Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.537.3+512.622

ЧЕРНЯВСКИЙ
Михаил Михайлович

НОВЫЕ ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Гродно, 2022

Научная работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Научный руководитель: **Трубников Юрий Валентинович,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры геометрии и математического анализа учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Официальные оппоненты: **Вувуникян Юрий Микиртычевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Сендер Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры, геометрии и математического моделирования учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Оппонирующая организация: **Белорусский государственный университет**

Защита состоится 24.06.2022 в 14.30 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209.

Телефон ученого секретаря: (+375 152) 39 64 79; (+375 152) 73 19 26.

Email: v.a.pronko@gmail.com; manami@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Янки Купалы.

Автореферат разослан 23.05.2022.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

В конце XX – начале XXI века после относительно долгого перерыва началось стремительное развитие анализа точных и приближенных аналитических методов получения корней различных алгебраических уравнений. В частности, большое внимание уделяется нахождению корней в символьном виде. Не являются исключением и алгебраические уравнения высоких степеней, допускающие решение в радикалах. Из алгебры известно, что группа Галуа для таких алгебраических уравнений разрешима. Проверка группы Галуа на разрешимость достаточно трудна для обычного пользователя, который не является специалистом в области современной алгебры. К тому же сам факт того, что группа Галуа разрешима, не дает конкретных способов для отыскания корней в терминах коэффициентов полинома, поскольку универсальных методов для решения алгебраических уравнений пятой и более высоких степеней не существует.

В научной математической литературе практически не содержится информация о способах точного нахождения значений кратных корней полиномов при их наличии. В некоторых источниках можно найти фразы о том, что кратный корень, как правило, выражается в виде рациональных функций от коэффициентов, но явного вида таких формул для алгебраических уравнений конкретной степени не приводится. Сам по себе этот вопрос достаточно интересен, поскольку для каждого конкретного типа уравнения существуют целые семейства точных аналитических формул для вычисления корней разной кратности. Алгоритмам построения таких формул посвящена четвертая глава настоящей диссертации.

Другим значимым направлением исследований в области алгебраических полиномов является получение приближенных формул для корней в виде рациональных функций от коэффициентов полинома. В опубликованных работах автора диссертации устанавливается связь между поведением степенных функций от корней полиномов, которые единообразно выражаются в терминах коэффициентов, причем это единообразие достигается за счет разложения функции $1/\,p(z)$ в ряд Тейлора. Таким образом, метод Бернулли – Эйткена – Никипорца получает полное обоснование.

Значительный интерес многих авторов вызывают триномиальные алгебраические уравнения. Автор настоящей диссертации разработал простой и эффективный метод, позволяющий классифицировать триномиальные уравнения с действительными коэффициентами, определять количество действительных корней и проводить их локализацию.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационная работа выполнена на кафедре инженерной физики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2020» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», № ГР 20160435, 2016–2020 гг.) в соответствии с подзаданием «Развитие аналитических методов исследования сложных динамических систем» задания «Аналитические, топологические и аппроксимационные методы исследования математических моделей, возникающих в естественных науках и экономике».

Автором диссертации получены Гранты аспирантов, докторантов и студентов Министерства образования Республики Беларусь: в 2017 году по теме «Развитие методов приближенного нахождения решений нелинейных матричных уравнений» (№ ГР 20170663); в 2019 году по теме «Разработка модифицированного метода Бернулли для решения нелинейных матричных уравнений» (№ ГР 20190570); в 2020 году по теме «Разработка точных и приближенных методов нахождения решений нелинейных матричных уравнений» (№ ГР 20200658).

В 2021–2023 гг. ведется работа по теме Гранта БРФФИ «Наука – М» «Разработка новых методов нахождения корней алгебраических уравнений в символьном виде» (№ ГР 20213304).

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является получение и обоснование точных и приближенных формул, выражающих корни алгебраических уравнений в символьном виде в терминах коэффициентов соответствующего полинома. Это: а) модификация и обоснование метода Бернулли – Эйткена – Никипорца; б) систематизация и подробный анализ поведения корней трехчленных алгебраических уравнений; в) получение и обоснование точных символьных формул для кратных корней.

Для достижения поставленной цели решались следующие ***задачи***:

1. Получить формулы, выражающие коэффициенты рядов Тейлора и Лорана функции $1/P(z)$, где $P(z)$ – произвольный полином n-й степени, и установить структуру этих коэффициентов как в терминах корней полинома, так и через его коэффициенты.

2. Провести анализ асимптотического поведения некоторых конструкций, содержащих коэффициенты рядов Тейлора и Лорана, для обоснования и модификации метода Бернулли – Эйткена – Никипорца, что позволит получить

алгоритм приближенного нахождения корней алгебраических уравнений произвольной степени в виде рациональных функций от коэффициентов.

3. Разработать схему подстановок, на основании которой провести классификацию триномиальных алгебраических уравнений, а также получить теоремы о количестве действительных корней и их локализации.

4. Обосновать алгоритм построения точных символьных формул, выражающих значения кратных корней полинома в виде конструкций, содержащих отношения частных производных различных порядков от некоторых результантов по коэффициентам полинома.

Объектом исследования являются алгебраические уравнения с комплексными коэффициентами, заданными в символьной форме.

Предметом исследования являются методы, позволяющие точно или приближенно находить в символьном виде корни алгебраических уравнений.

Выбор объекта исследования обусловлен анализом многочисленных литературных источников, в которых отражена актуальность этой тематики.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключается в следующем:

1. Предложен алгоритм приближенного нахождения корней алгебраических уравнений произвольной степени в виде рациональных функций от коэффициентов.

2. Найдены специальные подстановки, позволяющие провести классификацию триномиальных алгебраических уравнений и доказать теоремы о количестве действительных корней и их локализации.

3. Получены формулы, выражающие кратные корни в виде рациональных функций от коэффициентов полинома, на основе анализа поведения частных производных от некоторых результантов по коэффициентам полинома.

Положения, выносимые на защиту

1. Алгоритм приближенного нахождения корней алгебраических уравнений произвольной степени в виде рациональных функций от коэффициентов на основе анализа структур коэффициентов рядов Тейлора и Лорана функции $1/P(z)$, где $P(z)$ – произвольный полином степени n.

2. Теоремы о количестве и локализации действительных корней триномиальных уравнений с действительными коэффициентами на базе разработанной автором диссертации системы подстановок.

3. Алгоритм нахождения точных аналитических формул для кратных корней алгебраических полиномов произвольной степени в виде конструкций,

содержащих частные производные от некоторых результантов по коэффициентам полинома.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты диссертационной работы и положения, выносимые на защиту, получены автором лично. Работы [1–5; 7; 8; 11; 12; 15; 17; 20; 21; 24] опубликованы в соавторстве с научным руководителем доктором физико-математических наук, профессором Ю. В. Трубниковым, а также с кандидатом физико-математических наук, доцентом А. М. Вороновым и кандидатом физико-математических наук, доцентом В. В. Юргеласом. Научному руководителю принадлежит постановка задач и общие рекомендации относительно методов их решения, а автору диссертации – реализация этих рекомендаций и доказательства соответствующих результатов. Участие А. М. Воронова и В. В. Юргеласа в совместных работах заключалось в реализации некоторых численных экспериментов. Без соавторов опубликовано 6 работ, в том числе 1 статья в рецензируемом журнале.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Янки Купалы (руководитель – профессор Е. А. Ровба, 29 декабря 2020 г.), на научном семинаре кафедры теории функций БГУ (руководитель – профессор В. Г. Кротов, 25 апреля 2022 г.) и на следующих научных конференциях:

– Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VII Машеровские чтения» (Витебск, 24–25 сентября 2013 г.);

– Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XI Машеровские чтения» (Витебск, 18 октября 2017 г.);

– XXIII (70) региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (Витебск, 15 февраля 2018 г.);

– XVIII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2018» (Гродно, 15–18 мая 2018 г.);

– XI республиканской научной конференции молодых ученых и студентов «Современные проблемы математики и вычислительной техники» (Брест, 21–22 ноября 2019 г.);

– IV международной научной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента АН БССР, профессора Иванова Евгения

Алексеевича «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Гродно, 17–20 декабря 2019 г.);

– 84-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием) Белорусского государственного технологического университета (Минск, 3–14 февраля 2020 г.);

– 72-й региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (Витебск, 20 февраля 2020 г.);

– Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XIV Машеровские чтения» (Витебск, 21 октября 2020 г.);

– 73-й региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (Витебск, 11 марта 2021 г.);

– Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XV Машеровские чтения» (Витебск, 22 октября 2021 г.);

– Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.).

Результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс факультета математики и информационных технологий учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» (акты внедрения от: 29.03.2021, 16.04.2021, 19.04.2021).

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 24 научных работах, из которых 8 – статьи в научных журналах в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общий объем 6,2 авт. л.), 16 – материалы научных конференций (2,17 авт. л.).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка и приложения. Полный объем диссертации составляет 112 страниц. Библиографический список состоит из 126 наименований, включая 24 публикации соискателя ученой степени, и занимает 11 страниц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** диссертации дан обзор литературы, посвященной методам точного и приближенного символьного решения для различных классов алгебраических уравнений. В первую очередь основное внимание уделено тем направлениям исследований полиномов, в которых автором диссертации были получены новые результаты.

В разделе 1.1 перечислены основные алгоритмы построения равенств, связывающих степенные суммы корней вида $\sum_{j=1}^{n} b_j z_j^{\,m}$ с коэффициентами алгебраического уравнения. Такие равенства представляют интерес при больших значениях *m*.

В разделе 1.2 рассмотрен метод Д. Бернулли для нахождения наибольшего по модулю корня алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, а также обобщение этого метода А. Эйткеном. В этом же разделе приведены приближенные формулы Э. Фюрстенау, известные как функции Никипорца, выражающие значение всех корней алгебраического уравнения произвольной степени через коэффициенты.

Раздел 1.3 посвящен краткому обзору работ по исследованию разнообразных классов триномиальных алгебраических уравнений.

В разделе 1.4 рассмотрена идея получения точных формул для нахождения значений кратных корней полинома. Основное внимание уделено актуальному алгоритму получения таких формул в виде рациональных функций от коэффициентов полинома.

Вторая глава посвящена алгоритму приближенного нахождения корней алгебраических уравнений произвольной степени в виде рациональных функций от коэффициентов. Данный алгоритм разработан автором диссертации, отличается от известной схемы Бернулли – Эйткена – Никипорца и вполне обоснован теоретически.

В разделе 2.1 доказаны ключевые теоремы, дающие обоснования алгоритмов нахождения минимального и максимального по модулю корней алгебраического уравнения произвольной степени.

Теорема 1 [1; 2]. *Пусть ряд Тейлора функции комплексного аргумента z*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n\cdot\ldots\cdot(z-z_p)^v}\quad\left(0<|z_1|<|z_2|<\ldots<|z_p|\right)$$

имеет вид $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j z^j$, *тогда*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_j}{c_{j+1}}=z_1.$$

Важно отметить, что если корни z_1 и z_2 расположены на одной окружности комплексной плоскости $0<|z_1|=|z_2|$ и $z_1\neq z_2$, то $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{c_j}{c_{j+1}}$ не существует.

Теорема 2 [2]. *Пусть ряд Лорана функции*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n\cdot\ldots\cdot(z-z_p)^v}\quad\left(0<|z_p|<|z_{p-1}|<\ldots<|z_1|\right)$$

имеет вид

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j z^{-j},$$

тогда

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{j+1}}{c_j}=z_1.$$

Теоремы 1 и 2 служат источником для получения последовательности аналитических формул, выражающих значения максимального и минимального по модулю корней алгебраического уравнения любой фиксированной степени в виде рациональных функций от коэффициентов. В разделе 2.2 приведен ряд таких формул для алгебраического уравнения четвертой степени. Также на конкретных числовых примерах продемонстрирована их эффективность.

В разделе 2.3 продемонстрировано сравнение представленных в разделе 2.2 приближенных формул с соответствующими функциями Никипорца, что подтвердило их непосредственную связь между собой.

Раздел 2.4 посвящен последующему развитию алгоритмов из раздела 2.1, что позволило получить формулы для нахождения произвольного простого корня алгебраического полинома $P(z)$ в терминах коэффициентов ряда Тейлора функции $1/P(z)$. Эти формулы эквивалентны формулам Эйткена для алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами (1):

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0. \tag{1}$$

Таким образом, метод Бернулли – Эйткена – Никипорца получил полное обоснование.

В **третьей главе** диссертации предложена система подстановок, позволяющая провести классификацию триномиальных алгебраических уравнений произвольных степеней с действительными коэффициентами и доказать теоремы о количестве действительных корней и их локализации.

При помощи этих подстановок вопрос о количестве действительных корней, их локализации и классификации самих триномиальных уравнений сводится к исследованию функции одного аргумента, называемой определяющей. Структура такой функции весьма проста, а ее связь с коэффициентами уравнения и показателями степеней переменной позволяет в виде эффективно проверяемых неравенств получить необходимые и достаточные условия количества действительных корней и осуществить их локализацию.

Классификация формируется поведением определяющей функции и насчитывает четыре типа триномиальных уравнений в зависимости от степеней переменных: нечетно-нечетные уравнения; нечетно-четные, четно-нечетные и четно-четные.

В разделе 3.1 для большей простоты восприятия результатов показано исследование соответствующей определяющей функции для двух типов алгебраических уравнений пятой степени:

$$x^5 + px + q = 0 \quad \left(p \neq 0, \quad q \neq 0\right), \tag{2}$$

$$x^5 + px^2 + q = 0 \quad \left(p \neq 0, \quad q \neq 0\right). \tag{3}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3 [3; 5; 17]. *Пусть* $p \neq 0$, $q \neq 0$. *Необходимым и достаточным условием существования трех различных действительных корней уравнения (2) является неравенство*

$$-\frac{p^5}{q^4} > \frac{3125}{256}.$$

Необходимым и достаточным условием существования действительного корня кратности 2 *и другого простого действительного корня является равенство*

$$-\frac{p^5}{q^4} = \frac{3125}{256}.$$

Необходимым и достаточным условием существования одного простого действительного корня является неравенство

$$-\frac{p^5}{q^4} < \frac{3125}{256}.$$

Теорема 4 [3; 5; 17]. *Если коэффициенты* p *и* q $(p \neq 0, q \neq 0)$ *имеют одинаковый знак, то уравнение (3) имеет единственный действительный корень.*

Если p *и* q *– разных знаков, то при выполнении неравенства*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} > \frac{25\sqrt{15}}{18}$$

уравнение (3) имеет три действительных решения. Аналогично, если выполнено неравенство

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < -\frac{25\sqrt{15}}{18},$$

то уравнение (3) имеет три действительных решения.

При выполнении одного из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = \frac{25\sqrt{15}}{18},\ q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = -\frac{25\sqrt{15}}{18}$$

уравнение (3) имеет кратный действительный корень кратности два и один простой действительный корень.

Если выполнено неравенство

$$-\frac{25\sqrt{15}}{18} < q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < \frac{25\sqrt{15}}{18},$$

то уравнение (3) имеет ровно один действительный корень.

Раздел 3.2 посвящен исследованию нечетно-нечетных трехчленных уравнений произвольной степени, т. е. случая, когда в уравнении

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0) \tag{4}$$

m, n – нечетные числа.

Доказана следующая

Теорема 5 [3; 5]. *Пусть* $p \neq 0$, $q \neq 0$. *Необходимым и достаточным условием существования трех действительных различных корней уравнения (4) является неравенство*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > \frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m} m}.$$

При этом, если p *и* q *отрицательны, то один из этих корней положителен, а два – отрицательны. При выполнении равенства*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m} m}$$

существует один кратный корень x_* *кратности два, равный* $x_* = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$, *и один простой корень.*

Необходимым и достаточным условием существования единственного действительного корня является неравенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} < \frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m} m},$$

при этом локализация этого корня определяется выражением

$$x = k(q/p)^{1/m} \ (k > -1, k \neq 0).$$

В разделе 3.3 доказаны две теоремы для нечетно-четного уравнения (4).

Теорема 6 [3; 5]. *Нечетно-четные уравнения в случае, когда* p *и* q *одного знака, имеют единственный действительный корень. Этот корень отрицателен при положительных значениях коэффициентов* p, q *и положителен при отрицательных* p, q.

Теорема 7 [3; 5]. *Пусть* $p \neq 0$, $q \neq 0$. *Если* p, q *– разных знаков, то при выполнении одного из неравенств*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} > \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}, \quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} < -\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

уравнение (4) имеет три различных действительных решения.

Если имеет место одно из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},\quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

то уравнение (4) имеет двукратный действительный корень $x=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}$ *и простой действительный корень.*

При выполнении двойного неравенства

$$-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}<q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (4) имеет единственный действительный корень.

В разделах 3.4 и 3.5 доказаны соответствующие теоремы о числе действительных решений для четно-нечетного и четно-четного уравнения (4).

Теорема 8 [3; 5]. *Пусть* $p\neq 0$, $q\neq 0$. *При выполнении одного из неравенств*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}>0,\qquad -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}<\frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m}$$

уравнение (4) имеет два действительных решения.

Если выполнено равенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m},$$

то уравнение (4) имеет кратный корень $x=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}$.

Теорема 9 [3; 5]. *Пусть* $p\neq 0$, $q\neq 0$. *Если* p *и* q *имеют разные знаки, то при выполнении неравенства*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}>\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (4) имеет четыре действительных решения, два из которых отрицательны, а два – положительны.

Если имеет место равенство (заметим, что p *в этом случае должно быть отрицательным)*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

то уравнение (4) имеет два кратных корня, кратность каждого из которых равна двум

$$x_1=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)},\quad x_2=-\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}.$$

При условии

$$0<q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (4) действительных корней не имеет.

Наконец, если

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<0,$$

уравнение (4) имеет два действительных корня.

В разделе 3.6 отдельно рассмотрен случай, когда трехчленные алгебраические уравнения с действительными коэффициентами имеют кратный корень. Имеет место следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть* t *– значение кратного корня трехчленного алгебраического уравнения с действительными коэффициентами (4). Тогда значения остальных, в том числе комплексных, корней находятся из уравнения*

$$x^n-\frac{n}{m}t^{n-m}x^m+\frac{n-m}{m}t^n=0.$$

Целью **четвертой главы** является получение точных формул для нахождения кратных корней полиномов в терминах частных производных от некоторых результантов по коэффициентам исходного полинома или его производных.

В разделе 4.1 рассматриваются алгебраические уравнения пятой степени с комплексными коэффициентами $b_i \ \left(i=\overline{1,5}\right)$

$$P(z)=z^5+b_1z^4+b_2z^3+b_3z^2+b_4z+b_5=0, \tag{5}$$

имеющие заданную мультипликативную структуру, то есть раскладываемые на множители следующим образом: $P(z)=(z-z_1)^5$, $P(z)=(z-z_1)^4(z-z_2)$, $P(z)=(z-z_1)^3(z-z_2)^2$, и т. д. Для таких полиномов исследуется структура частных производных от дискриминанта полинома по коэффициентам, что позволяет получать последовательность точных формул для нахождения значений кратных корней (если кратный корень единственный) либо выражения связи между корнями полинома и коэффициентами, существенно уточняющие соотношения Виета.

Теорема 11 [7]. *Корень уравнения (5) z_1 кратности 2, если он единственный кратный корень, можно определить по формулам*

$$z_1=\frac{\partial G}{\partial b_j}:\frac{\partial G}{\partial b_{j+1}} \quad \left(j=\overline{1,4}\right),$$

где G – дискриминант уравнения (5).

Теорема 12 [7]. *Корень уравнения (5) z_1 кратности 3 при отсутствии других кратных корней находится по формулам*

$$z_1=g_k\,/\,g_{k+1} \quad \left(k=\overline{1,8}\right),$$

где g_j находятся по формулам

$$g_1=\frac{\partial^2 G}{\partial b_1^2},\ g_2=\frac{\partial^2 G}{\partial b_1\partial b_2},\ g_3=\frac{\partial^2 G}{\partial b_2^2},\ g_4=\frac{\partial^2 G}{\partial b_2\partial b_3},\ \ldots,\ g_8=\frac{\partial^2 G}{\partial b_4\partial b_5},\ g_9=\frac{\partial^2 G}{\partial b_5^2}.$$

Теорема 13 [7]. *Корень уравнения (5) z_1 кратности 4 можно точно вычислить по формулам*

$$z_1=h_k\,/\,h_{k+1} \quad \left(k=\overline{1,12}\right),$$

где h_j находятся по формулам

$$h_1=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1^3},\ h_2=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1^2\partial b_2},\ h_3=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1\partial b_2^2},\ h_4=\frac{\partial^3 G}{\partial b_2^3},\ \ldots,\ h_{12}=\frac{\partial^3 G}{\partial b_4\partial b_5^2},\ h_{13}=\frac{\partial^3 G}{\partial b_5^3}.$$

Теорема 14 [7]. *Корень уравнения (5) z_1 кратности 5 можно точно вычислить по формулам*

$$z_1=f_k\ /\ f_{k+1}\quad \left(k=\overline{1,15}\right),$$

где f_j находятся по формулам

$$f_1=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^4},\ f_2=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^3\partial b_2},\ f_3=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^2\partial b_2^2},\ f_4=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1\partial b_2^3},\ \ldots,\ f_{15}=\frac{\partial^4 G}{\partial b_4\partial b_5^3},\ f_{16}=\frac{\partial^4 G}{\partial b_5^4}.$$

Теорема 15. *Корни уравнения $\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2\left(z-z_3\right)=0$ z_1 и z_2 кратности 2 связаны со вторыми производными от дискриминанта G следующим образом:*

$$z_1 z_2=\frac{\partial^2 G}{\partial b_j^2}:\frac{\partial^2 G}{\partial b_{j+1}^2}\quad \left(j=\overline{1,4}\right),$$

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{\partial^2 G}{\partial b_k\partial b_{k+1}}:\frac{\partial^2 G}{\partial b_{k+1}^2}\quad \left(k=\overline{1,4}\right).$$

Теорема 16. *Корни уравнения $\left(z-z_1\right)^3\left(z-z_2\right)^2=0$, z_1 и z_2 связаны с третьими производными от дискриминанта G следующим образом:*

$$z_1^2 z_2=\frac{\partial^3 G}{\partial b_k^3}:\frac{\partial^3 G}{\partial b_{k+1}^3}.\quad \left(k=\overline{1,4}\right).$$

Раздел 4.2 является основным в четвертой главе и посвящен непосредственному анализу частных производных от результантов многочленов и их производных. Так, например, показано, что можно получить точные формулы для нахождения кратных корней кратности 3 и выше в более компактном виде, чем по алгоритмам, изложенным в работах ряда авторов последних двух десятилетий. Доказана следующая ключевая

Теорема 17 [7]. *Пусть $f=f\left(z\right)$ – полином с комплексными коэффициентами степени $n\geq 3$, а $f^{(k-1)}=f^{(k-1)}\left(z\right)$ – его производная порядка $k-1$ вида*

$$f^{(k-1)}\left(z\right)=b_0 z^{n-k+1}+b_1 z^{n-k}+b_2 z^{n-k-1}+\ldots+b_{n-k}z+b_{n-k+1}.$$

Тогда корень z_1 кратности k при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, можно вычислить по формулам

$$z_1 = \frac{\partial^k R\left(f, f^{(k-1)}\right)}{\partial b_{j-1} \partial b_j^{k-1}} : \frac{\partial^k R\left(f, f^{(k-1)}\right)}{\partial b_j^k} \quad \left(j = 1, \ldots, n+1-k\right). \tag{6}$$

Формулы (6) являются наиболее универсальными с точки зрения применения на практике, поскольку учитывают возможность существования других корней полинома различной кратности, меньшей k.

Проведено сравнение конечных формул (6) для вычисления корня кратности 3 уравнения пятой степени (5), записанных в терминах коэффициентов полинома, с аналогичными формулами, полученными по алгоритмам из известных работ последнего десятилетия. Формулы, полученные автором диссертации, оказались значительно короче.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Установлена структура коэффициентов рядов Тейлора и Лорана функции $1/P(z)$, где $P(z)$ – полином степени n комплексного аргумента z, что позволило обосновать различные на первый взгляд методы Бернулли, Эйткена и Никипорца. На основе анализа асимптотического поведения некоторых конструкций, содержащих коэффициенты перечисленных рядов, получен алгоритм приближенного нахождения корней алгебраических уравнений произвольной степени в виде рациональных функций от коэффициентов. Оценку погрешности можно производить в символьном виде по невязке [1; 2; 7; 10; 11; 12; 22].

2. Доказаны теоремы о количестве и локализации действительных корней триномиальных уравнений с действительными коэффициентами на базе разработанной автором диссертации системы подстановок. Установлено, что для таких уравнений вопрос о количестве действительных корней, их локализации и классификации самих триномиальных уравнений сводится к исследованию функции одного аргумента, называемой определяющей. Для каждого из четырех типов триномиальных уравнений в виде эффективно проверяемых неравенств получены необходимые и достаточные условия наличия определенного количества действительных корней, а также точные формулы для вычисления кратного корня [3; 4; 5; 14; 17].

3. Разработан алгоритм нахождения точных аналитических формул для кратных корней алгебраических полиномов произвольной степени в виде

конструкций, содержащих частные производные от некоторых результантов по коэффициентам полинома. Рассматриваемый алгоритм состоит из ряда шагов, первым из которых является установление мультипликативной структуры полинома [8; 19; 20; 23]. В диссертации подробно изучены все возможные случаи наличия кратных корней у полинома пятой степени. Отдельно изложен общий подход к получению точных формул для кратных корней наибольшей кратности при наличии других корней меньшей кратности. Эффективность полученных формул подтверждена на многочисленных числовых примерах [7; 9; 21; 23; 24].

Результаты исследований иных способов точного символьного решения для некоторых классов алгебраических уравнений опубликованы в работах [6; 13; 15; 16; 18].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации найдут применение в научных исследованиях и инженерных расчетах, в которых требуется получить аналитическую зависимость корней полинома от его коэффициентов. Также возможно их применение при чтении спецкурсов для студентов математических и инженерных специальностей.

Результаты диссертационной работы используются при организации учебного процесса в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» (акты внедрения от: 29.03.2021, 16.04.2021, 19.04.2021).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в журналах, соответствующих п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Трубников, Ю. В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, А. М. Воронов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2017. – № 4 (97). – С. 29–33.

2. Трубников, Ю. В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 4 (101). – С. 5–17.

3. Трубников, Ю. В. О распределении корней трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 1 (106). – С. 21–33.

4. Трубников, Ю. В. О связи между корнями алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 2 (107). – С. 11–17.

5. Трубников, Ю. В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

6. Чернявский, М. М. Сравнительный анализ критериев устойчивости полиномов / М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 3 (55). – С. 31–54.

7. Чернявский, М. М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.

8. Трубников, Ю. В. О неполной факторизации полиномов / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, В. В. Юргелас // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2021. – № 2. – С. 110–118.

Материалы конференций

9. Пышненко, О. В. Точные формулы для кратных корней алгебраических многочленов / О. В. Пышненко, М. М. Чернявский // VII Машеровские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф. студ., аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24–25 сент. 2013 г. / ВГУ имени

П.М. Машерова ; редкол.: А. П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2013. – С. 33–35.

10. Чернявский, М. М. Об одном алгоритме приближенного нахождения решения алгебраического уравнения пятой степени / М. М. Чернявский, К. Л. Якуто // XI Машеровские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф. студ., аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 окт. 2017 г. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 40–41.

11. Трубников, Ю. В. Применение расходящихся степенных рядов для получения формул приближенного нахождения решений алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, А. М. Воронов // Наука – образованию, производству, экономике : материалы XXIII (70) регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 15 февр. 2018 г. : в 2 т. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2018. – Т. 1. – С. 27–29.

12. Трубников, Ю. В. Метод приближенного аналитического нахождения корней полинома и его применение к решению краевых задач / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Еругинские чтения – 2018 : материалы XVIII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 15–18 мая 2018 г. : в 2 т. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; ред.: А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров. – Минск, 2018. – Ч. 2. – С. 109–111.

13. Чернявский, М. М. О разрешимости в радикалах одного класса алгебраических уравнений / М. М. Чернявский, В. С. Жгиров // Современные проблемы математики и вычислительной техники : сб. материалов XI респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 21–22 нояб. 2019 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: В. А. Головко (гл. ред.) [и др.]. – Брест, 2019. – С. 98–100.

14. Chernyavsky, M. On the application of the Tchirnhaus transformations for an algebraic equation of the third degree / M. Chernyavsky // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : proc. of VI intern. conf. for students, postgraduates and young scientists, Vitebsk, 12 Dec. 2019 / Vitebsk State University ; ed.: I. M. Prishchepa (ed. in chief) [et al.]. – Vitebsk, 2019. – P. 10–12.

15. Трубников, Ю. В. О линейной связи между корнями полиномов шестой и третьей степеней / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : материалы IV междунар. науч. конф., посвящ. 95-лет. со дня рождения чл.-кор. Академии наук БССР, проф. Иванова Евгения Алексеевича, Гродно, 17–20 дек. 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: В. И. Корзюк (гл. ред.) [и др.]. – Гродно, 2019. – С. 122–124.

16. Чернявский, М. М. Аналитическое выражение коэффициентов полинома четвертой степени через коэффициенты полинома шестой степени при наличии линейной связи между корнями данных полиномов [Электронный ресурс] / М. М. Чернявский // Информационные технологии : материалы 84-й науч.-техн. конф., посвящ. 90-летнему юбилею БГТУ и Дню белорусской науки (с междунар. участием), Минск, 3–14 февр. 2020 г. / БГТУ ; И. В. Войтов (гл. ред.). – Минск, 2020. – С. 168–170. – Режим доступа: https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/33313/1/CHernyavskij_Analiticheskoe_vyrazhenie.pdf. – Дата доступа: 08.03.2022.

17. Трубников, Ю. В. Локализация и приближенные аналитические формулы для корней алгебраического уравнения пятой степени / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 72-й регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февр. 2020 г. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2020. – С. 30–33.

18. Чернявский, М. М. Об одном типе нелинейной связи между корнями алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней / М. М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 72-й регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февр. 2020 г. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2020. – С. 34–37.

19. Чернявский, М. М. Об одном виде факторизации алгебраических полиномов шестой и седьмой степеней / М. М. Чернявский // XIV Машеровские чтения : материалы Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 21 окт. 2020 г. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2020. – С. 64–66.

20. Трубников, Ю. В. О неполной факторизации полиномов седьмой степени в случае наличия кратных корней [Электронный ресурс] / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов VIII междунар. науч. конф., посвящ. памяти А. Л. Иозефера, Омск, 20 нояб. 2020 г. / Омский гос. ун-т им. Ф.М. Достоевского ; отв. за вып. И. П. Бесценный. – Омск, 2020. – С. 24–26. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

21. Трубников, Ю. В. Об одном способе нахождения кратных корней алгебраического уравнения пятой степени / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 73-й регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. / ВГУ имени

П.М. Машерова ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2021. – С. 55–57.

22. Чернявский, М. М. Модификация формул Бернулли – Эйткена для приближенного нахождения корней алгебраических уравнений / М. М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 73-й регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2021. – С. 59–61.

23. Чернявский, М. М. Анализ алгоритмов построения точных формул для кратных корней полинома на примере алгебраического уравнения пятой степени / М. М. Чернявский, Н. С. Грицкевич // XV Машеровские чтения : матер. Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 22 окт. 2021 г. : в 2 т. / ВГУ имени П.М. Машерова ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2021. – Т. 1. – С. 38–41.

24. Трубников, Ю. В. Анализ структур частных производных от результантов многочленов как источник получения точных формул для кратных корней / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 нояб. 2021 г. : в 2 ч. / НАН Беларуси, Ин-т математики, БГУ ; сост. В. В. Лепин. – Минск, 2021. – Ч. 1. – С. 14–15.

РЕЗЮМЕ

Чернявский Михаил Михайлович
Новые теоретико-функциональные методы нахождения корней алгебраических полиномов

Ключевые слова: алгебраические уравнения, приближенные аналитические методы, точное решение, символьное решение, триномиальные уравнения, кратный корень.

Цель работы: получение и обоснование точных и приближенных формул, выражающих корни алгебраических уравнений в символьном виде в терминах коэффициентов соответствующего полинома. Это: а) модификация и обоснование метода Бернулли – Эйткена – Никипорца; б) систематизация и подробный анализ поведения корней трехчленных алгебраических уравнений; в) получение и обоснование точных символьных формул для кратных корней.

Методы исследования: методы математического анализа с использованием возможностей системы компьютерной математики *Maple 2019*.

Полученные результаты и их новизна:

1. Предложен алгоритм приближенного нахождения корней алгебраических уравнений произвольной степени в виде рациональных функций от коэффициентов.
2. Найдены специальные подстановки, позволяющие провести классификацию триномиальных алгебраических уравнений и доказать теоремы о количестве действительных корней и их локализации.
3. Получены новые точные формулы, выражающие кратные корни в виде рациональных функций от коэффициентов полинома.

Рекомендации по использованию и область применения. Результаты диссертации найдут применение в научных исследованиях и инженерных расчетах, в которых требуется получить аналитическую зависимость корней полинома от его коэффициентов. Также возможно их применение при чтении спецкурсов для студентов математических и инженерных специальностей.

РЭЗЮМЭ

Чарняўскі Міхаіл Міхайлавіч
Новыя тэарэтыка-функцыянальныя метады знаходжання каранёў алгебраічных паліномаў

Ключавыя словы: алгебраічныя ўраўненні, прыбліжаныя аналітычныя метады, дакладнае рашэнне, сімвальнае рашэнне, трыноміяльныя ўраўненні, кратны корань.

Мэта працы: атрыманне і абгрунтаванне дакладных і прыбліжаных формул, якія выражаюць карані алгебраічных ураўненняў у сімвальным выглядзе ў тэрмінах каэфіцыентаў адпаведнага палінома. Гэта: а) мадыфікацыя і абгрунтаванне метаду Бернулі – Эйткена – Нікіпарца; б) сістэматызацыя і падрабязны аналіз паводзін каранёў трохчленных алгебраічных ураўненняў; в) атрыманне і абгрунтаванне дакладных сімвальных формул для кратных каранёў.

Метады даследавання: метады матэматычнага аналізу з выкарыстаннем магчымасцяў сістэмы камп’ютарнай матэматыкі *Maple 2019*.

Атрыманыя вынікі і іх навізна:

1. Прапанаваны алгарытм прыбліжанага знаходжання каранёў алгебраічных ураўненняў адвольнай ступені ў выглядзе рацыянальных функцый ад каэфіцыентаў.

2. Знойдзены спецыяльныя падстаноўкі, якія дазваляюць правесці класіфікацыю трынаміяльных алгебраічных ураўненняў і даказаць тэарэмы аб колькасці рэчаісных каранёў і іх лакалізацыі.

3. Атрыманы новыя дакладныя формулы, якія выражаюць кратныя карані ў выглядзе рацыянальных функцый ад каэфіцыентаў палінома.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і галіна прымянення. Вынікі дысертацыі знойдуць прымяненне ў навуковых даследаваннях і інжынерных разліках, у якіх патрабуецца атрымаць аналітычную залежнасць каранёў палінома ад яго каэфіцыентаў. Таксама магчыма іх прымяненне пры чытанні спецкурсаў для студэнтаў матэматычных і інжынерных спецыяльнасцяў.

SUMMARY

Mikhail Charniauski

New functional-theoretic methods for finding the roots of algebraic polynomials

Keywords: algebraic equations, approximate analytical methods, exact solution, symbolic solution, trinomial equations, multiple root.

Aim of work: obtaining and substantiating exact and approximate formulas expressing the roots of algebraic equations in symbolic form in terms of the coefficients of the corresponding polynomial. These are: a) modification and substantiation method of Bernoulli and Aitken and Nikiporets; b) systematization and detailed analysis of the behavior of the roots of trinomial algebraic equations; c) obtaining and substantiating exact symbolic formulas for multiple roots.

Research methods: methods of mathematical analysis using the capabilities of the computer mathematics system *Maple 2019*.

Obtained results and their novelty:

1. An algorithm for the approximate finding of the roots of algebraic equations of arbitrary degree in the form of rational functions of coefficients is proposed.

2. Special substitutions are found that make it possible to classify trinomial algebraic equations and prove theorems on the number of real roots and their localization.

3. New exact formulas are obtained expressing multiple roots in the form of rational functions of the coefficients of the polynomial.

Recommendation for use and application field. The results of thesis will find application in scientific research and engineering calculations, in which it is required to obtain an analytical dependence of the roots of a polynomial on its coefficients. Their application is also possible in teaching special courses for students of mathematical and engineering specialties.