

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

**АВТУШКО**

**Татьяна Сергеевна**

**ЗАДАЧА КОШИ**

**ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ  
В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ**

**Автореферат**

**диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление**

**Минск, 2013**

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель – **Лазакович Николай Викторович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры функционального анализа  
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Леваков Анатолий Афанасьевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры высшей математики ФПМИ  
Белорусского государственного университета;

**Каримова Татьяна Ивановна**,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
доцент кафедры высшей математики  
УО “Брестский государственный технический  
университет”.

Оппонирующая организация – УО “Белорусский государственный  
педагогический университет им. М. Танка”

Защита состоится 17 января 2014 в 12.00 часов на заседании совета по  
защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном  
университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус  
юридического факультета), ауд. 407, тел. (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке  
Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан “3” декабря 2013

И.о. ученого секретаря  
совета по защите диссертаций  
доктор физико-математических наук,  
профессор



В.А. Еровенко

## КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} Y''(t) + a'(t)Y'(t) + \sigma'(t)Y(t) + f'(t) = 0, \\ Y(0) = c_1, \\ Y'(0) = c_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t \in T = [0, b]$ ,  $c_1, c_2, b \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma, a, f: T \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные справа функции ограниченной вариации,  $\sigma', a', f'$  — их обобщённые производные.

Рассматриваемая задача является некорректной, поскольку может содержать произведение обобщенных функций. Многими авторами были предложены различные способы трактовки решений таких классов дифференциальных уравнений. Отметим, что разные трактовки одного и того же уравнения приводят к различным решениям и предпочесть ту или иную интерпретацию можно только с помощью каких-либо соображений, используемых при моделировании решаемой практической задачи данным уравнением.

Существующие способы определения решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами можно классифицировать следующим образом. Первый подход связан с исследованием такого типа задач в рамках теории обобщенных функций. В этом ключе работали П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, Я. Лигеза и др. Второй подход заключается в формальном переходе к соответствующему интегральному уравнению, где интеграл понимается в том или ином смысле, например, в смысле Лебега — Стильтеса, Перрона — Стильтеса и т.д. Однако решение будет зависеть от типа интеграла. В этом направлении работали П.С. Дас, Р.Р. Шарма, С.Ж. Пандит, С.Ж. Део, М.Т. Ашордия и др. Согласно третьему подходу, который развивался в работах Я. Курцвейля, С.Т. Завалищина, А.Н. Сесекина и др., под решением дифференциального уравнения понимается предел решений уравнений, которые являются аппроксимациями исходного уравнения.

Задача Коши (1) рассматривалась в работах Р.М. Тация. Используя аппарат квазипроизводных, автор переходит от дифференциального уравнения второго порядка к корректной системе дифференциальных уравнений первого порядка и исследует их.

В работах Ж. Коломбо был предложен способ, согласно которому уравнения с обобщенными коэффициентами рассматриваются в алгебре новых обобщенных функций. Различные виды алгебр были предложены М. Обергугтенбергером, Э. Розингером, Ю.В. Егоровым и др. Общий метод построения таких алгебр дан А.Б. Антоневицем и Я.В. Радыно. Данный подход позволяет с еди-

ных позиций охватить аналогичные результаты, получающиеся описанными выше способами, и может быть эффективно использован при численном моделировании решений задач типа (1). Задачами Коши для уравнений и систем с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций занимались В.В. Грушевский, А.И. Жук, А.Н. Ковальчук, Н.В. Лазакович, В.Г. Новохрост, Е.Б. Розин, Е.В. Шлыков, О.Л. Яблонский и др.

В настоящей работе задача (1) исследуется в алгебре мнемофункций. Находятся и исследуются ассоциированные решения этой задачи. Вводятся и изучаются ассоциированные фундаментальные матрицы, функции Коши, вронскианы, выписывается связь между ними, дается представление ассоциированных решений через ассоциированные фундаментальные матрицы и функции Коши.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Связь работы с крупными научными программами и темами**

Диссертационная работа выполнена на кафедре функционального анализа БГУ. Исследования проводились в рамках госбюджетных научных тем "Дифференциально – операторные модели на тополого – алгебраических и неархимедовых структурах" (№ госрегистрации 20063401) и "Алгебро – аналитические методы современного гармонического, функционального анализа и стохастических дифференциальных уравнений и их применение в задачах эволюции сложных систем" (№ госрегистрации 20113527).

### **Цель и задачи исследования**

Целью диссертационной работы является описание ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами, и исследование их свойств. Цель обусловила постановку следующих задач:

1. Описать все ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами.

2. Найти аналог формулы Остроградского – Лиувилля – Якоби для ассоциированных вронскианов. Установить связь между ассоциированными фундаментальными матрицами, вронскианами, функциями Коши и фундаментальными системами решений.

3. Выразить ассоциированные решения задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифферен-

циальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами, через ассоциированные фундаментальные матрицы и функции Коши.

*Объектом исследования* являются ассоциированные решения задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами.

*Предмет исследований* – свойства ассоциированных решений, ассоциированные вронскианы, функции Коши, фундаментальные системы решений и связь между ними.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Полная классификация ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами.

Этот результат обобщает соответствующие аналоги для одномерного, двумерного диагонального случаев и квазидифференциальных уравнений второго порядка.

2. Доказательства формулы Остроградского – Лиувилля – Якоби для ассоциированных вронскианов и формул, связывающих ассоциированные вронскианы, функции Коши, фундаментальные системы решений и фундаментальные матрицы.

Данные результаты в алгебре мнемофункций получены впервые. Они обобщают соответствующие аналоги для квазидифференциальных уравнений.

3. Представления ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами, через ассоциированные фундаментальные матрицы и функции Коши.

Настоящие результаты в алгебре мнемофункций получены впервые. Они являются обобщением соответствующих аналогов для квазидифференциальных и интегральных уравнений.

### **Личный вклад соискателя**

Все основные результаты, приведенные в выносимой на защиту диссертации, получены автором лично. Роль научного руководителя Н.В. Лазаквича состояла в постановке рассмотренных в диссертации задач и анализе полученных результатов. Результаты, опубликованные совместно с А.Ю. Русецким, А.В. Калютой и Ю.А. Пикманом получены на паритетных началах.

$$T(\mu_l) = \begin{cases} \frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{\Delta a(\mu_l)} (e^{\Delta a(\mu_l)} - 1), & \text{если } \Delta a(\mu_l) \neq 0, \\ \Delta\sigma(\mu_l), & \text{если } \Delta a(\mu_l) = 0, \mu_l \in (0, t]. \end{cases}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

Диссертационная работа посвящена изучению задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций.

В результате проведения диссертационных исследований получены следующие основные результаты:

1. Дана полная классификация ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами [1, 2, 4, 6, 7].

Этот результат обобщает соответствующие аналоги для одномерного, двумерного диагонального случаев и квазидифференциальных уравнений второго порядка.

2. Доказаны формулы Остроградского – Лиувилля – Якоби для ассоциированных вронскианов. Выведены формулы, связывающие ассоциированные вронскианы, функции Коши, фундаментальные системы решений и фундаментальные матрицы [3, 5, 9].

Данные результаты в алгебре мнемофункций получены впервые. Они обобщают соответствующие аналоги для квазидифференциальных уравнений.

3. Найдены представления ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами через ассоциированные фундаментальные матрицы и ассоциированные функции Коши [5, 9].

Настоящие результаты в алгебре мнемофункций получены впервые. Они являются обобщением соответствующих аналогов для квазидифференциальных и интегральных уравнений.

### Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены для дальнейшего развития теории линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций, а также использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

### Статьи в научных журналах

1. Автушко, Т.С. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т.С. Автушко, Н.В. Лазакович, А.Ю. Русецкий // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2013. – № 2. – С. 74–80.

2. Лазакович, Н.В. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Н.В. Лазакович, Т.С. Автушко // Доклады НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 3. – С. 10–16.

3. Автушко, Т.С. Ассоциированные вронскианы линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т.С. Автушко // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2013. – № 2. – С. 21–25.

4. Автушко, Т.С. Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т.С. Автушко, Н.В. Лазакович, А.Ю. Русецкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 3. – С. 83–92.

5. Автушко, Т.С. Представление ассоциированных решений линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами через функции Коши / Т.С. Автушко, Н.В. Лазакович // Доклады НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 4. – С. 32–38.

### Тезисы докладов научных конференций

6. Автушко, Т.С. Аппроксимация решений граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка решениями конечно – разностной задачи с осреднением / Т.С. Автушко, Ю.А. Пикман // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. Междунар. конф., Минск, 7–10 декабря 2010 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т.; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2010. – С. 101.

7. Пикман, Ю.А. Приближение решения граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами решением конечно – разностной задачи с осреднением / Ю.А. Пикман, Т.С. Автушко, А.В. Калюта // Еругинские чтения – 2011: тез. докл. XIV Междунар. матем. конф., Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Полоц. гос. ун-т.; редкол.: В.В. Амелькин [и др.] – Новополоцк, 2011. – С. 127–128.

8. Автушко, Т.С. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами / Т.С. Автушко,

А.Ю. Русецкий // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2012. – Ч. 1. – С. 30–31.

9. Автушко, Т.С. Представление вронскиана линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций/ Т.С. Автушко // Еругинские чтения – 2013: тез. докл. XV Междунар. матем. конф., Гродно, 15–17 мая 2013 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т., Гродн. гос. ун-т. – Гродно, 2013. – Ч. 2. – С. 29.



## РЕЗЮМЕ

Автушко Татьяна Сергеевна

### **Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций**

Ключевые слова: уравнения в дифференциалах, ассоциированные решения, ассоциированные фундаментальные матрицы, ассоциированные вронскианы, ассоциированные функции Коши, формула Остроградского - Лиувилля - Якоби.

Цель диссертационной работы – описание ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах в алгебре мнемофункций, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами, и исследование их свойств. Для достижения поставленной цели использовались методы дифференциальных, квазидифференциальных и интегральных уравнений, теории мнемофункций.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Дана полная классификация ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами.

Этот результат обобщает соответствующие аналоги для одномерного, двумерного диагонального случаев и квазидифференциальных уравнений второго порядка.

2. Доказаны формулы Остроградского - Лиувилля - Якоби для ассоциированных вронскианов. Выведены формулы, связывающие ассоциированные вронскианы, функции Коши, фундаментальные системы решений и фундаментальные матрицы.

Данные результаты в алгебре мнемофункций получены впервые. Они обобщают соответствующие аналоги для квазидифференциальных уравнений.

3. Найдены представления ассоциированных решений задачи Коши для уравнений в дифференциалах, соответствующих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с обобщенными коэффициентами через ассоциированные фундаментальные матрицы и ассоциированные функции Коши.

Настоящие результаты в алгебре мнемофункций получены впервые. Они являются обобщением соответствующих аналогов для квазидифференциальных и интегральных уравнений.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в научных исследованиях в области теории линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами, а также в учебном процессе при чтении специальных курсов.

## РЭЗЮМЭ

Аўтушка Таццяна Сяргеёўна

### **Задача Кашы для лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў другога парадку з абагульненымі каэфіцыентамі ў алгебры мнемафункцый**

Ключавыя словы: раўнанні ў дыферэнцыялах, асацыяваныя рашэнні, асацыяваныя фундаментальныя матрыцы, асацыяваныя вранскіяны, асацыяваныя функцыі Кашы, формулы Астраградскага - Ліувіля - Якобі.

Мэта дысертацыйнай работы – апісанне асацыяваных рашэнняў задачы Кашы для раўнанняў ў дыферэнцыялах у алгебры мнемафункцый, адпаведных лінейным дыферэнцыяльным раўнанням другога парадку з абагульненымі каэфіцыентамі, і даследаванне іх уласцівасцяў. Для дасягнення пастаўленай мэты выкарыстоўваліся метады дыферэнцыяльных, квазідыферэнцыяльных і інтэгральных раўнанняў і тэоры мнемафункцый.

У дысертацыйнай рабоце атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Дана поўная класіфікацыя асацыяваных рашэнняў задачы Кашы для раўнанняў у дыферэнцыялах у алгебры мнемафункцый, адпаведных лінейным дыферэнцыяльным раўнанням другога парадку з абагульненымі каэфіцыентамі.

Гэты вынік абагульняе адпаведныя аналагі для аднамернага, двухмернага дыяганальнага выпадкаў і квазідыферэнцыяльных раўнанняў другога парадку.

2. Даказаны формулы Астраградскага - Ліувіля - Якобі для асацыяваных вранскіянаў. Устаноўлена сувязь паміж асацыяванымі вранскіянамі, функцыямі Кашы, фундаментальнымі сістэмамі рашэнняў і фундаментальнымі матрыцамі.

Дадзеныя вынікі ў алгебры мнемофункцый атрыманы ўпершыню. Яны абагульняюць адпаведныя аналагі для квазідыферэнцыяльных раўнанняў.

3. Знойдзены прадстаўленні асацыяваных рашэнняў задачы Кашы для раўнанняў у дыферэнцыялах у алгебры мнемафункцый, адпаведных лінейным дыферэнцыяльным раўнанням другога парадку з абагульненымі каэфіцыентамі праз асацыяваныя фундаментальныя матрыцы і функцыі Кашы.

Сапраўдныя вынікі ў алгебры мнемофункцый атрыманы ўпершыню. Яны з'яўляюцца абагульненнем адпаведных аналагаў для квазідыферэнцыяльных і інтэгральных раўнанняў.

Дысертацыя носіць тэарэтычны характар. Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаны ў навуковых даследаваннях у галіне тэоры лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў з абагульненымі каэфіцыентамі, а таксама ў навучальным працэсе пры чытанні спецыяльных курсаў.

## SUMMARY

Autushka Tatsiana Sergeevna

### **The Cauchy problem for linear differential equations of the second order with generalized coefficients in the algebra of mnemofunctions**

**Keywords:** equations in differentials, associated solutions, associated fundamental matrices, associated Wronskians, associated Cauchy functions, Ostrogradskiy – Liouville – Jacobi formulas.

The goal of the thesis is the description of the associated solutions of the Cauchy problem for equations in differentials in algebra of mnemofunctions corresponding to linear differential equations of the second order with generalized coefficients, and the study of their properties. Methods of differential, quasidifferential and integral equations, the theory of mnemofunctions are used to achieve this goal.

The following results have been obtained in the thesis:

1. Complete classification of associated solutions of the Cauchy problem for equations in differentials in algebra of mnemofunctions corresponding to linear differential equations of the second order with generalized coefficients has been made.

This result generalizes the corresponding analogues for one-dimensional, two-dimensional diagonal cases and quasidifferential equations of the second order.

2. Ostrogradskiy - Liouville - Jacobi formulas for associated Wronskians has been proven. The formulas connecting the associated Wronskians, Cauchy functions, fundamental systems of solutions and the fundamental matrices installed.

It is the first time such results have been obtained in algebra of mnemofunctions. They generalize the corresponding analogues for quasidifferential equations.

3. Representations of associated solutions of the Cauchy problem for equations in differentials in the algebra of mnemofunctions, corresponding to linear second-order differential equations with generalized coefficients through the associated fundamental matrices and the Cauchy associated functions have been found.

The present results have been obtained for the first time in algebra of mnemofunctions. They are a generalization of the corresponding analogues for quasidifferential and integral equations.

The results of the thesis are theoretical. The results can be used in scientific research activities in the theory of linear differential equations with generalized coefficients and in the educational process when delivering special courses.

