что обеспечивает существование функции $\Pi = \Pi(q, \dot{q}, t)$ такой, что стохастическое уравнение (3) с помощью обобщенного кинетического потенциала $\hat{L} = L^* + \Pi$ будет эквивалентно уравнению (4).

Следовательно, имеет место следующая

Теорема. *Для приведения стохастического уравнения Воронца (3) к стохастическому уравнению лагранжевой структуры вида (4) необходимо и достаточно, чтобы функции $G_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяли условиям (5), (6a), (6b), (6c).*

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (Грант № AP09258966).

Литература

1. Гельмгольц Г. *О физическом значении принципа наименьшего действия* // Вариационные принципы механики. М., 1959. С. 430–459.

2. Румянцев В. В. *Об интегральных принципах для неголономных систем* // ПММ. 1982. Т. 42. № 1. С. 3–12.

3. Новоселов В. С. *Вариационные методы в механике.* Л., 1966.

4. Сумбатов А. С. *Неэкстремальность семейств кривых, определяемых динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 11. № 5. С. 897–899.

5. Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics.* Springer-Verlag, New-York. 1978.

6. Santilli R. M. *Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics.* Springer-Verlag, New-York. 1983.

7. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов* // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Новейшие достижения /ВИНИТИ. 1992. Т. 40. С. 3–178.

8. Стратонович Р. Л. *Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений* // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 1964. № 1. С. 3–11.

9. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Динамика неголономных систем.* М., 1967.

10. Мощук Н. К., Синицын И. Н. *О стохастических неголономных системах* // ПММ. 1990. Т. 54. № 2. С. 213–223.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Чебышевские итерационные процессы связаны с расположением спектра линейного оператора в сложных областях комплексной плоскости, например, в прямоугольнике. Такие итерационные процессы применяются при численном решении ряда прикладных задач. Важную роль при их построении играют экстремальные полиномы комплексного аргумента, наименее уклоняющиеся от нуля на квадрате комплексной плоскости, т. е. являющиеся аналогами полиномов Чебышева первого рода. В отличие от действительного случая, где давно известна общая формула

$$T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x),$$

получение экстремальных полиномов комплексного аргумента представляет собой трудную и до конца не решенную задачу.

Пусть D – квадрат с вершинами в точках $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Так, в начале XXI века Ю.В. Трубниковым были получены в аналитическом виде выражения рассматриваемых на данном квадрате экстремальных полиномов степеней со второй по шестую включительно (теорема 1).

Теорема 1. [1] *Экстремальными на квадрате D являются следующие полиномы*

$$P_1 = z, \quad P_2 = z^2, \quad P_3 = z^3, \quad P_4 = z^4 + 3/2,$$

$$P_5 = z^5 + \left(9 - 5\sqrt{2}\right) z, \quad P_6 = z^6 + (7/3)\, z^2.$$

Важную роль в теории оптимального приближения функции комплексного аргумента обычными и обобщенными полиномами играет следующая

Теорема 2. [2, с. 26] *Элемент $y \in G$ тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения точки $x \notin G$, когда*

$$\exists \mu \big(\in \partial \|y - x\| \vee \in \partial \|x - y\|\big) \forall h \,(\in G)\, \mathrm{Re} \langle \mu, h\rangle = 0 \tag{1}$$

($\partial \|x\|$ *– субдифференциал нормы в точке x, $\langle \mu, h\rangle$ – значение функционала μ на векторе h*).

Таким образом, на основе критерия (1) можно сформулировать следующую схему построения экстремального (т.е. для которого достигается $\inf ||f - P_n||$) полинома:

1) исходя из некоторого расположения корней полинома P_n, определенного на прямоугольнике комплексной плоскости, найти систему точек, в которых достигается максимум модуля разности $f(z) - P_n(z)$; система таких точек является аналогом точек чебышевского альтернанса (e-точки);

2) решить систему уравнений

$$\mathrm{Re} \langle \mu, \varphi_k \rangle = 0 \;\; (k = 0, 1, ..., n)\,, \quad \varphi_k \in G,$$

$$\mathrm{Re} \langle \mu, f - P_n \rangle = \|f - P_n\|\,, \quad \mu \in \partial \|f - P_n\|.$$

В 2022 году авторами доклада доказана [3] экстремальность полинома седьмой степени

$$P_7 = z^7 + (1 + \sqrt{11}/2) z^3.$$

Перечислим основные трудности получения экстремальных полиномов высоких степеней по представленному алгоритму: 1) точное расположение e-точек заранее не известно, а их количество возрастает с увеличением степени полинома; 2) с увеличением степени полинома возрастает количество его неизвестных коэффициентов и корней. Например, количество e-точек полиномов P_4, P_5, P_6 равно восьми, у P_7 их 12, у P_8, P_9, P_{10}, P_{11} их 16.

Кратко рассмотрим численно-аналитическое построение полинома P_9. Учитывая симметрию и известный вид полиномов меньших степеней, P_9 ищем в виде

$$P_9(z) = z^9 + a z^5 + b z.$$

Все e-точки расположены на границе области D. В силу симметрии достаточно рассмотреть одну сторону квадрата, например, верхнюю. Пусть

$$P_9 = (x + iy)^9 + a(x + iy)^5 + b\,(x + iy)\,.$$

Запишем квадрат модуля этого выражения при $y = 1$.

$$\begin{aligned} |P_9|^2{}_{|y=1} = {} & (x^{16} + 8x^{14} + (2a + 28)\, x^{12} + (-4a + 56)\, x^{10} + (a^2 - 34a + 2b + 70)\, x^8 + \\ & + (4a^2 - 56a - 56b + 56)\, x^6 + (6a^2 + (2b - 34)\, a + 140b + 28)\, x^4 + \\ & + (4a^2 + (-12b - 4)\, a - 56b + 8)\, x^2 + (a + b + 1)^2)\, (x^2 + 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагаем, что максимум квадрата модуля $|P_9|^2$ при $y=1$ достигается в пяти точках, среди которых $x=0$ и $x=1$, т. е. $\max|P_9|^2 = 2(4a-b-16)^2$. Подставляя это значение в (2), при $x=0$ получаем, что

$$a_1 = \left(9-5\sqrt{2}\right)\left(b+31+15\sqrt{2}\right)/31; \quad a_2 = \left(9+5\sqrt{2}\right)\left(b+31-15\sqrt{2}\right)/31.$$

Одно из этих соотношений окажется справедливым, но проверить необходимо оба. Подставим первое значение a_1 в выражение (2). Далее необходимо найти от него производную с целью определения координаты «плавающей» между $x=0$ и $x=1$ e-точки, причем необходимо учесть, что значение квадрата модуля $|P_9|^2$ в этой точке также совпадает со значением в нуле. Таким образом, искомая координата e-точки является одним из корней алгебраического уравнения двенадцатой степени, которое заменой сводится к уравнению шестой степени. Его решаем численными методами. Таким образом, получаем тройку чисел

$$x_1 \approx 0,5545513658387628724 1;$$

$$a \approx 3,2977903255033379613; \quad b \approx 0,7858085148816372367 9,$$

где все значащие цифры верные.

Остается проверить справедливость критерия (1). Занумеруем против часовой стрелки подряд идущие 16 e-точек, начиная с $z_1 = 1+i$. Функционал μ действует следующим образом:

$$\langle \mu, g\rangle = (1/4,3829286808) \times \sum_{1\leqslant k\leqslant 16} b_k Q_k g\left(z_k\right),$$

где Q_k $(k=1,2,...,16)$ – значения, сопряженные значениям полинома в e-точках z_k. Для значений b_k, $k=\overline{1,16}$, справедливы соотношения

$$b_1 = b_5 = b_9 = b_{13} \approx 0,05402104649, \quad b_3 = b_7 = b_{11} = b_{15} \approx 0,05235825753,$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = b_{10} = b_{12} = b_{14} = b_{16} \approx 0.07181034799.$$

Для случая, когда $a = a_2$, переопределенная система уравнений для нахождения коэффициентов b_k $(k=1,2,...,16)$ не имеет решения.

Таким образом, доказана экстремальность полинома

$$P_9\left(z\right) = z^9 + 3,2977903255033379613 z^5 + 0,7858085148816372367 9z.$$

Работа выполнена в рамках ГПНИ "Конвергенция–2025".

Литература

1. Трубников Ю. В. *О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области* // Таврический вестник информатики и математики. 2003. № 2. С. 45–56.

2. Трубников Ю. В. *Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями.* М.: Астропресс–XXI, 2002.

3. Чернявский М. М., Трубников Ю. В. *О численном методе нахождения экстремального полинома седьмой степени, определенного на квадрате комплексной плоскости* // 74 Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников и аспирантов "Наука – образованию, производству, экономике". Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2022. С. 50–52.