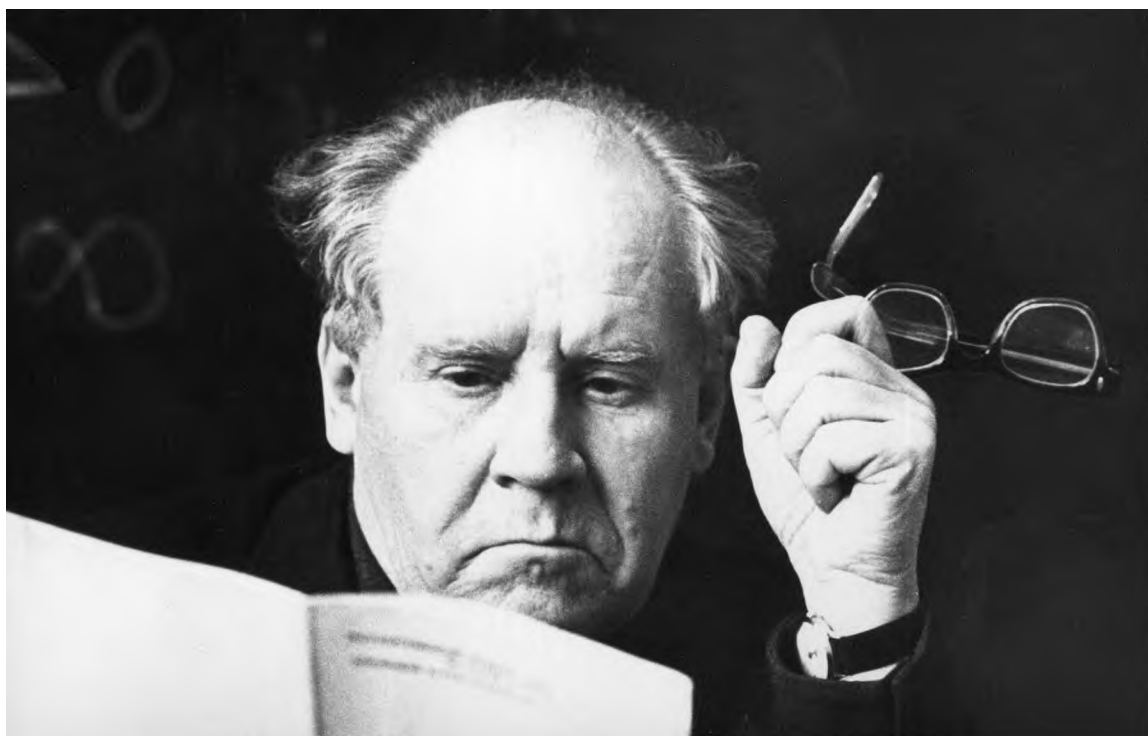


ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**XIX Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям
(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019)**



Материалы конференции

Часть 2

**Уравнения в частных производных
Интегро-дифференциальные операторы и уравнения
Дифференциальные уравнения и их приложения
Методика преподавания математических дисциплин
в высшей школе**

МИНСК 2019

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
Д25

Редакторы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

XIX Международная научная конференция по дифференциальным
Д25 **уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019):** материалы Международной научной конференции. Могилев, 14–17 мая 2019 г. — Часть 2. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2019. — 142 с.

ISBN 987-985-7160-12-9 (Часть 2)
ISBN 978-985-7160-13-6

Сборник содержит доклады, представленных на XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2019) по вопросам уравнений в частных производных, интегро-дифференциальных операторов и уравнений, дифференциальных уравнений их приложений, методики преподавания математических дисциплин в высшей школе.

m_i – количество линий обслуживания в системе S_i ; $\bar{d}_i(t)$, $\bar{d}_{ic}(t)$ – соответственно среднее число исправных линий обслуживания и среднее число исправных линий обслуживания, занятых заявками типа c в системе S_i в момент времени t ; $\lambda_0^{(c)+}$, μ_{ic} , γ_i , $p_{ij}^{(c)}$, $p_{ij}^{(cs)}$ – некоторые постоянные, являющиеся параметрами обслуживания, $i, j = \overline{1, n}$, $c, s = \overline{1, r}$ ($c \neq s$); α_{ic} , $\alpha_{0i}^{(c)}$, $b_{ij}^{(c)}$, $\bar{b}_{ij}^{(c)}$, $h_{ij}^{(c)}$, $\bar{h}_{ij}^{(c)}$ – средние значения случайных доходов (расходов) системы S_i в случаях, когда заявка типа c после обслуживания в системе S_i перейдет в систему S_j не меняя своего типа, либо когда заявка типа c после обслуживания в системе S_i перейдет в систему S_j как заявка типа s ; ε_i – средние значения случайных расходов, связанных с восстановлением неисправных линий обслуживания в системе S_i , $i, j = \overline{0, n}$ ($i \neq j$) $c, s = \overline{1, r}$ ($c \neq s$).

В докладе рассматривается методика прогнозирования доходов страховой компании с разнотипными исками в случае, когда общее число заявок в сети (страховой компании) изменяется в соответствии с процессом гибели и размножения.

Литература

1. Русилко Т. В., Матальцкий М. А. *Сетевые вероятностные модели обработки заявок в страховых компаниях*. Берлин: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

АППРОКСИМАТИВНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Как известно, система дифференциальных уравнений, описывающая кеплеровское движение двух тел в прямоугольных декартовых координатах с центром в точке с массой m_0 имеет следующий вид [1, с. 434]:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mu = f(m_0 + m_1)$, m_0, m_1 – массы гравитирующих тел, f – гравитационная постоянная.

Трудность непосредственного решения уравнений системы (1) вызывает наличие кубической нелинейности по r в знаменателях правых частей уравнений системы. Основная идея работы заключается в преодолении данной трудности путем аппроксимации функции $1/r^3$ полиномом

$$1/r^3 \approx c_0 + c_1 r^2 \quad (0 < a \leq r \leq b) \quad (2)$$

наилучшего приближения в чебышевской метрике с последующим приведением левой части уравнений системы к линейному виду.

Для нахождения коэффициентов данного экстремального полинома воспользуемся следующей теоремой [2].

Теорема. Пусть для непрерывно дифференцируемых функций выполнены следующие условия:

- 1) $\varphi'(x) > 0$ ($x \in (a, b)$);
- 2) на интервале (a, b) функция $f'(x)/\varphi'(x)$ строго возрастает.

Тогда коэффициенты экстремального полинома $P_1^*(x) = c_0^* + c_1^* \varphi(x)$ находятся по следующим формулам:

$$c_0 = \frac{1}{2[\varphi(b) - \varphi(a)]} \{[\varphi(x_2^*) + \varphi(b)]f(a) - [\varphi(a) + \varphi(x_2^*)]f(b)\} + \frac{1}{2}f(x_2^*),$$

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)},$$

где x_2^* – единственный корень уравнения

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

В нашем случае $f(r) = 1/r^3$, $\varphi(r) = r^2$. Тогда находим

$$r_2 = \sqrt[5]{\frac{3(a+b)a^3b^3}{2(a^2+ab+b^2)}}, \quad c_1 = -\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)a^3b^3}, \quad c_0 = \frac{1}{2(b^2-a^2)} \left[\frac{b^2+r_2^2}{a^3} - \frac{a^2+r_2^2}{b^3} \right] + \frac{1}{2r_2^3}.$$

В частности, предлагаемую идею аппроксимации функции $1/r^3$ экстремальным полиномом вида (2) можно использовать для решения следующей системы уравнений:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3} + f_1(t), \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3} + f_2(t), \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} + f_3(t), \quad (3)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ – T -периодические функции, например, описывающие работу двигателя космического аппарата.

С учетом аппроксимации (2) система (3) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\mu c_1 x(t) (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) - \mu c_0 x(t) + f_1(t), \\ \ddot{y}(t) &= -\mu c_1 y(t) (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) - \mu c_0 y(t) + f_2(t), \\ \ddot{z}(t) &= -\mu c_1 z(t) (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) - \mu c_0 z(t) + f_3(t), \end{aligned}$$

или эквивалентный вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) - hx(t) &= -\mu c_1 x(t) (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) - \mu c_0 x(t) - hx(t) + f_1(t), \\ \ddot{y}(t) - hy(t) &= -\mu c_1 y(t) (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) - \mu c_0 y(t) - hy(t) + f_2(t), \\ \ddot{z}(t) - hz(t) &= -\mu c_1 z(t) (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)) - \mu c_0 z(t) - hz(t) + f_3(t). \end{aligned}$$

Решение данной T -периодической краевой задачи имеет представление

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^T G(s) [-\mu c_1 x(t-s) r^2(t-s) - \mu c_0 x(t-s) - hx(t-s) + f_1(t-s)] ds, \\ y(t) &= \int_0^T G(s) [-\mu c_1 y(t-s) r^2(t-s) - \mu c_0 y(t-s) - hy(t-s) + f_2(t-s)] ds, \\ z(t) &= \int_0^T G(s) [-\mu c_1 z(t-s) r^2(t-s) - \mu c_0 z(t-s) - hz(t-s) + f_3(t-s)] ds, \end{aligned}$$

в котором $r^2(t-s) = x^2(t-s) + y^2(t-s) + z^2(t-s)$, функция Грина

$$G(s) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} - \frac{e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}} \right),$$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{h}$ – корни характеристического уравнения из левой части уравнений последней системы.

Литература

1. Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. М.: Наука, 1975.
2. Сунь Байюй. *О точном нахождении экстремальных полиномов на двумерном подпространстве* // Вестн. Віцебск. дзярж. ун-та. 2014. № 2(80). С. 34–38.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ
В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

М.М. Чуйко, О.М. Королёва

Построен вычислительный алгоритм для математического моделирования конвективных течений в двумерных областях произвольной формы. Процессы тепло- и массопереноса вязкой несжимаемой жидкости в односвязной области Ω_{xy} описываются в приближении Буссинеска следующими уравнениями:

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + C(\mathbf{v})T \right) = \lambda \Delta T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{g} \beta_T T, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad t > 0. \quad (2)$$

На границе $\partial \Omega_{xy}$ области задаются тепловые потоки и условия прилипания $\mathbf{v} = 0$.

При решении задач в произвольных областях используются обобщенные криволинейные координаты [1]. Пусть преобразование $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ отображает область Ω_{xy} в прямоугольник $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$. В пространстве обобщенных криволинейных координат (ξ, η) задача (1), (2) имеет следующий вид:

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + C_{\xi\eta}(\mathbf{v})T \right) = \lambda \Delta_{\xi\eta} T, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v} - \nu \Delta_{\xi\eta} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_{\xi\eta} p + \mathbf{g} \beta_T T, \quad (4)$$

$$\text{div}_{\xi\eta} \mathbf{v} = 0, \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \quad 0 < t \leq t_0, \quad (5)$$

где

$$\text{div}_{\xi\eta} \mathbf{v} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} u \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} v \right) \right],$$

$$\text{grad}_{\xi\eta} p = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta}, -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right),$$

$$C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\xi\eta}) \mathbf{v} + \text{div}_{\xi\eta}(\mathbf{v}\mathbf{v}) \right),$$

$$\Delta_{\xi\eta} u = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right].$$

Здесь J – якобиан обратного преобразования $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, B_{11}, B_{12}, B_{22} – метрические коэффициенты.

На равномерной прямоугольной разностной сетке, введенной в области $\Omega_{\xi\eta}$, построены разностные схемы, аппроксимирующие задачу (3)–(5). Для определения поля скоростей и давлений использовался метод расчета течений несжимаемой жидкости на неразнесенных сетках [2]. Полученные системы девятиточечных разностных уравнений решались с помощью метода MSIM [3].