УДК 512.622

О НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИНОМОВ

Ю. В. Трубников[1], М. М. Чернявский[1], В. В. Юргелас[2]

[1] — *Витебский государственный университет, Беларусь;*
[2] — *Воронежский государственный университет, Россия*

Поступила в редакцию 15.02.2019 г.

Аннотация. Во множестве всех алгебраических полиномов над полем комплексных чисел введены понятия допустимого преобразования и неполной факторизации. Установлены точные критерии неполной факторизации полиномов шестой, седьмой и восьмой степеней при наличии кратных корней. В первой половине девятнадцатого века стараниями двух выдающихся математиков — норвежца Н. Абеля и француза Э. Галуа была обоснована принципиальная невозможность построения корней произвольного алгебраического полинома степени выше четвертой в терминах его коэффициентов с помощью четырех арифметических операций и радикалов. Однако, от этого обозначенная проблема не перестала быть актуальной, причем остается такой и в настоящее время, поскольку математические модели физических, социальных и многих других процессов для проведения, в частности, их качественного анализа требуют знания явных выражений корней входящих в них алгебраических полиномов. Речь, разумеется, идет о простых алгоритмах построения таких выражений. Этому посвящена и настоящая работа.

Ключевые слова: допустимое преобразование, неполная факторизация, кратные корни.

ON INCOMPLETE FACTORIZATION OF POLYNOMIALS

Yu. V. Trubnikov, M. M. Chernyavsky, V. V. Yurgelas

Abstract. In the set of all algebraic polynomials over the field of complex numbers the notion of permissible transformation and incomplete factorization are introduced. Exact criteria of incomplete factorization of the sixth, seventh and eighth degree polynomials with multiple roots are established. In the first half of nineteenth century the efforts of two outstanding mathematicians — the Norwegian N. Abel and the Frenchman E. Galois proved the impossibility of constructing the roots of an arbitrary algebraic polynomial of degree higher than the fourth the fourth in terms of its coefficients using four arithmetic operations and radicals. However, from this, the indicated problem did not cease to be relevant, and remains so at the present time, since mathematical models of physical, social and many other processes for carrying out, in particular, their qualitative analysis requires knowledge of the explicit expressions for the roots of the algebraic polynomials included in them. We are, of course, talking about simple algorithms for constructing such expressions. This work is also devoted to this.

Keywords: permissible transformation, incomplete factorization, multiple roots.

Через $\mathbb{C}[z]$ обозначим множество всех алгебраических полиномов над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},\, a_k \in \mathbb{C},\, k = \overline{0,n}. \tag{1}$$

Согласно основной теореме алгебры [5] любой элемент $p_n(z)$ множества $\mathbb{C}[z]$ может быть представлен в виде произведения линейных множителей

$$p_n(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j) \tag{2}$$

(здесь $\lambda_j \in \mathbb{C}$ — корни полинома $p_n(z)$), которое будем именовать *факторизацией* $p_n(z)$.

Представлению $p_n(z)$ в виде (2) предшествовали без малого два века интенсивных исследований, подытоженных в диссертации двадцатидвухлетнего немецкого математика Карла Фридриха Гаусса в 1799 году. К этому времени уже были получены представления (2) для случаев $n = 2{,}3$ и 4 (с помощью, в частности, алгоритмов Ферро — Тартальи — Кардано и Феррари).

Под *неполной факторизацией* полинома $p_n(z)$ будем понимать его представление в виде произведения, как минимум, двух полиномов меньшей степени ($p_n(z) = q_m(z)r_l(z)$, $m + l = n$), а также всякое преобразование, приводящее к понижению степени $p_n(z)$ и, в конечном счете, ускоряющее получение (2). Как известно, такое преобразование допустимо в классе симметричных полиномов [6].

1. НЕПОЛНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ВОЗВРАТНЫХ ПОЛИНОМОВ

Напомним, что если в (1) коэффициенты $a_0,a_1,\dots,a_n$ таковы, что $a_k = a_{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, то полином $p_n(z)$ называется *симметричным*. Например, симметричным является полином $q_{n-1}(z) = z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1$, получаемый из уравнения деления круга $z^n-1 = 0$, решениями которого служат значения корней n-й степени из единицы поля $\mathbb{C}$, а также биномиальный полином $b_n(z) = C_n^n z^n + C_n^{n-1}z^{n-1} + \dots + C_n^1 z + C_n^0$ (C_n^k — биномиальные коэффициенты).

Отметим, что число $z = -1$ является очевидным корнем всякого симметричного полинома $p_n(z)$ нечетной степени, так что если $n = 2m + 1$, то справедливо представление $p_{2m+1}(z) = (z + 1)q_{2m}(z)$, в котором $q_{2m}(z)$ — симметричный полином четной степени. Это означает, что для факторизации симметричных полиномов достаточно ограничиться случаем четного n.

Лаконичность определения симметричного полинома влечет, отчасти, упрощенное восприятие класса таких полиномов в целом, иное возможно лишь с точки зрения содержательных приложений. Приведем пример ситуации, в которой симметричный полином возникает естественным образом: характеристический полином $\det(A - \lambda E)$ вещественной ортогональной матрицы A будет симметричным, если число $\lambda = 1$ либо не является его корнем, либо является его четнократным корнем (E — единичная матрица).

Перейдем к рассмотрению более общего класса полиномов, допускающих неполную факторизацию. Полином

$$p_{2m}(z) = \sum_{j=0}^{2m} a_j z^j, \tag{3}$$

коэффициенты которого для некоторого ненулевого t из $\mathbb{C}$ связаны соотношениями

$$a_k = t^{m-k} a_{2m-k}, \quad k = \overline{0,m-1}, \tag{4}$$

будем называть *возвратным*. При $t = 1$ класс возвратных полиномов совпадает с классом симметричных. Из (4) следует, что коэффициенты членов в (3), равноотстоящие в наборе $a_0,a_1,\dots,a_{2m}$ от его концов, либо одновременно равны нулю, либо не равны нулю.

Теорема 1. *Для t, удовлетворяющего соотношениям (4), преобразование $\varphi : z \to z + t/z$, $\theta \neq z \in \mathbb{C}$ осуществляет неполную факторизацию полинома (3).*

Доказательство. Преобразуем полином $p_{2m}(z)$ с учетом (4):

$$p_{2m}(z) = z^m \sum_{j=0}^{2m} a_j z^{j-m} = z^m \left(\sum_{k=1}^{m} \left(a_{m+k} z^k + \frac{a_{m-k}}{z^k} \right) + a_m \right) =$$

$$= z^m \left(\sum_{k=1}^{m} a_{m+k} \left(z^k + \frac{a_{m-k}}{a_{m+k} z^k} \right) + a_m \right) = z^m \left(a_m + \sum_{k=1}^{m} a_{m+k} \varphi_k \right),$$

где $\varphi_k = z^k + t^k/z^k$. Покажем, что выражение

$$a_m\varphi_0 + a_{m+1}\varphi_1 + \dots + a_{m+2}\varphi_{m-1} + a_{2m}\varphi_m, \tag{5}$$

в котором $\varphi_0 = 1$, представляет собой полином степени m от переменной $\varphi = z + t/z$. С этой целью установим связь между φ_k и степенями φ^k, используя формулу бинома Ньютона:

$$\begin{cases} 1 = \varphi_0 \\ \varphi = \varphi_1 \\ \varphi^2 = 2t\varphi_0 + \varphi_2 \\ \varphi^3 = 3t\varphi_1 + \varphi_3 \\ \varphi^4 = 6t^2\varphi_0 + 4t\varphi_2 + \varphi_4 \\ \dots \end{cases} \tag{6}$$

В системе (6) вид k-го уравнения зависит от четности k. Если $k = 2l + 1$, то

$$\varphi^{2l+1} = \sum_{j=0}^{2l+1} C_{2l+1}^j z^{2l+1-j} \cdot \frac{t^j}{z^j} =$$

$$= C_{2l+1}^l t^l \varphi_1 + C_{2l+1}^{l-1} t^{l-1} \varphi_3 + \dots + C_{2l+1}^2 t^2 \varphi_{2l-3} + C_{2l+1}^1 t \varphi_{2l-1} + C_{2l+1}^0 \varphi_{2l+1},$$

а если $k = 2l$, то

$$\varphi^{2l} = \sum_{j=0}^{2l} C_{2l}^j z^{2l-j} \cdot \frac{t^j}{z^j} = C_{2l}^l t^l \varphi_0 + C_{2l}^{l-1} t^{l-1} \varphi_2 + \dots + C_{2l}^1 t \varphi_{2l-2} + C_{2l}^0 \varphi_{2l}.$$

Запишем матрицу A коэффициентов системы (6), точнее, ее главную подматрицу 5×5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 & 1 & 0 \\ 6t^2 & 0 & 4t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица легко обратима:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3t & 0 & 1 & 0 \\ 2t^2 & 0 & -4t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В общем же случае, как нетрудно видеть, спектр матрицы A сосредоточен в единице и, следовательно, по теореме Гамильтона — Кэли [7] должно выполняться матричное равенство $(E - A)^m = \Theta$, т. е.

$$E - C_m^1 A + C_m^2 A^2 - \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} A^{m-1} + (-1)^m C_m^m A^m = \Theta$$

(Θ — нулевая матрица). Умножая обе части этого равенства на A^{-1}, получим следующее представление:

$$A^{-1} = C_m^1 E - C_m^2 A + C_m^3 A^2 - \dots + (-1)^{m-2} C_m^{m-1} A^{m-2} + (-1)^{m-1} C_m^m A^{m-1}.$$

Отсюда следует, что величины φ_k однозначно находятся из системы (6), а преобразование $z \to z + t/z$ осуществляет неполную факторизацию возвратного полинома (3). Теорема доказана.

В качестве *примера* рассмотрим полином

$$p_6(z) = z^6 + z^5 + 3z^4 - 2z^3 + 6z^2 + 4z + 8 \equiv z^6 q_3(\varphi), \tag{7}$$

являющийся возвратным, причем соотношения (4) для него выполняются при $t = 2$. Из доказанной теоремы 1 следует, что преобразование $z \to z + 2/z$ приводит к выражению (см. (5))

$$q_3(\varphi) = a_3\varphi_0 + a_4\varphi_1 + a_5\varphi_2 + a_6\varphi_3. \tag{8}$$

Подставив в (8) значения $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = -4 + \varphi^2$, $\varphi_3 = -6\varphi + \varphi^3$, найденные из системы (6), получим

$$q_3(\varphi) = \varphi^3 + \varphi^2 - 3\varphi - 6. \tag{9}$$

Значение $\varphi = 2$ является очевидным корнем полинома (9), а потому $q_3(\varphi) = (\varphi - 2)(\varphi^2 + 3\varphi + 3)$. Первые два корня $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 1 - i$ находятся из равенства $z + 2/z = 2$, а остальные четыре — из соотношений $z + 2/z = (-3 + i\sqrt{3})/2$ и $z + 2/z = (-3 - i\sqrt{3})/2$.

Поскольку класс возвратных полиномов допускает неполную факторизацию (состоящую в понижении степени), то в общем случае, т. е. когда заданный полином не является возвратным, естественно попытаться построить преобразование, переводящее его при некоторых условиях в класс возвратных. Такое преобразование условимся называть *допустимым.*

Рассмотрим подробно случай $m = 2$, т. е. полином

$$p_4(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0. \tag{10}$$

Через $p_4^{(k)}(z)$ будем обозначать производную по z порядка k полинома $p_4(z)$. Далее, введем в рассмотрение вспомогательный полином

$$\begin{aligned} f_3(\beta) = (8a_1a_4^2 - 4a_2a_3a_4 + a_3^3)\beta^3 + (16a_0a_4^2 + 2a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - 4a_2^2a_4)\beta^2 + \\ + (8a_0a_3a_4 + a_1a_3^2 - 4a_1a_2a_4)\beta - a_1^2a_4 + a_0a_3^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Теорема 2. *Преобразование $\psi : z \to z - \beta_*$, в котором β_* — корень полинома $f_3(\beta)$ и, кроме того, $p_4^{(3)}(\beta_*) \neq 0$, является допустимым.*

Доказательство. Применение преобразования ψ к полиному $p_4(z)$ приводит его к виду:

$$p_4(\psi + \beta_*) = a_4\psi^4 + (4a_4\beta_* + a_3)\psi^3 + (6a_4\beta_*^2 + 3a_3\beta_* + a_2)\psi^2 +$$

$$+ (4a_4\beta_*^3 + 3a_3\beta_*^2 + 2a_2\beta_* + a_1)\psi + a_4\beta_*^3 + a_2\beta_*^2 + a_1\beta_* + a_0.$$

Если бы полином $p_4(\psi + \beta_*)$ оказался возвратным, то в терминах его коэффициентов условие (4) приняло бы вид

$$(4a_4\beta_*^3 + 3a_3\beta_*^2 + 2a_2\beta_* + a_1)^2 a_4 = (a_4\beta_*^4 + a_3\beta_*^3 + a_2\beta_*^2 + a_1\beta_* + a_0)(4a_4\beta_* + a_3)^2. \tag{12}$$

После несложных равносильных преобразований из (12) получим верное равенство $f_3(\beta_*) = 0$. Таким образом, полином $p_4(\psi + \beta_*)$ оказывается возвратным с константой

$$t = \frac{6p_4^{(1)}(\beta_*)}{p_4^{(3)}(\beta_*)}.$$

Теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему 2 на *примере* полинома

$$p_4(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z - \frac{29}{81}.$$

Для этого составим полином $f_3(\beta)$ (см. (11)) и найдем корень β_* уравнения

$$f_3(\beta) \equiv 81\beta^3 - 109\beta^2 - 95\beta - 22 = 0.$$

Одним из корней этого уравнения является значение $\beta_* = 2$. Тогда преобразование $\psi : z \to z - 2$ приведет исходный полином $p_4(z)$ к виду

$$p_4(\psi + 2) = \psi^4 + 9\psi^3 + 31\psi^2 + 49\psi + 30 - \frac{29}{81} = \frac{1}{81}(81\psi^4 + 729\psi^3 + 2511\psi^2 + 3969\psi + 2401).$$

Далее, поскольку $(3969/729)^2 = (49/9)^2 = 2401/81 = t^2$, то преобразование $\psi \to \psi + 49/(9\psi)$ завершит неполную факторизацию $p_4(z)$.

В общем случае, т. е. для $m > 2$, проведенные рассуждения и определение возвратного полинома в форме соотношений (4) позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Если система уравнений*

$$\frac{1}{k!}p_{2m}^{(k)}(\beta) = \frac{1}{(2m-k)!}p_{2m}^{(2m-k)}(\beta)t^{m-k}, \quad k = \overline{0,m-1}$$

имеет хотя бы одно решение (t_*,β_*), *то преобразование* $\psi : z \to z - \beta_*$ *является допустимым для полинома* $p_{2m}(z)$.

2. КРИТЕРИИ НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Без ограничения общности будем считать, что полином $p_n(z)$ нормализован, т. е.

$$p_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Покажем, что задача неполной факторизации разрешима в подмножестве нормализованных полиномов из $\mathbb{C}[z]$, обладающих лишь двумя корнями λ_1 и λ_2 с кратностями k_1 и k_2 соответственно, $k_1 + k_2 = n$. Ограничимся случаями $n = 6{,}7$ и 8.

Теорема 4. *Для нормализованного полинома* $p_6(z)$ *из* $\mathbb{C}[z]$ *имеет место неполная факторизация в виде*

$$p_6(z) = (z - \lambda_1)^5(z - \lambda_2) \tag{13}$$

тогда и только тогда, когда его коэффициенты a_k, $k = \overline{0,5}$ *связаны следующими соотношениями:*

$$\left.\begin{array}{rcl}
a_3 &=& \alpha - \frac{5}{27}a_5^3 + \frac{2}{3}a_4a_5, \\
a_2 &=& \frac{1}{2}a_5\alpha - \frac{5}{54}a_5^4 + \frac{1}{3}a_4a_5^2 - \frac{1}{5}a_4^2, \\
a_1 &=& \frac{1}{50}(5a_5^2 - 2a_4)\alpha - \frac{1}{54}a_5^5 + \frac{2}{27}a_4a_5^3 - \frac{1}{15}a_4^2a_5, \\
a_0 &=& \frac{1}{1350}a_5(10a_5^2 - 9a_4)\alpha - \frac{1}{729}a_5^6 - \frac{1}{162}a_4a_5^4 - \\
&& -\frac{1}{135}a_4^2a_5^2 + \frac{1}{675}a_4^3,
\end{array}\right\} \tag{14}$$

где $\alpha = \dfrac{1}{135}(5a_5^2 - 12a_4)\sqrt{25a_5^2 - 60a_4}$.
При этом

$$\lambda_1 = -\frac{1}{30}\left(5a_5 - \sqrt{25a_5^2 - 60a_4}\right), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{6}\left(a_5 + \sqrt{25a_5^2 - 60a_4}\right).$$

Доказательство. Если имеет место представление $p_6(z)$ в форме (13), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, придем к системе

$$\left\{\begin{array}{l} a_{5-k} = (-1)^{5-k}\left(C_5^{k+1}\lambda_1 + C_5^k\lambda_2\right)\lambda_1^k \\ k = \overline{0,5} \end{array}\right. \tag{15}$$

(полагаем $C_n^j = 0$ при $j > n$).

Из первого уравнения $a_5 = -5\lambda_1 - \lambda_2$ системы (15), получаемого при $k = 0$, выразим λ_2 и подставим во все остальные уравнения:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{5-k} = (-1)^{5-k}\left(\left(C_5^{k+1} - 5C_5^k\right)\lambda_1 - C_5^k a_5\right)\lambda_1^k \\ k = \overline{1,5}. \end{array}\right. \tag{16}$$

Поскольку

$$C_5^{k+1} - 5C_5^k = -\frac{6!k}{(k+1)!(5-k)!},$$

то система (16) запишется в следующем эквивалентном виде

$$\left\{\begin{array}{l} a_{5-k} = (-1)^{6-k}C_5^k\left(\dfrac{6k}{k+1}\lambda_1 + a_5\right)\lambda_1^k, \\ k = \overline{1,5}. \end{array}\right. \tag{17}$$

Далее, при $k = 1$ первое уравнение в (17) является квадратным относительно λ_1: $15\lambda_1^2 + 5a_5\lambda_1 + a_4 = \Theta$, а его корни $\lambda_{1(1)}$ и $\lambda_{1(2)}$ имеют вид

$$\lambda_{1(1)}, \lambda_{1(2)} = -\frac{1}{6}a_5 \pm \frac{1}{30}\sqrt{25a_5^2 - 60a_4}. \tag{18}$$

В (18) из двух значений корня из, вообще говоря, комплексного числа $25a_5^2 - 60a_4$ выбираем любое и сохраняем его в продолжение всех вычислений коэффициентов a_j, $j = \overline{0,3}$.

Полагая, например, в (17) $\lambda_1 = \lambda_{1(1)}$, после соответствующих вычислений придем к соотношениям (14) (в которых, заметим, a_3, a_2, a_1 и a_0 естественнее было бы обозначить через $a_{3(1)}$, $a_{2(1)}$, $a_{1(1)}$ и $a_{0(1)}$), что и завершает доказательство необходимости.

Из того, что $\lambda_2 = -5\lambda_1 - a_5$, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_{2(1)} &= -5\lambda_{1(1)} - a_5 = -\frac{1}{6}\left(a_5 + \sqrt{25a_5^2 - 60a_4}\right), \\ \lambda_{2(2)} &= -5\lambda_{1(2)} - a_5 = -\frac{1}{6}\left(a_5 - 5\sqrt{25a_5^2 - 60a_4}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Достаточность утверждения теоремы устанавливается прямой проверкой тождества $p_6(z) = q_6(z)$, в котором $q_6(z) = (z - \lambda_1)^5(z - \lambda_2)$, а λ_1 и λ_2 имеют вид (18), (19).

Теорема доказана.

Схема рассуждений, использованная при доказательстве теоремы 4, позволяет установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 5. *Для нормализованного полинома $p_7(z)$ из $\mathbb{C}[z]$ имеет место неполная факторизация в виде*

$$p_7(z) = (z-\lambda_1)^4(z-\lambda_2)^3$$

тогда и только тогда, когда его коэффициенты a_k, $k=\overline{0,6}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{441}(3a_6^2-7a_5)\beta - \frac{10}{49}a_6^3 + \frac{5}{7}a_6a_5,\\
a_3 &= -\frac{13}{1372}a_6^4 - \frac{9}{98}a_6^2a_5 + \left(\frac{4}{1029}a_6^3 - \frac{4}{441}a_6a_5\right)\beta + \frac{29}{84}a_5^2,\\
a_2 &= \frac{1}{28812}(-30a_6^4+196a_6^2a_5-294a_5^2)\beta + \frac{153}{9604}a_6^5 - \frac{67}{686}a_6^3a_5 + \frac{29}{196}a_6a_5^2,\\
a_1 &= \frac{1}{605052}(-276a_6^5+1400a_6^3a_5-1764a_6a_5^2)\beta - \frac{11}{67228}a_6^6+\\
&\quad + \frac{31}{4802}a_6^4a_5 - \frac{43}{1372}a_6^2a_5^2 + \frac{2}{49}a_5^3,\\
a_0 &= \frac{1}{29647548}(2838a_6^6-22120a_6^4a_5+57330a_6^2a_5^2-49392a_5^3)\beta-\\
&\quad - \frac{983}{3294172}a_6^7 + \frac{81}{33614}a_6^5a_5 - \frac{187}{28812}a_6^3a_5^2 + \frac{2}{343}a_6a_5^3,
\end{aligned}$$

где $\beta=\sqrt{18a_6^2-42a_5}$; при этом

$$\lambda_1 = -\frac{1}{14}(2a_6-\beta), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{21}(3a_6-2\beta).$$

Теорема 6. *Для нормализованного полинома $p_8(z)$ из $\mathbb{C}[z]$ неполная факторизация в виде*

$$p_8(z) = (z-\lambda_1)^6(z-\lambda_2)^2$$

имеет место тогда и только тогда, когда его коэффициенты a_k, $k=\overline{0,7}$ связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
a_5 &= \frac{1}{288}(7a_7^2-16a_6)\gamma - \frac{7}{32}a_7^3 + \frac{3}{4}a_7a_6,\\
a_4 &= \frac{1}{2304}(35a_7^3-80a_7a_6)\gamma - \frac{35}{768}a_7^4 + \frac{5}{96}a_7^2a_6 + \frac{5}{24}a_6^2,\\
a_3 &= \frac{1}{4608}(-7a_7^4+72a_7^2a_6-128a_6^2)\gamma + \frac{7}{1536}a_7^5 - \frac{5}{96}a_7^3a_6 + \frac{5}{48}a_7a_6^2,\\
a_2 &= \frac{1}{13824}(-21a_7^5+111a_7^3a_6-144a_7a_6^2)\gamma + \frac{49}{6912}a_7^6-\\
&\quad - \frac{215}{4608}a_7^4a_6 + \frac{55}{576}a_7^2a_6^2 - \frac{25}{432}a_6^3,\\
a_1 &= \frac{1}{110592}(-35a_7^6+192a_7^4a_6-312a_7^2a_6^2+128a_6^3)\gamma+\\
&\quad + \frac{5}{3456}a_7^7 - \frac{11}{1152}a_7^5a_6 + \frac{95}{4608}a_7^3a_6^2 - \frac{25}{1728}a_7a_6^3,\\
a_0 &= \frac{1}{3538944}(-77a_7^7+456a_7^5a_6-864a_7^3a_6^2+512a_7a_6^3)\gamma+\\
&\quad + \frac{353}{3538944}a_7^8 - \frac{13}{18432}a_7^6a_6 + \frac{1}{576}a_7^4a_6^2 - \frac{23}{13824}a_7^2a_6^3 + \frac{1}{2304}a_6^4,
\end{aligned}$$

где $\gamma = \sqrt{21a_7^2 - 48a_6}$*; при этом*

$$\lambda_1 = -\frac{1}{24}(3a_7 - \gamma), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{8}(a_7 + \gamma).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Звягин, В. Г. О неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах и теория групп / В. Г. Звягин. — Соросовский образовательный журнал. — 2000. — Т. 6, № 6. — С. 117–122.

2. Кутищев, Г. П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени: теория, методы, алгоритмы / Г. П. Кутищев. — М. : URSS, 2010. — 232 с.

3. Незбайло, Т. Г. Теория нахождения корней алгебраических уравнений (в символьном представлении) / Т. Г. Незбайло. — СПб. : КОРОНА-Век, 2007. — 208 с.

4. Прасолов, В. В. Эллиптические функции и алгебраические уравнения / В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев. — М. : Факториал, 1997. — 288 с.

5. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — СПб. : Лань, 2008. — 432 с.

6. Новоселов, С. И. Специальный курс элементарной алгебры / С. Н. Новоселов. — М. : Высшая школа, 1962. — 552 с.

7. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Физматлит, 2010. — 558 с.

REFERENCES

1. Zvyagin V.G. On the unsolvability of algebraic equations in radicals and group theory. [Zvyagin V.G. O nerazreshimosti algebraicheskix uravneniyj v radikalax i teoriya grupp]. *Sorosovskiyj obrazovatel'nyyj zhurnal — Soros educational magazine*, 2000, vol. 6, no. 6, pp. 117–122.

2. Kutischev G.P. Solution of algebraic equations of arbitrary degree: theory, methods, algorithms. [Kutishhev G.P. Reshenie algebraicheskix uravneniyj proizvol'noyj stepeni: teoriya, metody, algoritmy]. Moscow, 2010, 232 p.

3. Nesbylo T.G. Theory of finding roots of algebraic equations (in character representation). [Nezbayjlo T.G. Teoriya naxozhdeniya korneyj algebraicheskix uravneniyj (v simvol'nom predstavlenii)]. SPb. : Korona-Vek, 2007, 208 p.

4. Prasolov V.V. Elliptic functions and algebraic equations. [Prasolov V.V. Ellipticheskie funkcii i algebraicheskie uravneniya]. Moscow: Faktorial, 1997, 288 p.

5. Kurosh A.G. Course of higher algebra. [Kurosh A.G. Kurs vyssheyj algebry]. SPb.: LAN, 2008, 432 p.

6. Novoselov S.I. Special course of elementary algebra. [Novoselov S.I. Special'nyyj kurs elementarnoyj algebry]. Moscow: Higher scool, 1962, 552 p.

7. Gantmacher F.R. Matrix theory. [Gantmaxer F.R. Teoriya matric]. Moscow: Fizmatlit, 2010, 558 p.

Трубников Юрий Валентинович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры геометрии и математического анализа, Витебский государственный университет, Витебск, Беларусь
E-mail: iury.trubnicov@yandex.ru

Trubnikov Yuri Valentinovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department of geometry and mathematical analysis, Vitebsk state university, Vitebsk, Belarus
E-mail: iury.trubnicov@yandex.ru

Чернявский Михаил Михайлович, аспирант кафедры инженерной физики, Витебский государственный университет, Витебск, Беларусь
E-mail: misha360ff@mail.ru

Chernyavsky Mikhail Mikhailovich, postgraduate student of the department of engineering physics, Vitebsk state university, Vitebsk, Belarus
E-mail: misha360ff@mail.ru

Юргелас Владимир Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: vyurgelas@vsu.ru

Yurgelas Vladimir Viktorovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of system analysis and management, Voronezh state university
E-mail: vyurgelas@vsu.ru