22.1 A28

(ознакомительный фрагмент)

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

АДАРЧЕНКО Никита Михайлович

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ И ОБОБЩЕННО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

установа адукацыі «Віцебскі дзяржаўны ўніверсітэт імя П.М.Машэрава» НАВУКОВАЯ БІБЛІЯТЭКА

22.144.1239031 A 28

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель:

Скиба Александр Николаеаич,

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Официальные оппоненты:

Ядченко Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией теории и приложений конечных групп отдела алгебры Института математики НАН Беларуси;



Грицук Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина».

Оппонирующая организация — учреждение образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Защита состоится 15 июля 2022 года в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246028, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: (+375 232) 51-03-07. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 14 июня 2022 года.

Ученый секретарь совета по защите диссертаций

Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы являются конечными; $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех подгрупп группы G and $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбисние множества всех простых чисел \mathbb{P} , т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Группа G называется: σ -примарной, если $G - \sigma_i$ -группа (для некоторого i); σ -разложимой 1 или σ -нильпотентной 2 , если G — прямое произведение σ -примарных групп.

Одной из организующих идей теории групп является идея изучения группы G в зависимости от наличия в ней системы подгрупп $\mathcal L$, обладающих заданными свойствами. Такой подход наиболее эффективен в случае, когда система подгрупп $\mathcal L$ «хорошо» вложена в G, например, $\mathcal L$ образует подрешетку решетки $\mathcal L(G)$ (т.е. $A\cap B\in \mathcal L$ и $\langle A,B\rangle\in \mathcal L$ для всех $A,B\in \mathcal L$). Это обстоятельство деласт проблему нахождения и изучения решеточных систем группы важной и интересной. Важность такой задачи подчерживается и тем обстоятельством, что каждая решетка изоморфна подрешетке решетки всех подгрупп некоторой группы 3,4 .

Один из первых результатов в этом направлении был получен Виландтом в его статье 5 , где было доказано, что множество всех субнормальных подгрупп $\mathcal{L}_{sn}(G)$ группы G является подрешеткой в $\mathcal{L}(G)$.

Этот классический результат нашел много приложений, и лишь в 1978 году он был усилен следующим образом. Пусть \mathfrak{F} — класс групп. Тогда подгруппа A группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G в смысле Кегеля 6 , если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_t = G,$$

где либо $A_{i-1} \leq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i} \in \mathfrak{F}$ для всех $i=1,\ldots,t$ (здесь $(A_{i-1})_{A_i}$ — ядро подгруппы A_{i-1} в A_i , т.с. $(A_{i-1})_{A_i}$ — наибольшая нормальная в A_i подгруппа, содержащаяся в A_{i-1}).

Кегель доказал 6 , что если класс $\mathfrak F$ замкнут относительно расширений, эпиморфных образов и подгрупп, то множество $\mathcal L_{\mathfrak Fsn}(G)$ всех $\mathfrak F$ -суб-

¹ Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

² Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. — Vol. 436. — P. 1–16

³ Whitman, P. M. Lattices, equivalence, and subgroups / P.M. Whitman // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — Vol. 52. — P. 507-522

⁴ Pudlák, P. Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice / P. Pudlák, J. Tuma // Algebra Universalis. — 1980. — Vol. 74. — P. 74–95

 $^{^5}$ Wielandt, H. Eine Verallgemenerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. — 1939. — Vol. 45. — P. 209–244

⁶ Kegel, O. H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband each enthalten , O. H. Kegel // Arch. Math. — 1978. — Vol. 30, M 3. — P. 225–228

нормальных в смысле Кегеля подгрупп группы G является подрешеткой решетки $\mathcal{L}(G)$ и $\mathcal{L}_{sn}(G)\subseteq\mathcal{L}_{\mathfrak{F}sn}(G)$. Несколько ранее, Кегель установил ⁷, что подрешеткой в $\mathcal{L}(G)$ является и совокупность всех силовски перестановочных (S-перестановочных) подгрупп, т.е. таких погруппп H группы G, для которых выполняется HP=PH для всех силовских подгрупп P группы G.

Следует отметить, что, несмотря на то, что идеи статьи 6 в дальнейшем получили развитие во многих направлениях (см. главу 6 в книге 8), основной результат этой статьи не нашел прямых приложений, поскольку он имеет дело с весьма специальным условием — «класс групп замкнут относительно расширений, эпиморфных образов и подгрупп».

В связи с этим обстоятельством в недавней работе 2 А.Н. Скиба модифицировал условие Кегеля следующим образом. Подгруппа A группы G называется σ -субнормальной в G, если в G имеется цепь подгрупп

$$A=A_0\leq A_1\leq \cdots \leq A_t=G,$$

где либо $A_{i-1} \unlhd A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной группой для всех $i=1,\ldots,t$.

Оказалось 2 , что в любой группе G множество всех ее σ -субнормальных подгрупп формирует подрешетку решетки $\mathcal{L}(G)$, и вышеупомянутый результат Виландта является следствием этого факта в случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$. Установлено также, что подгруппа H σ -субнормальна в G тогда и только тогда, когда H является \mathfrak{F} -субнормальной в G в смысле Кегеля, где \mathfrak{F} — класс всех σ -нильпотентных групп. Более того, оказалось, что для произвольного разбиения σ множества \mathbb{P} верен аналог второго из отмеченных выше результатов Кегеля 7 .

Напомиим, что подгруппа H группы G называется σ -перестановочной в G, если группа G σ -полна, т.е. G имеет холлову σ_i -подгруппу для вссх i, и H перестановочна со всеми холловыми σ_i -подгруппами группы G для всех i. В работс 2 было доказано, что каждая σ -перестановочная подгруппа σ -полной группы G является σ -субнормальной в G и совокупность всех ее σ -перестановочных подгрупп формирует подрешетку в решетке $\mathcal{L}(G)$.

Все эти и многие другие известные свойства σ -субнормальных и σ -перестановочных подгрупп делают их весьма полезными при изучении различных классов групп, и такие подгруппы уже нашли многочисленные применения в исследованиях Аль-Шаро, Бейдлемана, Баллестера-Болинчес, Ху Биня, А.Ф. Васильева, Ванга, Н.Т. Воробьева, Го, Жанга, Педраса-Агилеры,

⁷ Kegel, O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. H. Kegel // Math. 2. – 1962. – Vol. 78. – P. 205-221

⁸ Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. — Dordrecht: Springer-Verlag, 2006. — 391 p.

Перес-Калабуинг, Као, А-Минг Лиу, Сонга, А.Н. Скибы, С.Ф. Каморникова, В.Н. Тютянова, Д.А. Синицы, И.Н. Сафоновой, В.И. Мурашки, В.А. Грицковой, В.С. Закревской, В.Н. Рыжик, Хуанг, Хелиэля, Шомрани и других авторов.

Это указывает на то, что изучение групп с заданными системами σ - субнормальных, σ -перестановочных и обобщенно σ -субнормальных и σ - перестановочных подгрупп является интересной и вполне актульной задачей. Целью диссертации является дальнейший анализ такой задачи.

Для достижения такой цели в диссертации введены следующие понятия. Главный фактор H/K группы G называется почти центральным в G, если $|H/K||G/C_G(H/K)|$ делит pq для некоторых простых чисел p и q; подгруппа H группы G почти модулярна в G, если либо $H \subseteq G$, либо $H_G \neq H^G$ и каждый главный фактор группы G между G0 и G1 почти централен в G1.

Из результатов работ 9 , 10 вытекает, что множество всех почти модулярных подгупп группы образует подрешетку решетки всех ее подгрупп. Этот весьма нетривиальный факт лежит в основе применений таких подгрупп в данной диссертации и главной целью здесь является построение теорий почти σ -субнормальных, почти σ -перестановочных и слабо S-перестановочных подгрупп в смысле следующих определений.

Определение. Подгруппа H группы G называется:

- (i) почти σ -субнормальной (соответственно почти σ -нерестановочной) в G, если $H=\langle L,T\rangle$, где L является почти модулярной подгруппой и T является σ -субнормальной (соответственно σ -перестановочной) подгруппой в G;
- (ii) слабо S-перестановочной в G, если в G имеются почти S- перестановочная подгруппа L и подгруппа T такие, что G=HT и $H\cap T\leq L\leq H$.

Напомним, что подгруппа H группы G называется модулярной в G, если H являстся модулярным элементом в смысле Куроша (см. стр. 43 книги 11) решетки $\mathcal{L}(G)$. Ввиду теоремы 5.2.5 этой книги, всякая модулярная подгруппа является почти модулярной. Понятно также, что всякая почти модулярная подгруппа и всякая σ -субнормальная подгруппа являются почти σ -субнормальными в группе; всякая почти σ -перестановочная подгруппа является почти σ -субнормальной, а всякая σ -перестановочая подгруппа является почти σ -перестановочной. Отметим наконец, что всякая S-перестановочная подгруппа и всякая дополняемая подгруппа группы являются в ней слабо S-перестановочными.

⁹ Skiba, A. N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A. N. Skiba // Журн. Белорус. гос. ун-та. Матем. Инф. — 2019. — Т. 3, С. 35-47

¹⁰ Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // J. Algebra. — 2020. — Vol. 550. — P. 69-85

¹¹ Schmidt, R. Subgroup lattices of groups / R. Schmidt. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1994. — 572 p.

Эти наблюдения лежат в основе приложений результатов, полученных в данной диссертации, и следствиями теорем, доказанных в диссертации, являются соответствующие известные результаты многих авторов и, в частности, соответствующие результаты Аграваля, Асаада, Бакли, Бэйдлемана, Бэра, Баллистера-Болинчес, Го, Вана, Ванга, Вэя, Гашюца, Ито, Ли, Скорцио, Сринивасана, Спенсера, Педраса-Агилеры, Корради, Шмидта, Шаалана, Юнпай, Херманна, Хетхейи, Фризен, А.Н. Скибы и др.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных журналах

- 1. Adarchenko, H.M. Finite groups with generalized σ -subnormal and σ -permutable subgroups / N.A. Adarchenko, A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 1 (42). С. 65–73.
- 2. Nanying, Y. On m-S-supplemented subgroups of finite groups / Y. Nanying, N.A. Adarchenko // Communications in Algebra. 2019. Vol. 47, No. 3. P. 1–11.
- 3. Hu, B. On П-permutable subgroups of finite groups, / B. Hu, J. Huang, N.M. Adarchenko // Украинский матем. журнал. 2021. Т. 73, № 10. С. 1423–1431.
- 4. Adarchenko, N.M. A new characterization of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / N.M. Adarchenko // Algebra and Discrete Mathematics. 2020. Vol. 29, N 1. P. 33–41.
- 5. Адарченко, Н.М. О консчных группах, в которых нильпотентный корадикал является холловой подгруппой / Н.М. Адарченко // Весник ВГУ им. П.М. Машерова. 2020. Т. 106, № 1. С. 5–10.
- 6. Адарченко, Н.М. О конечных полу-p-разложимых группах / Н.М. Адарченко, И.В. Близнец, В.Н. Рыжик // Проблемы физики, математики и техники. 2018. N 1 (34). C.41—44.
- 7. Рыжик, В.Н. О F_S -вложенных подгруппах конечных групп / В.Н. Рыжик, Н.М. Адарченко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2014. Т. 84, N^2 3. С. 99–103.

Материалы конференций

- 8. Адарченко, Н.М. Конечные группы с обобщенными σ -субнормальными и σ -перестановочными подгруппами / Н.М. Адарченко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 23–25 марта 2020 г.: материалы конф.: Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. Ч. 3. С. 27–28.
- 9. Адарченко, Н.М. О конечных группах, в которых пильпотептный корадикал является холловой подгруппой / Н.М. Адарченко // Международная юбилейная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, Гомель, 19–20 нояб. 2020 г.: материалы: в 3 ч. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2020. Ч. 3. С. 7–8.

Тезисы докладов

- 10. Адарченко, Н.М. Finite groups with generalized σ -subnormal and σ -permutable subgroups / Н.М. Адарченко // Алгебра и ее приложения: тез. докл. Междунар. конф., Пермь, 12–16 октября 2020 г. Пермь: ПГНИУ, 2020. С. 52.
- 11. Адарченко, Н.М. Finite groups with generalized σ -subnormal and σ -permutable subgroup / Н.М. Адарченко // Мальцевские чтения: тез. докл. Междунар. конф., Новосибирск, 16-20 ноября 2020 г. Новосибирск: НГУ, 2020. С. 174.

РЭЗЮМЭ

Адарчанка Мікіта Міхайлавіч

Будова капечных груп з зададзенымі сістэмамі абагульнена субнармальных і абагульнена перастановачных падгруп

Ключавыя словы: канечная група, рашотка падгруп, σ -нілыватэнтная група, σ -субнармальная падгрупа, σ -перастановачная падгрупа.

Мэта працы: даследаванне будовы канечных груп з абмежаваннямі на некаторыя падгрупы.

Метады даследавання: метады абстрактнай тэорыі груп і метады тэорыі рашотак, метады тэорыі класаў груп, у прыватнасці, метады тэорый класаў Шунка і фармацый.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыйнай рабоце пабудаваны тэорыі амаль σ-субнармальных, амаль σ-перастановачных і слаба S-перастановачных падгруп, якія дазволілі абагульніць і ўзмацніць многія вядомыя вынікі і, у прыватнасці, адпаведныя вынікі Аграваля, Асаада, Баклі, Балістэра-Болінчэс, В. Го, Ванга, Вэя, Іта-Гашюца, Лі, Срынівасана, Спенсера, А.М. Скібы, Педраса-Агилеры, Р. Шміта, Шаалана і інш. Распрацаваны новы падыход да даследаванню канечных груп з умовай транзітыўнасці для абагульнена перастановачных падгруп. Даказаны аналагі тэарэм Манна аб канечных групах з зададзенымі максімальнымі ланцугамі субнармальных пагруп. Даказаны новыя прыкметы гіперцыклічнай укладзенасці нармальных секцый канечных груп. Апісаны канечныя групы фактарызуемыя перастановачнымі падгрупамі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Дысертацыйная работа має тэарэтычны характар. Атрыманыя ў дысертацыі вынікі могуць быць скарыстаны ў даследаваннях па тэорыі складовых канечных груп, у прыватнасці, у далейшых даследаваннях структуры груп з зададзенымі сістэмамі субнармальных, перастановачных і абагульнена перастановачных падгруп, а таксама ў навучальным працэсе пры чытанні спецкурсаў для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцей, напісанні курсавых і дыпломных работ і дысертацый.

Галіна прымянення: сучасная тэорыя канечных груп і іх класаў.

РЕЗЮМЕ

Адарченко Никита Михайлович

Строение конечных групп с заданными системами обобщенно субнормальных и обобщенно перестановочных подгрупп

Ключевые слова: конечная группа, решетка подгрупп, σ-нильпотентная группа, σ-субнормальная подгруппа, σ-перестановочная подгруппа.

Цель работы: исследование строения конечных групп с заданными системами обобщенно субнормальных и обобщенно перестановочных подгрупп.

Методы исследования: методы абстрактной теории групп и методы теории решеток, методы теории классов групп, в частности, методы теорий классов Шунка и формаций.

Полученные результаты и их новизна. В диссертационной работе построены теории почти σ -субнормальных, почти σ -перестановочных и слабо S-перестановочных подгрупп, позволившие обобщить и усилить многие известные результаты и, в частности, соответствующие результаты Аграваля, Асаада, Бакли, Баллистера-Болинчес, В. Го, Ванга, Вэя, Ито-Гашюца, Ли, Сринивасана, Спенсера, А.Н. Скибы, Педраса-Агилеры, Р. Шмидта, Шаалана и др. Разработан новый подход к исследованию конечных групп с условием транзитивности для обобщенно перестановочных подгрупп. Доказаны аналоги теорем Манна о конечных группах с заданными максимальными цепями субнормальных погрупп. Доказаны новые признаки гиперциклической вложенности нормальных секций конечных групп. Описаны конечные группы факторизуемые обощенно перестановочными подгруппами.

Рекомендации по использованию. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп, в частности, в дальнейших исследованиях структуры групп с заданными системами субнормальных, перестановочных и обобщенно перестановочных подгрупп, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ и диссертаций.

Область применения: современная теория конечных групп и их классов.

SUMMARY

Adatchenko Nikita Mihaylovich

The structure of finite groups with given systems of generalized subnormal and generalized permutable subgroups

Keywords: finite group, subgroup lattice, σ -nilpotent group, σ -subnormal subgroup, σ -permutable subgroup.

Research aim: the study of the structure of finite groups with given systems of generalized subnormal and generalized permutable subgroups.

Research methods: methods of the abstract group theory and methods of the lattice theory, methods of the theory of classes of groups, in particular, methods of the theories of Schunk classes and formations.

Obtained results and their novelty. In the dissertation the theories of almost σ -subnormal, almost σ -permutable and weakly S-permutable subgroups are constructed, which made it possible to generalize and strengthen many well-known results and, in particular, the corresponding results of Agrawal, Asaad, Buckley, Ballister-Bolinches, W. Guo, B. Hu, Wang, Wei, Ito-Gashütz, Lee, Srinivasan, Spencer, A.N. Skiba, Pedraza-Aguilera, R. Schmidt, Shaalan and others. A new approach has been developed for study of finite groups with the transitivity condition for generalized permutable subgroups. Analogues of Mann's theorems about finite groups with given maximal chains of subnormal subgroups are obtained. New criteria for hypercyclically embedding of normal sections of finite groups are proved. Finite groups factorized by generalized permutable subgroups are described.

Recommendations for use. The dissertation work has a theoretical character. The results obtained in the dissertation can be used in research on the theory of finite groups, in particular, in further studies of the structure of groups with given systems of subnormal, permutable, and generalized permutable subgroups, as well as in educational process when reading special courses for students of mathematical specialties, writing term papers and theses and dissertations.

Application field: the modern theory of groups and their clasess.

* 20506106*

Fmff-

Научное издание

Адарченко Никита Михайлович

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ И ОБОБЩЕННО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Подписано в печать 13.06.2022. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,53. Тираж 60 экз. Заказ 311.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017. Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013. Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель