не содержащие помеченных нулей;

3б) помечаем столбцы, содержащие перечеркнутый нуль в одной из помеченных строк;

3в) помечаем строки, содержащие помеченный нуль хотя бы в одном из помеченных столбцов. От 3в) опять переходим к 3б).

Пункты 3б) и 3в) повторяются до тех пор, пока есть что пометать.

После этого, вычеркиваем непомятые строки и помятые столбцы. Незачеркнутые элементы составят подматрицу, не содержащую нулей.

4 этап. Перемещение нулей.

Среди незачеркнутых элементов матрицы выбираем минимальный, вычитаем его из каждого невычеркнутого столбца и прибавляем к каждой вычеркнутой строке. Получим хотя бы один дополнительный нуль.

Переходим на 2 этап. Пометку следует начинать со вновь полученного нуля. И так до тех пор, пока не получим полное назначение.

Задача коммивояжера (о переналадках оборудования) и ее решение с помощью алгоритма Литтла

Графом будем называть множество из n точек плоскости (вершин графа), соединенных между собой направленными линиями (дугами графа). Дополнительно предполагаем, что каждая пара точек соединена двумя дугами, идущими в противоположных направлениях. Точки можно пронумеровать числами от 1 до n , а дугам приписать численные значения: если $l(i, j)$ – дуга, соединяющая вершину i с вершиной j ($i \neq j$), то ей можно

приписать число C_{ij} – затраты, связанные с переездом из п. i в п. j (в случае задачи о переналадках оборудования C_{ij} – это затраты на переналадку оборудования при переходе от выпуска i -й продукции к выпуску j -й продукции). Вообще говоря, $C_{ij} \neq C_{ji}$. Дополнительно предполагается, что $C_{ii} = \infty$. Смысл этого предположения состоит в том, что коммивояжер не должен остаться в п. i , так как понесет бесконечные потери. Замкнутый путь на графе, состоящий из дуг и проходящий по одному разу через каждую вершину, называют гамильтоновым контуром.

Смысл задачи коммивояжера – найти на графе гамильтонов контур минимальной длины, который называют оптимальным решением.

Зададим задачу матрицей эффективности

$$C = \begin{pmatrix} & \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & n \\ \hline 1 & \infty & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ 2 & C_{21} & \infty & \dots & C_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & C_{n1} & C_{n2} & \dots & \infty \end{array} \\ \end{pmatrix}.$$

Символ ∞ ставится для блокировки дуг графа, которые явно не включаются в гамильтонов контур. Первоначально в расчет не берутся дуги l_{ii} . Можно показать, что оптимальность решения не меняется от прибавления некоторого числа к строке или столбцу матрицы C .

Алгоритм Литтла служит для решения задачи коммивояжера. Его можно разбить на несколько этапов.

I этап. Приведение матрицы.

Суть первого этапа – получение нулей в каждом столбце и в каждой строке матрицы C путем вычитания минимальных элементов. При этом дополнительно введем константу приведения φ – сумму минимальных элементов строк и столбцов, которые вычитались. После первого этапа получим матрицу $\boxed{C_0}$ с константой приведения $\boxed{\varphi_0}$.

II этап. Определение степеней нулей.

Находим степени каждого нуля – сумму минимальных элементов строки и столбца, в которых стоит этот нуль (без учета самого нуля). К каждому нулю припишем сверху его степень. Нуль с максимальной степенью определяет дугу, которая вероятнее всего войдет в искомый гамильтонов контур, т.е. если нуль с максимальной степенью стоит на месте (i_1, j_1) , то дуга $l(i_1, j_1)$ включится в гамильтонов контур (после п. i_1 коммивояжер должен посетить пункт j_1).

III этап. Ветвление. Выбираем 2 варианта:

Вариант 1. Дуга $l(i_1, j_1)$ включена в гамильтонов контур. Блокируем дугу $l(j_1, i_1)$, полагая $C_{j_1, i_1} = \infty$ и вычеркиваем строку i_1 и столбец j_1 . После приведения получим матрицу, $C_1(j_1, i_1)$ меньшего порядка с константой приведения $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta_1$.

Вариант $\tilde{1}$. Дуга $l(i_1, j_1)$ не включена в гамильтонов контур. Полагаем. $C_{i_1, j_1} = \infty$. Приводя эту матрицу, получим $\tilde{C}_1(j_1, i_1)$ с константой приведения $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \tilde{\Delta}_1$.

Если $\varphi_1 < \tilde{\varphi}_1$, то п. II, III повторяем с матрицей $C_1(i_1, j_1)$, если $\varphi_1 > \tilde{\varphi}_1$, то п. II, III повторяем с матрицей $\tilde{C}_1(i_1, j_1)$. В результате получим последовательность дуг $l(i_1, j_1), l(i_2, j_2), \dots$ И так до тех пор, пока не дойдем до матрицы 2-го порядка:

$$C_{n-2}(i_{n-2}, j_{n-2}) = \left(\begin{array}{c|cc} & j_{n-1} & j_n \\ \hline i_{n-1} & 0 & A \\ i_n & B & 0 \end{array} \right) \varphi = \varphi_{n-2},$$

где A и B – некоторые числа (или ∞ .) Из этой матрицы получаем две последние дуги $l(i_{n-1}, j_{n-1})$ и $l(i_n, j_n)$.

Если $\varphi_{n-2} < \tilde{\varphi}_k$ ($k=1, 2, \dots, n-2$), то задача решена. Если же для некоторого k_0 , $\varphi_{n-2} > \tilde{\varphi}_{k_0}$, то всю процедуру следует провести с матрицей $\tilde{C}_{k_0}(i_{k_0}, j_{k_0})$. На последнем этапе получим новое значение функции $\varphi: \varphi'_{n-2}$, которое следует сравнить с φ_{n-2} (точнее, новый процесс продолжают до тех пор, пока новые $\varphi'_k < \varphi_{n-2}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сороговец, И.Б. Эконометрика (продвинутый уровень): учеб.-метод. комплекс для магистрантов экон. спец. / И. Б. Сороговец. – Новополюцк: ПГУ, 2015. – 112 с.
2. Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1006 с.
3. Носко, В.П. Эконометрика. Введение в регрессионный анализ временных рядов. – М., 2002. – 254 с.
4. Эконометрия / В.И. Суслов [и др.]. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2005. – 744 с.
5. Белько, И.В. Эконометрика: практикум / И.В. Белько, Е.А. Криштапович. – Минск: Изд-во Гревцова, 2011. – 224 с.

Учебное издание

ЭКОНОМЕТРИКА

Курс лекций

Составитель

АЛЕКСАНДРОВИЧ Татьяна Алиевна

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

В.Л. Пугач

Подписано в печать 07.10.2022. Формат 60x84^{1/16}. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,05. Тираж 25 экз. Заказ 178.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.