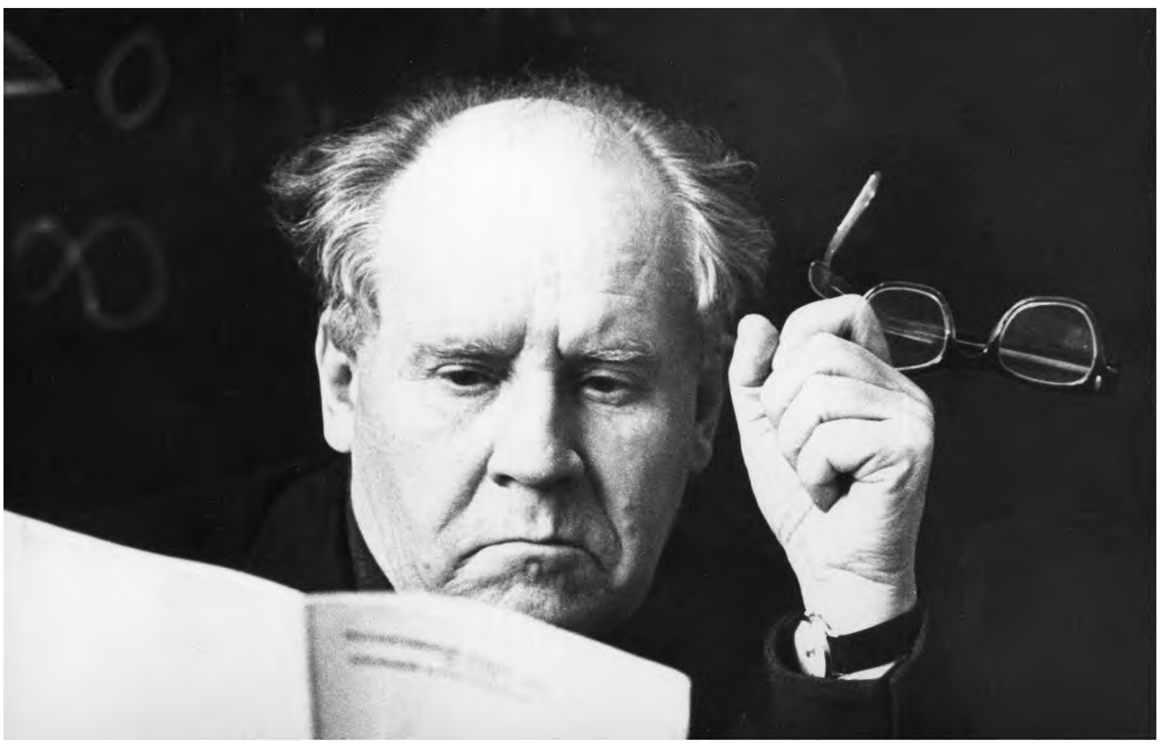
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ

XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)



Материалы конференции

Часть 2

Уравнения в частных производных
Интегро-дифференциальные операторы и уравнения
Дифференциальные уравнения и их приложения
Методика преподавания дифференциальных уравнений в высшей школе

МИНСК 2018

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
В76

Редакторы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

В76 **XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018):** материалы Международной научной конференции. Гродно, 15 – 18 мая 2018 г. — Часть 2. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2018. — 164 с.

ISBN 987-985-7160-09-9 (Часть 2)
ISBN 978-985-7160-07-5

Сборник содержит доклады, представленных на XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2018) по вопросам уравнений в частных производных, интегро-дифференциальных операторов и уравнений, дифференциальных уравнений их приложений, методики преподавания дифференциальных уравнений в высшей школе.

ISBN 987-985-7160-09-9 (Часть 2)
ISBN 978-985-7160-07-5

С использованием обозначений работ [1–3] доказывается следующая теорема.

Теорема. *Для непрямого построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры* (2) *по заданному множеству* (1) *с обобщенным лагранжианом вида* (4) *так, чтобы множество* (1) *было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно, чтобы обобщенная силовая функция* $U = U(x, \dot{x}, t)$ *удовлетворяла условиям*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} = h_\nu^k - a_{\nu k}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} + h_v^k f_k,$$

а вектор-функция f *и матрица* σ *— условию*

$$f = k[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ (A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}), \sigma_i = s_i\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ B_i,$$

где $i = \overline{1,r}$, $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})$ *—* i*-й столбец матрицы* $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, $\nu = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,r}$; $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})^m$ *—* i*-й столбец матрицы* $B = (B_{\mu j})$, $\mu = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,r}$; s_i, k *— произвольные скалярные величины,*

$$\tilde{S}_{1\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj}, \quad \tilde{S}_{2\nu} = \int \left\{\frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu}\right\} dy,$$

$$S_{3\nu} = \int \left[\frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu}\right] \dot{P}^0(t, dy).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № 3357/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация.* М.: Наука, 1990.

2. Тлеубергенов М.И., Ажымбаев Д.Т. *О построении дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию при наличии случайных возмущений с независимыми приращениями* // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2013. № 2. С. 94–104.

3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. *Уравнения программных движений.* М.: Изд-во РУДН, 1986.

4. Еругин Н.П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую* // Прикл. математика и механика. М., 1952. Т. 10. Вып. 6. С. 659–670.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Как известно, теорема Абеля делает невозможным получение формул точного аналитического выражения корней алгебраического уравнения пятой и более высоких степеней через его коэффициенты. Тем не менее, нередко при рассмотрении ряда задач в различных областях знания возникает необходимость в наличии относительно простых формул для прямого приближенного нахождения корня алгебраического уравнения, выраженного через коэффициенты многочлена. Существующие алгоритмы прямого получения приближенного решения алгебраического уравнения, такие как, например, алгоритм Бернулли и r/ϕ-алгоритм В.И. Шмойлова [1], не всегда удобны для использования на практике и не имеют распространения на случай тригонометрических полиномов.

Важную роль в получении некоторых прямых алгоритмов приближенного нахождения корня алгебраического или тригонометрического полинома играет следующая теорема [2].

Теорема. *Пусть* $f(x)$ *— алгебраический или тригонометрический многочлен комплексного аргумента степени* n *вида*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \textit{или} \quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

соответственно, и пусть разложение функции $1/f(x)$ *в ряд Тейлора имеет вид*

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{1}$$

Тогда если $f(x)$ *имеет только один минимальный по модулю корень, например,* $|x_1|<|x_2|\leqslant|x_3|\leqslant\ldots\leqslant|x_n|$, *то в минимальной по модулю точке* x_1 *расхождения ряда (1) предел отношения соседних слагаемых данного ряда стремится к единице с увеличением их порядкового номера, т.е. справедливо выражение*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_m x^m}{c_{m+1}x^{m+1}}=1. \tag{2}$$

Следствием из данной теоремы является возможность получения при помощи систем компьютерной алгебры цепочки формул для выражения минимального по модулю корня алгебраического или тригонометрического полинома через его коэффициенты. Это означает, что если для фиксированного m выразить коэффициенты c_m и c_{m+1} ряда (1) через коэффициенты исходного многочлена $f(x)$, то, учитывая (2), получим выражение для вычисления приближенного значения минимального по модулю корня уравнения $f(x)=0$: $x_1\approx c_m/c_{m+1}$.

Например, для алгебраического многочлена пятой степени вида $x^5+ax^4+bx^3+$ $+cx^2+dx+e$ получаем

$$x_1\approx\frac{c_3}{c_4}=\frac{(be^2-2cde+d^3)e}{ae^3-2bde^2-c^2e^2+3cd^2e-d^4},$$

$$x_1\approx\frac{c_4}{c_5}=-\frac{(ae^3-2bde^2-c^2e^2+3cd^2e-d^4)e}{2ade^3+2bce^3-3bd^2e^2-3c^2de^2+4cd^3e-d^5-e^4},$$

$$x_1\approx\frac{c_5}{c_6}=\frac{(2ade^3+2bce^3-3bd^2e^2-3c^2de^2+4cd^3e-d^5-e^4)e}{2ace^4-3ad^2e^3+b^2e^4-6bcde^3+4bd^3e^2-c^3e^3+6c^2d^2e^2-5cd^4e+d^6+2de^4}.$$

Рассмотрим применение данных формул на конкретном числовом примере. Пусть

$$f(x)=x^5+448x^3+96x^2-26000x+48000=(x-2)(x-6)(x-10\sqrt{5}i)(x+10\sqrt{5}i)(x+8).$$

Находим приближенные значения корня

$$c_3/c_4\approx 1.98641,\quad c_4/c_5\approx 1.99694,\quad c_5/c_6\approx 1.99861,\quad c_9/c_{10}\approx 1.99998.$$

Для случая, когда $f(x)$ является тригонометрическим полиномом, аналогичные формулы для приближенного нахождения корня с минимальным модулем также являются дробно-аналитическими функциями от коэффициентов полинома и имеют более громоздкий вид, поэтому в настоящих тезисах приводить их не будем, а приведем только результаты их применения на конкретном числовом примере. Пусть

$$f(x) = -7 + 10\cos x + 2\sin x - 8\cos 2x + 4\sin 2x.$$

За точное значение минимального по модулю корня примем $x = 0.380969569$. Ниже приведены полученные приближенные значения:

$$c_4/c_5 \approx 0.382303, \quad c_5/c_6 \approx 0.380551, \quad c_7/c_8 \approx 0.380941, \quad c_{10}/c_{11} \approx 0.380969.$$

Решение многих краевых задач для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y^{(1)}(x) + a_n y(x) = f(x), \tag{3}$$

например, T-периодической краевой задачи записывается в форме

$$y(x) = \int\limits_0^T G(s)f(x-s)\,ds,$$

причем функция Грина $G(s)$ содержит корни характеричтического уравнения.

В задачах управления колебаниями, как правило, известно множество изменения коэффициентов уравнения (3), например, таким множеством может быть множество, определяемое неравенствами $b_j \leqslant a_j \leqslant c_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда, естественно, требуется хотя бы приближенно (но аналитически) выразить корни характерестического уравнения через коэффициенты, что и делается в настоящем докладе. Далее можно решить зачачу максимизации или минимизации амплитуды колебания при заданной функции $f(x)$ обычными методами максимизации или минимизации.

Литература

1. Шмойлов В.И. *Решение алгебраических уравнений при помощи r/ϕ-алгоритма.* Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011.

2. Трубников Ю.В., Чернявский М.М., Воронов А.М. *Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений* // Вести. Витебского гос. ун-та. 2017. № 4 (97). С. 29–33.

О КЛАССИФИКАЦИИ КВАЗИОДНОРОДНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ

Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич

Производственные функции (ПФ) являются базовым элементом математического аппарата моделирования микро- и макроэкономических процессов. Основной класс ПФ, используемых в практическом экономическом анализе — однородные ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов. Однако этот класс ПФ в полной мере не позволяет описывать реальные процессы производства, что приводит к задаче его