

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

**Сборник материалов
XI Республиканской научной конференции
молодых учёных и студентов**

21–22 ноября 2019 года

Брест 2019

УДК 004+51+52+53+55+62+63+65+68
ББК 22.11/.19+32.97

Программный комитет конференции:

Председатель: Головки В. А. – д-р техн. наук, профессор (БрГТУ).

Зам. председателя: Лебедь С. Ф. – канд. физ.-мат. наук, доцент (БрГТУ).

Члены программного комитета:

Корзюк В. И. – академик НАНБ, д-р физ.-мат. наук, профессор (БГУ),

Голенков В. В. – д-р техн. наук, профессор (БГУИР),

Дудкин А. А. – д-р техн. наук, профессор (ОИПИ НАНБ),

Махнист Л. П. – канд. техн. наук, доцент (БрГТУ),

Дереченник С. С. – канд. техн. наук, доцент (БрГТУ),

Парфомук С. И. – канд. техн. наук, доцент (БрГТУ),

Рубанов В. С. – канд. физ.-мат. наук, доцент (БрГТУ),

Грицук Д. В. – канд. физ.-мат. наук (БрГУ им. А. С. Пушкина),

Сендер Н. Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент (БрГУ им. А. С. Пушкина),

Матысик О. В. – канд. физ.-мат. наук, доцент (БрГУ им. А. С. Пушкина).

Редакционная коллегия:

Главный редактор: Головки В. А. – д-р техн. наук, профессор.

Члены редакционной коллегии: Лебедь С. Ф. – канд. физ.-мат. наук, доцент, Дереченник С. С. – канд. техн. наук, доцент, Махнист Л. П. – канд. техн. наук, доцент, Парфомук С. И. – канд. техн. наук, доцент, Рубанов В. С. – канд. физ.-мат. наук, доцент, Матысик О. В. – канд. физ.-мат. наук, доцент.

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и информатики БрГУ им. А. С. Пушкина;

Сендер Н. Н., канд. физ.-мат. наук, доцент.

Современные проблемы математики и вычислительной техники : сборник материалов XI Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 21–22 ноября 2019 г. / Брестский государственный технический университет ; редкол.: В. А. Головки (гл. ред.) [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2019. – 108 с.

ISBN 978-985-493-476-1

В сборнике представлены материалы докладов по современным проблемам интеллектуальных технологий обработки данных в научных и прикладных исследованиях, робототехники, моделирования нелинейных динамических процессов, аналитических и численных методов исследований в математике и их приложениях.

УДК 004+51+52+53+55+62+63+65+68
ББК 22.11/.19+32.97

ISBN 978-985-493-476-1

© «Издательство БрГТУ», 2019

бирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/4}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема. При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (2) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/4}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Для метода итераций (2) справедлива оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (8n\alpha)^{-1/4} \|x\| + 2^{1/2} (n\alpha)^{1/4} \delta$, $n \geq 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{7/8} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = 2^{-5/2} \alpha^{-1} \delta^{-2} \|x\|^2$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/4}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-2})$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-2} , и такой порядок обеспечивает сходимость метода (2).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (2) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (2) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения (1).

Список цитированных источников

1. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест: Брест. гос. ун-т. – 2008. – 196 с.

УДК 512.622.28

О РАЗРЕШИМОСТИ В РАДИКАЛАХ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Чернявский М. М., Жгиров В. С.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь
Научный руководитель: Трубников Ю. В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Исследование задач о представимости алгебраических полиномов различных степеней в виде суперпозиции двух других полиномов насчитывает почти полувековую историю. В настоящее время известно несколько общих алгоритмов для проверки данной представимости [1]. Наличие суперпозиции полинома позволяет упростить поиск его корней в символьном виде и может выступать критерием разрешимости алгебраического уравнения в радикалах, а также давать более удобные алгоритмы для вычисления

его корней [2]. Тем не менее, на практике зачастую необходимы конкретные условия проверки, является ли исследуемый полином суперпозицией двух других полиномов с заданными свойствами.

В настоящей работе установлены и доказаны необходимые и достаточные условия представимости полинома комплексного аргумента восьмой степени вида

$$P_8(z) = z^8 + c_1z^7 + c_2z^6 + c_3z^5 + c_4z^4 + c_5z^3 + c_6z^2 + c_7z + c_8 \quad (1)$$

в виде суперпозиции

$$P_8(z) = T[Q(x)], \quad (2)$$

где

$$T(z) = z^4 - z^2 + \frac{1}{8}, \quad Q(z) = z^2 + a_1z + a_2. \quad (3)$$

Отметим, что полином $T(z) = \frac{1}{8}T_4(z)$, где $T_4(z)$ – полином Чебышева первого рода четвертой степени [3, с. 116].

Т е о р е м а. Необходимыми и достаточными условиями представления полинома (1) в виде суперпозиции (2) являются равенства

$$\begin{aligned} c_3 &= -c_1(7c_1^2 - 24c_2) / 32; \\ c_4 &= -\frac{7}{512}c_1^4 - \frac{3}{32}c_1^2c_2 + \frac{3}{8}c_2^2 - 1; \\ c_5 &= c_1(21c_1^4 - 128c_1^2c_2 + 192c_2^2 - 512) / 1024; \\ c_6 &= \frac{9}{1024}c_1^4c_2 - \frac{3}{64}c_1^2c_2^2 + \frac{1}{8}c_1^2 + \frac{1}{16}c_2^3 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_7 &= -c_1(3c_1^2 - 8c_2)(9c_1^4 - 48c_1^2c_2 + 64c_2^2 - 512) / 32768; \\ c_8 &= \frac{1}{8} + \frac{81}{1048576}c_1^8 - \frac{27}{32768}c_1^6c_2 + \frac{27}{8192}c_1^4c_2^2 - \\ & - \frac{3}{512}c_1^2c_2^3 + \frac{1}{256}c_2^4 - \frac{9}{1024}c_1^4 + \frac{3}{64}c_1^2c_2 - \frac{1}{16}c_2^2, \end{aligned} \quad (4)$$

выражающие связь между коэффициентами полинома $P_8(z)$, при этом $a_1 = \frac{c_1}{4}$,

$$a_2 = -\frac{3c_1^2}{32} + \frac{c_2}{4}.$$

Доказательство. Правая часть равенства (2) имеет вид

$$\begin{aligned} T[Q(x)] &= z^8 + 4a_1z^7 + 2(3a_1^2 + 2a_2)z^6 + 4a_1(a_1^2 + 3a_2)z^5 + (a_1^4 + 12a_1^2a_2 + 6a_2^2 - \\ & - 1)z^4 + 2a_1(2a_1^2a_2 + 6a_2^2 - 1)z^3 + ((6a_2^2 - 1)a_1^2 + 4a_2^3 - 2a_2)z^2 + 2a_1(2a_2^3 - a_2)z + \\ & + 1/8 + a_2^4 - a_2^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z полинома (1) и правой части равенства (5), получим систему уравнений (6):

$$\begin{aligned}
 4a_1 &= c_1; \\
 2(3a_1^2 + 2a_2) &= c_2; \\
 4a_1(a_1^2 + 3a_2) &= c_3; \\
 a_1^4 + 12a_1^2a_2 + 6a_2^2 - 1 &= c_4; \\
 2a_1(2a_1^2a_2 + 6a_2^2 - 1) &= c_5; \\
 (6a_2^2 - 1)a_1^2 + 4a_2^3 - 2a_2 &= c_6; \\
 2a_1(2a_2^3 - a_2) &= c_7; \\
 1/8 + a_2^4 - a_2^2 &= c_8.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Выражая $a_1 = c_1 / 4$ из первого уравнения данной системы и подставляя его во второе уравнение, находим $a_2 = -3c_1^2 / 32 + c_2 / 4$. Подставляем данные значения в оставшиеся уравнения системы и получаем в точности выражения из системы (5), которые являются необходимыми условиями представления полинома (1) в виде суперпозиции (2).

Для доказательства достаточности условий теоремы необходимо все значения коэффициентов c_j ($j=1, \dots, 8$) подставить в исходный полином (1) и получим тождество

$$P_8(z) \equiv (z^2 + a_1z + a_2)^4 - (z^2 + a_1z + a_2)^2 + \frac{1}{8}.$$

Стоит отметить, что корни полиномов Чебышева всегда известны и имеют удобное представление в радикалах, поэтому и корни суперпозиционного полинома (2) также несложным образом выражаются в радикалах и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; & z_2 &= -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; \\
 z_3 &= -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; & z_4 &= -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; \\
 z_5 &= -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; & z_6 &= -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; \\
 z_7 &= -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}; & z_8 &= -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 4a_2}}{2}
 \end{aligned}$$

Список цитированных источников

1. Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.
2. Астапов, И.С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.
3. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов. – 4-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.