Математические структуры и моделирование 2020. № 3(55). С. 31–54

УДК 512.622
DOI 10.24147/2222-8772.2020.3.31-54

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛИНОМОВ

М.М. Чернявский
аспирант, кафедра инженерной физики, e-mail: misha360ff@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. В статье осуществлён сравнительный анализ двух критериев устойчивости полиномов. Они не требуют получения какой-либо информации о корнях, а позволяют судить об устойчивости непосредственно по коэффициентам полинома. На конкретных числовых примерах рассмотрены особенности их применения. В статье также в символьном виде получены выражения связи между коэффициентами полиномов шестой и четвёртой степеней для случаев, когда между корнями этих полиномов существует линейная или определённая нелинейная связь. В этих случаях алгебраическое уравнение шестой степени можно разрешить в радикалах.

Ключевые слова: многочлен, критерий Гурвица, матрица Гурвица, теория устойчивости, алгебраические уравнения, решение в радикалах.

При исследовании дифференциальных уравнений и их систем, возникающих, например, в математической теории устойчивости, часто важным требованием со стороны исследователя выступает необходимость расположения всех корней характеристического уравнения в левой половине комплексной плоскости [1]. Важной задачей является разработка способов проверки требуемого расположения корней без их непосредственного вычисления. Наибольший практический интерес представляют те способы, которые дают информацию о расположении всех корней путём простого анализа коэффициентов многочлена. Такую задачу называют проблемой Рауса–Гурвица, далее в статье она будет рассмотрена подробнее.

Цель статьи — провести сравнительный анализ двух различных критериев устойчивости полиномов, не требующих получения дополнительной информации о их корнях.

1. Известные результаты из теории устойчивости полиномов

Рассмотрим полином n-й степени

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \tag{1}$$

с произвольными действительными коэффициентами, где $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$.

Определение 1. Известно, что полином (1) называется *полиномом Гурвица*, если все его корни обладают отрицательными действительными частями $\operatorname{Re} z_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ [2, с. 95]. В теории устойчивости полиномы Гурвица называют *устойчивыми полиномами.*

Математическая проблема Рауса–Гурвица заключается в том, чтобы, не находя корни конкретного многочлена, непосредственно по коэффициентам выяснить, устойчив он или нет [3].

Также стоит напомнить о справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Если полином вида (1) является полиномом Гурвица, то все его коэффициенты положительны.*

Определение 2. *Матрицей Гурвица* для полинома (1) называется квадратная матрица порядка n, имеющая следующий вид:

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_s = 0$ при $s < 0$ и $s > n$.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

иногда просто называют определителями Гурвица.

Первым критерием устойчивости полиномов, который рассматривается в статье, является *условие Гурвица*, которое формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *(Теорема Гурвица). Для того чтобы полином вида (1) являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица* M_f.

Доказательства данной теоремы достаточно объёмны, одно из наиболее простых приведено в известном классическом учебнике Б.П. Демидовича по теории устойчивости [2].

Стоит также отметить, что для применения критерия Гурвица на практике можно пользоваться другой теоремой, исторически доказанной позже, чем само условие Гурвица, и позволяющей снизить число проверок детерминантных неравенств. Эту теорему называют теоремой Льенара–Шипара [4, с. 96].

Теорема 3. *(Теорема Льенара–Шипара). Многочлен $f(z)$ вида (1) нечётной (чётной) степени с положительными вещественными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда положительны его определители Гурвица чётного (нечётного) порядка.*

Продемонстрируем применение критерия Гурвица на конкретных числовых примерах.

Пример 1. Пусть

$$f_1(z) = z^4 + 16z^3 + 99z^2 + 280z + 300;$$
$$f_2(z) = z^4 + 16z^3 + 99z^2 + 20z + 300;$$
$$f_3(z) = z^5 + 17z^4 + 117z^3 + 405z^2 + 700z + 500;$$
$$f_4(z) = z^5 + 17z^4 + 117z^3 + 405z^2 + 50z + 500.$$

Для каждого из представленных полиномов составим матрицу Гурвица:

$$M_{f_1} = \begin{pmatrix} 280 & 300 & 0 & 0 \\ 16 & 99 & 280 & 300 \\ 0 & 1 & 16 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{f_2} = \begin{pmatrix} 20 & 300 & 0 & 0 \\ 16 & 99 & 20 & 300 \\ 0 & 1 & 16 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{f_3} = \begin{pmatrix} 700 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 117 & 405 & 700 & 500 & 0 \\ 1 & 17 & 117 & 405 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 117 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; M_{f_4} = \begin{pmatrix} 50 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 117 & 405 & 50 & 500 & 0 \\ 1 & 17 & 117 & 405 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 117 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ниже построчно приведём значения определителей Гурвица для каждого полинома из примера, начиная с Δ_2:

$$\Delta_2(f_1) = 22920; \quad \Delta_3(f_1) = \Delta_4(f_1) = 288320;$$
$$\Delta_2(f_2) = 15000; \quad \Delta_3(f_2) = \Delta_4(f_2) = -45520;$$

$$\Delta_2(f_3) = 225000; \quad \Delta_3(f_3) = 18345000; \quad \Delta_4(f_3) = \Delta_5(f_3) = 226440000;$$
$$\Delta_2(f_4) = -38250; \quad \Delta_3(f_4) = -4492750; \quad \Delta_4(f_4) = \Delta_5(f_4) = -60710500.$$

Таким образом, согласно теореме Гурвица многочлены $f_1(z)$ и $f_3(z)$ являются устойчивыми, а $f_2(z)$ и $f_4(z)$ неустойчивы, несмотря на визуальное сходство полиномов между собой.

Критерий Гурвица является не единственным способом установления устойчивости полинома. Вторым рассматриваемым в настоящей статье критерием устойчивости является упоминаемый в уже ставшей классической монографии В.В. Прасолова [3] способ, впервые предложенный в статье [5]. Данный критерий формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть*

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n -$$

многочлен с вещественными коэффициентами,

$$q(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m,$$

где $m = n(n-1)/2$ *— многочлен, корнями которого служат все суммы пар корней многочлена* $p(z)$. *Многочлен* $p(z)$ *устойчив тогда и только тогда, когда все коэффициенты многочленов* $p(z)$ *и* $q(z)$ *положительны.*

Несмотря на простую формулировку этого решения проблемы Рауса–Гурвица на настоящий момент не существует общих аналитических формул перехода от коэффициентов полинома $p(z)$ к коэффициентам полинома $q(z)$. Можно говорить лишь о частных случаях при конкретном значении n. Для случаев $n = 2$ и $n = 3$ задача решается несложно, поэтому в данной статье рассматривать их не будем. В следующих двух разделах статьи будут представлены соответствующие формулы связи для случаев $n = 4$ и $n = 5$.

2. Установление наличия линейной связи между корнями полиномов четвёртой и шестой степеней

В данном разделе установлены и доказаны необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты полинома комплексного аргумента шестой степени вида (2)

$$P_6(z) = z^6 + c_1 z^5 + c_2 z^4 + c_3 z^3 + c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \quad (2)$$

с коэффициентами полинома четвёртой степени вида (3)

$$Q_4(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \quad (3)$$

при наличии линейной связи между корнями этих полиномов. Коэффициенты полиномов (2) и (3) в общем случае являются комплексными.

Обозначим корни полинома (3) через p_1, p_2, p_3, p_4 и, кроме того, обозначим попарно их суммы

$$q_1 = p_1 + p_2, \quad q_2 = p_1 + p_3, \quad q_3 = p_1 + p_4,$$
$$q_4 = p_2 + p_3, \quad q_5 = p_2 + p_4, \quad q_6 = p_3 + p_4.$$

Теорема 5. *Числа* q_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ *являются корнями полинома (2) тогда и только тогда, когда разрешима относительно* a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ *система уравнений*

$$c_1 = 3a_1, \quad (4)$$

$$c_2 = 3a_1^2 + 2a_2, \quad (5)$$

$$c_3 = a_1^3 + 4a_1a_2, \tag{6}$$

$$c_4 = 2a_1^2a_2 + a_1a_3 + a_2^2 - 4a_4, \tag{7}$$

$$c_5 = a_1\left(a_1a_3 + a_2^2 - 4a_4\right), \tag{8}$$

$$c_6 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2. \tag{9}$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы уравнений (4) — (9) относительно a_k $(k = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ *являются соотношения*

$$c_3 = \frac{2}{3}c_1c_2 - \frac{5}{27}c_1^3, \tag{10}$$

$$c_5 = \frac{1}{81}c_1^5 - \frac{1}{27}c_1^3c_2 + \frac{1}{3}c_1c_4, \tag{11}$$

$$c_6 = \frac{61}{46656}c_1^6 - \frac{5}{1296}c_1^4c_2 + \frac{1}{36}c_1^2c_4. \tag{12}$$

При этом

$$a_1 = \frac{c_1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{6}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2,$$

$$a_3 = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2, \quad a_4 = -\frac{13}{2592}c_1^4 - \frac{1}{144}c_1^2c_2 + \frac{1}{16}c_2^2 - \frac{1}{4}c_4.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть числа q_j $(j = 1,\, 2,\, ...,\, 6)$ являются корнями полинома (2), тогда данный полином представим в виде

$$P_6(z) = (z - p_1 - p_2)(z - p_1 - p_3)(z - p_1 - p_4)\times$$
$$\times(z - p_2 - p_3)(z - p_2 - p_4)(z - p_3 - p_4),$$

следовательно, коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$c_1 = -3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4);$$

$$c_2 = 3\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right) + 8(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4);$$

$$c_3 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)\times$$
$$\times(6(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4) + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2));$$

$$c_4 = 30p_1p_2p_3p_4 + [2(p_1^3p_2 + p_1^3p_3 + p_1^3p_4 + p_1p_2^3 + p_1p_3^3 + p_1p_4^3 + p_2^3p_3 +$$
$$+ p_2^3p_4 + p_2p_3^3 + p_2p_4^3 + p_3^3p_4 + p_3p_4^3) + 13(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 +$$
$$+ p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 +$$
$$+ p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2) + 5(p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2)];$$

$$c_5 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)[(6p_1p_2p_3p_4 + (p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 +$$
$$+ p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2) + 3(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 +$$
$$+ p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2)];$$

$$\begin{gathered}
c_6=(p_1^3p_2^2p_3+p_1^3p_2^2p_4+p_1^3p_2p_3^2+p_1^3p_2p_4^2+p_1^3p_3^2p_4+p_1^3p_3p_4^2+p_1^2p_2^3p_3+\\
+p_1^2p_2p_3^3+p_1^2p_2^3p_4+p_1^2p_3p_4^3+p_1^2p_2p_4^3+p_1^2p_3^3p_4+p_1p_2^3p_3^2+p_1p_2^3p_4^2+p_1p_2^2p_3^3+\\
+p_1p_2^2p_4^3+p_2^2p_3p_4^3+p_2p_3^3p_4^2+p_2p_3^2p_4^3+p_1p_3^3p_4^2+p_1p_3^2p_4^3+p_2^3p_3^2p_4+\\
+p_2^3p_3p_4^2+p_2^2p_3^3p_4)+[2\,(p_1^2p_2^2p_3^2+p_1^2p_2^2p_4^2+p_1^2p_3^2p_4^2+p_2^2p_3^2p_4^2)+\\
+2\,(p_1p_2^3p_3p_4+p_1^3p_2p_3p_4+p_1p_2p_3^3p_4+p_1p_2p_3p_4^3)+4\,(p_1p_2^2p_3^2p_4+p_1p_2^2p_3p_4^2+\\
+p_1p_2p_3^2p_4^2+\ p_1^2p_2^2p_3p_4+p_1^2p_2p_3^2p_4+p_1^2p_2p_3p_4^2)]\,.
\end{gathered}$$

Равенства (4), (5) и (6) получаются непосредственно из соотношений Виета для полинома четвёртой степени.

Суммы, стоящие в круглых скобках в выражениях c_4, c_5, c_6, представляют собой симметричные полиномы от переменных и, согласно известной теореме ([6, с. 322]) о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (2). Проделав соответствующие преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (7) — (9).

Проведём анализ этой системы. Из первого уравнения выражаем $a_1=c_1/3$ и подставляем его в оставшиеся уравнения исходной системы. Получим систему

$$-\frac{c_1^2}{3}-2a_2+c_2=0, \tag{13}$$

$$-\frac{1}{27}c_1^3-\frac{4}{3}a_2c_1+c_3=0, \tag{14}$$

$$-\frac{2}{9}a_2c_1^2-a_2^2-\frac{1}{3}a_3c_1+4a_4+c_4=0, \tag{15}$$

$$-\frac{1}{3}c_1a_2^2-\frac{1}{9}a_3c_1^2+\frac{4}{3}c_1a_4+c_5=0, \tag{16}$$

$$-\frac{1}{3}a_2a_3c_1+\frac{1}{9}a_4c_1^2+a_3^2+c_6=0. \tag{17}$$

Из уравнения (13) однозначно выражается коэффициент a_2: $a_2=-c_1^2/6+$ $+c_2/2$. Подставим его в оставшиеся уравнения (14) — (17) и получим:

$$\frac{5}{27}c_1^3-\frac{2}{3}c_1c_2+c_3=0, \tag{18}$$

$$\frac{1}{108}c_1^4+\frac{1}{18}c_1^2c_2-\frac{1}{4}c_2^2-\frac{1}{3}a_3c_1+4a_4+c_4=0, \tag{19}$$

$$-\frac{1}{108}c_1^5+\frac{1}{18}c_1^3c_2-\frac{1}{12}c_1c_2^2-\frac{1}{9}a_3c_1^2+\frac{4}{3}c_1a_4+c_5=0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{18}a_3c_1^3-\frac{1}{6}a_3c_1c_2+\frac{1}{9}a_4c_1^2+a_3^2+c_6=0. \tag{21}$$

Из уравнения (18) сразу получаем первое условие разрешимости системы (4) — (9). Это соотношение (10). Выразим из уравнения (19) коэффициент a_4:

$$a_4=-\frac{1}{432}c_1^4-\frac{1}{72}c_1^2c_2+\frac{1}{16}c_2^2-\frac{1}{4}c_4+\frac{1}{12}c_1a_3.$$

Подстановка данного выражения в формулу (20) даёт в точности второе условие разрешимости системы (4) — (9). Это соотношение (11).

Если подставить выраженное a_4 в формулу (21), то получим квадратное уравнение относительно коэффициента a_3, корнями которого являются числа

$$a_{3,1} = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2 + \frac{1}{216}\sqrt{61c_1^6 - 180c_1^4c_2 + 1296c_1^2c_4 - 46656c_6}; \qquad (22)$$

$$a_{3,2} = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2 - \frac{1}{216}\sqrt{61c_1^6 - 180c_1^4c_2 + 1296c_1^2c_4 - 46656c_6}. \qquad (23)$$

Проанализируем подкоренное выражение в формулах (22) и (23). Подставим в него c_1, c_2, c_4 и c_6 из уравнений (4), (5), (7) и (9) исходной системы. После преобразований получим

$$61c_1^6 - 180c_1^4c_2 + 1296c_1^2c_4 - 46656c_6 = 729\left(a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3\right)^2.$$

Следовательно,

$$a_3 = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2 \pm \frac{27}{216}\left|a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3\right|. \qquad (24)$$

Из уравнений (4) и (5) выразим $a_1^3 - 4a_1a_2 = 7c_1^3/27 - 2c_1c_2/3$ и подставим в уравнение (24), откуда однозначно получаем значение a_3:

$$a_3 = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2.$$

Таким образом, мы фактически доказали, что дискриминант квадратного по a_3 уравнения (21) равен нулю. Выражение коэффициента a_4 через коэффициенты полинома (2), приведённое в формулировке теоремы, следует автоматически. Подставляя a_3 в уравнение (21), после упрощений получаем в точности условие (12).

Достаточность. Пусть выполнены равенства (10) – (12) и коэффициенты уравнения (2) выражаются через a_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ в соответствии с системой (4) — (9). Полагая

$$a_1 = -\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right), \quad a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4,$$

$$a_3 = -\left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4\right), \quad a_4 = p_1p_2p_3p_4,$$

получаем, что коэффициенты полинома (2) выражаются следующим образом:

$$c_1 = -\left(q_1 + q_2 + \ldots + q_6\right),\ c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + \ldots + q_5q_6,\ \ldots,\ c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т. е. в силу теоремы Виета числа q_1, q_2, ..., q_6 являются его корнями.

Теорема 5 доказана. ■

Таким образом, если требуется проверить на устойчивость полином четвёртой степени $Q_4(z)$ вида (3), то можно вычислить по формулам (4) – (9)

коэффициенты соответствующего полинома $P_6(z)$ и проверить их положительность. Например, сделаем это для полиномов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ из примера 1. Для $f_1(z)$ формулы (4) — (9) дают значения

$$c_1 = 48; \quad c_2 = 966; \quad c_3 = 10432; \quad c_4 = 63769; \quad c_5 = 209296; \quad c_6 = 288320.$$

Для $f_2(z)$ аналогично находим

$$c_1 = 48; \quad c_2 = 966; \quad c_3 = 10432; \quad c_4 = 59609; \quad c_5 = 142736; \quad c_6 = -45520.$$

Для второго полинома значение $c_6 < 0$, что свидетельствует о его неустойчивости. Действительно, $f_2(z)$ имеет два корня с положительной действительной частью, а у $f_1(z)$ таковых корней нет.

Отметим, что кроме проверки полиномов четвёртой степени на устойчивость теорема 5 может быть использована для ответа на вопрос, являются ли корни заданного полинома шестой степени $P_6(z)$ попарными суммами корней некого полинома четвёртой степени $Q_4(z)$. Кроме того, если такой полином существует, то по представленным в теореме 5 формулам можно найти его коэффициенты, а затем и корни, причём в радикалах. Приведём пример, описывающий данную ситуацию.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x^6 + 12x^5 + 34x^4 - 48x^3 - 359x^2 - 540x - 252 = 0.$$

Для коэффициентов этого уравнения выполнены условия связи (10) – (12). По формулам для a_k $(k = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ вычислим соответствующие значения коэффициентов и получим выражение для полинома четвёртой степени:

$$Q_4(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24.$$

Его корнями являются числа $p_1 = 1$; $p_2 = 2$; $p_3 = -3$; $p_4 = -4$. Тогда

$$q_1 = 3; \quad q_2 = -2; \quad q_3 = -3; \quad q_4 = -1; \quad q_5 = -2; \quad q_6 = -7.$$

Путём подстановки данных чисел в исходное уравнение убеждаемся, что все они являются его решениями.

3. Установление наличия линейной связи между корнями полиномов пятой и десятой степеней

В этой части статьи приведены необходимые и достаточные условия существования линейной связи между полиномами пятой и десятой степеней.

Пусть дан полином

$$P_{10}(z) = z^{10} + c_1 z^9 + c_2 z^8 + c_3 z^7 + c_4 z^6 + c_5 z^5 + c_6 z^4 + c_7 z^3 + c_8 z^2 + c_9 z + c_{10}. \quad (25)$$

Установим связь его коэффициентов с коэффициентами полинома пятой степени

$$Q_5(z) = z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 \quad (26)$$

при наличии линейной связи между их корнями.

Обозначим корни полинома (26) через p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 и запишем коэффициенты полинома (25), используя соотношение Виета для коэффициентов многочлена пятой степени:

$$a_1 = -\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right);$$

$$a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5;$$

$$\begin{gathered} a_3 = -\left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + \right. \\ \left. + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5\right); \end{gathered}$$

$$a_4 = p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5;$$

$$a_5 = -p_1p_2p_3p_4p_5.$$

Кроме того, обозначим все суммы корней полинома (26):

$$\begin{gathered} q_1 = p_1 + p_2, \quad q_2 = p_1 + p_3, \quad q_3 = p_1 + p_4, \quad q_4 = p_1 + p_5, \quad q_5 = p_2 + p_3, \\ q_6 = p_2 + p_4, \quad q_7 = p_2 + p_5, \quad q_8 = p_3 + p_4, \quad q_9 = p_3 + p_5, \quad q_{10} = p_4 + p_5. \end{gathered}$$

Теорема 6. *Числа q_j ($j = 1, 2, ..., 10$) являются корнями полинома (25) тогда и только тогда, когда разрешима относительно a_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$) система уравнений*

$$c_1 = 4a_1, \tag{27}$$

$$c_2 = 6a_1^2 + 3a_2, \tag{28}$$

$$c_3 = 4a_1^3 + 9a_1a_2 + a_3, \tag{29}$$

$$c_4 = a_1^4 + 9a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 3a_2^2 - 3a_4, \tag{30}$$

$$c_5 = 3a_1^3a_2 + 5a_1^2a_3 + 6a_1a_2^2 - 5a_1a_4 + 2a_2a_3 - 11a_5, \tag{31}$$

$$c_6 = 2a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 - 2a_1^2a_4 + 6a_1a_2a_3 - 22a_1a_5 + a_2^3 - 2a_2a_4 - a_3^2, \tag{32}$$

$$c_7 = 4a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^3 - 16a_1^2a_5 + a_2^2a_3 - 4a_2a_5 - 4a_3a_4, \tag{33}$$

$$\begin{gathered} c_8 = -4a_1^3a_5 + a_1^2a_2a_4 + a_1^2a_3^2 + \\ +2a_1a_2^2a_3 - 9a_1a_2a_5 - 3a_1a_3a_4 - a_2a_3^2 + a_2^2a_4 + 7a_3a_5 - 4a_4^2, \end{gathered} \tag{34}$$

$$c_9 = -4a_1^2a_2a_5 + a_1a_2a_3^2 + a_1a_2^2a_4 + 4a_1a_3a_5 - 4a_1a_4^2 - a_2^2a_5 - a_3^3 + 4a_4a_5, \tag{35}$$

$$c_{10} = -a_1^2a_4^2 - a_1a_2^2a_5 + a_1a_2a_3a_4 + 2a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5 - a_3^2a_4 - a_5^2. \tag{36}$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы уравнений (27) — (36) относительно a_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$) являются соотношения (37):

$$\begin{gathered} c_6 = -\tfrac{3}{64}c_1^6 + \tfrac{5}{16}c_1^4c_2 - \tfrac{3}{8}c_1^3c_3 - \tfrac{19}{36}c_1^2c_2^2 - \tfrac{1}{4}c_1^2c_4 + \\ + \tfrac{13}{9}c_1c_2c_3 + \tfrac{1}{2}c_1c_5 - \tfrac{1}{27}c_2^3 + \tfrac{2}{9}c_2c_4 - c_3^2; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
c_7 = -\tfrac{21}{352}c_1^7 + \tfrac{39}{88}c_1^5c_2 - \tfrac{49}{88}c_1^4c_3 - \tfrac{181}{198}c_1^3c_2^2 + \tfrac{3}{11}c_1^3c_4 + \tfrac{1}{22}c_1^2c_5 + \tfrac{415}{198}c_1^2c_2c_3 + \\
+\tfrac{94}{297}c_1c_2^3 - \tfrac{4}{3}c_1c_3^2 - \tfrac{104}{99}c_1c_2c_4 - \tfrac{41}{99}c_2^2c_3 + \tfrac{4}{33}c_2c_5 + \tfrac{4}{3}c_3c_4;
\\[2ex]
c_8 = -\tfrac{1229}{45056}c_1^8 + \tfrac{7}{1024}c_1^6 + \tfrac{3757}{16896}c_1^6c_2 - \tfrac{403}{1408}c_1^5c_3 - \tfrac{3}{128}c_1^4c_2 - \tfrac{3403}{6336}c_1^4c_2^2 + \tfrac{13}{44}c_1^4c_4 + \\
+\tfrac{1}{32}c_1^3c_3 + \tfrac{929}{792}c_1^3c_2c_3 - \tfrac{7}{44}c_1^3c_5 - \tfrac{221}{198}c_1^2c_2c_4 + \tfrac{799}{2376}c_1^2c_2^3 - \tfrac{145}{198}c_1^2c_3^2 - \tfrac{301}{594}c_1c_2^2c_3 + \\
+\tfrac{139}{99}c_1c_3c_4 + \tfrac{6}{11}c_1c_2c_5 - \tfrac{1}{27}c_2^4 + \tfrac{7}{27}c_2^2c_4 + \tfrac{1}{11}c_2c_3^2 - \tfrac{7}{11}c_3c_5 - \tfrac{4}{9}c_4^2;
\\[2ex]
c_9 = -\tfrac{13499}{720896}c_1^9 - \tfrac{17}{32768}c_1^8 + \tfrac{4087}{22528}c_1^7c_2 + \tfrac{43}{12288}c_1^6c_2 - \tfrac{1931}{8448}c_1^6c_3 - \tfrac{58787}{101376}c_1^5c_2^2 + \\
+\tfrac{587}{8448}c_1^5c_4 - \tfrac{1}{384}c_1^5c_3 - \tfrac{5}{768}c_1^4c_2^2 + \tfrac{1}{384}c_1^4c_4 + \tfrac{743}{528}c_1^4c_2c_3 - \tfrac{1}{22}c_1^4c_5 + \tfrac{1}{144}c_1^3c_2c_3 + \\
+\tfrac{3913}{6336}c_1^3c_2^3 - \tfrac{173}{198}c_1^3c_3^2 - \tfrac{51}{176}c_1^3c_2c_4 + \tfrac{1}{6}c_1^2c_2c_5 + \tfrac{35}{99}c_1^2c_3c_4 + \tfrac{1}{432}c_1^2c_2^3 - \tfrac{1}{144}c_1^2c_2c_4 - \\
-\tfrac{835}{396}c_1^2c_2^2c_3 + \tfrac{19}{132}c_1c_2^2c_4 - \tfrac{95}{3564}c_1c_2^4 + \tfrac{245}{99}c_1c_2c_3^2 - \tfrac{16}{99}c_1c_4^2 - \tfrac{7}{33}c_1c_3c_5 + \\
+\tfrac{2}{99}c_2^3c_3 - \tfrac{1}{33}c_2^2c_5 - \tfrac{8}{99}c_2c_3c_4 - c_3^3 + \tfrac{4}{33}c_4c_5;
\\[2ex]
c_{10} = -\tfrac{61}{15488}c_1^{10} + \tfrac{323}{7744}c_1^8c_2 - \tfrac{51}{968}c_1^7c_3 - \tfrac{10595}{69696}c_1^6c_2^2 + \tfrac{43}{1936}c_1^6c_4 - \tfrac{1}{968}c_1^5c_5 + \\
+\tfrac{711}{1936}c_1^5c_2c_3 + +\tfrac{1207}{5808}c_1^4c_2^3 - \tfrac{203}{1452}c_1^4c_2c_4 + \tfrac{1}{1452}c_1^3c_2c_5 - \tfrac{17819}{26136}c_1^3c_2^2c_3 + \\
+\tfrac{391}{2178}c_1^3c_3c_4 - \tfrac{817}{13068}c_1^2c_2^4 + +\tfrac{2809}{13068}c_1^2c_2^2c_4 - \tfrac{16}{1089}c_1^2c_4^2 - \tfrac{7}{726}c_1^2c_3c_5 + \\
+\tfrac{3}{242}c_1c_2^2c_5 - \tfrac{577}{1089}c_1c_2c_3c_4 + \tfrac{8}{363}c_1c_4c_5 - \tfrac{7}{363}c_2c_3c_5 - \tfrac{1}{3}c_3^3c_1 - \tfrac{2021}{8712}c_3^2c_1^4 + \\
+\tfrac{865}{1089}c_3^2c_1^2c_2 - \tfrac{103}{1089}c_3^2c_2^2 + \tfrac{1}{3}c_3^2c_4 - \tfrac{1}{121}c_5^2.
\end{gathered} \tag{37}$$

При этом

$$a_1 = \frac{c_1}{4}; \quad a_2 = -\frac{c_1^2}{8} + \frac{c_2}{3}; \quad a_3 = \frac{7}{32}c_1^3 - \frac{3}{4}c_1c_2 + c_3;$$

$$a_4 = \frac{17}{256}c_1^4 - \frac{13}{48}c_1^2c_2 + \frac{1}{9}c_2^2 + \frac{1}{3}c_1c_3 - \frac{1}{3}c_4; \tag{38}$$

$$a_5 = -\frac{53}{11264}c_1^5 + \frac{21}{704}c_1^3c_2 - \frac{17}{396}c_1c_2^2 - \frac{17}{528}c_1^2c_3 + \frac{2}{33}c_2c_3 + \frac{5}{132}c_1c_4 - \frac{1}{11}c_5.$$

Доказательство. Доказательство осуществляется по тому же алгоритму, что использовался при доказательстве теоремы 5. Промежуточные вычисления являются достаточно громоздкими, читатель может их проделать в системе компьютерной математики. В статье приведены только важные опорные моменты.

Пусть числа $q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, 10)$ являются корнями полинома (25). Запишем коэффициенты этого полинома, используя соотношение Виета для коэффициентов полинома десятой степени, а затем подставим туда числа q_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$. Таким образом мы получим выражения коэффициентов полинома десятой степени через корни полинома пятой степени (26).

$$c_1 = -\left(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8 + q_9 + q_{10}\right) \Leftrightarrow$$

$$c_1 = -4\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right).$$

Используя соотношения Виета для коэффициентов полинома пятой степени, получим формулы (27) — (36). Для коэффициента c_1 имеем $c_1 = 4a_1$. Для остальных коэффициентов выражения более сложные.

$$c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + q_1q_4 + q_1q_5 + q_1q_6 + q_1q_7 + q_1q_8 + q_1q_9 + q_1q_{10} + \ldots + q_9q_{10};$$

$$c_2 = 6(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 + 3\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + \right.$$
$$\left. + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5\right) = 6a_1^2 + 3a_2.$$

$$c_3 = -\left(q_1q_2q_3 + q_1q_2q_4 + q_1q_2q_5 + \ldots + q_7q_8q_{10} + q_7q_9q_{10} + q_8q_9q_{10}\right).$$

$$\Rightarrow c_3 = -(4\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right)^3 + 9\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right)\left(p_1p_2 + p_1p_3 + \right.$$
$$\left. + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5\right) + \left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + \right.$$
$$\left. + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5\right)) =$$
$$= 4a_1^3 + 9a_1a_2 + a_3.$$

$$c_4 = q_1q_2q_3q_4 + q_1q_2q_3q_5 + \ldots + q_7q_8q_9q_{10}.$$

$$\Rightarrow c_4 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^4 + 9(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2\left(p_1p_2 + p_1p_3 + \right.$$
$$\left. + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5\right) + 3\left(p_1p_2 + p_1p_3 + \right.$$
$$\left. + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5\right)^2 + 4\left(p_1 + p_2 + p_3 + \right.$$
$$\left. + p_4 + p_5\right)\left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + \right.$$
$$\left. + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5\right) - 3\left(p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + \right.$$
$$\left. + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5\right) = a_1^4 + 9a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 3a_2^2 - 3a_4.$$

$$c_5 = -\left(q_1q_2q_3q_4q_5 + q_1q_2q_3q_4q_6 + \ldots + q_6q_7q_8q_9q_{10}\right).$$

$$\Rightarrow c_5 = -(3\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right)^3\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + \right.$$
$$\left. + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5\right) + 6\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right)\left(p_1p_2 + p_1p_3 + \right.$$
$$\left. + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5\right)^2 + 5\left(p_1 + p_2 + p_3 + \right.$$
$$\left. + p_4 + p_5\right)^2\left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + \right.$$
$$\left. + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5\right) + 2\left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + \right.$$
$$\left. + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5\right)\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + \right.$$
$$\left. + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5\right) - 5\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right) \times$$
$$\times \left(p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5\right) - 11p_1p_2p_3p_4p_5).$$

$$c_5 = 3a_1^3a_2 + 5a_1^2a_3 + 6a_1a_2^2 - 5a_1a_4 + 2a_2a_3 - 11a_5.$$

$$c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6 + q_1q_2q_3q_4q_5q_5 + \ldots + q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}$$

$$c_6 = 3(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5)^2 \times$$
$$\times (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 + 2 (p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 +$$
$$+ p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5) (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^3 +$$
$$+ (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5)^3 +$$
$$+ 6 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) (p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 +$$
$$+ p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5) \times (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 +$$
$$+ p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) - 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 \times$$
$$\times (p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5) - (p_1p_2p_3 +$$
$$+ p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 +$$
$$+ p_3p_4p_5) - 2 (p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5) \times$$
$$\times (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) -$$
$$- 22 p_1p_2p_3p_4p_5 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5).$$

$$c_6 = 2a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 - 2a_1^2a_4 + 6a_1a_2a_3 - 22a_1a_5 + a_2^3 - 2a_2a_4 - a_3^2.$$

Аналогичным образом при помощи системы компьютерной математики получаем оставшиеся соотношения (33) — (36).

Выражая поочерёдно коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 из системы уравнений, получаем выражения (38). Путём подстановки их в уравнения (32) – (36) выходим на условия (37). ■

Таким образом, используя формулы (27) – (36) из теоремы 6, можно проверить полином пятой степени с действительными положительными коэффициентами на устойчивость. Сделаем это для $f_3(z)$ и $f_4(z)$ из примера 1, представленного в первой части настоящей статьи. Для $f_3(z)$ формулы (27) – (36) дают значения

$$c_1 = 68,\ c_2 = 2085,\ c_3 = 37958,\ c_4 = 454345,\ c_5 = 3735736,\ c_6 = 21363351,$$

$$c_7 = 83868526, \quad c_8 = 31665730, \quad c_9 = 190864200, \quad c_{10} = 226440000,$$

а для $f_4(z)$ —

$$c_1 = 68,\ c_2 = 2085,\ c_3 = 37958,\ c_4 = 456295,\ c_5 = 3790986,\ c_6 = 21891151,$$

$$c_7 = 84921526, \quad c_8 = 16165180, \quad c_9 = 200735750, \quad c_{10} = -60710500.$$

Для $f_4(z)$ значение $c_{10} < 0$, что свидетельствует о его неустойчивости согласно теореме 4. Действительно, $f_4(z)$ имеет два корня с положительной действительной частью, а у $f_3(z)$ таковых корней нет.

Условия (37) можно использовать для ответа на вопрос, существует ли для заданного полинома десятой степени $P_{10}(z)$ полином пятой степени $Q_5(z)$, такой, что корни полинома $P_{10}(z)$ будут являться в точности попарными суммами корней полинома $Q_5(z)$. Приведём конкретный пример.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$x^{10} + 12x^9 - 15x^8 - 564x^7 - 1089x^6 + 4980x^5 + \\ +12587x^4 - 8316x^3 - 21852x^2 + 3888x + 10368 = 0.$$

Для полинома, стоящего в левой части этого уравнения, условия (37) выполнены. Поэтому по формулам (38) находим коэффициенты соответствующего полинома $Q_5(z)$, который примет вид

$$Q_5(x) = x^5 + 3x^4 - 23x^3 - 51x^2 + 94x + 120.$$

Находим его корни. Это числа $p_1 = -1,\ p_2 = 2,\ p_3 = -3,\ p_4 = 4,\ p_5 = 5$. Их попарными суммами являются числа

$$q_1 = 1, \quad q_2 = -4, \quad q_3 = 3, \quad q_4 = 4, \quad q_5 = -1, \\ q_6 = 6, \quad q_7 = 7, \quad q_8 = 1, \quad q_9 = 2, \quad q_{10} = 9.$$

Подставляя поочерёдно их в исходное уравнение десятой степени, убеждаемся, что все они являются его корнями.

Подытожим результаты, приведённые во второй и третьей частях статьи. При увеличении на единицу степени полинома, который требуется проверить на устойчивость, значительно возрастает сложность получения формул для выражения коэффициентов полинома степени $n(n-1)/2$ через коэффициенты полинома степени n. Несомненно, доказательства теорем, аналогичных теоремам 5 и 6 настоящей статьи, для случаев $n > 5$ представляют собой развитие фундаментального знания, однако применение таких теорем в качестве критерия устойчивости полиномов становится менее целесообразным по сравнению с другими существующими способами, в частности, условием Гурвица.

4. Анализ коэффициентов полинома шестой степени, корни которого представимы в виде попарных произведений корней некоторых полиномов четвёртой степени

Во второй части настоящей статьи были доказаны необходимые и достаточные условия связи между коэффициентами полиномов шестой и четвёртой степеней для случая, когда между корнями упомянутых полиномов существует простая линейная связь (теорема 5). Естественным будет вопрос, можно ли получить некие аналогичные условия связи между коэффициентами этих полиномов в случае, когда между их корнями существует определённая нелинейная связь? Четвёртая и пятая части статьи посвящены изучению данного вопроса.

В этом разделе установлены и доказаны необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты полинома комплексного аргумента шестой степени вида (39)

$$P(z) = z^6 + c_1 z^5 + c_2 z^4 + c_3 z^3 + c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \tag{39}$$

с коэффициентами семейства полиномов четвёртой степени вида (40)

$$Q_{4,i}\,(z) = z^4 + a_{1,i}z^3 + a_{2,i}z^2 + a_{3,i}z + a_{4,i} \tag{40}$$

при наличии связи между корнями этих полиномов, о которой далее пойдёт речь. В общем случае коэффициенты рассматриваемых полиномов могут быть комплексными.

Обозначим корни i-го полинома из семейства (40) через p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, p_{4i} и, кроме того, обозначим все возможные их произведения:

$$q_1 = p_{1i}p_{2i}, \quad q_2 = p_{1i}p_{3i}, \quad q_3 = p_{1i}p_{4i},$$
$$q_4 = p_{2i}p_{3i}, \quad q_5 = p_{2i}p_{4i}, \quad q_6 = p_{3i}p_{4i}.$$

Теорема 7. *Числа q_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ являются корнями полинома (39) тогда и только тогда, когда разрешима относительно a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ система уравнений*

$$c_1 = -a_2, \tag{41}$$
$$a_1a_3 - a_4 - c_2 = 0, \tag{42}$$
$$2a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_3^2 - c_3 = 0, \tag{43}$$
$$a_1a_3a_4 - a_4^2 - c_4 = 0, \tag{44}$$
$$c_5 = -a_2a_4^2, \tag{45}$$
$$c_6 = a_4^3. \tag{46}$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (41) — (46) относительно a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ являются соотношения

$$c_5 = \left(\frac{c_4}{c_2}\right)^2 c_1, \tag{47}$$
$$c_6 = \left(\frac{c_4}{c_2}\right)^3. \tag{48}$$

При этом решением системы (41) — (46) являются ровно 4 различных набора чисел a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, в которых все a_2 и a_4 определены единообразно:

$$a_2 = -c_1, \quad a_4 = \frac{c_4}{c_2},$$

а элементы $a_{1,k}$ и $a_{3,k}$ связаны соотношениями:

$$a_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2c_4c_2}\sqrt{c_4c_2\left(-2c_1c_2c_4 - c_2^2c_3 + d\right)}, \quad a_{3,1} = \frac{c_2^2 + c_4}{a_{1,1}c_2};$$
$$a_{1,2} = -a_{1,1}, \quad a_{3,2} = -a_{3,1};$$
$$a_{1,3} = \frac{\sqrt{2}}{2c_4c_2}\sqrt{-c_4c_2\left(2c_1c_2c_4 + c_2^2c_3 + d\right)}; \quad a_{3,3} = \frac{c_2^2 + c_4}{a_{1,3}c_2};$$
$$a_{1,4} = -a_{1,3}, \quad a_{3,4} = -a_{3,3},$$

где $d = \sqrt{c_2\left(4c_1^2c_2c_4^2 + 4c_1c_2^2c_3c_4 - 4c_2^4c_4 + c_2^3c_3^2 - 8c_2^2c_4^2 - 4c_4^3\right)}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть числа q_j $(j = 1, 2, ..., 6)$ являются корнями полинома (39), тогда при любом фиксированном i коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$c_1 = -\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4\right);$$

$$c_2 = 3p_1p_2p_3p_4 + (p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + \\ + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2);$$

$$c_3 = -\left(p_1^3p_2p_3p_4 + p_1p_2^3p_3p_4 + p_1p_2p_3^3p_4 + p_1p_2p_3p_4^3\right) - (p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2 + \\ + p_1^2p_3^2p_4^2) - 2\left(p_1^2p_2^2p_3p_4 + p_1^2p_2p_3^2p_4 + p_1^2p_2p_3p_4^2 + p_1p_2^2p_3^2p_4 + p_1p_2^2p_3p_4^2 + p_1p_2p_3^2p_4^2\right);$$

$$c_4 = p_1p_2p_3p_4\,(3p_1p_2p_3p_4 + (p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + \\ + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2));$$

$$c_5 = -p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4\right);$$

$$c_6 = p_1^3p_2^3p_3^3p_4^4.$$

Равенства (41), (45) и (46) следуют непосредственно из формул Виета для полинома четвёртой степени.

Суммы, стоящие в скобках для выражений c_2, c_3, c_4, представляют собой симметричные полиномы от переменных p_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ и, согласно известной теореме о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (40) [6, с. 322]. Проделав нужные преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (42) — (44).

Проведём анализ этой системы. Из первого уравнения выражаем a_2 и подставляем его в оставшиеся уравнения системы. На втором шаге из уравнения (42) выражаем a_3:

$$a_3 = \left(a_4 + c_2\right)/a_1.$$

Подставим его в уравнение (44) и получим однозначное выражение

$$a_4 = c_4/c_2.$$

Тогда из формул (45) и (46) сразу вытекают равенства (47) и (48).

Теперь осталось выражение

$$a_3 = \frac{a_4 + c_2}{a_1} = \frac{c_4 + c_2^2}{a_1c_2}$$

подставить в уравнение (43), которое превратится в биквадратное по переменной a_1:

$$a_1^4 + \left(2c_1 + \frac{c_2c_3}{c_4}\right)a_1^2 + \frac{\left(c_4 + c_2^2\right)^2}{c_2c_4} = 0.$$

Решая данное уравнение, получаем в точности формулы, приведённые в формулировке теоремы.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (47) и (48) и коэффициенты многочлена (39) выражаются через a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ в соответствии с системой (41) — (46). Полагая

$$a_1 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4,$$

$$a_3 = -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4), \quad a_4 = p_1p_2p_3p_4,$$

получаем, что коэффициенты полинома (39) выражаются следующим образом:

$$c_1 = -(q_1 + q_2 + \ldots + q_6), \; c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + \ldots + q_5q_6, \; \ldots, \; c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т. е. в силу теоремы Виета числа $q_1, q_2, \ldots, q_6$ являются его корнями.

Теорема 7 доказана. ■

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$x^6 + 7x^5 - 112x^4 - 1204x^3 - 2688x^2 + 4032x + 13824 = 0. \tag{49}$$

Для коэффициентов этого уравнения выполнены условия связи (47) и (48). По формулам для a_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ вычислим значения коэффициентов интересующих нас четырёх полиномов четвёртой степени:

$$Q_{4,1}(x) = x^4 + \frac{11\sqrt{6}}{6}x^3 - 7x^2 - 8\sqrt{6}x + 24, \tag{50}$$

$$Q_{4,2}(x) = x^4 - \frac{11\sqrt{6}}{6}x^3 - 7x^2 + 8\sqrt{6}x + 24, \tag{51}$$

$$Q_{4,3}(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24, \tag{52}$$

$$Q_{4,4}(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24. \tag{53}$$

Ниже построчно приведём значения корней полиномов (50) — (53) соответственно:

$$-2\sqrt{6}, \quad \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad -\sqrt{6};$$

$$2\sqrt{6}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad \sqrt{6};$$

$$1, \quad 2, \quad -3, \quad -4;$$

$$-1, \quad -2, \quad 3, \quad 4.$$

Несложно убедиться в том, что попарное умножение корней полиномов (50) — (53) даёт один и тот же результат, а именно числа:

$$q_1 = 12; \quad q_2 = 2; \quad q_3 = -8; \quad q_4 = -6; \quad q_5 = -4; \quad q_6 = -3.$$

Путём подстановки данных чисел в исходное уравнение (49) убеждаемся, что все они являются его решениями. Таким образом, можно сделать вывод, что из четырёх наборов формул для коэффициентов полинома четвёртой степени (40) можно выбирать любой, например дающий в конкретном примере менее громоздкие выражения, либо корни которого находятся проще.

5. Анализ связи между коэффициентами полиномов шестой и четвёртой степеней в случае иной конкретной нелинейной связи между их корнями

Данная часть статьи посвящена установлению и доказательству необходимых и достаточных условий, связывающих коэффициенты полинома шестой степени над полем комплексных чисел вида

$$P_6(z) = z^6 + c_1 z^5 + c_2 z^4 + c_3 z^3 + c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \tag{54}$$

с коэффициентами семейства полиномов четвёртой степени вида

$$Q_{4,i}(z) = z^4 + a_{1,i} z^3 + a_{2,i} z^2 + a_{3,i} z + a_{4,i} \tag{55}$$

при наличии определённой нелинейной связи между корнями этих полиномов, о которой далее пойдёт речь. В общем случае все коэффициенты рассматриваемых полиномов могут быть комплексными.

Обозначим корни i-го полинома из семейства (55) через p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, p_{4i}, а все попарные комбинации их сумм и произведений через

$$q_1 = p_{1i}p_{2i}(p_{3i} + p_{4i}), \quad q_2 = p_{1i}p_{3i}(p_{2i} + p_{4i}), \quad q_3 = p_{1i}p_{4i}(p_{2i} + p_{3i}),$$
$$q_4 = p_{2i}p_{3i}(p_{1i} + p_{4i}), \quad q_5 = p_{2i}p_{4i}(p_{1i} + p_{3i}), \quad q_6 = p_{3i}p_{4i}(p_{1i} + p_{2i}).$$

Теорема 8. *Числа q_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) являются корнями полинома (54) тогда и только тогда, когда разрешима относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) система уравнений*

$$c_1 = 3a_3, \tag{56}$$
$$2a_2a_4 + 3a_3^2 - c_2 = 0, \tag{57}$$
$$a_3\left(4a_2a_4 + a_3^2\right) - c_3 = 0, \tag{58}$$
$$a_4\left(a_1a_3a_4 + a_2^2a_4 + 2a_2a_3^2 - 4a_4^2\right) - c_4 = 0, \tag{59}$$
$$a_3a_4^2\left(a_1a_3 + a_2^2 - 4a_4\right) - c_5 = 0, \tag{60}$$
$$a_4^3\left(a_1^2a_4 - a_1a_2a_3 + a_3^2\right) + c_6 = 0. \tag{61}$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (56) — (61) относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) являются соотношения

$$c_3 = -\frac{5}{27}c_1^3 + \frac{2}{3}c_1c_2, \tag{62}$$

$$c_5 = \frac{1}{3}c_1c_4 + \frac{1}{81}c_1^5 - \frac{1}{27}c_1^3c_2. \tag{63}$$

При этом решением системы (56) — (61) являются ровно 6 различных наборов чисел a_k ($k = 1, 2, 3, 4$), в которых все a_3 определены единообразно

$$a_3 = \frac{c_1}{3},$$

а остальные элементы находятся по формулам:

$$a_{4,1} = \frac{1}{36}\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s};$$

$$a_{4,2} = \frac{1}{72}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s};$$

$$a_{4,3} = \frac{1}{72}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s};$$

$$a_{4,4} = \frac{1}{36}\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s};$$

$$a_{4,5} = \frac{1}{72}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s};$$

$$a_{4,6} = \frac{1}{72}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s},$$

где $s = 18\sqrt{61c_1^8 - 180c_1^6c_2 + 1296c_1^4c_4 - 46656c_1^2c_6}$;

$$a_{2,i} = \frac{3c_2 - c_1^2}{6a_{4,i}};\ a_{1,i} = \frac{c_1^4 + 432a_{4,i}^3 + 6c_1^2c_2 - 27c_2^2 + 108c_4}{36c_1a_{4,i}^2} \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ 6).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть числа q_j $(j = 1, 2, ..., 6)$ являются корнями полинома (54), тогда данный полином представим в виде

$$P_6(z) = (z - p_1p_2(p_3 + p_4))(z - p_1p_3(p_2 + p_4))(z - p_1p_4(p_2 + p_3)) \times$$
$$\times (z - p_2p_3(p_1 + p_4))(z - p_2p_4(p_1 + p_3))(z - p_3p_4(p_1 + p_2)).$$

При любом фиксированном i коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$c_1 = -3(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4);$$

$$c_2 = 3(p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_1^2p_3^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2) +$$
$$+8p_1p_2p_3p_4(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4);$$

$$c_3 = -(p_1p_2p_3+p_1p_2p_4+p_1p_3p_4+p_2p_3p_4)[(p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_1^2p_3^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2) +$$
$$+6p_1p_2p_3p_4(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4)];$$

$$c_4 = p_1p_2p_3p_4[2(p_1^3p_2^3p_3^2 + p_1^3p_2^3p_4^2 + p_1^3p_2^2p_3^3 + p_1^3p_2^2p_4^3 + p_1^3p_3^3p_4^2 + p_1^3p_3^2p_4^3 + p_1^2p_2^3p_3^3 +$$
$$+p_1^2p_2^3p_4^3 + p_1^2p_3^3p_4^3 + p_2^3p_3^3p_4^2 + p_2^3p_3^2p_4^3 + p_2^2p_3^3p_4^3) + 5p_1p_2p_3p_4(p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 +$$
$$+p_2^2p_3^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2) + 30p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2 + 13p_1p_2p_3p_4(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 +$$
$$+p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2)];$$

$$c_5 = -p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4)[(p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 +$$
$$+p_2^2p_3^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2) + 6p_1p_2p_3p_4 + 3(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 +$$
$$+p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2)];$$

$$c_6 = p_1^3p_2^3p_3^3p_4^3\left[(p_1^3p_2^2p_3 + p_1^3p_2^2p_4 + p_1^3p_2p_3^2 + p_1^3p_2p_4^2 + p_1^3p_3^2p_4 + p_1^3p_3p_4^2 + p_1^2p_2^3p_3 + \right.$$
$$+p_1^2p_2^3p_4 + p_1^2p_2p_3^3 + p_1^2p_2p_4^3 + p_1^2p_3^3p_4 + p_1^2p_3p_4^3 + p_1p_2^3p_3^2 + p_1p_2^3p_4^2 + p_1p_2^2p_3^3 + p_1p_2^2p_4^3 +$$
$$+p_1p_3^3p_4^2 + p_1p_3^2p_4^3 + p_2^3p_3^2p_4 + p_2^3p_3p_4^2 + p_2^2p_3^3p_4 + p_2^2p_3p_4^3 + p_2p_3^3p_4^2 + p_2p_3^2p_4^3 +$$
$$+2\left(p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_1^2p_3^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2\right) + 2p_1p_2p_3p_4\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right) +$$
$$\left.+4p_1p_2p_3p_4\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4\right)\right].$$

Равенство (56) следует непосредственно из формул Виета для полинома четвёртой степени. Суммы, стоящие в скобках для выражений оставшихся коэффициентов полинома, представляют собой симметричные полиномы от переменных p_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ и, согласно известной теореме [6, с. 322] о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (55). Проделав нужные преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (57) — (61).

Проведём анализ этой системы. Из первого уравнения выражаем $a_3 = c_1/3$ и подставляем его в оставшиеся уравнения системы. Тогда получим

$$-2a_2a_4 - \frac{c_1^2}{3} + c_2 = 0, \tag{64}$$

$$-\frac{4}{3}c_1a_2a_4 - \frac{1}{27}c_1^3 + c_3 = 0, \tag{65}$$

$$-\frac{1}{3}a_1a_4^2c_1 - a_2^2a_4^2 - \frac{2}{9}a_4a_2c_1^2 + 4a_4^3 + c_4 = 0, \tag{66}$$

$$-\frac{1}{9}c_1^2a_4^2a_1 - \frac{1}{3}c_1a_4^2a_2^2 + \frac{4}{3}c_1a_4^3 + c_5 = 0, \tag{67}$$

$$a_1^2a_4^4 - \frac{1}{3}a_4^3a_1a_2c_1 + \frac{1}{9}a_4^3c_1^2 + c_6 = 0. \tag{68}$$

Теперь естественным будет выразить из уравнения (64) произведение a_2a_4:

$$a_2a_4 = -\frac{c_1^2}{6} + \frac{c_2}{2},$$

подставляя которое в уравнение (65), получим в точности условие (62)

$$c_3 = -\frac{5}{27}c_1^3 + \frac{2}{3}c_1c_2.$$

Подставляя a_2a_4 в остальные уравнения системы (66) — (68), приведём их к виду

$$-\frac{1}{3}a_1a_4^2c_1 + \frac{1}{108}c_1^4 + \frac{1}{18}c_1^2c_2 - \frac{1}{4}c_2^2 + 4a_4^3 + c_4 = 0, \tag{69}$$

$$-\frac{1}{9}c_1^2a_4^2a_1 - \frac{1}{108}c_1^5 + \frac{1}{18}c_1^3c_2 - \frac{1}{12}c_1c_2^2 + \frac{4}{3}c_1a_4^3 + c_5 = 0, \tag{70}$$

$$a_1^2a_4^4 + \frac{1}{18}a_1a_4^2c_1^3 - \frac{1}{6}a_1a_4^2c_1c_2 + \frac{1}{9}a_4^3c_1^2 + c_6 = 0. \tag{71}$$

Чтобы теперь получить условие (63), необходимо из умноженного на c_1 уравнения (69) вычесть уравнение (70), умноженное на 3. Получим

$$c_1c_4 + \frac{1}{27}c_1^5 - \frac{1}{9}c_1^3c_2 - 3c_5 = 0,$$

откуда сразу получается условие (63). Далее из уравнения (69) выражаем

$$a_1a_4^2 = 3\frac{c_4}{c_1} + \frac{c_1^3}{36} + \frac{c_1c_2}{6} - \frac{3}{4}\frac{c_2^2}{c_1} + 12\frac{a_4^3}{c_1}$$

и подставляем в уравнение (71), которое после умножения на $c_1^2 \neq 0$ (в противном случае из формул (62) и (63) следует, что $c_1 = c_3 = c_5 = 0$ и исходный полином простой заменой переменной сведётся к кубическому, что делает бесполезной нашу идею отыскания полиномов четвёртой степени) и упрощения примет вид:

$$144a_4^6 + \left(2c_1^2c_2 + \frac{13}{9}c_1^4 + 72c_4 - 18c_2^2\right)a_4^3 + 9c_4^2 - \frac{1}{8}c_1^2c_2^3 + \frac{9}{16}c_2^4 + \frac{1}{2}c_1^2c_2c_4 -$$

$$-\frac{9}{2}c_4c_2^2 + c_1^2c_6 + \frac{1}{432}c_1^{12} + \frac{1}{72}c_1^{10}c_2 - \frac{1}{12}c_1^4c_2^2 + \frac{1}{3}c_1^4c_4 = 0.$$

Полученное уравнение заменой $a_4^3 = t$ сводится к квадратному по переменной t, а значит разрешимо в радикалах. Для упрощения обозначим

$$s = 18\sqrt{61c_1^8 - 180c_1^6c_2 + 1296c_1^4c_4 - 46656c_1^2c_6},$$

тогда решения последнего уравнения запишутся в виде

$$a_{4,1} = \frac{1}{36}\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s};$$

$$a_{4,2} = \frac{1}{72}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s};$$

$$a_{4,3} = \frac{1}{72}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s};$$

$$a_{4,4} = \frac{1}{36}\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s};$$

$$a_{4,5} = \frac{1}{72}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s};$$

$$a_{4,6} = \frac{1}{72}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s}.$$

Осталось для каждого $a_{4,i}$ выразить из формул (64) и (66) соответствующие значения $a_{2,i}$ и $a_{1,i}$:

$$a_{2,i} = \frac{3c_2 - c_1^2}{6a_{4,i}};\ a_{1,i} = \frac{c_1^4 + 432a_{4,i}^3 + 6c_1^2c_2 - 27c_2^2 + 108c_4}{36c_1a_{4,i}^2}\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6).$$

Достаточность. Пусть выполнены равенства (62) и (63) и коэффициенты многочлена (54) выражаются через a_k $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ в соответствии с системой (56) — (61). Полагая

$$a_1 = -\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right), \quad a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4,$$

$$a_3 = -\left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4\right), \quad a_4 = p_1p_2p_3p_4,$$

получаем, что коэффициенты полинома (54) выражаются следующим образом:

$$c_1 = -\left(q_1 + q_2 + \ldots + q_6\right), \ c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + \ldots + q_5q_6, \ \ldots, \ c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т. е. в силу теоремы Виета числа $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_6$ являются его корнями.

Теорема 8 доказана. ■

Для большей наглядности приведём конкретный числовой пример.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$x^6 - 66x^5 + 1116x^4 + 4136x^3 - 240384x^2 + 1710720x - 3483648 = 0. \tag{72}$$

Для коэффициентов этого уравнения выполнены условия связи (62) и (63). По формулам для $a_{k,i}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$ вычислим значения коэффициентов интересующих нас шести полиномов четвёртой степени и построим их:

$$Q_{4,1}\left(x\right) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24; \tag{73}$$

$$Q_{4,2}\left(x\right) = x^4 + \left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)x^3 + \left(\frac{7}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}\right)x^2 - 22x - 12 + 12i\sqrt{3}; \tag{74}$$

$$Q_{4,3}\left(x\right) = x^4 + \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)x^3 + \left(\frac{7}{2} - \frac{7i\sqrt{3}}{2}\right)x^2 - 22x - 12 - 12i\sqrt{3}; \tag{75}$$

$$Q_{4,4}\left(x\right) = x^4 + \frac{4054 \cdot 4199^{1/3}}{4199}x^3 - \frac{168 \cdot 4199^{2/3}}{4199}x^2 - 22x + 4199^{1/3}; \tag{76}$$

$$Q_{4,5}\left(x\right) = x^4 + \left(-\frac{2027 \cdot 4199^{1/3}}{4199} + \frac{2027i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{4199}\right)x^3 +$$

$$+\left(\frac{84 \cdot 4199^{2/3}}{4199} + \frac{84i\sqrt{3} \cdot 4199^{2/3}}{4199}\right)x^2 - 22x - \frac{4199^{1/3}}{2} + \frac{i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{2}; \tag{77}$$

$$Q_{4,6}\left(x\right) = x^4 + \left(-\frac{2027 \cdot 4199^{1/3}}{4199} - \frac{2027i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{4199}\right)x^3 +$$

$$+\left(\frac{84 \cdot 4199^{2/3}}{4199} - \frac{84i\sqrt{3} \cdot 4199^{2/3}}{4199}\right)x^2 - 22x - \frac{4199^{1/3}}{2} - \frac{i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{2}. \tag{78}$$

Ниже построчно приведены значения корней полиномов (73) — (78) соответственно:

$$1, \quad 2, \quad -3, \quad -4;$$

$$\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}, \quad -1+i\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 2-2i\sqrt{3};$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}, \quad -1-i\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 2+2i\sqrt{3};$$

$$-u, \quad -\frac{u}{13}, \quad \frac{u}{19}, \quad \frac{u}{17};$$

$$\frac{u}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right), \quad -\frac{u}{38}\left(1-i\sqrt{3}\right), \quad \frac{u}{26}\left(1-i\sqrt{3}\right), \quad -\frac{u}{34}\left(1-i\sqrt{3}\right);$$

$$\frac{u}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right), \quad -\frac{u}{38}\left(1+i\sqrt{3}\right), \quad \frac{u}{26}\left(1+i\sqrt{3}\right), \quad -\frac{u}{34}\left(1+i\sqrt{3}\right),$$

где $u = 4199^{1/3}$.

Несложно убедиться в том, что комбинации этих корней в соответствии с формулами для q_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ дают один и тот же результат, а именно числа:

$$q_1 = -14; \quad q_2 = 4; \quad q_3 = 6; \quad q_4 = 16; \quad q_5 = 18; \quad q_6 = 36.$$

На практике при использовании исследуемого метода для отыскания корней полинома шестой степени с действительными коэффициентами не имеет особого смысла строить полиномы четвёртой степени с комплексными коэффициентами (в данном примере это $Q_{4,2}(x)$, $Q_{4,3}(x)$, $Q_{4,5}(x)$, $Q_{4,6}(x)$). В статье это сделано с целью проверки и подтверждения формул, представленных в теореме 8.

Заключение

Таким образом, в данной статье проведено сравнение двух различных критериев устойчивости алгебраических полиномов с действительными коэффициентами. Первый из них — на данный момент «классический» критерий Гурвица, второй — менее известный, простой в своём доказательстве, но требующий построения определённого полинома более высокой степени. Можно утверждать, что до широкого распространения систем компьютерной алгебры теорема 4 из настоящей статьи представляла лишь определённый теоретический интерес, но была бесполезной на практике. Действительно, без использования символьных вычислений на компьютере получать формулы выражения коэффициентов необходимых полиномов высоких степеней через коэффициенты того, что проверяется на устойчивость, крайне затруднительно.

На основе проведённого сравнительного анализа двух исследуемых способов проверки на устойчивость можно утверждать, что критерий Гурвица с упрощением в виде теоремы Льенара–Шипара является более универсальным и простым в применении на практике, поскольку имеет единый алгоритм применения для полиномов различных степеней, в том числе и достаточно больших.

В статье наглядно показано, что усложнение конструкций, возникающих в ходе применения метода из теоремы 4, происходит крайне быстро по сравнению с ростом сложности вычислений определителей Гурвица.

Разумеется, список существующих критериев устойчивости не исчерпывается двумя, рассмотренными в настоящей статье. Иные возможные способы решения проблемы Рауса–Гурвица в значительной степени не превосходят по эффективности критерий Гурвица и описаны, например, в [4].

Стоит отметить, что в случае выполнения условия теорем 5, 7 или 8 в конкретных примерах алгебраическое уравнение шестой степени может быть разрешено в радикалах, поэтому текст настоящей статьи может представлять интерес не только для специалистов в области дифференциальных уравнений, но и для всех, кто увлекается классической математикой.

Литература

1. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. 244 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие. СПб. : Изд-во «Лань», 2008. 480 с.
3. Прасолов В.В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.
4. Постников М.М. Устойчивые многочлены. М. : Едиториал УРСС, 2004. 176 с.
5. Strelitz Sh. On the Routh–Hurwitz Problem // The American Mathematical Monthly. 1977. V. 84, No. 7. P. 542–544.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник. СПб. : Издательство «Лань», 2013. 432 с.

COMPARATIVE ANALYSIS OF STABILITY CRITERIA FOR POLYNOMIALS

M.M. Chernyavsky
Postgraduate Student of the Department of Engineering Physics,
e-mail: misha360ff@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. The article provides a comparative analysis of two stability criteria for polynomials. They do not require obtaining any information about the roots, but allow us to judge stability directly by the coefficients of the polynomial. On specific numerical examples, the features of their application are considered. The article also provides symbolic expressions of the relationship between the coefficients of sixth and fourth degree polynomials for cases where there is a linear or definite nonlinear relationship between the roots of these polynomials. In these cases, an algebraic equation of the sixth degree can be solved in radicals.

Keywords: polynomial, Hurwitz criterion, Hurwitz matrix, stability theory, algebraic equations, solution in radicals.

References

1. Boikov I.V. Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii. Penza, Izd-vo Penz. gos. un-ta, 2008, 244 p. (in Russian)
2. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti: Uchebnoe posobie. SPb., Izd-vo Lan', 2008, 480 p. (in Russian)
3. Prasolov V.V. Mnogochleny. Moscow, MTsNMO, 2014. 336 p. (in Russian)
4. Postnikov M.M. Ustoichivye mnogochleny. Moscow, Editorial URSpp. 2004. 176 p. (in Russian)
5. Strelitz Sh. On the Routh–Hurwitz Problem. The American Mathematical Monthly, 1977, vol. 84, no. 7, pp. 542–544.
6. Kurosh A.G. Kurs vysshei algebry: Uchebnik. SPb., Izdatel'stvo Lan', 2013. 432 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 02.07.2020