МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сборник материалов
VIII Международной научной конференции,
посвященной памяти А.Л. Иозефера

(Омск, 20 ноября 2020 г.)

ISBN 978-5-7779-

Омск

2020

УДК 512.622

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Республика Беларусь

О НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИНОМОВ СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Известно, что в общем случае корни алгебраического полинома пятой или более высокой степени не могут быть выражены через комбинацию арифметических действий и радикалов от коэффициентов полинома. Несмотря на это, существует большое число классов полиномов, которые допускают такое выражение для всех или некоторых своих корней. Например, это могут быть полиномы, являющиеся суперпозицией полиномов меньших степеней или имеющие кратные корни. Также к таким классам можно отнести классы возвратных полиномов и полиномов, обладающими некоторыми специфическими свойствами [1].

Важно отметить, что для алгебраических уравнений высоких степеней, допускающих символьное решение, общих универсальных методов решения практически не существует, и в каждом конкретном случае приходится применять свои специфические методы. В последние два десятилетия такие методы активно развиваются вследствие бурного развития возможностей вычислительной техники [2].

В настоящей работе в терминах коэффициентов установлены критерии факторизации алгебраических многочленов седьмой степени вида (1) на два биномиальных множителя.

$$P_7(z) = z^7 + a_1 z^6 + a_2 z^5 + a_3 z^4 + a_4 z^3 + a_5 z^2 + a_6 z + a_7$$

$$\left(a_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1,7}\right) \tag{1}$$

Теорема 1. *Полином* $P_7(z)$ *вида (1) представим в форме*

$$P_7(z) = (z - z_1)^4 (z - z_2)^3$$

тогда и только тогда, когда

$$a_3 = \left(3a_1^2 - 7a_2\right)\gamma - \frac{10}{49}a_1^3 + \frac{5}{7}a_1a_2,$$

$$a_4 = -\frac{13}{1372}a_1^4 - \frac{9}{98}a_1^2a_2 + 4\gamma\left(\frac{3}{7}a_1^3 - a_1a_2\right) + \frac{29}{84}a_2^2,$$

$$a_5 = \frac{3}{196}\left(-30a_1^4 + 196a_1^2a_2 - 294a_2^2\right)\gamma + \frac{153}{9604}a_1^5 - \frac{67}{686}a_1^3a_2 + \frac{29}{196}a_1a_2^2,$$

$$a_6 = \frac{1}{1372}\left(-276a_1^5 + 1400a_1^3a_2 - 1764a_1a_2^2\right)\gamma - \frac{11}{67228}a_1^6 + $$
$$+\frac{31}{4802}a_1^4a_2 - \frac{43}{1372}a_1^2a_2^2 + \frac{2}{49}a_2^3,$$

$$a_7 = \frac{1}{67228}\left(2838a_1^6 - 22120a_1^4a_2 + 57330a_1^2a_2^2 - 49392a_2^3\right)\gamma -$$
$$-\frac{983}{3294172}a_1^7 + \frac{81}{33614}a_1^5a_2 - \frac{187}{28812}a_1^3a_2^2 + \frac{2}{343}a_1a_2^3;$$

где $\gamma = \frac{1}{441}\sqrt{18a_1^2 - 42a_2}$.

При этом,

$$z_1 = -\frac{1}{7}a_1 + \frac{63}{2}\gamma,$$

$$z_2 = -\frac{1}{7}a_1 - 42\gamma.$$

Теорема 2. *Полином* $P_7(z)$ *вида (1) представим в форме*

$$P_7(z) = (z - z_1)^5 (z - z_2)^2$$

тогда и только тогда, когда

$$a_3 = \left(6a_1^2 - 14a_2\right)\alpha - \frac{10}{49}a_1^3 + \frac{5}{7}a_1a_2,$$

$$a_4 = \frac{1}{7}\left(24a_1^3 - 56a_1a_2\right)\alpha - \frac{53}{1715}a_1^4 + \frac{2}{245}a_1^2a_2 + \frac{8}{35}a_2^2,$$

$$a_5 = \frac{1}{1225}\left(-684a_1^4 + 5292a_1^2a_2 - 8624a_2^2\right)\alpha +$$

$$+\frac{81}{12005}a_1^5-\frac{94}{1715}a_1^3a_2+\frac{24}{245}a_1a_2^2$$

$$a_6=\frac{1}{8575}\left(-2568a_1^5+13384a_1^3a_2-17248a_1a_2^2\right)\alpha+\frac{2026}{420175}a_1^6-$$

$$-\frac{1891}{60025}a_1^4a_2+\frac{552}{8575}a_1^2a_2^2-\frac{48}{1225}a_2^3,$$

$$a_7=\frac{1}{420175}\left(-14358a_1^6+79534a_1^4a_2-130928a_1^2a_2^2+54880a_2^3\right)\alpha+$$

$$+\frac{11092}{20588575}a_1^7-\frac{1511}{420175}a_1^5a_2+\frac{472}{60025}a_1^3a_2^2-\frac{48}{8575}a_1a_2^3;$$

где $\alpha=\frac{1}{245}\sqrt{15a_1^2-35a_2}$.

При этом,

$$z_1=-\frac{1}{7}a_1+14\alpha\ ,$$

$$z_2=-\frac{1}{7}a_1-35\alpha\ .$$

Литература

1. *Антипова И.А., Михалкин Е.Н., Цих А.К.* Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.
2. *Астапов И.С., Астапов Н.С.* Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.