Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**Ю.В. Трубников, М.Н. Подоксёнов,
М.М. Чернявский**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Курс лекций

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2022

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.4я73
Т77

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 03.03.2022.

Авторы: профессор кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Трубников;** заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **М.М. Чернявский**

Р е ц е н з е н т :
профессор кафедры информационных систем и автоматизации производства УО «ВГТУ», доктор физико-математических наук, профессор *А.А. Корниенко*

Трубников, Ю.В.

Т77 Специальные математические методы и функции : курс лекций / Ю.В. Трубников, М.Н. Подоксёнов, М.М. Чернявский. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – 56 с.

Данный курс лекций подготовлен в соответствии с учебной программой по дисциплине «Специальные математические методы и функции» для студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)». Излагается теоретический материал, приводятся контрольные вопросы и задания.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.4я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного издания: ознакомить студентов со специальными функциями, которые играют важную роль во многих вопросах теоретической и прикладной математики. В результате изучения дисциплины студент должен обладать следующими компетенциями: обладать навыками творческого аналитического мышления и применять методы вариационного исчисления, решать уравнения математической физики, выполнять интегральные и дискретные преобразования.

Мы рассмотрим два наиболее востребованных класса специальных функций: полиномы Чебышева и полиномы Лежандра, а также приведем краткие исторические и биографические сведения.

П.Л. Чебышев считается основоположником современной теории функций. Много лет полученные им необходимые и достаточные условия экстремальности полинома, приближающего в равномерной метрике непрерывную на отрезке функцию, являлись базой многочисленных исследований. В данном издании приводится с доказательством теорема Чебышева об аппроксимации непрерывной на отрезке функции, причем доказательство строится с привлечением минимального количества новых понятий, т.е. доступно студентам младших курсов. Сами полиномы Чебышева первого рода выводятся как следствие этой теоремы. Однако значение полиномов Чебышева выходит далеко за пределы теории приближений. Как известно, широкое распространение получили чебышевские итерационные процессы для решения линейных уравнений в произвольном банаховом пространстве. Такие примеры также имеются в учебном издании.

Другим распространенным классом специальных функций являются полиномы Лежандра. Подробно изложена теория комплексных аналогов полиномов Лежандра, теория присоединённых функций Лежандра, что дало возможность ввести читателя в круг современной проблематики, например, решить уравнение Шредингера.

Изложение сопровождается примерами, контрольными вопросами и заданиями, которые способствуют усвоению теоретического материала. Представленный курс лекций рекомендуется студентам, обучающимся по специальности 40 05 01-07 «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)».

ГЛАВА 1. МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

Несколько слов о выдающемся русском математике и механике – П.Л. Чебышеве. Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) родился в селе Окатово (ныне Калужская область) в дворянской семье. Первоначальное образование получил дома, шестнадцати лет поступил в Московский университет. В 1841 году в возрасте 20 лет за работу «Вычисление корней уравнений» (тема была предложена факультетом) награжден серебряной медалью. В том же году окончил Московский университет. В 1846 году защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В 1847 году П.Л. Чебышев переехал в Петербург, где в том же году защитил диссертацию «Об интегрировании с помощью логарифмов» на право чтения лекций, был утвержден в звании доцента и начал чтение лекций по алгебре и теории чисел. В 1849 году защитил при Петербургском университете докторскую диссертацию «Теория сравнений», удостоенную в том же году Демидовской премии Петербургской АН, и в 1850 году стал профессором Петербургского университета. Длительное время принимал участие в работах артиллерийского отделения военно-научного комитета. В 1882 году П.Л. Чебышев прекратил чтение лекций в Петербургском университете и, выйдя в отставку, посвятил себя научной работе, продолжавшейся до последних дней его жизни.

П.Л. Чебышев является основателем Петербургской математической школы, наиболее крупными представителями которой были А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д.А. Граве.

Научные заслуги П.Л. Чебышева можно было бы продолжать на десятки страниц, однако перейдем к основному объекту нашего повествования – многочленам Чебышева.

Итак, пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, а

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \tag{1}$$

есть произвольный многочлен степени n. Многочленом степени n наилучшего приближения (экстремальным многочленом) для функции $f(x)$ называется такой многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, для которого выполняется условие

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - P_n(x) \right| = \min_{Q_n} \left\{ \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - Q_n(x) \right| \right\}. \tag{2}$$

Число

$$E_n(f) = \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - P_n(x) \right| \tag{3}$$

обычно называется величиной наилучшего приближения функции $f(x)$, на отрезке $[a, b]$.

Теорема, дающая необходимые и достаточные условия того, чтобы для заданной на отрезке $[a, b]$ непрерывной функции многочлен $P_n(x)$ был многочленом ее наилучшего приближения, была доказана П.Л. Чебышевым в 1854 году и послужила началом возникновения теории приближения функций.

***Теорема* 1.** (П.Л. Чебышев, 1854). Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$,. Тогда для того, чтобы некоторый многочлен $P_n(x)$ степени не выше n был ее экстремальным многочленом, необходимо и достаточно, чтобы на $[a, b]$ нашлась, по крайней мере, одна система из $n+2$ точек x_j ,$a \le x_1 < x_2 < ... < x_{n+2} \le b$, в которых разность

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{4}$$

1) поочередно принимает значения разных знаков,

2) достигает по модулю наибольшего на $[a, b]$значения, т.е. в точках x_j $(j = 1, 2, ..., n+2)$ должны выполняться условия

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = r_n(x_3) = ... = (-1)^{n+1} r_n(x_{n+2}) = \pm \max_{x \in [a,b]} |r_n(x)|. \tag{5}$$

Систему точек $\{x_j\}_{j=1}^{j=n+2}$, в которых имеют место равенства (5), называют чебышевским альтернансом. Величину $\max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ обычно называют нормой функции f и обозначают $\|f\|$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, дадим следующее определение. Всякую точку x_0, для которой выполняется равенство

$$|r_n(x_0)| = \max_{a \le x \le b} |r_n(x)| = \|r_n\|, \tag{6}$$

будем называть точкой максимального уклонения разности $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ или e-точкой. При этом, если в точке x_0 выполняется условие

$$| r_n(x_0) | = \| r_n \| \tag{7}$$

то такую точку будем называть точкой положительного уклонения или (+) –точкой. Если же

$$r_n(x_0) = -\|r_n\|, \tag{8}$$

то такую точку назовем точкой отрицательного уклонения или (–) – точкой.

Доказательство. *Необходимость*. Поскольку случай, когда сама функция $f(x)$ является многочленом степени n, тривиален, то мы его ради удобства исключим из рассмотрения.

Итак, пусть $P_n(x)$– экстремальный многочлен для функции f. Поскольку функция r_n непрерывна, то для нее на $[a, b]$ найдется по крайней мере одна e-точка. Покажем, что на $[a, b]$ существуют (+) – точки и (–) – точки. Действительно, если бы $(-)$ – точек не существовало, то наименьшее на $[a, b]$ значение непрерывной функции $r_n(x)$ было бы больше величины $-\|r_n\|$ и поэтому нашлось бы такое $h, 0<h<\|r_n\|$, для которого было бы при всех $x\in[a,b]$

$$-\|r_n\|+h\le r_n(x)=f(x)-P_n(x)\le\|r_n\|. \tag{9}$$

Из неравенства (9) следует, что

$$-\|r_n\|+\frac{h}{2}\le f(x)-P_n(x)-\frac{h}{2}\le\|r_n\|-\frac{h}{2}, \tag{10}$$

но (10) означает, что для многочлена $P_n^*(x)=P_n(x)+\dfrac{h}{2}$ выполняется неравенство $\|f-P_n^*\|\le\|r_n\|-\dfrac{h}{2}=\|f-P_n\|-\dfrac{h}{2}$, а это невозможно, ибо по предположению P_n является экстремальным многочленом.

Покажем, что на $[a, b]$ существует система из $n+2$ e-точек, в которых выполняются равенства (5). С этой целью установим сначала, что отрезок $[a, b]$ можно разбить на $m+1$ сегментов

$$[a,x_1],[x_1, x_2],\ldots,[x_{m-1}, x_m],[x_m,b] \tag{11}$$

таким образом, чтобы каждый из них содержал в себе поочередно то только (+) – точки, то только $(-)$ – точки. Отметим при этом, что в силу непрерывности функции $r_n(x)$ на $[a, b]$ число $n+1$ таких отрезков конечно.

Разбиение произведем следующим образом: предположим для определенности, что при движении вдоль отрезка $[a, b]$ от a к b первая e-точка является $(+)$ – точкой. Примем в качестве x_1 самый правый нуль разности $r_n(x)$, расположенный между точкой a и первой после нее $(-)$ – точкой.

В качестве x_2 возьмем самый правый нуль разности $r_n(x)$ расположенный между точкой x_1 и первой после нее $(+)$ – точкой, и положим $x_2=b$, если на $[x_1,b]$ не имеется $(+)$ – точек.

В качестве x_3 возьмем самый правый нуль разности $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$, расположенный между точкой x_1 и первой после нее $(-)$ – точкой (или же положим $x_3=b$, если на $[x_2,b]$ $(-)$ – точек не существует), и т.д.

Пусть x_m – последняя, отличная от b точка среди точек x_j, построенных таким образом. Поскольку на каждом из сегментов имеются поочередно $(+)$ и $(-)$ – точки, то для доказательства необходимости достаточно доказать, что $m+1\ge n+2$. Допустим противное, т.е. что $m+1\le n+1$, или, что то же самое $m \le n$. Покажем, что при этом предположении можно построить многочлен $P_n^*(x)$, для которого

$$\|f - P_n^*\| < \|f - P_n\| = \|r_n\|. \tag{12}$$

Действительно, так как на $[a, x_1]$ не существует $(-)$– точек, на $[x_1, x_2]$ не существует $(+)$– точек и т. д., то, используя непрерывность разности $r_n(x)$ и конечность числа отрезков $[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_m, b]$, видим, что найдется некоторое число h, $0 < h < \|r_n\|$ такое, что будут выполняться неравенства

$$-\|r_n\| + h \le r_n(x) \le \|r_n\|, \quad x \in [a, x_1]; \tag{13}$$
$$-\|r_n\| \le r_n(x) \le \|r_n\| - h, \quad x \in [x_1, x_2];$$

и т.д.

После этого положим

$$q_m(x) = \delta(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m), \tag{14}$$

где δ выбрано так, чтобы

$$\|q_m\| \le \frac{h}{2}, \tag{15}$$

sign $q_m(x) = 1$ при $x \in [a, x_1)$.

Тогда многочлен $q_m(x)$, меняя свой знак при переходе через точки x_j, будет иметь тот же знак, который имеет разность $r_n(x)$ в этих точках, т.е. $q_m(x) > 0$ при $x \in [a, x_1)$, $q_m(x) < 0$, при $x \in (x_1, x_2)$ и т.д. Поэтому, полагая

$$P_n^*(x) = P_n(x) + q_m(x),$$

получим многочлен степени не выше n (ибо по предположению противного $m \le n$) такой, что на отрезке $[a, x_1]$ будем иметь $f(x) - P_n^*(x) < \|r_n\|$.

В то же время, учитывая (13), при $x \in [a, x_1]$ получим

$$f(x) - P_n^*(x) = f(x) - P_n(x) - q_m(x) = r_n(x) - q_m(x) \ge$$
$$-\|r_n\| + h - \|q_m\| \ge -\|r_n\| + h - \frac{h}{2} = -\|r_n\| + \frac{h}{2},$$

то есть при всех $x \in [a, x_1]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P_n^*(x)| < \|r_n\|. \tag{16}$$

Точно так же убедимся, что при $x \in [x_1, x_2]$

$$f(x) - P_n^*(x) = r_n(x) - q_m(x) > -\|r_n\|,$$

и в то же время

$$f(x) - P_n^*(x) = f(x) - P_n(x) - q_m(x) = r_n(x) - q_m(x) \le$$
$$\le \|r_n\| - h - q_m(x) \le \|r_n\| - h + \frac{h}{2} = \|r_n\| - \frac{h}{2},$$

так что

$$|f(x) - P_n^*(x)| < \|r_n\| \; (x \in [x_1, x_2]). \tag{17}$$

Аналогично доказывается, что неравенство (16) имеет место на всех остальных сегментах системы (11), т.е. при всех $x\in[a,b]$. Отсюда видно, что многочлен $P_n^*(x)$ приближает функцию $f(x)$ лучше, чем $P_n(x)$, т.е. мы пришли к противоречию.

Необходимость условия теоремы этим доказана.

Достаточность. Пусть многочлен $P_n(x)$ обладает тем свойством, что для некоторой системы точек $a\le x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}\le b$ выполняется условие

$$f(x_1)-P_n(x_1)=-\left[f(x_2)-P_n(x_2)\right]=\ldots=(-1)^n\left[f(x_{n+2})-P_n(x_{n+2})\right]=\pm\|f-P_n\|.$$

Докажем, что в таком случае многочлен $P_n(x)$ является экстремальным многочленом для функции $f(x)$. Предположим от противного, что некоторый многочлен $P_n^*(x)$ приближает функцию $f(x)$ лучше, чем $P_n(x)$, т.е. что $\|f-P_n^*\|<\|f-P_n\|$, и, в частности,

$$\left|f(x_j)-P_n^*(x_j)\right|<\left|f(x_j)-P_n(x_j)\right|=\|f-P_n\|. \tag{18}$$

Из неравенства (18) следует, что во всех точках $x_j\ (j=1,2,\ldots,n+2)$ разность

$P_n^*(x_j)-P_n(x_j)=\left[f(x_j)-P_n(x_j)\right]-\left[f(x_j)-P_n^*(x_j)\right]$ имеет такой же знак, как и $f(x_j)-P_n(x_j)$, т.е. разность $P_n^*(x)-P_n(x)$ меняет свой знак на сегменте $[a,b]$ по крайней мере, $n+1$ раз. Отсюда следует, что многочлен $P_n^*(x)-P_n(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ имеет по крайней мере $n+1$ корней, что невозможно, так как $P_n^*(x)-P_n(x)$ есть многочлен степени n и в силу предположения $P_n^*(x)$ не может быть тождественно равен многочлену $P_n(x)$. ■

Замечательным примером на применение теоремы Чебышева являются многочлены, *наименее уклоняющиеся от нуля,* или полиномы Чебышева.

Обозначим для функции $f(x)=x^n$ наименее уклоняющийся от нее на отрезке $[-1,1]$ многочлен степени $n-1$ через $P_{n-1}^*(x)$. Тогда, каков бы ни был многочлен $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$, выполняется неравенство

$$\left\|x^n-P_{n-1}^*(x)\right\|\le\left\|x^n-P_{n-1}(x)\right\|.$$

Отсюда следует, что разность $x^n-P_{n-1}^*(x)$, представляющая собой алгебраический многочлен степени n вида $x^n+a_{n-1}^*x^{n-1}+\ldots+a_1^*x+a_0^*$, принимает на $[-1,1]$ по норме наименьшее значение, по сравнению со всеми другими алгебраическими многочленами степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Поэтому такой многочлен называется многочленом степени n, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1,1]$.

Убедимся, что

$$x^n + a_{n-1}^* x^{n-1} + \ldots + a_1^* x + a_0^* = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos x\right)$$

и что, следовательно, $E_{n-1}\left(x^n\right) = \left\| x^n - P_{n-1}^*\left(x\right) \right\| = \left\| x^n + a_{n-1}^* x^{n-1} + \ldots + a_1^* x + a_0^* \right\| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

В самом деле, так как

$$\cos nt = 2^{n-1} \cos^n t - \frac{n}{1!} 2^{n-3} \cos^{n-2} t + \frac{n(n-3)}{2!} 2^{n-5} \cos^{n-4} t -$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} 2^{n-7} \cos^{n-6} t + \ldots$$

(т.е. формула обрывается, когда при целом $n > 2$ коэффициент обращается в нуль), то

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos x\right) = x^n - \frac{n}{1!} 2^{-2} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!} 2^{-4} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} 2^{-6} x^{n-6} + \ldots .$$

Многочлен степени n $T_n\left(x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos x\right)$ называется $n-$м полиномом Чебышева (первого рода) и обозначается через $T_n\left(x\right)$. Так как этот многочлен при всех $x \in \left[-1, 1\right]$ принимает по модулю значения не большие, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$, и в то же время в $n+1$ точках $x_0 = \cos 0$, $x_1 = \cos\frac{\pi}{n}, \ldots, x_n = \cos \pi$ принимает попеременно значения $\pm\frac{1}{2^{n-1}}$, то среди всевозможных алгебраических многочленов степени $n-1$ функцию x^n действительно наилучшим образом приближает такой алгебраический многочлен $P_{n-1}^*\left(x\right)$, для которого

$$x^n - P_{n-1}^*\left(x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos x\right) \quad \left(n = 1, 2, 3, \ldots\right).$$

Полиномы Чебышева обладают рядом замечательных свойств. Приведем только некоторые из них.

1. Для функции $\cos\left(n \arccos x\right)$ справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$\cos\left(n \arccos x\right) = 2x\left[\cos\left(n-1\right) \arccos x\right] - \left[\cos\left(n-2\right) \arccos x\right] \left(n = 2, 3, \ldots\right). \quad (19)$$

Его справедливость немедленно следует из равенства

$$\cos n\theta + \cos\left(n-2\right)\theta = 2\cos\theta \cos\left(n-1\right)\theta.$$

Разделив обе части равенства (19) на 2^{n-1}, получаем

$$T_n\left(x\right) = x T_{n-1}\left(x\right) - \frac{1}{4} T_{n-2}\left(x\right) \quad \left(n = 2, 3, \ldots\right). \quad (20)$$

Из равенства (20)

$$T_2\left(x\right) = x^2 - \frac{1}{2}, \; T_3\left(x\right) = x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} x = x^3 - \frac{3}{4} x,$$

$$T_4(x) = x\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}.$$

2. Так как при $j \neq k$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_j(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(j \arccos x)\cos(k \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{0}^{\pi} \cos(j\theta)\cos(k\theta)\, d\theta = 0,$$

то система функций $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ является на отрезке $[-1,1]$ ортогональной по весу $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Важным приложением полиномов Чебыщева являются итерационные процессы для решения линейных уравнени $Az = b$. Предположим, что собственные значения матрицы A расположены на отрезке $[a, b]$. Преобразование $x = \frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}$ $(t \in [a,b])$ переводит отрезок $[a, b]$. в отрезок $[-1,1]$ и мы можем выполнить следующее построение. Сделаем подстановку

$$x^2 - \frac{1}{2} = \left(\frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)^2 - \frac{1}{2} = P(t).$$

Например, при $a = 1,\ b = 3,$ получаем

$$\frac{P(t)}{P(0)} = 1 - \frac{8}{7}t + \frac{2}{7}t^2.$$

Пусть, далее

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,$$

Его корни, т.е. собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,$ т.е. расположены на отрезке $[1,\ 3]$. Тогда чебышевский итерационный процесс решения системы уравнений $Az = h$ будет иметь вид

$$z_{n+1} = \left(I - \frac{8}{7}A + \frac{2}{7}A^2\right) z_n + \frac{8}{7}h - \frac{2}{7}Ah \quad (n = 1,2,...).\ I := IdentityMatrix(3).$$

Задания для самостоятельной работы

Построить итерационный процесс согласно образцу.

$A_1 = A + 2IdentityMatrix(3);$	$A_7 = 7A - 3IdentityMatrix(3);$
$A_2 = 2A + 3IdentityMatrix(3);$	$A_8 = 8A - 4IdentityMatrix(3);$
$A_3 = 3A + 4IdentityMatrix(3);$	$A_9 = 9A - 5IdentityMatrix(3);$
$A_4 = 4A + 5IdentityMatrix(3);$	$A_{10} = 10A - 6IdentityMatrix(3);$
$A_5 = 5A + 6IdentityMatrix(3);$	$A_{11} = 11A - 7IdentityMatrix(3);$
$A_6 = 6A - 2IdentityMatrix(3);$	$A_{12} = 12A - 8IdentityMatrix(3);$

Вопросы для самопроверки

1. Как формулируется задача аппроксимации непрерывной функции полиномом?
2. Какое основное понятие применил П.Л. Чебышев для решения этой задачи?
3. Какую формулу вывел П.Л. Чебышев для аппроксимации функции $f(x) = x^n$?
4. Чему равна норма полинома Чебышева?
5. Как используются полиномы Чебышева для итерационного решения систем линейных уравнений?
6. Какой вид имеет подстановка, применяемая для организации итерационного процесса?
7. Какие функции называются ортогональными?
8. Как обобщается понятие ортогональности функций?
9. Как определяется весовая функция?
10. Какая весовая функция используется в конструкции П.Л. Ляпунова?
11. Дайте определение понятию альтернанса.
12. Какую роль играет альтернанс в доказательстве теоремы об аппроксимации?
13. Попытайтесь своими рассуждениями построить полином Чебышева второй степени.
14. Какие другие системы ортогональных функций применяются в математическом анализе?
15. Как доказывается ортогональность тригонометрической системы функций?

ГЛАВА 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Определение и основные примеры. Одной из важнейших операций математического анализа является операция предельного перехода. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты математического анализа не связаны с алгебраической природой рассматриваемых объектов, а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию метрического пространства – одному из важнейших понятий современной физики и математики.

Множество X называется метрическим пространством, если каждой паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y)$, называемое метрикой или расстоянием, так что выполняются следующие три аксиомы:

1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

2) *аксиома симметрии:* $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) *аксиома треугольника:* $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Подчеркнём, что множество X в таком случае называется метрическим пространством, его элементы – точками, функция ρ – метрикой на множестве X а число $\rho(x, y)$ – расстоянием между x и y. Условие 1) означает, что расстояние между двумя разными точками положительно и что каждая точка находится на нулевом расстоянии от самой себя. Условие 2) утверждает, что расстояние не зависит от порядка точек x и y. Условие 3), называемое неравенством треугольника, утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника, составленного из элементов множества X не меньше третьей стороны.

Таким образом, из определения метрического пространства следует, что метрическим пространством является пара (X, ρ), но этот объект иногда обозначают одним символом, например, $R = (X, \rho)$.

Приведем примеры метрических пространств.

1. Положив для элементов произвольного множества X

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x = y, \\ 1, & \textit{если } x \neq y, \end{cases}$$

мы получим метрическое пространство. Его называют пространством изолированных точек.

Действительно, выполнение первых двух аксиом очевидно, а неравенство $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ сводится к одному из следующих случаев:

$$0 \le 0+0=0\left(x=y=z\right);\ 0 \le 1+1=2\left(x=y, x \ne z, z \ne y\right);$$
$$1 \le 1+0=1\left(x \ne y,\ y=z\right);\ 1 \le 0+1=1\ \left(x \ne y,\ x=z\right);\ 1 \le 1+1=2(x,y,z-\text{попарно различны}).$$

2. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho\left(x,y\right)=\left|x-y\right|$$

образует метрическое пространство R^1.

3. Множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $x=\left(x_1,\ x_2,...,\ x_n\right)$ с расстоянием

$$\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-x_k\right)^2} \qquad (1)$$

называется n–мерным арифметическим евклидовым пространством R^n. Справедливость аксиом 1) и 2) очевидна. Проверим выполнение аксиомы 3). Пусть $x=\left(x_1,\ x_2,...,\ x_n\right)$, $y=\left(y_1,\ y_2,...,\ y_n\right)$, $z=\left(z_1,\ z_2,...,\ z_n\right)$, тогда аксиома треугольника запишется в виде

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-x_k\right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(z_k-x_k\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-z_k\right)^2}. \qquad (2)$$

Полагая $z_k-x_k=a_k,\ y_k-z_k=b_k$, получаем, что

$$a_k+b_k=\left(z_k-x_k\right)+\left(y_k-z_k\right)=y_k-z_k,$$

а неравенство (2) принимает следующий вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}. \qquad (3)$$

Для доказательства неравенства (3) введем понятие нормы элемента пространства R^n:

$$\left\|x\right\|:=\rho\left(x,0\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}, \qquad (4)$$

тогда неравенство (3) можно короче переписать в виде:

$$\left\|a+b\right\| \le \left\|a\right\|+\left\|b\right\|. \qquad (5)$$

Следует обратить внимание, что: $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$; $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ для любого $x\in R^n$ и любого действительного числа λ.

Для элементов пространства R^n (в силу алгебраической структуры множества R^n их естественно называть векторами) можно ввести понятие косинуса и синуса угла между векторами $x,y\in R^n$:

$$\cos\measuredangle\left(x,y\right):=\frac{\left(x,y\right)}{\|x\|\cdot\|y\|}; \qquad (6)$$

где $\left(x,y\right):=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$;

$$\sin\measuredangle(x,y):=\frac{1}{2}\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\cdot\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|. \tag{7}$$

***Лемма* 1.** Справедливо тождество

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2 \ + \ 2(x,y) \ + \ \|y\|^2. \tag{8}$$

Доказательство. Применяя равенство (4), получаем:

$$\|x+y\|^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2+2x_ky_k+y_k^2\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}y_k^2=\|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2. \ \blacksquare$$

***Лемма* 2.** Справедливо тождество

$$\cos^2\measuredangle(x,y)+\sin^2\measuredangle(x,y)\equiv 1. \tag{9}$$

Доказательство. Применяя тождество (8), получаем

$$\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2\cdot\|y\|^2}+\frac{1}{4}\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|^2\cdot\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|^2=\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2\cdot\|y\|^2}+$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2+2\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)+\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|^2\right]\left[\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2-2\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)+\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|^2\right]=$$

$$=\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2}+\frac{1}{4}\left[\left(\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2+\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|^2\right)-\frac{4(x,y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2}\right]=$$

$$=\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2}-\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2}+\frac{1}{4}(1+1)^2=1. \ \blacksquare$$

Умножая обе части равенства (9) на $\|x\|^2\|y\|^2$, получаем тождество

$$\|x\|^2\|y\|^2=(x,y)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\|x\|^2\|y\|^2}\|x\|y\|+y\|x\|\|^2\cdot\|x\|y\|-y\|x\|\|^2. \tag{10}$$

Запишем тождество (10) в координатной форме:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right) \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2+\sum_{k<j}\left(x_ky_j-x_jy_k\right)^2. \tag{11}$$

Тождество (11) представляет собой известное тождество Лагранжа, а его геометрический смысл содержится в формуле (9). Приведем некоторые частные случаи тождества (11). Пусть $x,y\in R^2$, тогда тождество (11) принимает следующий вид:

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)=\left(x_1y_1+x_2y_2\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2. \tag{12}$$

Если же $x,y\in R^3$, то

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2+$$

$$+\left(x_1y_3-x_3y_1\right)^2+\left(x_2y_3-x_3y_2\right)^2. \tag{13}$$

Если вспомнить, что числа $x_2y_3-x_3y_2, \ \ -(x_1y_3-x_3y_1), \ \ x_1y_2-x_2y_1$ являются координатами векторного произведения $[x,y]$, то равенство (13) можно представить в виде

$$\|x\|^2\|y\|^2=\|[x,y]\|^2+(x,y)^2. \qquad (14)$$

Тождество Лагранжа, записанное в виде (14), применяется в некоторых задачах физики и астрономии.

Из тождества (14) очевидным образом следует неравенство Коши-Буняковского

$$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|. \qquad (15)$$

Вернемся к доказательству неравенства (5).

***Лемма* 3.** Пусть $a,b\in R^n$. Справедливо неравенство (5).

Доказательство. Применяя тождество (8) и неравенство (15), получаем

$$\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2+2(a,b)\le\|a\|^2+\|b\|^2+2|(a,b)|\le$$

$$\le\|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\cdot\|b\|=(\|a\|+\|b\|)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получаем требуемый результат.■

4. Множество $C_{[a,b]}$ всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, с метрикой

$$\rho(f,g):=\max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)| \qquad (16)$$

также образует метрическое пространство. Это пространство играет очень важную роль в математическом анализе.

2.2. Множества и функции в метрических пространствах. При рассмотрении основных понятий математического анализа можно заметить, что такие понятия, как предел, непрерывность, равномерная непрерывность, фундаментальная последовательность, можно сформулировать так, что они используют лишь расстояние между точками соответствующих множеств и, следовательно, имеют смысл в произвольных метрических пространствах.

Последовательность $x_n\ (n=1,2,...)$ *точек метрического пространства X называется сходящейся, если существует такой элемент* $a\in X$, *что* $\rho(x_n,a)\to 0$ *при* $n\to\infty$, *т.е. для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $N(\varepsilon)$, *что для* $n\ge N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $\rho(x_n,a)<\varepsilon$. *Точка* $a\in X$ *называется пределом последовательности* $x_n\ (n=1,2,...)$.

В этом случае записываем $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ или $x_n\to a$.

***Лемма* 4.** В метрическом пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. Если $x_n\to a$ и $x_n\to b$, то по неравенству треугольника будем иметь

$$\rho(a,b)\le\rho(a,x_n)+\rho(x_n,b)\to 0$$

при $n\to\infty$, т.е. $\rho(a,b)=0$, и в силу аксиомы 1) метрики $a=b$.■

Отображение $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$, *если*

$$\forall\varepsilon(>0)\exists(\delta>0)\forall x\left\{\rho(x, x_0)<\delta\to\rho\left(f(x), f(x_0)\right)<\varepsilon\right\}. \qquad (1)$$

Отображение f *называется непрерывным на* X *(на множестве* $M\subset X$*), если оно непрерывно в каждой точке* $x_0\in X$ $(x_0\in M)$.

Отображение f *называется равномерно непрерывным на множестве* $M\subset X$, *если*

$$\forall\varepsilon(>0)\exists(\delta>0)\forall x(\in M)\forall y(\in M)\left\{\rho(x, y)<\delta\to\rho\left(f(x), f(y)\right)<\varepsilon\right\}. \qquad (2)$$

Последовательность $x_n\,(n=1,2,...)$ *точек метрического пространства* (X,ρ) *называется фундаментальной последовательностью (или последовательностью Коши) в метрическом пространстве* (X,ρ), *если*

$$\forall\varepsilon(>0)\exists N=N(\varepsilon)\forall n(\geq N)\forall m(\geq N)\,\rho(x_n, x_m)<\varepsilon. \qquad (3)$$

Рассмотрим связь между фундаментальными и сходящимися последовательностями.

***Лемма* 5.** В любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Доказательство.

Пусть $x_n\to x_0$. Тогда $\rho(x_n, x_m)\leq\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0, x_m)\to 0$ при $m,n\to\infty$, что и требовалось доказать. ■

2.3. Шары, сферы, диаметр. В теории метрических пространств удобно пользоваться геометрическим языком, на который наталкивает классическая геометрия. Этот язык позволяет придать результатам анализа максимальную наглядность и дать наиболее простые и наиболее отражающие суть дела доказательства.

Если дано метрическое пространство (X, ρ), точка $a\in X$ и действительное число $r>0$, то открытый шар (соответственно замкнутый шар) с центром в точке a и радиусом r есть множество

$$B(a, r):=\left\{x\in X:\ \rho(a, x)<r\right\} \qquad (4)$$

соответственно

$$\overline{B}(a, r):=\left\{x\in X:\ \rho(a, x)\leq r\right\}. \qquad (5)$$

Сфера с центром в точке a и радиусом r есть множество

$$S(a, r):=\left\{x\in X:\ \rho(a, x)=r\right\}. \qquad (6)$$

Открытые и замкнутые шары с центром в точке a всегда содержат точку a, но сфера с центром в точке a может оказаться пустой.

На действительной числовой прямой открытый (соответственно замкнутый шар) с центром в точке a и радиусом r есть интервал $(a-r, a+r)$ (соответственно отрезок $[a-r, a+r]$); сфера с центром a и радиусом r состоит из двух точек: $a-r$ и $a+r$.

Пусть A, B – два непустых подмножества пространства (X,ρ). Расстояние от A до B по определению, есть положительное число

$$\rho(A,B)=\inf_{x\in A,\, y\in B}\rho(x,y).$$

Если A состоит из одной точки x то вместо $\rho(A,B)$ пишут также $\rho(x,B)$. Если $A\cap B\neq\varnothing$, то $\rho(A,B)=0$, но обратное может и не иметь места. Вообще если $\rho(A,B)=t$, то не обязательно существует такие две точки $x\in A$, $y\in B$, для которых $\rho(x,y)=t$. Пусть, например, на числовой прямой A – множество натуральных чисел, а B – множество всех чисел вида $n-\frac{1}{n}$ $(n=2,3,...)$. Хотя A и B не имеют общих точек, но расстояние $\rho\left(n,\, n-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому $\rho(A,B)=0$.

***Лемма* 6.** *Если точка x не принадлежит открытому шару $B(a,r)$ (соответственно замкнутому шару $\bar{B}(a,r)$), то выполняется неравенство*

$$\rho(x,B(a,r))\geq\rho(a,x)-r$$

(соответственно $\rho(x,\bar{B}(a,r))\geq\rho(a,x)-r$).

Доказательство. Действительно, из условия леммы следует, что $\rho(a,x)\geq r$.

Для любой точки $y\in B(a,r)$ (соответственно $y\in\bar{B}(a,r)$) в силу неравенства треугольника

$$\rho(x,y)\geq\rho(a,x)-\rho(a,y)\geq\rho(a,x)-r. \blacksquare$$

***Лемма* 7.** Если A – непустое множество в метрическом пространстве (X,ρ), и x,y – две произвольные точки из (X,ρ), то выполняется неравенство

$$|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\leq\rho(x,y). \qquad (7)$$

Доказательство. Для любой точки $z\in A$ имеем

$$\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

поэтому

$$\rho(x,A)=\inf_{z\in A}\rho(x,z)\leq\inf_{z\in A}\left(\rho(x,y)+\rho(y,z)\right)=$$

$$=\rho(x,y)+\inf_{z\in A}\rho(y,z)=\rho(x,y)+\rho(y,A).$$

Точно так же $\rho(y,A)\leq\rho(x,y)+\rho(x,A)$.$\blacksquare$

Диаметр произвольного непустого множества $A\subseteq X$, по определению, есть $d(A)=\sup_{x\in A,\, y\in A}\rho(x,y)$; он может быть положительным действительным числом или равен $+\infty$ Из $A\subseteq B$ следует неравенство $d(A)\leq d(B)$. Равенство

$d(A)=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $A-$ одноточечное множество.

***Лемма* 8.** *Для любого шара* $d\left(\bar{B}(a, r)\right) \leq 2r.$

Доказательство. В самом деле, если $\rho(a,x)\leq r$ и $\rho(a,y)\leq r,$ то в силу неравенства треугольника $\rho(x,y)\leq\rho(x,a)+\rho(a,y)\leq r+r=2r.$ ■

Ограниченным множеством в (X,ρ) называется непустое множество, диаметр которого конечен.

***Лемма* 9.** *Объединение двух ограниченных множеств A и B ограничено.*

Доказательство. В самом деле, если $a\in A,\ b\in B$ и $x,\ y$ – две любые точки объединения $A\bigcup B,$ то возможны три случая: 1) $x,y\in A,$ и тогда $\rho(x,y)\leq d(A);$ 2) $x,y\in B,$ и тогда $\rho(x,y)\leq d(B);$ 3) $x\in A, y\in B,$ и тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(x,y)\leq\rho(x,a)+\rho(a,b)+\rho(b,\ y),$$

поэтому

$$d(A\bigcup B)\leq\rho(a,\ b)+d(A)+d(B).$$

Поскольку это верно для любых $x\in A, y\in B,$ то

$$d(A\bigcup B)\leq\rho(A,\ B)+d(A)+d(B).$$

Из доказанного следует, что если множество A ограничено, то, какова бы ни была точка $x_0\in(X,\rho),$ множество A содержится в замкнутом шаре с центром x_0 и с радиусом $\rho(x_0,\ A)+d(A).$ ■

2.4. Открытые множества. Окрестности. Открытым множеством в метрическом пространстве (X,ρ) называется подмножество $A\subseteq(X,\rho),$ обладающее следующим свойством: для любой точки $x\in A$ существует такое $r>0,$ что $B(x,r)\subset A.$

***Лемма* 10.** *Любой открытый шар является открытым множеством.*

Доказательство. *Если* $x\in B(a,r),$ *то по определению открытого шара* $\rho(a,x)<r;$ *поэтому из неравенства* $\rho(x,\ y)<r-\rho(a,x)$ *следует неравенство*

$$\rho(a,y)\leq\rho(a,x)+\rho(x,\ y)<r,$$

которое доказывает включение $B(x,\ r-\rho(a,\ x))\subset B(a,\ r).$ ■

***Лемма* 11.** *Объединение любого семейства* $A_\lambda\ (\lambda\in L)$ *открытых множеств открыто.*

Доказательство. Если $x\in A_\mu$ для некоторого $\mu\in L$, то существует такое $r>0,$ что

$$B(x,\ r)\subset A_\mu\subseteq\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda.\ ■$$

***Лемма* 12.** *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Доказательство. Достаточно доказать, что открыто пересечение двух открытых множеств A_1, A_2, а затем провести шаг индукции. Если $x\in A_1\cap A_2$, то существуют такие $r_1>0$ и $r_2>0$, что $B(x,\ r_1)\subset A_1$ и $B(x,\ r_2)\subset A_2$; очевидно, что $B(x,\ r)\subset A_1\cap A_2$, где $r=\min(r_1,r_2)$.■

Пересечение бесконечного семейства открытых множеств, вообще говоря, не будет открытым. Например, пересечение интервалов $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ на числовой прямой — одноточечное множество $\{0\}$, которое не является открытым.

Если A – непустое множество в метрическом пространстве (X,ρ), то открытой окрестностью множества A называется любое открытое множество, содержащее A, а окрестностью множества A – любое множество, содержащее открытую окрестность A. В случае, когда A является одноточечным множеством $\{x\}$, обычно говорят об окрестностях точки x а не множества $\{x\}$.

Лемма 13. *Для любого непустого множества* $A\subset X$ *и любого* $r>0$ *множество* $V_r(A)=\{x\in X:\rho(x,A)<r\}$ *является открытой окрестностью A.*

Доказательство. Если $\rho(x,A)<r$ и $\rho(x,y)<r-\rho(x,A)$, то из неравенства (7) следует, что $\rho(y,A)-\rho(x,A)\le\rho(x,\ y)$, но тогда $\rho(y,A)<\rho(x,A)+r-\rho(x,A)=r$; поэтому $V_r(A)$ открыто и содержит A. ■

2.5. Замкнутые множества. *Множество A в метрическом пространстве* (X,ρ) *называется замкнутым, если его дополнение является открытым множеством.* Пустое множество замкнуто, замкнуто и всё пространство (X,ρ). Промежутки $[a,\infty)$ и $(-\infty,a]$ и множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел – замкнутые множества на действительной прямой. Промежутки $[a,b)$ и $(a,b]$ не являются ни открытыми, ни замкнутыми множествами.

Лемма 14. *Замкнутый шар есть замкнутое множество; сфера есть замкнутое множество.*

Доказательство. В силу леммы 6 из $x\notin\bar{B}(a,r)$ следует неравенство

$$\rho\left(x,\ \bar{B}(a,\ r)\right)\ge\rho(a,x)-r>0.$$

Поэтому открытый шар с центром в точке x и радиусом $\rho(a,\ x)-r$ содержится в дополнении шара $\bar{B}(a,\ r)$; тем самым доказано, что это дополнение открыто. Дополнение сферы $S(a,r)$ является объединением шара $B(a,r)$ и дополнения шара $\bar{B}(a,\ r)$; и в силу леммы 11 является открытым. ■

Лемма 15. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Так как дополнение пересечения любого семейства множеств совпадает с объединением дополнений, а оно (объединение дополнений) в силу леммы 8 является открытым множеством, то пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Вторая часть леммы также доказывается переходом к дополнениям. ■

В частности, одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто.

2.6. Полнота. Пусть $A-$ непустое подмножество метрического пространства (X,ρ). Сужение на декартово произведение $A\times A$ отображения $(x,y)\to\rho(x,y),$ очевидно является расстоянием в $A,$ называемым расстоянием, индуцированным в A метрикой ρ пространства (X,ρ). Метрическое пространство, определяемое этим индуцированным расстоянием, называется подпространством метрического пространства (X,ρ).

Если в метрическом пространстве (X,ρ) любая фундаментальная последовательность сходится (к точке пространства (X,ρ)), то это пространство называется полным. Действительная прямая R^1 является полным метрическим пространством.

Полнота евклидова пространства R^n является следствием полноты R^1. Действительно, пусть $\left(x_{p,1}, x_{p,2},..., x_{p,n}\right) = x_p\left(p=1,2,...\right)-$фундаментальная последовательность точек из R^n; это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon),$ что $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_{p,k}-x_{q,k}\right)^2<\varepsilon^2$ при $p,q\geq N$. Тогда, для каждого $k=1,2,...,n$, получаем соответствующее неравенство для компоненты $x_{p,k}-x_{q,k}$: $\left|x_{p,k}-x_{q,k}\right|<\varepsilon$ при $p,q\geq N$. Таким образом, $x_{p,k}\left(p=1,2,...\right)-$ фундаментальная числовая последовательность. Положим $x_k=\lim\limits_{p\to\infty}x_{p,k}$ и $x=\left(x_1, x_2,...,x_n\right)$. Тогда $\lim\limits_{p\to\infty}x_p=x$.

Докажем полноту пространства $C_{[a,\,b]}$. Пусть $x_n(t)\ (n=1,2,...)-$некоторая фундаментальная последовательность в $C_{[a,\,b]}$. Это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $N=N(\varepsilon)$, что

$$\forall m(\geq N)\forall n(\geq N)\forall t(a\leq t\leq b)\,|\,x_n(t)-x_m(t)\,|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Неравенство (1) означает, что при фиксированном t_0 последовательность $x_n(t_0)$ является фундаментальной числовой последовательностью, т.е. сходится. Пусть $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$. Непрерывность функции $x(t)$ в точке t_0 следует из неравенства

$$|\,f(t_0+\delta)-f(t_0)\,|\leq|\,f(t_0+\delta)-f_n(t_0+\delta)\,|+|\,f_n(t_0+\delta)-f_n(t_0)\,|+|\,f_n(t_0)-f(t_0)\,|.$$

Устремляя в неравенстве (1) m к бесконечности, получим

$$\forall n(\geq N)\forall t(a\leq t\leq b)\,|\,x_n(t)-x(t)\,|\leq\varepsilon,$$

а это и означает что последовательность $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C_{[a,\,b]}$.

Рассмотрим множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, но расстояние определим иначе, а именно, положим

$$\rho(x,y)=\left\{\int_a^b\left[x(t)-y(t)\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Такое метрическое пространство обозначается $C^2_{[a,b]}$ и называется пространством непрерывных функций с квадратичной метрикой. Здесь аксиомы 1) и 2) метрического пространства очевидны, а аксиома треугольника вытекает из интегральной формы неравенства Коши – Буняковского

$$\left[\int_a^b x(t)y(t)dt\right]^2 \le \int_a^b x^2(t)dt\cdot\int_a^b y^2(t)dt,$$

которое может быть получено из легко проверяемого тождества

$$\left[\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right]^2 \le \int_a^b x^2(t)dt\cdot\int_a^b y^2(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\left[x(s)y(t)-y(s)x(t)\right]^2 ds\,dt.$$

Убедимся в том, что пространство $C^2_{[a,b]}$ не полно. Рассмотрим, например, последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1 \ \text{при} \ -1\le t\le -\dfrac{1}{n},\\ nt \ \ \text{при} \ -\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{1}{n},\\ 1 \ \ \text{при} \ -\dfrac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$

Она фундаментальна в $C^2_{[-1,1]}$, так как

$$\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\right]^2\,dt \le \frac{2}{\min(m,\,n)}.$$

Однако эта последовательность $\varphi_n(t)$ не сходится ни к какой функции из $C^2_{[a,b]}$. Действительно, пусть f – некоторая функция из $C^2_{[-1,1]}$ и ω – разрывная функция, равная – 1 при $t<0$ и + 1 при $t\ge 0$.

В силу интегрального неравенства Минковского имеем:

$$\left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\omega(t)\right]^2dt\right\}^{1/2} \le \left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\varphi_n(t)\right]^2dt\right\}^{1/2} + \left\{\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\omega(t)\right]^2dt\right\}^{1/2}.$$

Так как функция f непрерывна, то интеграл в левой части последнего неравенства отличен от нуля. Далее ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\omega(t)\right]^2\right\}^{1/2} = 0.$$

Поэтому интеграл $\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left[f(t)-\varphi_n(t)\right]^2\right\}^{1/2}$ не может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

***Лемма* 16.** Для любых четырёх точек x,y,z,w в метрическом пространстве справедливо неравенство четырёхугольника

$$|\rho(x,y)-\rho(z,w)|\le\rho(x,z)+\rho(y,w).$$

Доказательство. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,w)+\rho(w,y),$$

откуда

$$\rho(x,y)-\rho(z,w)\le\rho(x,z)+\rho(y,w). \tag{3}$$

В неравенстве (3) поменяем местами пары точек (x,y) и (z,w). Тогда

$$-\left[\rho(x,y)-\rho(z,w)\right]\le\rho(x,z)+\rho(y,w).$$

Из неравенств (3)–(4) получаем

$$-\left[\rho(x,z)+\rho(y,w)\right]\le\left[\rho(x,y)-\rho(z,w)\right]\le\left[\rho(x,z)+\rho(y,w)\right],$$

что, конечно, означает выполнение неравенства четырёхугольника. ■

2.7. Принцип сжимающих отображений. Пусть $F:X\to X$ – отображение (оператор) метрического пространства X в себя. Точка $a\in X$ называется неподвижной точкой отображения F, если $F(a)=a$.

Одним из общих результатов, дающих достаточные условия существования неподвижной точки, является теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора.

Оператор $F:X\to X$ *называется сжимающим, если существует константа* $0\le q<1$ *такая, что для любых* $x,y\in X$ *выполнено неравенство*

$$\rho(F(x),\ F(y))\le q\rho(x,y). \tag{5}$$

***Теорема* 1.** 1 (Банах). *В полном метрическом пространстве сжимающий оператор имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

Доказательство. Рассмотрим на X неотрицательную функцию

$$\varphi(x):=\rho(x,\ F(x)). \tag{6}$$

Пусть x_n – некоторая минимизирующая $\varphi(x)$ последовательность:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\inf_{x\in X}\varphi(x)=\alpha.$$

Очевидно,

$$\alpha\le\varphi(F(x_n))=\rho\big(F(x_n),\ F(F(x_n))\big)\le q\rho(x_n,F(x_n))=q\varphi(x_n),$$

откуда следует, что $\alpha\le q\alpha$. Таким образом, $\alpha=0$.

Так как

$$\rho(x_n,x_m)\le\rho(x_n,\ F(x_n))+\rho(F(x_n),\ F(x_m))+\rho(F(x_m),\ x_m)\le$$
$$\le\varphi(x_n)+q\rho(x_n,\ x_m)+\varphi(x_m),$$

то

$$\rho(x_n, x_m) \le \frac{\varphi(x_n) + \varphi(x_m)}{1-q} \to 0 \ \ (n, m \to \infty),$$

т.е. последовательность x_n фундаментальна. Её предел x_* в силу полноты пространства *X* принадлежит *X*. Функция $\varphi(x)$ непрерывна, так как применяя неравенство четырёхугольника, получаем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\rho(x, F(x)) - \rho(y, F(y))| \le \rho(x,y) + \rho(F(x), F(y)) \le (1+q)\rho(x,y).$$

Поэтому $\varphi(x_*) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$, а это означает, что x_* есть решение уравнения

$$x = F(x). \tag{7}$$

Пусть y_* также является решением уравнения (7), принадлежащим *X* Тогда

$$\rho(x_*, y_*) = \rho(F(x_*),\ F(y_*)) \le q\rho(x_*, y_*)$$

и, следовательно, $\rho(x_*, y_*) = 0$, т.е. $x_* = y_*$. ■

Принцип сжимающих отображений можно применять к доказательству теорем существования и единственности решений для уравнений различных типов. Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения (7), принцип сжимающих отображений даёт и фактический метод приближенного нахождения этого решения – метод последовательных приближений. Рассмотрим следующие примеры.

1. Пусть *f* – функция, которая определена на отрезке $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le q|x_2 - x_1| \tag{8}$$

с константой $q<1$ и отображает отрезок $[a, b]$, в себя. Тогда *f* – сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, уравнение (7) имеет на отрезке $[a, b]$, единственное решение. В частности, условие (8) выполнено, если функция f имеет на отрезке $[a, b]$, производную $f'(x)$, причем $|f'(x)| \le q < 1$.

2. Рассмотрим отображение *F* пространства R^n в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ + \ b_i \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

При каких же условиях отображение F будет сжимающим? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве R^n. Рассмотрим три случая.

а) Пространство R_0^n, т.е. $\rho(x, y) := \max_{1\le i\le n}\{|x_i - y_i|\}$, тогда

$$\rho(y', y'') = \max_i |y_i' - y_i''| = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j' - x_j'')\right| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j' - x_j''| \le$$

$$\le\left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)\max_j\{|x'_j - x''_j|\} = \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)\rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжатости

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ \le\ q\ < 1.$$

б) Пространство R_1^n, т.е. $\rho(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, тогда

$$\rho(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x'_j - x''_j\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x'_j - x''_j| \le \left(\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)\rho(x', x'') .$$

Таким образом, условием сжатости является условие

$$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ \le\ q\ < 1. \tag{9}$$

в) Пространство R^n, т.е. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x'_j - x''_j\right)\right]^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжатости

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \ \le\ q\ < 1. \tag{10}$$

Задачу о периодических решениях дифференциального уравнения $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f\left[t, x(t)\right]$ с периодической по t функцией f можно привести к интегральному уравнению

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_0^T\left(\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}} - \frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}\right) f\left[t-s, x(t-s)\right]ds,$$

где T – период функции f; λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Итерационный процесс нахождения периодического решения будет иметь вид

$$x_{n+1}(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_0^T\left(\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}} - \frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}\right) f\left[t-s, x_n(t-s)\right]ds,\ n = 1, 2, 3\dots .$$

Задания для самостоятельной работы

Найти 5 итераций для уравнения:

1) $x''(t)-5x'(t)+6x(t)=2+0.32x^2(t);\ T=1.$

2) $x''(t)-9x'(t)+14x(t)=1.9+0.31x^2(t);T=1.2.$

3) $x''(t)-10x'(t)+16x(t)=1.8+0.30x^2(t);T=1.3.$

4) $x''(t)-11x'(t)+33x(t)=1.7+0.29x^2(t);\ T=1.4.$

5) $x''(t)-14x'(t)+24x(t)=1.67+0.28x^2(t);\ T=1.5.$

6) $x''(t)-15x'(t)+36x(t)=2.2+0.27x^2(t);\ T=2.3.$

7) $x''(t)-14x'(t)+33x(t)=2.1+0.26x^2(t);T=2.4.$

8) $x''(t)-16x'(t)+48x(t)=1.97+0.25x^2(t);T=2.5.$

9) $x''(t)-15x'(t)+26x(t)=1.95+0.24x^2(t);T=2.6.$

10) $x''(t)-16x'(t)+39x(t)=1.91+0.23x^2(t);T=2.7.$

11) $x''(t)-14x'(t)+33x(t)=1.89+0.22x^2(t);\ T=2.8.$

12) $x''(t)-16x'(t)+28x(t)=1.81+0.21x^2(t);\ T=2.9.$

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется метрическое пространство?
2. Что такое полное метрическое пространство?
3. Как формулируется принцип сжимающих отображений?
4. Почему принцип сжимающих отображений является базой для многих итерационных процессов?
5. Покажите, что банахово пространство является частным случаем метрического пространства.

ГЛАВА 3. МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА

3.1. Комплексные аналоги многочленов Лежандра. Так называемые специальные функции математической физики представляют собой решения определенных, часто встречающихся линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти функции имеют много представлений: в виде частных решений дифференциальных уравнений, рядов, различных интегральных представлений, с помощью рекуррентных соотношений и с помощью производящих функций.

Далее рассмотрим класс многочленов комплексного аргумента, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, более общему, чем уравнение Лежандра. Для таких многочленов построено рекуррентное соотношение, найдена производящая функция и доказана ортогональность на отрезке комплексной плоскости. Кроме того, найдена структура многочленов, ортогональных на контуре квадрата. Для таких многочленов указан алгоритм нахождения их коэффициентов.

Дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид

$$(x^2-1)\,y''+2xy'-n(n+1)\,y=0. \tag{1}$$

Многочлены Лежандра

$$Q_n(x)=\left[\left(1-x^2\right)^n\right]^{(n)}\ (n=0,1,2,\ldots) \tag{2}$$

являются решениями уравнения (1).

Рассмотрим более общее дифференциальное уравнение

$$\left(z^2-\lambda^2\right)P_n''(z)+2zP_n'(z)-n(n+1)P_n(z)=0, \tag{3}$$

где $\lambda-$ произвольное комплексное число.

***Лемма* 1.** *Многочлены*

$$P_n(z)=\left[\left(z^2-\lambda^2\right)^n\right]^{(n)}\ (n=1,2,\ldots) \tag{4}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению (3).

Доказательство. Найдем коэффициент b_m при z^m выражения

$$\left(z^2-\lambda^2\right)P_n''(z)+2zP_n'(z).$$

Так как

$$\left(z^2-\lambda^2\right)^n=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}(-1)^k z^{2k}, \tag{5}$$

то

$$\left[\left(z^2-\lambda^2\right)^n\right]^{(n)}=(-1)^n\sum_{k:2k-n\ge 0}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k-n)!}z^{2k-n}, \tag{6}$$

$$\left[\left(z^2-\lambda^2\right)^n\right]^{(n+1)}=(-1)^n\sum_{k:2k-n-1\ge 0}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k-n-1)!}z^{2k-n-1},$$

$$\left[\left(z^2-\lambda^2\right)^n\right]^{(n+2)}=(-1)^n\sum_{k:2k-n-2\geq 0}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}z^{2k-n-2}.$$

Пусть $m=2k-n\geq 2$, тогда

$$b_m=(-1)^{n+k}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}-(-1)^{n+k+1}C_n^{k+1}\frac{\left[2(k+1)\right]!}{(2k-n)!}+$$

$$+(-1)^{n+k}2C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{(2k)!}{(2k-n-1)!}$$

$$=(-1)^{n+k}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}\left(1+\frac{2}{2k-n-1}\right)+$$

$$+(-1)^{n+k+2}C_n^{k+1}\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{(2k+2)!}{(2k-n)!}=$$

$$=(-1)^{n+k}\left(\lambda^2\right)^{n-k}\left[C_n^k\frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}\cdot\frac{2k-n+1}{2k-n-1}+C_n^{k+1}\frac{(2k+2)!}{(2k-n)!}\right]=$$

$$=(-1)^{n+k}\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{n!(2k)!}{(2k-n-1)!k!(n-k-1)!}\left[\frac{2k-n+1}{n-k}+\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(2k-n)}\right]=$$

$$=(-1)^{n+k}\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{n!(2k)!}{(2k-n-1)!k!(n-k-1)!}\cdot\frac{n(n+1)}{(n-k)(2k-n)}=$$

$$=(-1)^{n+k}\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{n!(2k)!n(n+1)}{k!(n-k)!(2k-n)!}=(-1)^{n+k}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{(2k)!n(n+1)}{(2k-n)!}.$$

Далее найдем коэффициент c_m при z^m выражения $n(n+1)\left[\left(z^2-\lambda^2\right)^n\right]^{(n)}$. Из равенства (6)

$$c_m=n(n+1)(-1)^{n+k}C_n^k\left(\lambda^2\right)^{n-k}\frac{(2k)!}{(2k-n)!}.$$

Таким образом, $b_m=c_m$. При $m=1$ и $m=0$ доказательство проводится аналогично.

Далее нам потребуются свойства многочлена

$$Q_n(z)=\left[\left(z^2+bz+c\right)^n\right]^{(n)}\quad(n=0,1,2,...).\qquad(7)$$

Пусть

$$F_k(z,n)=\left[\left(z^2+bz+c\right)^n\right]^{(k)}\quad(k=0,1,2,...,n).\qquad(8)$$

***Лемма* 2.** Справедливо равенство

$$F_k(z,n)=\left(z^2+bz+c\right)^{n-k}R_k(z),\qquad(9)$$

где $R_k(z)$ – многочлен степени не более k.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Действительно,

$$F_0(z,n)=\left(z^2+bz+c\right)^n,\ F_1(z,n)=n\left(z^2+bz+c\right)^{n-1}(2z+b),\ \text{т.е. } R_1(z)=2nz+nb.$$

Проведем шаг индукции. Для этого продифференцируем обе части равенства (9):

$$F_{k+1}(z,n)=\left[F_k(z,n)\right]'=(n-k)\left(z^2+bz+c\right)^{n-k-1}(2z+b)R_k(z)+\left(z^2+bz+c\right)^{n-k}R_k'(z)=$$

$$=\left(z^2+bz+c\right)^{n-k-1}\left[(n-k)(2z+b)R_k(z)+R_k'(z)\right]=\left(z^2+bz+c\right)^{n-(k+1)}R_{k+1}(z).\ \blacksquare$$

Пусть $[z_1,\ z_2]$ – отрезок на комплексной плоскости с концами $z_1=a+bi,\ z_2=-a+bi\ (a>0,\ b\geq 0).$ Многочлен

$$(z-z_1)(z-z_2)=(z-a-bi)(z+a-bi)=z^2-2biz-a^2-b^2$$

с нулями в точках $z=z_1$ и $z=z_2$ определяет выражение

$$F_k(z,n)=\left[\left(z^2-2biz-a^2-b^2\right)^n\right]^{(k)}(k=0,1,...,n),$$

которое, в силу леммы 2, обращается в нуль на концах отрезка $[z_1,\ z_2],$ т.е.

$$F_k(z_1,n)=F_k(z_2,n)=0\ (k=0,1,...,n-1).$$

Обозначим далее

$$\left(z^2-2biz-a^2-b^2\right)^n=u(x,y)+iv(x,y),\ \bar{z}^k=(x-iy)^k=p(x,y)-iq(x,y),$$

т.е. p и q – многочлены переменных x и y степени не выше k.

Ортогональность понимается в смысле скалярного произведения

$$(f,g)=\int_{z_2}^{z_1}f(z)\bar{g}(z)\,|dz|. \tag{10}$$

Рассмотрим семейство многочленов

$$P_n(z)=\left[\left(z^2-2biz-a^2-b^2\right)^n\right]^{(n)}(n=0,1,2,...). \tag{11}$$

***Теорема* 3.1.** *Многочлены* (11) *ортогональны на отрезке* $[z_2,\ z_1].$

Доказательство. Действительно, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{z_2}^{z_1}P_n(z)\bar{z}^k\,|dz|=\int_{-a}^{a}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+i\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right)(p-iq)dx=$$

$$=\left[\frac{\partial^{n-1}u(x,b)}{\partial x^{n-1}}+i\frac{\partial^{n-1}v(x,b)}{\partial x^{n-1}}\right]\left[p(x,b)-iq(x,b)\right]\Big|_{-a}^{a}-$$

$$-\int_{-a}^{a}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+i\frac{\partial^{n-1}v}{\partial x^{n-1}}\right)(p-iq)_x'\,dx.$$

Внеинтегральное выражение в данном равенстве в силу формулы (9) обращается в нуль, следовательно, повторяя операцию интегрирования по частям, получаем

$$\int_{z_2}^{z_1} P_n(z)\bar{z}^k\,|dz| = (-1)^k \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial^{n-k}u}{\partial x^{n-k}} + i\frac{\partial^{n-k}v}{\partial x^{n-k}} \right) (p-iq)_{x^k}^{(k)}\,dx.$$

Но так как

$$p(x,y)-q(x,y)=(x-iy)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j}(-i)^j y^j,$$

то

$$\int_{z_2}^{z_1} P_n(z)\bar{z}^k\,|dz| = (-1)^k k! \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial^{n-k}u}{\partial x^{n-k}} + i\frac{\partial^{n-k}v}{\partial x^{n-k}} \right) dx = (-1)^k k! \left(\frac{\partial^{n-k-1}u}{\partial x^{n-k-1}} + i\frac{\partial^{n-k-1}v}{\partial x^{n-k-1}} \right) \Big|_{-a}^{a} =$$

$$=(-1)^k k! \left[\left(z^2 - 2biz - a^2 - b^2 \right)^n \right]^{(n-k-1)} \Big|_{z_2}^{z_1}.$$

Последнее выражение в силу равенства (9) обращается в нуль при $k=0,1,2,...,n-1$. ■

Найдем далее дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет семейство многочленов (11). Так как

$$z^2-2biz-a^2-b^2 = (z-bi)^2-a^2,$$

то, заменив в уравнении (3) z на $z-bi$, будем иметь

$$\left[(z-bi)^2 - a^2 \right] P_n''(z-bi) + 2(z-bi)P_n'(z-bi) - n(n+1)P_n(z-bi) = 0,$$

и, обозначив $P_n(z-bi)=Q_n(z)$, получаем

$$\left(z^2-2biz-a^2-b^2\right)Q_n''(z)+2(z-bi)Q_n'(z)-n(n+1)Q_n(z)=0. \qquad (12)$$

Определим далее стандартизованные многочлены равенством

$$P_n^s(z) = \frac{1}{n!2^n}\left[\left(z^2-\lambda^2 \right)^n \right]^{(n)} \quad (n=0,1,2,...), \qquad (13)$$

тогда

$$P_{n-2}^s(z) = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!2^{n-2}} \sum_{k:2k-n+2\ge 0}^{n-2} C_{n-2}^k (-1)^k \left(\lambda^2\right)^{n-2-k} \frac{(2k)!}{(2k-n+2)!} z^{2k-n+2},$$

$$P_{n-1}^s(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}} \sum_{k:2k-n+1\ge 0}^{n-1} C_{n-2}^k (-1)^k \left(\lambda^2\right)^{n-1-k} \frac{(2k)!}{(2k-n+1)!} z^{2k-n+1},$$

$$P_n^s(z) = \frac{(-1)^n}{(n)!2^n} \sum_{k:2k-n\ge 0}^{n} C_n^k (-1)^k \left(\lambda^2\right)^{n-k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} z^{2k-n}.$$

Найдем коэффициенты α_n и β_n такие, чтобы выполнялось тождество

$$P_n^s = \alpha_n z P_{n-1}^s + \beta_n P_{n-2}^s. \qquad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в левой и правой частях предполагаемого тождества (14), получаем

$$\frac{(-1)^{2n}}{n!2^n} \cdot \frac{n!}{n!(n-n)!} \cdot \left(\lambda^2\right)^0 \cdot \frac{(2n)!}{n!} = \alpha_n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!},$$

т.е.

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{n}. \tag{15}$$

Далее приравняем коэффициент при z^{n-2}:

$$\frac{(-1)^n}{n!2^n}\cdot n(-1)^{n-1}\lambda^2\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-2)!} = \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}}{(n-1)!2^{n-1}}\cdot(n-1)\lambda^2\cdot\frac{(2n-4)!}{(n-3)!} +$$

$$+\beta_n\frac{(-1)^{n-2}(-1)^{n-2}}{(n-2)!2^{n-2}}\cdot\frac{(2n-4)!}{(n-2)!},$$

тогда после очевидных преобразований получаем

$$\beta_n = \left[\frac{(2n-1)(n-2)}{2n} - \frac{(2n-3)(2n-2)}{4(n-1)}\right]\lambda^2 = -\frac{n-1}{n}\lambda^2. \tag{16}$$

Таким образом, справедливо тождество

$$P_n^s(z) = \frac{2n-1}{n} z P_{n-1}^s(z) - \frac{n-1}{n}\lambda^2 P_{n-2}^s(z), \tag{17}$$

которое является обобщением известного для многочленов Лежандра ([2], с. 121) тождества

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x). \tag{18}$$

Далее получим представление для производящей функции системы многочленов (4).

***Теорема* 3.2.** Для производящей функции $F(z,w)$ системы многочленов (4)

$$F(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\left(z^2-\lambda^2\right)^n\right]^{(n)}}{n!}w^n \tag{19}$$

имеет место представление

$$F(z,w) = \frac{1}{1-2w\zeta_1(z,w)}, \tag{20}$$

где $\zeta_1 = \zeta_1(z,w)$ есть тот корень квадратного уравнения

$$w\zeta^2 - \zeta + z - w\lambda^2 = 0, \tag{21}$$

который при малых $|w|$ расположен ближе к точке z.

Далее рассмотрим квадрат D с вершинами в точках $z_1 = 1+i,\ z_2 = -1+i,\ z_3 = -1-i,\ z_4 = 1-i.$

Ортогональность на квадрате понимается в смысле скалярного произведения

$$\int_\Gamma f(z)\overline{g}(z)\,|dz|,$$

где $\Gamma-$ контур квадрата.

***Лемма* 3.** Справедливы равенства

$$g_{n+4k+j,n} := \int_\Gamma z^{n+4k+j}\overline{z}^n\,|dz| = 0 \quad (n=0,1,2,\dots,\ k=0,1,2,\dots,\ j=1,\,2,\,3). \tag{22}$$

Доказательство. Действительно,

$$(x+iy)^{n+4k+j}\left(x-iy\right)^{n}=\left(x^{2}+y^{2}\right)^{n}\left(x+iy\right)^{4k+j}. \qquad (23)$$

При $j=1$ выражение $(x+iy)^{4k+1}$ имеет следующий вид:

$$\left(x+iy\right)^{4k+1}=x^{4k+1}+iC_{4k+1}^{1}x^{4k}y-C_{4k+1}^{2}x^{4k-1}y^{2}-iC_{4k+1}^{3}x^{4k-2}y^{3}+\ldots+iy^{4k+1}. \qquad (24)$$

Заметим, что достаточно хотя бы одному из множителей x^t или y^s быть в нечетной степени, чтобы интеграл по контуру Γ от такого произведения обращался в нуль (интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля отрезку равен нулю).

При $j=2$ имеем

$$\left(x+iy\right)^{4k+2}=x^{4k+2}+iC_{4k+2}^{1}x^{4k+1}y-C_{4k+2}^{2}x^{4k}y^{2}-\ldots+C_{4k+2}^{4k}x^{2}y^{4k}+iC_{4k+2}^{4k+1}xy^{4k+1}-y^{4k+2}. \qquad (25)$$

Те слагаемые, которые содержат x и y в четных степенях, имеют равные себе по значению интеграла слагаемые, но с противоположным знаком, например, x^{4k+2} и $-y^{4k+2}$.

Аналогично проводится доказательство и в случае выражения $\left(x+iy\right)^{4k+3}$. Кроме того, отметим, что все мнимые части интегралов (22) равны нулю.■

Приведем численные значения интегралов (22) для некоторых значений показателей степени:

$$g_{0,0}=8,\ g_{1,1}=\frac{32}{3},\ g_{2,2}=\frac{224}{15},\ g_{3,3}=\frac{768}{35},\ g_{4,4}=\frac{10624}{315},\ g_{5,5}=\frac{37376}{693},$$

$$g_{4,0}=g_{0,4}=-\frac{32}{5},\ g_{1,5}=g_{5,1}=-\frac{256}{21},\ g_{8,0}=g_{0,8}=\frac{128}{9},\ g_{6,2}=g_{2,6}=-\frac{1408}{63},$$

$$g_{6,6}=\frac{267776}{3003},\ g_{8,4}=g_{4,8}=-\frac{466432}{6435}.$$

Из леммы 3 вытекает тот факт, что степени z^k у ортогонального на контуре квадрата многочлена любой степени образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным z^4. Этот факт позволяет существенно упростить нахождение коэффициентов ортогональных многочленов. Применяя лемму 3, получаем, что ортогональными многочленами первой, второй и третьей степени являются

$$P_1\left(z\right)=z,\ P_2\left(z\right)=z^2,\ P_3\left(z\right)=z^3.$$

Для нахождения ортогонального многочлена $P_4\left(z\right)=z^4+a_0$ воспользуемся равенством

$$0=\int_{\Gamma}\left(z^{4}+a_{0}\right)\overline{z}^{0}\,|dz|=g_{4,0}+a_{0}g_{0,0}=-\frac{32}{5}+8a_{0},$$

откуда $a_0=\dfrac{4}{5}$, т.е.

$$P_4(z)=z^4+\frac{4}{5}.$$

Аналогично

$$P_5(z)=z^5+\frac{8}{7}z,\quad P_6(z)=z^6+\frac{220}{147}z^2,\ P_7(z)=z^7+\frac{182}{99}z^3.$$

Найдем расположение корней ортогонального многочлена восьмой степени. Для этого найдем коэффициенты a_{80} и a_{84} из системы уравнений

$$0=\int_\Gamma (z^8+a_{84}z^4+a_{80})\overline{z}^0\,|dz|\ =\frac{128}{9}-\frac{32}{5}a_{84}+8a_{80};$$

$$0=\int_\Gamma \left(z^8+a_{84}z^4+a_{80}\right)\overline{z}^4\,|dz| = g_{8,4}+a_{84}g_{4,4}+a_{80}g_{0,4} =$$

$$=-\frac{466432}{6435}+a_{84}\frac{10624}{315}-a_{80}\frac{32}{5}.$$

Из полученной системы

$$a_{80}=-\frac{976}{14157},\ a_{84}=\frac{3360}{1573}.$$

Таким образом,

$$P_8(z)=z^8+\frac{3360}{1573}z^4-\frac{976}{14157}.$$

Изучим расположение корней данного многочлена. Сделав подстановку $x=z^4$, получим квадратное уравнение

$$x^2+\frac{3360}{1573}x-\frac{976}{14157}=0. \tag{26}$$

Решая приближенно уравнение (26), получаем $x_1\approx 0,03181;\ \ x_2\approx -2,16785.$

Далее, решив два уравнения $z^4-0,03181=0$ и $z^4+2,16785=0,$ получаем нули многочлена $P_8(z)$:

$z_1=-0,422319;\ z_2=-0,422319i;\ z_3=0,422319;\ \ z_4=-0,422319i;$

$z_5=-0,858010+0,858010i;\ z_6=-0,858010-0,858010i;$

$z_7=0,858010-0,858010i;\ z_6=0,858010+0,858010i.$

Таким образом, корни расположены в вершинах двух квадратов: одного с вершинами на координатных осях, а другого со сторонами, параллельными координатным осям.

Отметим, что факт о том (Фейер, 1922 г.), что все нули ортогональных на области G многочленов принадлежат выпуклой оболочке области G, был давно известен.

***Лемма* 4.** *Если в системе $(n+1)$ многочленов*

$$F_0(z),\ F_1(z),\dots,\ F_n(z)$$

каждый многочлен имеет степень k, то всякий многочлен $Q_n(z)$ степени n можно единственным образом представить в виде

$$Q_n(z)=a_0F_0(z)+a_1F_1(z)+...+a_nF_n(z). \tag{27}$$

Теорема **3.3.** *Справедлива рекуррентная формула*

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) + c_{n-3}P_{n-3}(z) + c_{n-7}P_{n-7}(z)+... , \tag{28}$$

где $c_k = -\dfrac{1}{\|P_k\|^2}\int\limits_{\Gamma} zP_n(z)\bar{P}_k(z)\,|dz| \quad (k=n-3,\ n-7,...)$.

Доказательство. В силу леммы 4 имеем разложение

$$zP_n(z) = a_0P_0(z)+a_1P_1(z)+...+a_nP_n(z)+P_{n+1}(z). \tag{29}$$

При $k<n+1$ умножим обе части равенства (28) на $\bar{P}_k(z)$ и проинтегрируем по контуру Γ, тогда

$$\int\limits_{\Gamma} zP_n(z)\bar{P}_k(z)\,|dz| = \int\limits_{\Gamma}\left(z^{n+1} + h_{n-3}z^{n-3} + h_{n-7}z^{n-7} + ...\right)\left(\bar{z}^k + b_{k-4}\bar{z}^{k-4} + ...\right)|dz| = a_k\|P_k\|^2. \tag{30}$$

Если $n+1-k\neq 4m\ (m=1,2,...)$, то левая часть равенства (30) равна нулю, т.е.

$$a_k = 0\ (k: k\neq n+1-4m).$$

Если же $k=n+1-4m\ (m=1,2,...)$, то

$$a_k = \frac{\int\limits_{\Gamma} zP_n(z)\bar{P}_k(z)\,|dz|}{\|P_k\|^2}. \tag{31}$$

Таким образом, из равенства (29) получаем

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) - a_{n-3}P_{n-3}(z) - a_{n-7}P_{n-7}(z) - ... = zP_n(z) + c_{n-3}P_{n-3}(z) + c_{n-7}P_{n-7}(z) + ... ,$$

т.е. равенство (28) доказано. ■

3.2. Сферические функции и функции Лежандра. Установим явные выражения для однородных многочленов, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Введем сферические координаты

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta. \tag{2}$$

При этом однородный многочлен степени n представляется в виде

$$u_n(x,y,z) = r^n Y_n(\theta,\varphi). \tag{3}$$

Такой многочлен, являющийся решением уравнения (1), называется обычно объемной сферической функцией, а множитель $Y_n(\theta,\varphi)$, который будет, очевидно, многочленом от $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, называется поверхностной сферической функцией, или просто сферической функцией порядка n. Нашей задачей и является нахождение $2n+1$ линейно независимых сферических функций.

Отметим простой факт, связанный с решением уравнения (1). Напишем интеграл, зависящий от параметров x, y и z

$$u(x,y,z)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(z+ix\cos t+iy\sin t,\, t\right)dt, \tag{4}$$

причем мы предполагаем, что интеграл (4) можно дифференцировать под знаком интеграла по x, y и z. Тогда

$$\Delta u=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[1+(i\cos t)^2+(i\sin t)^2\right]f''\left(z+ix\cos t+iy\sin t,t\right)dt=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[1-\cos^2 t-\sin^2 t\right]f''\left(z+ix\cos t+iy\sin t,t\right)dt=0,$$

где через $f''(\tau,t)$ обозначена вторая производная от функции $f(\tau,t)$ по первому аргументу.

Теперь, применяя конструкцию (4), можно построить $(2n+1)$ однородных многочленов степени n, удовлетворяющих уравнению (1). Напишем их в следующем виде:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(z+ix\cos t+iy\sin t\right)^n\cos mt\,dt \quad (m=0,1,\ldots,n), \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(z+ix\cos t+iy\sin t\right)^n\sin mt\,dt \quad (m=1,2,\ldots,n). \tag{6}$$

Вводя сферические координаты, получим, пользуясь интегралами (5) и (6), следующие выражения для сферических функций:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi\cos t+i\sin\theta\sin\varphi\sin t\right)^n\cos mt\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)\right]^n\cos mt\,dt=$$

$$\int\limits_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi}\left(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi\right)^n\cos m(\varphi+\psi)\,d\psi=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi\right)^n(\cos m\varphi\cos m\psi-\sin m\varphi\sin m\psi)\,d\psi=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi\right)^n\cos m\psi\,d\psi\cos m\varphi \quad (m=0,1,2,\ldots,n). \tag{7}$$

Аналогично интеграл (6) приводит нас к следующим n сферическим функциям

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi\right)^n\cos m\psi\,d\psi\sin m\varphi \quad (m=1,2,\ldots,n). \tag{8}$$

Линейная независимость всех $(2n+1)$ функций (7) и (8) следует из того, что зависимость этих функций от φ содержится в множителях $\cos m\varphi, \sin m\varphi$ и что не может существовать линейной зависимости между этими функциями, поскольку они ортогональны между собой на интервале $(-\pi,\pi)$. Таким образом, мы построили все $2n+1$ сферических функций порядка n. Коэффициенты при $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ в выражениях (7) и (8) являются одними и теми же функциями от θ. Мы их выразим через многочлены Лежандра.

Мы имели следующие выражения для многочленов Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \tag{9}$$

Введем еще функции $P_{n,m}(x)$, которые выражаются через многочлены Лежандра следующим образом:

$$P_{n,m}(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{n!2^n}\frac{d^{n+m}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]}{dx^{n+m}}. \tag{10}$$

При нечетном m множитель $\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$ определен лишь с точностью до знака. Если рассматривать x из промежутка $-1\le x\le 1$ и положить $x=\cos\theta$, где $0\le\theta\le\pi$, то множитель $\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$ можно считать неотрицательным. Действительно, тогда

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}=\left(1-\cos^2\theta\right)^{\frac{m}{2}}=\sin^m\theta\quad(0\le\theta\le\pi).$$

Выведем теперь другие выражения для $P_n(x)$ и $P_{n,m}(x)$. Согласно формуле Коши, можем написать

$$\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\left(z^2-1\right)^n}{z-x}dz, \tag{11}$$

где $C-$ любой замкнутый контур, внутри которого находится точка $z=x$, причем этот контур обходится против часовой стрелки. Отсюда в силу (9) получаем

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{(z-1)^n(z+1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz. \tag{12}$$

Возьмем в качестве контура C окружность с центром $z=x$ и радиусом $|x^2-1|^{1/2}$(считается, что $x\ne\pm1$). При этом переменная интегрирования z запишется в виде

$$z=x+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}, \tag{13}$$

где выбор значения $\left(x^2-1\right)^{1/2}$безразличен, и можно считать, что $-\pi\le\psi\le\pi$. Совершая в интеграле (12) замену (13), получаем

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\int_C \frac{\left[x-1+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}\right]^n\left[x+1+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}\right]^n}{\left[\left(x^2-1\right)^{1/2}\right]^{(n+1)}e^{i(n+1)\psi}}\left(x^2-1\right)^{1/2}ie^{i\psi}d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_C\left\{\frac{\left[x+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}-1\right]\left[x+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}+1\right]}{2\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}}\right\}^n d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_C\left\{\frac{\left[x+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}\right]^2-1}{2\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}}\right\}^n d\psi.$$

Преобразуем подынтегральное выражение к более простому виду

$$\frac{\left[x+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}\right]^2-1}{2\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}}=\frac{1}{2\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}}\left[x^2+2x\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}+\left(x^2-1\right)e^{2i\psi}-1\right]=$$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)^{1/2}}{2\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}}\left[\left(x^2-1\right)^{1/2}+2xe^{i\psi}+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{2i\psi}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{-i\psi}+2x+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}\right]=\ \left(x^2-1\right)^{1/2}\frac{e^{i\psi}+e^{-i\psi}}{2}\ =x+\left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\psi.$$

Таким образом, учитывая четность подынтегральной функции, получим

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\psi\right]^n d\psi. \tag{14}$$

Если мы в правой части разложим выражение $\left[x+\left(x^2-1\right)^{1/2}\cos\psi\right]^n$ по формуле бинома Ньютона, то, принимая во внимание, что интеграл от нечетной степени $\cos\psi$ по промежутку $(-\pi,\pi)$ равен нулю, мы видим, что все члены с нечетными степенями $\left(x^2-1\right)^{1/2}$ в правой части равенства (14) пропадут.

Проведем аналогичные вычисления для $P_{n,m}(x)$:

$$P_{n,m}(x)=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{2^{n+1}\pi i}\int_C\frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+m+1}}dz.$$

Будем для определенности считать, что $-1<x<1.$ Совершая прежнюю замену переменной интегрирования, т.е. $z=x+\left(x^2-1\right)^{1/2}e^{i\psi}$, и считая выражение $\left(x^2-1\right)^{1/2}$ положительно мнимым, т.е. вида $pi,$ где $p>0,$ получим

$$P_{n,m}(x)=\frac{i^m(n+1)(n+2)...(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x+\left(x^2-1\right)\cos\psi\right]^n e^{-im\psi}d\psi$$

или, принимая во внимание нечетность $\sin m\psi$,

$$P_{n,m}(x)=\frac{i^m(n+1)(n+2)...(n+m)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x+\left(x^2-1\right)\cos\psi\right]^n\cos m\psi d\psi. \qquad (15)$$

Если мы в интеграле (14) положим $x=\cos\theta$, то получим, что

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi\right)^n d\psi.$$

Последнее выражение с точностью до множителя совпадает при $m=0$ с интегралом (7). Аналогично поступаем с интегралами (15).

Принимая во внимание, что постоянный множитель сохраняет свойство функции быть решением уравнения (1), мы приходим к следующему заключению: $(2n+1)$ сферических функций порядка n могут быть записаны в виде

$$P_n(\cos\theta),\ P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi,\ P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\varphi\ \ (m=1,2,...,n), \qquad (16)$$

где $P_n(x)$ являются многочленами Лежандра, определяемыми равенством (9), а функции $P_{n,m}(x)$ определяются формулами (10).

Напомним, что множитель $\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$ при подстановке $x=\cos\theta$ считается равным $\sin^m\theta$. Умножая решения (16) на произвольные постоянные и складывая, получим общий вид сферической функции порядка n

$$Y_n(\theta,\varphi)=a_0P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{m=n}\left(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi\right)P_{n,m}(\cos\theta). \qquad (17)$$

Вместо тригонометрических функций мы можем, составляя линейные комбинации решений (16), брать показательные функции, так что вместо набора сферических функций (16) порядка n мы можем взять следующий набор сферических функций порядка n:

$$P_n(\cos\theta),\ P_{n,m}(\cos\theta)e^{im\varphi},\ P_{n,m}(\cos\theta)e^{-im\varphi}\ \ (m=1,2,...,n). \qquad (18)$$

Согласно построению общий вид однородных многочленов степени n от переменных (x,y,z), удовлетворяющих уравнению Лапласа, будет $r^nY_n(\theta,\varphi)$, где $Y_n(\theta,\varphi)$ определяется формулой (17).

Свойство ортогональности. Докажем теперь ортогональность сферических функций на единичной сфере и вычислим интеграл от квадрата этих функций по единичной сфере. Предварительно займемся вычислением интегралов

$$I_{n,m}=\int_{-1}^{1}\left[P_{n,m}(x)\right]^2dx.$$

Мы имеем согласно определению этих функций

$$I_{n,m}=\int_{-1}^{1}\left[P_{n,m}(x)\right]^2dx=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}dx,$$

причем при $m=0$ получаем интеграл от квадрата многочлена Лежандра

$$I_{n,0}=\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2 dx=\frac{2}{2n+1}. \tag{19}$$

В конце настоящего пункта мы приведем доказательство равенства (19), а в данный момент приступим к вычислению интеграла $I_{m,n}$, пользуясь формулой (19). Производя интегрирование по частям, можно написать

$$I_{n,m}=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}dx=\left(1-x^2\right)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\Big|_{x=-1}^{x=1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}\right]dx=-\int_{-1}^{1}P_n^{(m-1)}(x)\left[\left(1-x^2\right)^m P_n^{(m)}(x)\right]' dx.$$

Но функция

$$z_m(x)=P_n^{(m-1)}(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+m-1}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]}{dx^{n+m-1}}$$

является решением дифференциального уравнения

$$\left(1-x^2\right)z''-2mxz'+(n+m)(n-m+1)z=0. \tag{20}$$

Действительно, $\left(1-x^2\right)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)\equiv 0,$ тогда, дифференцируя по x обе части последнего тождества, получаем

$$-2xP_n''(x)+\left(1-x^2\right)\left[P_n'(x)\right]''-2P_n'(x)-2x\left[P_n'(x)\right]'+n(n+1)P_n'(x)=$$

$$=\left(1-x^2\right)\left[P_n'(x)\right]''-4x\left[P_n'(x)\right]'+\left[n(n+1)-2\right]P_n'(x)=$$

$$=\left(1-x^2\right)z_2''-2\cdot 2xz_2'+(n+2)(n-2+1)z_2\equiv 0.$$

Применяя метод математической индукции, получаем уравнение (20).

Умножая обе части уравнения (20) на $\left(1-x^2\right)^{m-1}$, можно переписать его в виде

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m P_n^{(m)}(x)\right]=-(n+m)(n-m+1)\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}.$$

Таким образом,

$$I_{n,m}=-\int_{-1}^{1}P_n^{(m-1)}(x)\left[\left(1-x^2\right)P_n^{(m)}(x)\right]' dx=$$

$$=(n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)P_n^{(m-1)}(x)dx=(n+m)(n-m+1)I_{n,m-1}$$

или

$$I_{n,m}=(n+m)(n-m+1)I_{n,m-1}.$$

Уменьшая число m постепенно на единицу, получим

$$I_{n,m}=(n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)I_{n,m-2}=$$

$$=(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots[n+m-(m-1)](n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+m)I_{n,0}=$$

$$=\frac{(n+m)!}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-m)!}I_{n,0}=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\frac{2}{2n+1}.$$

Окончательно

$$\int_{-1}^{1}\left[P_{n,m}(x)\right]^2 dx=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{21}$$

Полученные результаты дадут возможность вычислить интеграл от квадрата сферических функций. Сферические функции $Y_n(\theta,\varphi)$ можно считать определенными на поверхности сферы единичного радиуса; θ и φ являются обычными географическими координатами точек этой поверхности, причем линии $\varphi=const$ являются меридианами и $\theta=const$ – параллели. При таком выборе координатных линий элемент площади поверхности выражается, как известно, следующей формулой

$$d\sigma=\sin\theta d\theta d\varphi. \tag{22}$$

Докажем прежде всего, что две различные сферические функции $Y_p(\theta,\varphi)$ и $Y_q(\theta,\varphi)$ различных порядков, т.е. при $p\neq q$, будут ортогональными на поверхности s единичной сферы, т.е.

$$\iint_s Y_p(\theta,\varphi)Y_q(\theta,\varphi)d\sigma=0. \tag{23}$$

Пусть v – объем, ограниченный этой сферой, и s – поверхность этой сферы. Применим к гармоническим функциям

$$U_p=r^pY_p(\theta,\varphi),\ V_q=r^qY_q(\theta,\varphi) \tag{24}$$

формулу Грина

$$\iint_s\left(U_p\frac{\partial U_q}{\partial n}-U_q\frac{\partial U_p}{\partial n}\right)d\sigma=\iiint_v\left(U_p\Delta U_q-U_q\Delta U_p\right)dv, \tag{25}$$

причем $\Delta U_p=\Delta U_q=0$. В данном случае дифференцирование по нормали совпадает с дифференцированием по радиусу r, так что равенство (25) в силу (24) дает нам

$$\iint_s\left[qY_p(\theta,\varphi)Y_q(\theta,\varphi)-pY_q(\theta,\varphi)Y_p(\theta,\varphi)\right]d\sigma=0,$$

откуда и вытекает непосредственно формула (23).

Покажем, что сферические функции (16), соответствующие одному и тому же значению n, также будут взаимно ортогональными. Действительно, интегрирование по единичной сфере содержит операцию интегрирования по φ в промежутке $(0,2\pi)$. Но функции (16) содержат следующие множители, зависящие от φ:

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi,\ldots,\cos n\varphi,\sin n\varphi,$$

и произведение любых двух из этих множителей, проинтегрированное в промежутке $(0, 2\pi)$, равно нулю. Точно так же можно проверить, что функции (18) также образуют ортогональную систему.

3.3. Квазиполиномиальные решения уравнения Шредингера. В данном разделе получим выражение для потенциальной энергии, содержащее в качестве частных случаев случай кулоновского поля и случай трехмерного осциллятора. Для построения класса решений уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом применим эффективный алгоритм нахождения коэффициентов многочленов Чебышева–Лагерра.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Шредингера

$$\Delta\psi + b[E - U(r)]\psi = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $b = \frac{2\mu}{\hbar^2}$, μ – масса электрона, $\hbar$ – постоянная Планка, а в качестве потенциалов возьмем множество функций

$$U = U(r) = \frac{1}{b}\left[a^2k^2r^{2k-2} - ak(2m+k+1)r^{k-2} + bE\right], \tag{2}$$

в которых a, k – произвольные положительные числа, m – натуральное число или нуль.

В частности, если

$$k = 1, \qquad a = \frac{\mu e^2}{(m+1)\hbar^2}, \qquad E = -\frac{1}{2(m+1)^2}\cdot\frac{\mu e^4}{\hbar^2}, \tag{3}$$

где e – заряд электрона, то

$$U(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\mu^2 e^4}{(m+1)^2\hbar^4} - \frac{\mu e^2}{(m+1)\hbar^2}\cdot 2(m+1)r^{-1} - \frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{2(m+1)^2}\cdot\frac{\mu e^4}{\hbar^2}\right] =$$

$$= \frac{\mu e^4}{2(m+1)^2\hbar^2} - \frac{e^2}{r} - \frac{\mu e^4}{2(m+1)^2\hbar^2} = -\frac{e^2}{r},$$

т.е. возникает кулоновское поле.

В другом частном случае, если

$$k = 2, \ \ E = \omega\hbar\left(m + \frac{3}{2}\right)(m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad a = \frac{\mu\omega}{2\hbar},$$

то

$$U(r) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\mu^2\omega^2}{4\hbar^2}\cdot 4r^2 - \frac{\mu\omega(2m+3)}{\hbar} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\left(m + \frac{3}{2}\right)\omega\hbar\right] =$$

$$= \frac{\mu\omega^2}{2}\cdot r^2 - \frac{\hbar\omega}{2}(2m+3) + \frac{\hbar\omega}{2}(2m+3) = \frac{\mu\omega^2}{2}\cdot r^2 = \frac{\mu\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Последнее выражение является потенциальной энергией изотропного осциллятора ([1], с. 52).

Рассмотрим далее дифференциальное уравнение

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + \left[b(E - U)r^2 - m(m+1)\right]R(r) = 0. \tag{4}$$

***Лемма* 1.** *Функции вида*

$$R_1(r) = c_1 r^m e^{-ar^k}, \tag{5}$$

где c_1 *– произвольная постоянная, являются решениями уравнения* (4).

Доказательство. Так как (при $c_1 = 1$)

$$R_1'(r) = mr^{m-1}e^{-ar^k} - akr^{m+k-1}e^{-ar^k} = \left(mr^{m-1} - akr^{m+k-1}\right)e^{-ar^k}, \tag{6}$$

$$R_1''(r) = \left[m(m-1)r^{n-2} + ak(-2m-k+1)r^{m+k-2} + a^2k^2r^{m+2k-2}\right]e^{-ar^k}. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (4) и учитывая, что

$$b(E-U) = ak(2m+k+1)r^{k-2} - a^2k^2r^{2k-2}, \tag{8}$$

получаем

$$[m(m-1)r^m + ak(-2m-k+1)r^{m+k} + a^2k^2r^{m+2k} + 2mr^m - 2akr^{m+k} + ak(2m+k+1)r^{m+k} -$$

$$- a^2k^2r^{m+2k} - m(m+1)r^m]e^{-ar^k} = [\left(m^2-m+2m-m^2-m\right)r^m +$$

$$+ ak(-2m-k+1-2+2m+k+1)r^{m+k} + \left(a^2k^2 - a^2k^2\right)r^{m+2k}]e^{-ar^k} \equiv 0. \blacksquare$$

***Теорема* 1.** *Функции* ψ *вида*

$$\psi(r,\theta,\varphi) = c_1 r^m e^{-ar^k} Y_{m,l}(\theta,\varphi), \tag{9}$$

где с – произвольная постоянная, являются решениями уравнения (1).

Доказательство. Используя выражение оператора Лапласа в сферических координатах, приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + b(E-U)r^2\psi = 0. \tag{10}$$

Далее применяем метод разделения переменных, т.е. ищем решение уравнения (1) в виде произведения

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\cdot Y(\theta,\varphi), \tag{11}$$

которое подставляем в уравнение (1), тогда

$$Y\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)R + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\cdot R + b(E-U)r^2RY = 0. \tag{12}$$

После деления обеих частей уравнения (12) на RY, получаем

$$\left[\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + b(E-U)r^2\right] + \left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]\cdot\frac{1}{Y} = 0. \tag{13}$$

Поскольку переменные разделены, то

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + b(E-U)r^2 = A, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -AY. \tag{15}$$

В теории специальных функций доказывается, что уравнение (15) имеет ограниченные решения только при $A = m(m+1)$ $(m = 0,1,2,\ldots)$. Это и есть сферические функции. При таких значениях A уравнение (15) приводится к виду

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + \left[b(E-U)r^2 - m(m+1)\right]R(r) = 0,$$

что совпадает с уравнением (4).

Таким образом, результат теоремы следует из леммы 1. ■

В случае кулоновского потенциала уравнение (4) приводится к виду

$$r^2R''(r)+2rR'(r)+\left[\lambda r^2+cr-m(m+1)\right]R(r)=0 \quad (m=0,1,2,...), \tag{16}$$

где $c=\dfrac{2\mu Ze^2}{\hbar^2}$ $(Z=1,2,3,...)$; выбор величины λ будет проведен в процессе доказательства теоремы 2.

***Лемма* 2.** *Если решение уравнения* (16) *имеет вид*

$$R(r)=e^{-ar}P(r), \tag{17}$$

где $P(r)$ – *некоторый многочлен переменной* r, *то многочлен* $P(r)$ *должен удовлетворять уравнению*

$$r^2P''(r) + 2\left(r-ar^2\right)P'(r)+\left[r^2\left(a^2+\lambda\right)+(c-2a)r-m(m+1)\right]P(r)=0. \tag{18}$$

Доказательство. Действительно,

$$R'(r)= -ae^{-ar}P(r) + e^{-ar}P'(r), \tag{19}$$

$$R''(r)=r^2P''(r)+2\left(r-ar^2\right)P'(r)+\left[\left(a^2+\lambda\right)r^2+(c-2a)r-m(m+1)\right]P(r); \tag{20}$$

и подставляя выражения (19) и (20) в левую часть уравнения (16), получаем уравнение (18). ■

Если положить

$$\lambda=-a^2, \tag{21}$$

то уравнение (20) примет вид

$$r^2P''(r) + 2\left(r-ar^2\right)P'(r)+\left[(c-2a)r-m(m+1)\right]P(r)=0. \tag{22}$$

***Теорема* 2.** *Если*

$$a=a(m,k)=\frac{c}{2(m+k+1)} \quad (k=0,1,2,...), \tag{23}$$

то решениями уравнения (22) *являются функции*

$$P_{m,k}(r)=r^m\sum_{j=0}^{k}b_j(k,m)r^j, \tag{24}$$

в которых коэффициент $b_k(k,m)$ *является произвольным, а остальные коэффициенты находятся по формулам*

$$b_{k-q}(k,m)=\frac{(-1)^q(m+k+1)^q}{q!c^q}\left\{\prod_{s=0}^{s=q-1}\left[(m+k-s)(m+k-s+1)-m(m+1)\right]\right\}b_k(k,m)$$

$$(q=1,2,...,k). \tag{25}$$

Функции (17) *будут при этом решениями уравнения* (16).

Доказательство. Итак, при $m\geq 1$

$$P_{m,k}(r)=\sum_{j=0}^{k}b_j(k,m)r^{m+j},$$

тогда

$$r^2 P_{m,k}''(r) + 2\left(r-ar^2\right)P_{m,k}'(r)+\left[\,(c-2a)r-m(m+1)\right]P_{m,k}(r) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\left[(m+j)(m+j-1)+2(m+j)-m(m+1)\right]b_j(k,m)r^{m+j} +$$

$$+\sum_{j=0}^{k}\left[c-2a-2a(m+j)\,\right]b_j(k,m)r^{m+j+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\left[(m+j)(m+j+1)-m(m+1)\right]b_j(k,m)r^{m+j}$$

$$+\,c\sum_{j=0}^{k}\frac{k-j}{m+k+1}b_j(k,m)r^{m+j+1}\,. \qquad (26)$$

Заметим, что выбор $a=a(m,k)$ обеспечивает равенство нулю коэффициента при r^{m+k+1} в выражении (26). Пусть $b_k(k,m)$ будет произвольным, тогда, приравнивая нулю коэффициент при r^{m+k}, получаем

$$\left[(m+k)(m+k+1)-m(m+1)\right]b_k(k,\,m) = -\frac{c\left[k-(k-1)\right]}{m+k+1}b_{k-1}(k,m) =-\frac{cb_{k-1}(k,m)}{m+k+1},$$

т.е.

$$b_{k-1}(k,m) = -\frac{1}{c}(m+k+1)\left[(m+k)(m+k+1)-m(m+1)\right]b_k(k,\,m),$$

что совпадает с (25) при $q=1$.

Предположим, что коэффициенты $b_k(k,m),\, b_{k-1}(k,m),...,\, b_{k-s}(k,m)$ найдены, тогда при $j=k-s$ в первой сумме выражения (26) и при $j=k-s-1$ во второй сумме получаем

$$\left[(m+k-s)(m+k-s+1)-m(m+1)\right]b_{k-s}(k,\,m) =$$

$$=-c\frac{k-(k-s-1)}{m+k+1}b_{k-s-1}(k,m) \;=\frac{c(s+1)}{m+k+1}b_{k-s-1}(k,m),$$

$$b_{k-s-1}(k,m)=-\frac{1}{c(s+1)}(m+k+1)\left[(m+k-s)(m+k-s+1)-m(m+1)\right]b_{k-s}(k,m)$$

$$(s=0,1,...,k-1). \qquad (27)$$

Формула (25) следует непосредственно из равенства (27). Действительно, применяя необходимое число раз равенство (27), получаем

$$b_{k-q}(k,m) = -\frac{1}{cq}(m+k+1)\left[(m+k-q+1)(m+k-q+2)-m(m+1)\right]b_{k-q+1}(k,\,m) =$$

$$= -\frac{1}{cq}(m+k+1)\left[(m+k-q+1)(m+k-q+2)-m(m+1)\right]\times$$

$$\times\;\frac{(-1)}{c(q-1)}(m+k+1)\left[(m+k-q+2)(m+k-q+3)-m(m+1)\right]b_{k-q+2}(k,\,m) =...=$$

$$=\frac{(-1)^q(m+k+1)^q}{q!c^q}\left\{\prod_{s=0}^{s=q-1}\left[(m+k-s)(m+k-s+1)-m(m+1)\right]\right\}b_k(k,m),$$

что совпадает с равенством (25).

Случай, когда $m=0$, рассматривается аналогично. ■

Заметим, что формулы (25) дают удобный способ вычисления коэффициентов многочленов Чебышева–Лагерра.

Далее возникает вопрос о том, как пронормировать полученные решения. Так как квадрат ψ –функции является плотностью вероятности, то естественно (с учетом якобиана перехода к сферическим координатам) выбрать постоянные $c(m,k,l)$ так, чтобы выполнялось условие

$$c(m,k,l)\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi e^{-2a(m,k)r}r^2P_{m,k}^2(r)(\sin\theta)Y_{m,l}^2(\theta,\varphi)dr\,d\theta\,d\varphi=1. \tag{28}$$

Далее из равенства (21) получаем

$$\lambda=\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot E(m,k)=-\frac{c^2}{4(m+k+1)^2},$$

т.е.

$$E(m,\,k)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{4\mu^2Z^2e^4}{4(m+k+1)^2\hbar^4}=-\frac{\mu Z^2e^4}{2\hbar^2(m+k+1)^2}. \tag{29}$$

Так как главное квантовое число $n=m+k+1$, то математическое ожидание радиуса $r=r(n,n-1,0)$ уровня энергии (29) при $m=n-1,\,k=0$ можно вычислить следующим образом :

$$\langle r(n,n-1,0)\rangle=c(n-1,0,l)\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi r^3e^{-2a(n-1,0)r}r^{2(n-1)}(\sin\theta)Y_{n-1,l}^2(\theta,\varphi)dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\frac{\int_0^\infty e^{-2a(n-1,0)r}r^{2n+1}dr}{\int_0^\infty e^{-2a(n-1,0)r}r^{2n}dr}.$$

Для нахождения математических ожиданий радиусов орбит нам потребуется

***Лемма* 3.** *Справедливо равенство*

$$\int_0^\infty r^ne^{-ar}\,dr=\frac{n!}{a^{n+1}}. \tag{30}$$

Доказательство. Действительно, ([3], с. 116)

$$\int r^ne^{ar}\,dr=e^{ar}\left[\frac{r^n}{a}-\frac{nr^{n-1}}{a^2}+\frac{n(n-1)r^{n-2}}{a^3}-...+(-1)^{n-1}\frac{n!r}{a^n}+(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\right]. \tag{31}$$

Подставляя вместо a в правую часть равенства (31) $-a$ и делая подстановку от 0 до ∞, получаем равенство (30). ■

Таким образом,

$$\left\langle r\left(n,n-1,0\right)\right\rangle = \frac{\int\limits_0^\infty e^{-2a(n-1,0)r} r^{2n+1}dr}{\int\limits_0^\infty e^{-2a(n-1,0)r} r^{2n}dr} = \frac{(2n+1)!}{(2a)^{2n+2}} \cdot \frac{(2a)^{2n+1}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{2n+1}{2a(n-1,0)} = \frac{(2n+1)n}{c} = \frac{(2n+1)n\hbar^2}{2\mu Ze^2}. \qquad (32)$$

Покажем, что выражение (32) совпадает со второй из формул (1.14) монографии [15].

Действительно, в формуле (1.14)

$$\left\langle r\right\rangle = \frac{1}{2}\left[3n^2 - m(m+1)\right]\frac{\hbar^2}{Z\mu e^2} = \frac{1}{2}\left[3(m+1)^2 - m(m+1)\right]\frac{\hbar^2}{Z\mu e^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m+1)(2m+3)\right]\frac{\hbar^2}{Z\mu e^2} = \frac{1}{2}\left[n(2n+1)\right]\frac{\hbar^2}{Z\mu e^2}.$$

Применяя функции (24), можно вычислить математическое ожидание любого радиуса $\left\langle r(m,k,l)\right\rangle$ или натуральной степени s радиуса $\left\langle r^s(m,k,l)\right\rangle$.

Теперь перепишем выражение для энергии $E(m,k)$ в следующем виде

$$E(l,\, k) = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 (l+k+1)^2}. \qquad (33)$$

Число $n=l+k+1$ называется обычно главным квантовым числом, l – азимутальным квантовым числом, k – радиальным квантовым числом. Применяя формулы (25), вычислим радиальные функции $R(n,\, l;\; r)=R_{n,l}(r)$ для некоторых значений индексов.

$$R_{2,0}(r)=e^{-\frac{cr}{4}}\left(r-\frac{4}{c}\right),\quad R_{2,1}(r)=e^{-\frac{cr}{4}}r,\; R_{3,0}(r)=e^{-\frac{cr}{6}}\left(r^2-\frac{18}{c}r+\frac{54}{c^2}\right),$$

$$R_{4,0} = e^{-\frac{cr}{8}}\left(r^3-\frac{48}{c}r^2+\frac{576}{c^2}r-\frac{1536}{c^3}\right),$$

$$R_{5,0} = e^{-\frac{cr}{10}}\left(r^4-\frac{100}{c}r^3+\frac{3000}{c^2}r^2-\frac{30000}{c^3}r+\frac{75000}{c^4}\right),$$

$$R_{3,1} = e^{-\frac{cr}{6}}r\left(r-\frac{12}{c}\right),\quad R_{4,1} = e^{-\frac{cr}{8}}r\left(r^2-\frac{40}{c}r+\frac{320}{c^2}\right),$$

$$R_{5,1} = e^{-\frac{cr}{10}}r\left(r^3-\frac{90}{c}r^2+\frac{2250}{c^2}r-\frac{15000}{c^3}\right),$$

где

$$c = \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2}\;\; (Z=1,2,3,...).$$

Таким образом, волновые функции $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)$ будут иметь вид

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)=c_{n,l,m}R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi)=c_{n,l,m}R_{n,l}(r)L_{l,m}(\cos\theta)\cos m\varphi;\; m=-l,...,l;$$

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)=c_{n,l,m}R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi)=c_{n,l,m}R_{n,l}(r)L_{l,m}(\cos\theta)\sin m\varphi;\ m=-l,...,l;$$

где $L_{l,m}$ – присоединенные функции Лежандра, m – магнитное квантовое число, $c_{n,l,m}$ – постоянные, определяемые нормировкой соответствующих функций.

Остановимся на связи найденных нами радиальных функций $R_{n,l}(r)$ и многочленов Чебышева–Лагерра.

Напомним определение и основные свойства многочленов Чебышева – Лагерра. Пусть на положительной части действительной оси задана весовая функция

$$h(x)=x^{\alpha}e^{-x}, \quad x\in(0,\infty),\ \alpha>-1. \tag{34}$$

В силу формулы Лейбница о дифференцировании произведения двух функций справедливо равенство

$$\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^{\alpha+n}\right)^{(n-k)}\left(e^{-x}\right)^{(k)}. \tag{35}$$

В правой части равенства (35) каждое слагаемое содержит выражения вида $x^{\alpha+s}e^{-x}$ при целом неотрицательном s. Следовательно, функция

$$L_n(x;\alpha)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n)} \tag{36}$$

есть многочлен степени n. Этот многочлен называется *стандартизованным многочленом Чебышева–Лагерра*, а формула (36) – *формулой Родрига*. Наивысшая степень x в правой части равенства (35) имеется в том слагаемом, у которого $k=n$. Следовательно, старший коэффициент многочлена (36) равен $(-1)^n\frac{1}{n!}$, т.е. имеем

$$L_n(x;\alpha)=(-1)^n\frac{1}{n!}x^n+... \tag{37}$$

Из формул (35) и (36) находим

$$L_0(x;\alpha)=1,\quad L_1(x;\alpha)=(\alpha+1)-x, \tag{38.1}$$

$$L_2(x;\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)-(\alpha+2)x+\frac{1}{2}x^2, \tag{38.2}$$

$$L_3(x;\alpha)=\frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)-\frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)x+\frac{1}{2}(\alpha+3)x^2-\frac{1}{6}x^3, \tag{38.3}$$

$$L_4(x;\alpha)=\frac{1}{24}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)-\frac{1}{6}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)x+$$
$$+\frac{1}{4}(\alpha+4)(\alpha+3)x^2-\frac{1}{6}(\alpha+4)x^3+\frac{1}{24}x^4. \tag{38.4}$$

Докажем, что многочлены $\{L_n(x;\alpha)\}$ ортогональны с весом (34) на интервале $(0,\infty)$. Для этого рассмотрим интеграл

$$I_{m,n}=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_m(x;\alpha)L_n(x;\alpha)dx. \qquad (39)$$

Применяя формулу (36) и интегрируя по частям, находим

$$I_{m,n}=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_m(x;\alpha)\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n)}dx=$$

$$=\frac{1}{n!}L_m(x;\alpha)\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n-1)}\Big|_0^\infty-\frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m{}'(x;\alpha)\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n-1)}dx.$$

Ввиду наличия экспоненциального множителя и условия $\alpha>-1$ внеинтегральные члены равны нулю. Продолжая интегрирование по частям, получаем

$$I_{m,n}=-\frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m{}'(x;\alpha)\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n-1)}dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m{}''(x;\alpha)\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n-2)}dx=...$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty L_m^{(n)}(x;\alpha)x^{\alpha+n}e^{-x}dx. \qquad (40)$$

Если $m<n$, то $L_m^{(n)}(x;\alpha)\equiv 0$. Поэтому из (40), учитывая (39), находим равенство

$$I_{m,n}=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_m(x;\alpha)L_n(x;\alpha)dx=0, \quad m<n. \qquad (41)$$

Этим ортогональность стандартизованных многочленов Чебышева – Лагерра доказана.

Вычислим норму многочлена $L_n(x;\alpha)$. Учитывая (40), (37) и (30), имеем

$$I_{n,n}=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_n(x;\alpha)L_n(x;\alpha)dx=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty L_n^{(n)}(x;\alpha)x^\alpha e^{-x}dx=$$

$$=\frac{(-1)^n(-1)^n}{n!}\int_0^\infty x^{\alpha+n}e^{-x}dx=\frac{1}{n!}\Gamma(\alpha+n+1). \qquad (42)$$

В последнем равенстве $\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx\ (\operatorname{Re}z>0)$ – гамма-функция Эйлера

Гамма-функция Эйлера (эйлеров интеграл второго рода) – одна из важнейших трансцендентных функций математического анализа, распространяющая понятие факториала $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ на случай комплексных значений z. Если n – целое положительное число, то $\Gamma(n)=(n-1)!$. Название «гамма-функция» и обозначение $\Gamma(z)$ предложил А. Лежандр (1814).

Таким образом, если, например, $\alpha=2l+1$, то

$$I_{j,j}=\int_0^\infty x^{2l+1}e^{-x}L_j(x;2l+1)L_j(x;2l+1)dx=\frac{(2l+j+1)!}{j!}. \qquad (43)$$

Приведем без доказательства формулу дифференцирования многочленов Чебышева–Лагерра ([10], с. 229)

$$L_k'(x;\ \alpha) = -L_{k-1}(x;\ \alpha+1),$$

из которой сразу же получаем тождество

$$L_k^{(j)}(x; \alpha) = (-1)^j L_{k-j}(x; \alpha+j) \ \ (j=1,2,...,k). \tag{44}$$

Теперь вернемся к формуле, связывающей радиальные функции $R_{n,l}(r)$ и многочлены Чебышева–Лагерра. Так как

$$R_{n,l} = e^{-a(n)r} r^l Q_{n,l}(r),$$

то, подставляя в тождество

$$r^2 P_{n,l}''(r) + 2\left(r - ar^2\right) P_{n,l}'(r) + \left[\,(2an-2a)r - l(l+1)\right] P_{n,l}(r) \equiv 0$$

выражения

$$P_{n,l}(r) = r^l Q_{n,l}(r),\ P_{n,l}'(r) = lr^{l-1} Q_{n,l}(r) + r^l Q_{n,l}'(r),$$
$$P_{n,l}''(r) = l(l-1) r^{l-2} Q_{n,l}(r) + 2lr^{l-1} Q_{n,l}'(r) + r^l Q_{n,l}''(r),$$

получаем, что справедливо тождество

$$rQ_{n,l}''(r) + 2(l+1-ar) Q_{n,l}'(r) + 2a(n-l-1) Q_{n,l}(r) \equiv 0, \tag{45}$$

в котором $a = \dfrac{c}{2n}$, $c = \dfrac{2\mu Z e^2}{\hbar^2}$ $(Z=1,2,3,...)$. С другой стороны многочлены Чебышева–Лагерра $L_{n-l-1}(x; \alpha)$ удовлетворяют уравнению

$$xy'' + (\alpha+1-x) y' + (n-l-1) y = 0. \tag{46}$$

При $\alpha = 2l+1$ мы получаем тождество

$$xL_{n-l-1}''(x; 2l+1) + (2l+2-x) L_{n-l-1}'(x; 2l+1) + (n-l-1) L_{n-l-1}(x; 2l+1) \equiv 0. \tag{47}$$

Подставляя в тождество (47) $x = 2ar$, получаем

$$2arL_{n-l-1}''(x; 2l+1) + (2l+2-2ar) L_{n-l-1}'(x; 2l+1) + (n-l-1) L_{n-l-1}(x; 2l+1) \equiv 0. \tag{48}$$

Положив

$$L_{n-l-1}(2ar; 2l+1) = Q(r),$$

получаем, что

$$Q'(r) = L_{n-l-1}(x; 2l+1)_x'\big|_{x=2ar} \cdot 2a;\ Q''(r) = L_{n-l-1}(x; 2l+1)_{xx}''\big|_{x=2ar} \cdot (2a)^2,$$

т.е.

$$\frac{2ar}{4a^2} Q''(r) + \frac{(2l+2-2ar)}{2a} Q'(r) + (n-l-1) Q(r) \equiv 0,$$

а значит

$$rQ''(r) + (2l+2-2ar) Q'(r) + (n-l-1) Q(r) \equiv 0,$$

т.е. многочлен удовлетворяет тому же уравнению (45), что и $Q_{n,l}(r)$.

Так как

$$L_{n-l-1}(2ar; 2l+1) = \frac{(-1)^{n-l-1}}{(n-l-1)!} (2a)^{n-l-1} r^{n-l-1} + ...,$$

то

$$Q_{n,l}(r)=\frac{(-1)^{n-l-1}(n-l-1)!}{(2a)^{n-l-1}}L_{n-l-1}(2ar;\,2l+1). \qquad (49)$$

Кроме того, последнему равенству можно дать и непосредственное доказательство, применяя рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов многочленов Чебышева–Лагерра.

Действительно, будем искать решение уравнения

$$xy''+(\alpha+1-x)y'+ky=0 \;\; (k=n-l-1) \qquad (50)$$

при $\alpha=2l+1$ в виде

$$y=\sum_{j=0}^{k}b_j(n,l)x^j, \qquad (51)$$

тогда

$$y'=\sum_{j=0}^{k}jb_j(n,l)x^{j-1}, \quad y''=\sum_{j=0}^{k}j(j-1)b_j(n,l)x^{j-2}. \qquad (52)$$

Подставляя равенства (51) и (52) в уравнение (50), получаем

$$\sum_{j=0}^{k}j(j-1)b_j(n,l)x^{j-1}+2(l+1)\sum_{j=0}^{k}jb_j(n,l)x^{j-1}-\sum_{j=0}^{k}jb_j(n,l)x^j+\sum_{j=0}^{k}kb_j(n,l)x^j\equiv 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при x^j, получаем

$$b_{j-1}(n,l)=-\frac{j(j+2l+1)}{n-l-j}b_j(n,l) \;\; (j=1,2,...,\,n-l-1). \qquad (53)$$

При этом коэффициент $b_{n-l-1}(n,\,l)$ можно считать произвольным. Равенство (53) дает удобный способ нахождения коэффициентов многочленов Чебышева–Лагерра $L_{n-l-1}(x;\,2l+1)$. Таким образом,

$$\frac{b_{j-1}(k,l)}{b_j(k,l)}=-\frac{j(j+2l+1)}{k+j-1}. \qquad (54)$$

При подстановке $x=2ar$ коэффициенты многочлена $L_{n-l-1}(2ar;\,2l+1)$ изменятся: $b_j(k,l)(2a)^j=b_j(k,l;\,2ar)$. Но тогда

$$\frac{b_{j-1}(k,l;\,2ar)}{b_j(k,l;\,2ar)}=\frac{1}{2a}\frac{b_{j-1}(k,l)}{b_j(k,l)}=-\frac{1}{2a}\frac{j(j+2l+1)}{k+1-j}. \qquad (55)$$

Аналогичным образом получаем, что коэффициенты многочлена $Q_{n,l}(r)$связаны равенством (55). Последний факт означает справедливость равенства (49).

Далее пронормируем волновые функции

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)=c_{n,l,m}R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi); \quad m=-l,...,l;$$

так, чтобы выполнялось равенство

$$c_{n,l,m}^2\int_0^{\infty}r^2R_{n,l}^2(r)dr\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{l,m}^2(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=1.$$

Тогда математическое ожидание радиуса орбиты $\left\langle r(n,l,m)\right\rangle$ выразится равенством

$$\left\langle r(n,l,m)\right\rangle = c_{n,l,m}^2\int_0^\infty r^{2+1}R_{n,l}^2(r)\,dr\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l,m}^2(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \;=\frac{\int_0^\infty r^3 R_{n,l}^2(r)\,dr}{\int_0^\infty r^2 R_{n,l}^2(r)\,dr}. \qquad (56)$$

Приведем выражение (56) к более удобному виду

$$\frac{\int_0^\infty r^3 R_{n,l}^2(r)\,dr}{\int_0^\infty r^2 R_{n,l}^2(r)\,dr} = \frac{\int_0^\infty e^{-2a(n)r} r^{2l+3} Q_{n,l}^2(r)\,dr}{\int_0^\infty e^{-2a(n)r} r^{2l+2} Q_{n,l}^2(r)\,dr} = \frac{\int_0^\infty e^{-2a(n)r} r^{2l+3} L_{n-l-1}^2(2ar;2l+1)\,dr}{\int_0^\infty e^{-2a(n)r} r^{2l+2} L_{n-l-1}^2(2ar;2l+1)\,dr}. \qquad (57)$$

Вычислим интегралы, расположенные в правой части равенства (57). Сделав подстановку $x=2ar,$ получаем

$$\int_0^\infty e^{-2ar} r^{2l+2} L_k^2(2ar;2l+1)\,dr = \frac{1}{(2a)^{2l+3}}\int_0^\infty e^{-x} x^{2l+2} L_k^2(x;2l+1)\,dx. \qquad (58)$$

Таким образом, задача свелась к вычислению интеграла (58).

***Лемма* 4**. *Справедливо равенство*

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_k(x;\alpha) f(x)\,dx = (-1)^k \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+k} f^{(k)}(x)\,dx. \qquad (59)$$

Доказательство. Действительно,

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_k(x;\alpha) f(x)\,dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} x^{-\alpha} e^{x}\left[\frac{d^k\left(x^{\alpha+k}e^{-x}\right)}{dx^k}\right] f(x)\,dx =$$

$$=\int_0^\infty \left[\frac{d^k\left(x^{\alpha+k}e^{-x}\right)}{dx^k}\right] f(x)\,dx = f(x)\frac{d^{k-1}\left(x^{\alpha+k}e^{-x}\right)}{dx^{k-1}}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \left[\frac{d^{k-1}\left(x^{\alpha+k}e^{-x}\right)}{dx^{k-1}}\right] f^{(1)}(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^\infty \left[\frac{d^{k-1}\left(x^{\alpha+k}e^{-x}\right)}{dx^{k-1}}\right] f^{(1)}(x)\,dx = \ldots = (-1)^k \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+k} f^{(k)}(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Далее вычислим при помощи равенства (53) три старших коэффициента многочлена $L_k(x;2l+1)$. Полагая $b_k = \frac{(-1)^k}{k!}$, с учетом того, что $n=k+l+1$, получаем

$$b_{k-1} = -\frac{k(k+2l+1)}{n-l-k}\cdot b_k = -\frac{(-1)^k k(k+2l+1)}{k!}. \qquad (60)$$

Аналогично

$$b_{k-2} = -\frac{(k-1)(k-1+2l+1)}{n-l-k+1} b_{k-1} = \frac{(-1)^k (k-1)(k+2l)k(k+2l+1)}{2k!}. \qquad (61)$$

Таким образом,

$$xL_k(x;\,2l+1)=\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+1}-\frac{(-1)^k k(k+2l+1)}{k!}x^k+$$

$$+\frac{(-1)^k(k-1)(k+2l)k(k+2l+1)}{2k!}x^{k-1}+\ldots. \tag{62}$$

Положив в равенстве (59) $f(x)=xL_k(x;\,2l+1)$ и применяя равенство (62), получаем последовательно:

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_k(x;\alpha)\left[\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+1}\right]dx=(-1)^k\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+k}\frac{(-1)^k}{k!}(k+1)!\,xdx=$$

$$=(k+1)\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+1+k+1}dx=(k+1)(2l+k+2)!; \tag{63}$$

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_k(x;\alpha)\left[\frac{(-1)^k k(k+2l+1)}{k!}x^k\right]dx=$$

$$=(-1)^k\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+1+k}(-1)^k k(k+2l+1)dx=k(k+2l+1)(k+2l+1)!. \tag{64}$$

Окончательно

$$\int_0^\infty x^{2l+2}e^{-x}L_k^2(x;\,2l+1)dx=(k+1)(2l+k+2)!-k(k+2l+1)(k+2l+1)!=$$

$$=(k+2l+1)!\left[(k+1)(k+2l+2)-k(k+2l+1)\right]=$$

$$=(k+2l+1)!\left[k(2l+1)+k^2+2l+1+k+1-k^2-2lk-k\right]=$$

$$=(k+2l+1)!(2l+2k+2)=2n(l+n)!.$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-2ar}r^{2l+2}L_k^2(2ar;2l+1)dr=\frac{1}{(2a)^{2l+3}}\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+2}L_k^2(x;2l+1)dx=\frac{2n(l+n)!}{(2a)^{2l+3}}. \tag{65}$$

Теперь проведем вычисление интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+3}L_k^2(x;2l+1)dx.$$

Из равенства (62) следует, что

$$x^2L_k(x;\,2l+1)=\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+2}-\frac{(-1)^k k(k+2l+1)}{k!}x^{k+1}+$$

$$+\frac{(-1)^k(k-1)(k+2l)k(k+2l+1)}{2k!}x^k+\ldots. \tag{66}$$

Далее получаем последовательно:

$$\int_0^\infty x^{2l+1}e^{-x}L_k(x;\,2l+1)\left[\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+2}\right]dx=$$

$$=(-1)^k\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+1+k}\left[\frac{(-1)^k(k+2)(k+1)...(3)}{k!}x^2\right]dx=\frac{(k+2)(k+1)}{2}(2l+k+3)!.\quad(67)$$

Соответствующий интеграл от второго слагаемого правой части равенства (66) будет иметь вид

$$\int_0^\infty x^{2l+1}e^{-x}L_k(x;\,2l+1)\left[\frac{(-1)^k k(k+2l+1)}{k!}x^{k+1}\right]dx=$$

$$=(-1)^k\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+1+k}\left[(-1)^k k(k+1)(k+2l+1)x\right]dx=$$

$$=k(k+1)(k+2l+1)(k+2l+2)!.\quad(68)$$

Аналогично поступаем по отношению к третьему слагаемому

$$\int_0^\infty x^{2l+1}e^{-x}L_k(x;\,2l+1)\left[\frac{(-1)^k(k-1)(k+2l)k(k+2l+1)}{2k!}x^k\right]dx=$$

$$=(-1)^k\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+k+1}\left[\frac{(-1)^k}{2}(k-1)k(k+2l)(k+2l+1)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}(k-1)k(k+2l)(k+2l+1)(k+2l+1)!.\quad(69)$$

Сложив выражения (67) – (69) ((68) со знаком «минус»), получаем

$$\frac{(k+2)(k+1)}{2}(2l+k+3)!-k(k+1)(k+2l+1)(k+2l+2)!+$$

$$+\frac{1}{2}(k-1)k(k+2l)(k+2l+1)(k+2l+1)!=$$

$$=(k+2l+1)!\left[\frac{1}{2}(k+2)(k+1)(k+2l+2)(k+2l+3)-\frac{1}{2}k(k+1)(k+2l+1)(k+2l+2)\right]+$$

$$+(k+2l+1)!\left[\frac{1}{2}(k-1)(k)(k+2l)(k+2l+1)-\frac{1}{2}k(k+1)(k+2l+1)(k+2l+2)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(k+2l+1)!(k+1)(k+2l+2)\left[(k+2)(k+2l+3)-k(k+2l+1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(k+2l+1)!(k)(k+2l+1)\left[(k-1)(k+2l)-(k+1)(k+2l+2)\right]=$$

$$=(k+2l+1)!\left[(k+1)(k+2l+2)(2k+2l+3)-k(k+2l+1)(2k+2l+1)\right]=$$

$$=(k+2l+1)!\left(12kl+6k^2+12k+4l^2+10l+6\right)=(n+l)!\left(6n^2-2l^2-2l\right).$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-2ar}r^{2l+3}L_k^2(2ar;2l+1)dr=\frac{1}{(2a)^{2l+4}}\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+2}L_k^2(x;2l+1)dx=\frac{(l+n)!\left(6n^2-2l^2-2l\right)}{(2a)^{2l+4}}$$

(70)

Применяя (57), получаем

$$\frac{\int_0^{\infty} e^{-2a(n)r} r^{2l+3} L_{n-l-1}^2 (2ar; 2l+1)\, dr}{\int_0^{\infty} e^{-2a(n)r} r^{2l+2} L_{n-l-1}^2 (2ar; 2l+1)\, dr} = \frac{(2a)^{2l+3}(n+l)!\left(6n^2-2l^2-2l\right)}{(2a)^{2l+4}(n+l)!2n} =$$

$$= \frac{1}{2an}\left[3n^2 - l(l+1)\right] = \left[3n^2 - l(l+1)\right]\frac{\hbar^2}{2Z\mu e^2}. \qquad (71)$$

Из равенства (71) следует, что математическое ожидание радиуса орбиты не зависит от квантового числа m, т.е.

$$\langle r(n,l,m)\rangle = \langle r(n,l)\rangle = \left[3n^2 - l(l+1)\right]\frac{\hbar^2}{2Z\mu e^2}. \qquad (72)$$

Задание для самостоятельной работы

Найти квадратичный полином, минимизирующий интеграл

$$\int_a^b \left(x^3 - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\right)^2 dx.$$

Найти корни полинома

$$x^3 - a_0 - a_1 x - a_2 x^2.$$

Номера вариантов.

1. $a=2,\ b=5;$	6. $a=6, b=9;$	
2. $a=3,\ b=7;$	7. $a=5,\ b=10;$	11. $a=0, b=6;$
3. $a=-2,\ b=1;$	8. $a=8,\ b=11;$	12. $a=11,\ b=17;$
4. $a=-3,\ b=2;$	9. $a=-3,\ b=7;$	13. $a=12,\ b=14.$
5. $a=5,\ b=7;$	10. $a=-4, b=3;$	

Более подробно о роли и значении полиномов Чебышева можно узнать в монографиях [2], [5], [7],[10], а также в статье [14]. Теория метрических пространств изложена в книгах [1], [3],[4],[6],[7], вопросы обращения принципа сжимающих отображений рассмотрены в статье [8], а обобщение понятия метрического пространства имеется в работе [12]. Приложения принципа сжимающих отображений к изучению поведения решений дифференциальных уравнений с монотонными нелинейностями имеются в монографии [11]. Полиномы Лежандра рассмотрены в монографии [10].

Вопросы для самопроверки

1. Какая задача решалась при помощи полиномов Лежандра?
2. Приведите примеры полиномов Лежандра второй и третьей степени.
3. Какие приложения находят полиномы Лежандра в математической физике?
4. Как определяются присоединённые функции Лежандра?

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.

2. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 511 с.

3. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

4. Коллатц, Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М.: Мир, 1969. – 447 с.

5. Коллатц, Л., Теория приближений / Л. Коллатц, В. Крабс. − М.: Наука, 1978. – 271 с.

6. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа /А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1981. – 543 с.

7. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1969. − 456 с.

8. Опойцев, В.И. Обращение принципа сжимающих отображений / В.И. Опойцев // Успехи мат. наук. − 1976. − Т. XXXI, вып. 4(190). − С. 169–198.

9. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви–Надь. – М.: Мир, 1979. – 602 с.

10. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. – М.: Наука, 1979. – 415 с.

11. Трубников, Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов. – Минск: Наука и техника, 1986. – 199 с.

12. Трубников, Ю.В. Обобщенные метрические пространства / Ю.В. Трубников // Веснiк Вiцеб. дзярж. ун-та. – 2000. – № 1. – С. 83–89.

13. Трубников, Ю.В. О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области / Ю.В. Трубников // Таврический вестник информатики и математики. − 2003. − № 2. − С. 5–13.

14. Трубников, Ю.В. Об одном методе нахождения чебышевских итерационных параметров / Ю.В. Трубников // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. – 1999. – № 4. – С. 5–9.

15. Собельман, И. Введение в теорию атомных спектров / И. Собельман. – М. : Наука, 1977. – 320 с.

Учебное издание

ТРУБНИКОВ Юрий Валентинович

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич

ЧЕРНЯВСКИЙ Михаил Михайлович

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Курс лекций

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.В. Рудницкая*

Подписано в печать 2022. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 1,50. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.