ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Международная научная конференция
# «XII Белорусская математическая конференция»

**Материалы конференции**

**Часть 1**

**Вещественный и комплексный анализ**
**Функциональный анализ и операторные уравнения**
**Геометрия и топология**

**МИНСК 2016**

**УДК 51**
**ББК 22.1**
**Д15**

Редактор *С. Г. Красовский*

*Конференция проводится при финансовой поддержке*
*Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований*

**XII Белорусская математическая конференция:** материалы Междунар. науч.
Д15 конф. Минск, 5–10 сентября 2016 г. В 5 ч. / Ред. С. Г. Красовский. — Часть 1. — Мн.:
Институт математики НАН Беларуси, 2016. — 90 с.

**ISBN 987-985-6499-91-6 (Часть 1)**
**ISBN 978-985-6499-90-9**

Сборник содержит доклады, представленные на XII Белорусской математической конференции по следующим направлениям: вещественный и комплексный анализ, функциональный анализ и операторные уравнения, геометрия и топология.

ISBN 987-985-6499-91-6 (Часть 1)
ISBN 978-985-6499-90-9

**Литература**

1. Трубников Ю. В., Пышненко О. В., Орехова И. А. *Оптимальные итерационные процессы.* Витебск: ВГУ, 2011.

2. Трубников Ю. В., Пышненко О. В., Силивончик В. В. *Дифференциальный аналог итерационного процесса Вейерштрасса* // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. 2013. № 2(74). С. 5–13.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский**

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
yurii_trubnikov@mail.com, misha360ff@mail.com

**Введение.** В настоящее время существующие методы решения нелинейных матричных уравнений очень громоздки и могут быть применены к ограниченным классам уравнений. Поэтому, в данной работе была поставлена цель — разработать эффективный приближенный метод решения квадратных матричных уравнений.

**Результаты и их обсуждение.** Рассмотрим квадратное матричное уравнение (1), где все матрицы имеют размерность $[n \times n]$ :

$$AX^2 + BX + C = 0. \tag{1}$$

Как известно, метод Ньюнона — Канторовича [1, с. 679] решения операторного уравнения $F(X) = 0$ в банаховом пространстве состоит в построении последовательности

$$X_{n+1} = X_n - [F'(X_n)]^{-1} F(X_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для уравнения (1) некоторую трудность представляет нахождение оператора $[F'(X_n)]^{-1}$. Предполагая, что матрица $A$ обратима, упростим уравнение (1), умножив обе его части на $A^{-1}$. Обозначив $A^{-1}B \equiv M$, $A^{-1}C \equiv N$, получаем

$$X^2 + MX + N = 0. \tag{2}$$

Пусть $F(X) = X^2 + MX + N$. Тогда $F(X + H) - F(X) = (X + M)H + HX + {}+H^2$. Следовательно, дифференциалом левой части уравнения (2) является выражение $F'(X) = (X + M)H + HX$, и, таким образом, $[F'(X)]^{-1} F(X) = H$.

Тогда итерационный процесс Ньютона — Канторовича будет иметь вид:

$$X_{n+1} = X_n - H(X_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{3}$$

Таким образом, возникает следующий алгоритм решения уравнения (1).

1. Привести уравнение (1) к виду (2).

2. Найти матричную функцию $H = H(X)$ — решение линейного по $H$ уравнения $X^2 + MX + N = (X + M)H + HX$.

3. Осуществить итерационный процесс (3).

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$. Взяв в качестве начального приближения поочередно матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4i & 0 \\ 0 & -4i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2-i & 1+i \\ -5+i & 1+i \end{pmatrix}$, после 13 итераций получаем соответствующие корни:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1,726204 & 0,039936 \\ -0,556437 & 1,452316 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -3,36635 - 2,19717i & -0,98084 - 1.07972i \\ 10,0844 + 4.59095i & 3.58522 + 2.25607i \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} -1,927044 & -0,273549 \\ -0,775496 & -1,751476 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} -1.28323 - 0.33043i & -0.73568 + 0.23719i \\ -4.00175 - 0.37829i & 0.56436 + 0.27154i \end{pmatrix}.$$

**Заключение.** Таким образом, в данной работе рассмотрены особенности применения метода Ньютона — Канторовича для решения квадратных матричных уравнений.

### Литература

1. Канторович Л. В. *Функциональный анализ.* М: Наука, 1984.

## ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НОРМ

**Ю.В. Трубников, К.Л. Якуто**

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
k.yakuto@mail.ru

**Введение.** Две нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ в линейном нормированном пространстве $X$ называются эквивалентными [1], если существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство: $c_1\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant c_2\|x\|$.

Целью настоящей работы является доказательство следующих неравенств и их интегральных аналогов:

$$\left( \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{b_j^p}{a_j^q} \right)^{1/(p-q)} \right)^{1/p-1/q} \leqslant \frac{[\sum_{j=1}^{n} (a_j |x_j|^p)]^{1/p}}{[\sum_{j=1}^{n} (b_j |x_j|^q)]^{1/q}} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left( \frac{a_j^{1/p}}{b_j^{1/q}} \right), \tag{1}$$

где $a_j > 0$, $b_j > 0$, $1 < q < p < \infty$,

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \left( \frac{a_j^{1/q}}{b_j^{1/p}} \right) \leqslant \frac{[\sum_{j=1}^{n} a_j |x_j|^q]^{1/q}}{[\sum_{j=1}^{n} b_j |x_j|^p]^{1/p}} \leqslant \left( \sum_{j} \left( \frac{a_j^p}{b_j^q} \right)^{1/(p-q)} \right)^{1/q-1/p}, \tag{2}$$

где $a_j > 0$, $b_j > 0$, $1 < q < p < \infty$).

**Материал и методы.** Основным методом, который был использован для доказательства, являлся метод математической индукции. Доказательство интегральных аналогов неравенств (1) и (2) производдилось по следующей схеме: сначала неравенства устанавливались для интегральных сумм, а затем осуществлялся переход к пределу при $n \to \infty$.