УДК 517.938

И.В. Гайшун

Предельные по фильтру точки и устойчивость динамических систем

В предлагаемой работе изложены некоторые факты, относящиеся к предельным (асимптотическим) свойствам общих динамических систем в предположении, что "временная" группа есть произвольная топологическая абелева группа.

1. Пусть D - непрерывное действие топологической абелевой группы T в полном связном метрическом пространстве E с метрикой d. Таким образом, D-непрерывное отображение из TxE в E и для него выполняются свойства $D(0,x)=x$, $D(t_1 D(t_2,x))=D(t_1+t_2,x)$ при любых x из E, t_1, t_2 из T; в качественной теории дифференциальных уравнений действия D обычно называются динамическими системами.

Пусть П - линейно связная полугруппа в T, для которой $0\in\Pi$ и $\Pi\cap(-\Pi)=0$. Для того, чтобы говорить о предельных свойствах действия D на П, предположим, что в множестве П задан фильтр $\mathfrak{F}$ (не сводящийся к одному элементу {П}) с базисом $\mathfrak{B}$[1]. Очевидно, при любом $t\in\Pi$ семейство $(t+B)_{B\in\mathfrak{B}}$ является базисом некоторого фильтра $\mathfrak{F}_t$ в П. Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{F}$ инвариантный, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_t$ для любого $t\in\Pi$.

Пример 1. Отношение "$t\geq\tau \Leftrightarrow t-\tau\leftarrow\Pi$" задает частичный порядок в T. Обозначим через $\mathfrak{F}$ фильтр сечений упорядоченного множества П [1]. Нетрудно убедиться, что фильтр $\mathfrak{F}$ инвариантный.

Рассмотрим семейство множеств $\mathfrak{B}=\{Z \mid Z\subset\Pi, Z=\Pi\setminus\Phi, \Phi\in\mathfrak{F}\}$ в П. Пусть

$$\Pi'=\bigcup_{Z\in\mathfrak{B}} Z$$

Предложение 1. Семейство множеств $\mathfrak{B}$ задает борнологию на Π'.

Доказательство заключается в простой проверке аксиом борнологического множества [2].

Вообще говоря, $\Pi'\neq\Pi$; множество $\Pi_\infty=\Pi\setminus\Pi'=\bigcap_{\Phi\in\mathfrak{F}}\Phi$ назовем бесконечно удаленным множеством, а элементы $t\in\Pi_\infty$ - бесконечно удаленными точками. Однако, если фильтр $\mathfrak{F}$ инвариантный, то $\Pi_\infty=\varnothing$.

2. Везде дальше предполагаем, что в полугруппе П задан инвариантный фильтр $\mathfrak{F}$. Множества $S^+(x)=D(\Pi,x)$ и $S^-(x)=D(-\Pi,x)$ назовем положительной и отрицательной орбитами точки x (относительно действия D). Так как функции $t\to D(t,x)$ и $t\to D(-t,x)$ отображают П на $S^+(x)$ и $S^-(x)$ соответственно, то образы $\mathfrak{U}_x^+$ и $\mathfrak{U}_x^-$ фильтра $\mathfrak{F}$ относительно этих изображений являются фильтрами в $S^+(x)$ и $S^-(x)$.

Пусть $S^+_\infty(x)$ - бесконечно удаленные множества орбиты $S^+(x)$ (относительно фильтра $\mathfrak{U}^+_x$, а множества $\omega(x)$ и $\alpha(x)$ есть замыкания фильтров $\mathfrak{U}^+_x$ и $\mathfrak{U}^-_x$, т.е.

$$S^+_\infty(x) = \bigcap_{A\in\mathfrak{U}^+_x} A,\quad \omega(x) = \bigcap_{A\in\mathfrak{U}^+_x} \overline{A},\quad \alpha(x) = \bigcap_{A\in\mathfrak{U}^-_x} \overline{A}$$

($\overline{A}$ - замыкание множества $A \subset E$).

Предложение 2. Множества S^+_∞ и $\omega(x)$ положительно инвариантны (т.е. $D(t,S^+_\infty(x)) \subset S^+_\infty(x)$, $D(t,\omega(x)) \subset \omega(x)$ при любом $t\in\Pi$), а множество $\alpha(x)$ отрицательно инвариантно (т.е. $D(t,\alpha(x)) \subset \alpha(x)$ при любом $t\in-\Pi$).

Доказательство проведем для $\omega(x)$, для остальных множеств оно проводится аналогично. Пусть $t\in\Pi$, тогда с учетом непрерывности D и инвариантности $\mathfrak{F}$ имеем

$$D(t,\omega(x)) \subset \bigcap_{A\in\mathfrak{U}^+_x} D(t,\overline{A}) \subset \bigcap_{A\in\mathfrak{U}^+_x} \overline{D(t,A)} = \bigcap_{\Phi\in\mathfrak{F}} \overline{D(t,D(\Phi,x))} = \bigcap_{\Phi\in\mathfrak{F}} \overline{D(t+\Phi,x)} = \bigcap_{\Phi\in\mathfrak{F}} \overline{D(\Phi,x)} = \omega(x),$$

т.е. $\omega(x)$ положительно инвариантно.

Предложение 3. Точка $y\in E$ принадлежит множеству $\omega(x)$ (множеству $\alpha(x)$) тогда и только тогда, когда существует такой фильтр $\mathfrak{G}$ в П, мажорирующий $\mathfrak{F}$, что

$y=\lim_{\mathfrak{G}} D(t,x)$ $(y=\lim_{\mathfrak{G}} D(-t,x))$.

Доказательство легко вытекает из предложения 1.6.8. [3].

Предложение 4. Если $S^+_\infty(x) \neq \varnothing$ и $Z \in S^+_\infty(x)$, то существует положительный (т.е. лежащий в П) ненулевой период ω отображения $t\to D(t,x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S^+_\infty(x) \neq \varnothing$ и $Z \in S^+_\infty(x)$. Тогда для любого $\Phi\in \mathfrak{F}$ существует такое $t_\Phi\in\Phi$, что $D(t_\Phi,x)=z$. Так как $\Pi_\infty = \varnothing$, то можно так выбрать $\Phi_1\in \mathfrak{F}$, $\Phi_2\in \mathfrak{F}$, что $t_{\Phi_1} \neq t_{\Phi_2}$ и $t_{\Phi_1} \geq t_{\Phi_2}$. Тогда элемент $\omega = t_{\Phi_1} - t_{\Phi_2}$ является искомым периодом.

3. Пусть $x\in E$ и $\mathfrak{B}_x$ - фильтр окрестностей точки x. Рассмотрим отображение λ_x: $\mathfrak{B}_x\to\mathfrak{R}$, построенное по правилу

$$\lambda_x(B) = \sup_{t\in\Pi, y\in B} d(D(t,x),D(t,y)),\ B\in\mathfrak{B}_x$$

Упорядочим множество $\mathfrak{B}_x$ с помощью отношения $\supset$ и обозначим через $\mathfrak{G}_x$ фильтр сечений упорядоченного множества $\mathfrak{B}_x$. Так как функция $B\to\lambda_x(B)$ на частично упорядоченном множестве $\mathfrak{B}_x$ убывает, то существует предел $\lambda_0 = \lim_{\mathfrak{G}_x} \lambda(B)$.

О п р е д е л е н и е 1. Движение $t\to D(t,x)$ называется устойчивым (на множестве П), если $\lambda_0=0$. Если же $\lambda_0>0$, то это движение неустойчиво. Действие D называется устойчивым, если все его движения устойчивы.

Действие D называется диссипативным (на П относительно метрики d), если $d(D(t,x),D(t,y))\leq d(x,y)$ при любых $t\in\Pi$, $x,y\in E$. Ясно, что диссипативное действие устойчиво.

Теорема 1. Если пространство E компактно, то действие D устойчиво тогда и только тогда, когда существует метрика $\bar{d}$, топологически эквивалентная d, относительно которой действие D диссипативно.

Для доказательства достаточно положить

$$\hat{d}(x,y) = \overline{\operatorname{Sup}}_{t\in\Pi} d(D(t,x),D(t,y))$$

и непосредственно убедиться, что $\hat{d}$ - нужная метрика на E.

Обозначим через E^+ множество всех точек из E, положительные орбиты которых предкомпактны.

Предложение 5. Если действие D устойчиво на П, то множество E^+ замкнуто и положительно инвариантно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность в E^+, сходящаяся к точке x_0. В силу устойчивости действия D для любого $\varepsilon>0$ найдется n_0, что $d(D(t,x_{n_0}),D(t,x_0))<\varepsilon$ при всех $t\in\Pi$. Так как множество $S^+(x_{n_0})$ предкомпактно, то в нем существует конечная $\varepsilon/2$-сеть $z_1,\dots,z_N$. Легко проверить, что точки $z_1,\dots,z_N$ образуют ε-сеть в множестве $S^+(x_0)$, т.е. орбита $S^+(x_0)$ предкомпактна, а значит множество E^+ замкнуто.

Пусть $z\in E^+$, $\tau\in\Pi$ и $y=D(\tau,z)$. Так как $S^+(y)=D(\tau+\Pi,z)\subset S^+(z)$ и $S^+(z)$ предкомпактно, то и $S^+(y)$ предкомпактно, т.е. E^+ положительно инвариантно.

Предложение 6. Если $x\in E^+$, то множество $\omega(x)$ не пусто и компактно и для любой окрестности V этого множества найдется такое $\Phi\in\mathfrak{F}$, что $D(\Phi,x)\subset V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непустота и компактность $\omega(x)$ очевидны. Пусть существует такая окрестность V_0 множества $\omega(x)$, что для любого $\Phi\in\mathfrak{F}$ найдется $t_\Phi\in\Phi$, удовлетворяющее условию

$$D(t_\Phi,x)\notin V_0. \qquad (1)$$

Так как орбита $S^+(x)$ предкомпактна, то множество $\{D(t_\Phi,x)\}$ имеет предельную точку y, которая, очевидно, принадлежит $\omega(x)$, что противоречит (1). Предложение доказано.

4. Пусть x_0 - неподвижная точка действия D, т.е. $D(t,x_0)=x_0$ при любом $t\in T$. Рассмотрим вопрос об устойчивости точки x_0, т.е. об устойчивости движения $t\to D(t,x_0)=x_0$ в смысле определения 1. Обозначим

$$\alpha = \bigcup_{x\neq x_0}\alpha(x).$$

Теорема 2. Если $x_0\in\alpha$, то точка x_0 неустойчива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x'\in E$ таково, что $x'\neq x_0$ и $x_0\in\alpha(x')$. Положим $\varepsilon=d(x_0,x')$ и возьмем произвольное $\delta>0$. Тогда для любого $\Phi\in\mathfrak{F}$ существует такое $t_{\delta,\Phi}\in\Phi$, что $d(D(-t_{\delta,\Phi},x'),x_0)<\delta$. Значит, для $x_{\delta,\Phi}=D(-t_{\delta,\Phi},x')$ имеем $d(x_0,x_{\delta,\Phi})<\delta$ и $D(t_{\delta,\Phi}, x_{\delta,\Phi}) = x'\in\{x|\, d(x,x_0)=\varepsilon\}=\sigma(x_0,\varepsilon)$, а это и означает неустойчивость точки x_0. Теорема доказана.

Как показывает пример Ю.С.Богданова [4], может оказаться, что $x_0\notin\alpha$ и тем не менее точка x_0 неустойчива. Для получения критерия неустойчивости введем некоторые понятия.

О п р е д е л е н и е 2 [5]. Будем говорить, что действие D удовлетворяет условию A (в точке x_0), если при всяком ограниченном множестве $Z\subset\Pi$ (т.е. $Z\in\mathfrak{B}$) для любого $\rho>0$ найдется такое $\delta>0$, что $D(-Z,\sigma(x_0,\rho))\cap\overline{B(x_0,\delta)}=\varnothing$ ($B(x_0,\delta)$ - шар радиуса δ с центром x_0).

Таким образом, условие A означает, что в неподвижную точку x_0 нельзя попасть за ограниченное время.

Пример 2. Пусть $T=R^2$, $\Pi=R^2_+=\{t|t_1\geq 0, t_2\geq 0\}$, базис фильтра $\mathfrak{F}$ состоит из множеств $\{t|t\in R^2_+, t_2\geq C\}$ (C - произвольная положительная постоянная). Ясно, что фильтр $\mathfrak{F}$ инвариантный. Рассмотрим действие $D(t,x)=\exp(-t_2)x$; легко проверить, что D не удовлетворяет условию A в точке x_0.

Следуя Ю.С.Богданову, определим смежное предельное множество точки x_0 по правилу:

$$\alpha_c = \bigcup_{x\neq x_0}\alpha_c(x),$$

где

$$\alpha_c(x) = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to+0}\bigcap_{\Phi\in\mathfrak{F}}\overline{D(-\Phi,\Gamma_\varepsilon(x))},$$

$\Gamma_\varepsilon(x) = \{z|z \in E, d(x_0,z) = d(x_0,x), d(x,z) \leq \varepsilon\}$, а символ $\operatorname*{Lim}_{\varepsilon\to+0}X_\varepsilon$ $(X_\varepsilon\subset E)$ означает объединение верхних пределов $\limsup\limits_{\varepsilon_n\to+0} X_{\varepsilon_n}$ по всевозможным последовательностям $\varepsilon_n\to+0$.

Теорема 3 [5]. Если пространство E локально компактно и действие D удовлетворяет условию A, то точка x_0 неустойчива тогда и только тогда, когда $x_0\in\alpha_c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Так как $x_0\in\alpha_c$, то существует $x\neq x_0$, что $x_0\in\alpha_c(x)$. Пусть $\rho=d(x,x_0)$. Для любого $\varepsilon>0$ и произвольного $\delta>0$ существуют $t_{\varepsilon\delta}\in\Pi$, $x_{\varepsilon\delta}\in\beta(x_0,\delta)$ и $x'_{\varepsilon\delta}\in\Gamma_\varepsilon(x)$, что $x_{\varepsilon\delta}=D(-t_{\varepsilon\delta}, x'_{\varepsilon\delta})$. Значит $D(t_{\varepsilon\delta},x_{\varepsilon\delta})=x'_{\varepsilon\delta}\in\sigma(x_0,\rho)$. Поэтому точка x_0 неустойчива.

Необходимость. Пусть последовательность положительных чисел (δ_n) стремится к нулю. Существует такое число $\rho>0$, что сфера $\sigma(x_0,\rho)$ компактна и для любого $n\geq1$ найдутся $x_n\in B(x_0,\delta_n)$, $t_n\in\Pi$, для которых $d(D(t_n,x_n),x_0)=\rho$, при этом можно считать, что последовательность $(D(t_n,x_n))_{n\geq1}$ сходится к некоторому элементу $x\in\sigma(x_0,\rho)$. Поэтому для всякого $\varepsilon>0$ можно указать число $m=m(\varepsilon)$, что $D(t_{m+k}, x_{m+k})\in\Gamma_\varepsilon(x)$ при всех $x\geq0$.

Значит

$$x_{m+k}\in D(-t_{m+k}, \Gamma_\varepsilon(x)) \quad (k\geq0) \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что при любом $p\geq1$ множество $C_p=(t_k)_{k\geq p}$ является неограниченным (т.е. $C_p\notin\mathfrak{B}$). В силу (2) для любого $\varepsilon>0$, любой окрестности V_{x_0} точки x_0 и любого $\Phi\in\mathfrak{F}$ существует целое число $g>0$, что $B(x_0,\delta_{m+g})\in V_{x_0}$, $t_{m+g}\in\Phi$, $x_{m+g}\in B(x_0,\delta_{m+g})\subset V$, $x_{m+g}\in D(-t_{m+g}, \Gamma_\varepsilon(x))$, т.е. $x_0\in\alpha_c$.

Теорема доказана.

Пусть

$$r(\rho)= \inf_{t\in\Pi,\ x\in\sigma(x0,\rho)} d(D(-t,x)x_0)$$

Теорема 4 (аналог теоремы Зубова [6]). Точка x_0 устойчива тогда и только тогда, когда $r(\rho)>0$ при всех $\rho\in]0, \rho_0[$, где ρ_0 - некоторое положительное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Из определения 1 следует, что для любого числа $\rho>0$ найдётся постоянная $\sigma(\rho)>0$, удовлетворяющая требованию: $D(f,x)\in B(x_0,\rho)$ при $t\in\Pi$, $x\in B(x_0,\sigma(\rho))$. Простые рассуждения показывают, что $r(\rho)\geq\sigma(\rho)$, поэтому $r(\rho)>0$ при $\rho>0$.

Достаточность. Пусть $\rho\in]0,\rho_0[$ и $\sigma<\min(\rho,r(\rho))$. Покажем, что $D(t,x)\in B(x_0,\rho)$ при $t\in\Pi$, $d(x,x_0)<\sigma$. Если это не так, то в силу линейной связности множества Π существуют $t' \in\Pi$, $x' \in B(x_0,\sigma)$, что $x'' = D(t',x') \in\sigma(x_0,\rho)$. Значит $d(D(-t',x''),x_0)=d(x',x_0)<\sigma$, а это противоречит построению ρ. Так как $\rho\in]0,\rho_0[$ выбирается произвольным образом, то точка x_0 устойчива. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Бурбаки Н.*** Общая топология. Основные структуры. - М.: Физматгиз, 1958. С. 324.
2. ***Hogbe - Nlend H.*** Théorie des bornologies ef applications. - Berlin: Springer, 1971. - 168p.
3. ***Энгелькинг Р.*** Общая топология. - М.: Мир, 1986. -751 с.
4. ***Богданов Ю.С.*** Асимптотические характеристики нелинейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения - 1965. - Т.1, №1. С.41 - 52.
5. ***Гайшун И.В.*** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. - Мн.: Наука и техника, 1983. С. 272.
6. ***Зубов В.И.*** Устойчивость движения. - М.: Высш. школа, 1973. С. 271.

SUMMARY

Limit properties (aer some filter) of general dynamic systems in complete metric space are investigated. The interrelation of these properties and the stability of movement of the investigated systems is determined.

УДК 517.926.4

Н.А. Изобов

Исследования в Беларуси по асимптотической теории дифференциальных систем

Исследования в Белоруссии по ляпуновской асимптотической теории обыкновенных дифференциальных систем вообще и теории показателей Ляпунова, в частности, были начаты профессором Белорусского университета Ю. С. Богдановым (1920 — 1987 гг.) на рубеже пятидесятых - шестидесятых годов и затем продолжены его учениками. В этой теории им получен ряд глубоких результатов, приведенных в отдельном значительном по объему первом пункте вместе с результатами большинства его учеников. В остальных пунктах изложены результаты по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям к задаче Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, системам Коппеля — Конти и уравнениям Эмдена — Фаулера, не указывая при этом из-за недостатка места источников, отсылая читателя к нашим достаточно полным обзорам [3] и [4], содержащим эти источники.

1^0. Асимптотически эквивалентные, правильные и другие системы (см. [1-4]). Ю. С. Богдановым доказано, что всякая линейная система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x\in R^n, \quad t\geq 0, \tag{1}$$