НАЧАЛА ЕВКЛИДА.

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

СЪ ПОЯСНИТЕЛЬНЫМЪ ВВЕДЕНІЕМЪ

И

ТОЛКОВАНІЯМИ.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω
μοῦ τὴν στέγην.

Platon.

Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владиміра

М. Е. Ващенко-Захарченко.

КІЕВЪ.

Въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра.

1880.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра.

Ректоръ *Н. Х. Бунге.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Les grands génies ont leur empire; ils sont vus, non des yeux, mais des esprits; c'est assez.

Pascal.

Нельзя было не обратить вниманія на усилія геометровъ послѣдняго времени разъяснить начала Геометріи и критически разобрать „Начала" Евклида. Такимъ образомъ создалась громадная математическая литература въ этомъ направленіи. Французскіе, германскіе, итальянскіе, англійскіе, русскіе и американскіе геометры принесли дань направленію времени. Философы съ своей стороны принимали горячее участіе въ этой дѣятельности, такъ какъ происхожденіе началъ Геометріи, и вообще всѣхъ понятій, есть одна изъ важныхъ задачъ философіи.

Результатомъ такой усиленной дѣятельности было ближайшее разъясненіе значенія началъ Геометріи, полное признаніе превосходства „Началъ" Евклида и стараніе ввести ихъ какъ руководство въ школахъ. Гуель во Франціи, Бальцеръ въ Германіи, Бріоски и Бетти въ Италіи стараются провести эту мысль и издали руководства для этой цѣли. Въ Англіи „Начала" Евклида всегда были школьнымъ руководствомъ по Геометріи. Такое введеніе важно не вслѣдствіе одного превосходства „Началъ" Евклида, но и въ педагогическомъ отношеніи. Преподаваніе математики въ гимназіяхъ имѣетъ двоякую цѣль: во первыхъ, правильное развитіе способовъ мышленія—это цѣль педагогическая, одинаковая для всѣхъ, она есть предметъ общаго образованія; во вторыхъ—положить твердыя начала математики для дальнѣйшаго изученія ея какъ науки во всѣхъ ея отрасляхъ.

Въ педагогическомъ отношенiи Геометрiя имѣетъ преимущество передъ Алгеброй; Алгебра относительно Геометрiи тоже, что письмо относительно литературы. Алгебра есть символическое письмо, съ помощью котораго выражается количественная зависимость между величинами, слѣдовательно наука скорѣе механическая, нежели мыслительная. Геометрiя-же есть наука постояннаго мышленiя, часто съ усиленной дѣятельностью воображенiя. Вслѣдствiе этого преподаватель долженъ, алгебраическiя тождества, для уясненiя и удержанiя въ памяти, сопровождать *всегда* геометрическими представленiями и поясненiями,— что принесетъ несомнѣнную пользу.

Введенiе опредѣленнаго руководства по Геометрiи и вообще по всѣмъ предметамъ, имѣетъ весьма важное педагогическое значенiе: этимъ, во первыхъ, облегчается дѣятельность преподавателя, часто неопытнаго и не на столько знакомаго съ дѣломъ, чтобы правильно употребить въ дѣло первое попавшееся подъ руку руководство, а во вторыхъ, этимъ достигается однообразiе подготовки. Безъ сомнѣнiя введенiе одного опредѣленнаго руководства во всѣ школы есть дѣло весьма трудное, но этому можно помочь толковой программой, въ которой было-бы подробно указано, что и какъ?

Въ продолженiи десяти лѣтъ, я былъ преподавателемъ элементарной математики въ Кiевскомъ кадетскомъ корпусѣ (нынѣ Военная гимназiя), слѣдовательно имѣлъ достаточно времени, чтобы выработать мнѣнiе, имѣющее извѣстное значенiе. Кромѣ этого я часто бывалъ экзаменаторомъ при поступленiи воспитанниковъ гимназiй въ университетъ и депутатомъ отъ Округа въ различныхъ гимназiяхъ и реальныхъ училищахъ. Изъ такой долгой практики я вынесъ твердое убѣжденiе, что ничто не влiяетъ такъ вредно на правильное математическое развитiе воспитанниковъ, какъ большое разнообразiе руководствъ, отъ чего происходитъ не знанiе Геометрiи, какъ строгой логической системы, а знанiе какой-то смѣси теоремъ, часто весьма бойкое, но безъ всякаго логическаго порядка.

Не въ знанiи большаго числа теоремъ, не въ быстромъ рѣшенiи геометрическихъ задачъ, а въ пониманiи строго-логической послѣдовательности самыхъ необходимыхъ теоремъ, заключается вся важность педагогическаго значенiя Геометрiи въ общемъ образованiи юношества.

Преподаванiе Геометрiи должно быть такъ ведено, чтобы воспитанникъ сознавалъ, что такая-то теорема не можетъ быть доказана прежде такой-то, а если и можетъ, то почему поставлена въ такомъ-то мѣстѣ? Такимъ образомъ, при преподаваніи, въ геометрическую систему войдетъ небольшое число самыхъ необходимыхъ теоремъ, остальныя-же, относящіяся къ извѣстному отдѣлу, должны войти въ видѣ упражненій въ классѣ или внѣ класса. При такомъ способѣ изложенія Геометріи, преподаватель будетъ въ состояніи настоять на томъ, чтобы воспитанники не только твердо знали теоремы курса, но и помнили бы ихъ порядокъ.

Тщательное вниманіе должно быть обращено на *аксіомы*, *опредѣленія* и *допущенія* и выяснены, постепенно, ихъ смыслъ и значеніе. Эта часть у насъ почти ускользаетъ отъ вниманія воспитанниковъ.

Далѣе необходимо выяснить:

1) Что такое теорема и проблема? какая между ними разница? изъ какихъ частей состоитъ теорема? что такое обратная теорема? всегда-ли она возможна? примѣры случаевъ возможности и невозможности.

2) Что такое доказательство? какія бываютъ роды доказательствъ? постоянное выясненіе *синтеза*, *анализа* и *приведенія къ нелѣпости* или *апагогическаго способа*. Для такого выясненія преподаватель долженъ пользоваться теоремами наиболѣе къ тому удобными.

На эти пункты должно быть сосредоточено особенно вниманіе преподавателя въ продолженіи всего курса—они составляютъ логическую основу Геометріи и всей вообще математики. Ни въ какой наукѣ не могутъ быть такъ осязательно выяснены три метода доказательствъ, упомянутые выше, какъ въ Геометріи.

Я часто встрѣчалъ на экзаменахъ воспитанниковъ, прекрасно доказывающихъ теоремы, но которые смутно понимали значеніе аксіомъ и не имѣли никакого понятія о допущеніи (postulatum) Евклида, на которомъ основана вся геометрическая система. Это происходитъ отъ того, что болѣе обращается вниманія на умѣніе доказывать теоремы, нежели на содержаніе доказательства и на логическое теченіе теоремъ. Требовать вполнѣ зрѣлаго знанія и пониманія Геометріи, какъ науки, отъ воспитанниковъ, только что окончившихъ гимназическій курсъ, не возможно; это знаніе должно быть таково, чтобы, при дальнѣйшемъ изученіи математики, могло созрѣть и обратиться въ отчетливое пониманіе геометрической системы. Такая зрѣлость приходитъ постепенно, поэтому имѣло бы громадное значеніе, въ этомъ отношеніи, повтореніе

Геометріи въ педагогическомъ классѣ, не въ смыслѣ передѣлки теоремъ, какъ у насъ часто выражаются, а въ смыслѣ ихъ логической послѣдовательности и историческаго происхожденія. Ничто такъ не помогаетъ твердо удерживать въ памяти извѣстныя истины, какъ исторія ихъ происхожденія. Геометрія, освѣщенная историческими данными, дѣлается живѣе и занимательнѣе. Къ сожалѣнію это у насъ вовсе не практикуется, и едва нѣкоторые изъ воспитанниковъ знаютъ имя Архимеда. Скажу болѣе: громадное значеніе и несомнѣнную пользу имѣло бы открытіе въ университетахъ каѳедры „исторіи математическихъ наукъ“, цѣлью которой были-бы изложеніе исторіи развитія математическихъ наукъ у всѣхъ народовъ, съ указаніемъ характера каждой націи въ этомъ отношеніи, и критическій разборъ всѣхъ методовъ изслѣдованій отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго.

Въ этомъ отношеніи классики послѣдовательнѣе геометровъ: у нихъ тщательно анализируется каждая фраза, въ извѣстномъ сочиненіи, разбирается почему употреблена такая-то форма, а не другая, для выраженія извѣстной мысли и т. д.

Воспитанникъ, окончившій гимназическій курсъ поступаетъ въ университетъ не съ логическимъ отчетливымъ знаніемъ Геометріи, а съ механическимъ, т. е. знаетъ, какъ говорятъ, передѣлать теоремы. Онъ знаетъ, напримѣръ, что сумма внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ, но эта истина остается для него отдѣльнымъ фактомъ, при которомъ не является цѣлая картина предъидущихъ неразрывныхъ истинъ. Онъ даже не знаетъ, что эта истина и постулатъ Евклида одно и то-же.

Таковы были мотивы, побудившіе меня предпринять предлагаемый обширный трудъ и присоединить къ нему „Краткій историческій очеркъ развитія Геометріи“ отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго времени.

Какое изъ сочиненій имѣло столько изданій? По какому сочиненію училось столько людей? Какое сочиненіе образовало столько знаменитыхъ геометровъ, каковы: Декартъ, Ньютонъ, Лейбницъ, Эйлеръ, Лагранжъ и многіе другіе. Наконецъ, какое сочиненіе выдержало серьезную критику своихъ учениковъ, глубоко изучившихъ его, и все таки вышло побѣдителемъ? По „Началамъ“ Евклида учились: Дантъ, Петрарка, Тассо, Микель-Анджело, Леонардо-да-Винчи, Бокаччіо и др. знаменитые писатели. „Начала“ Евклида принадлежатъ къ числу тѣхъ замѣчательныхъ твореній древняго міра, которыя всегда останутся образцами въ своемъ родѣ, которымъ тѣмъ больше удивляешься, чѣмъ болѣе ихъ читаешь, и которыя обыкновенно приписываются не одному лицу. Если съ перваго раза, нѣкоторыя части его и кажутся утомительными, то это происходитъ вслѣдствіе того отличительнаго характера новыхъ методовъ изслѣдованій, къ которымъ мы привыкли; но по мѣрѣ того, какъ мы углубляемся въ изученіе этого замѣчательнаго сочиненія, такое впечатлѣніе исчезаетъ, а является сознаніе необыкновенной строгости доказательствъ и логической послѣдовательности въ порядкѣ истинъ. Такое, напримѣръ, впечатлѣніе производитъ съ перваго раза десятая книга „Началъ", но вмѣстѣ съ этимъ ни одна изъ книгъ не поражаетъ насъ такою глубиною изслѣдованій. Таковъ характеръ настоящаго сочиненія. Преподаватель найдетъ въ немъ неизчерпаемый источникъ матеріала для своихъ лекцій, которымъ онъ долженъ только съ умѣніемъ пользоваться. Новые геометры, Ньютонъ и другіе, были такъ поражены глубокимъ синтезомъ древнихъ математиковъ, что свои открытія, сдѣланныя съ помощью новаго анализа, передѣлывали на древній синтезъ.

Чтобы выяснить значеніе *опредѣленій*, *аксіомъ* и *допущеній*, я, во Введеніи изложилъ изслѣдованія Лежандра, относительно суммы угловъ въ треугольникѣ, связь этой теоремы съ *допущеніемъ* Евклида и *систему Лобачевскаго*, носящую названіе *Неевклидовской Геометріи*, въ которой допущеніе Евклида измѣнено въ извѣстномъ смыслѣ. Изученіе такой системы бросаетъ яркій свѣтъ на начала Геометріи и даетъ болѣе правильный взглядъ на *допущеніе*, которое было предметомъ многихъ недоразумѣній, споровъ и изслѣдованій.

За Введеніемъ слѣдуетъ переводъ „Началъ" Евклида съ замѣчаніями и дополненіями. Замѣчанія относятся къ теоремамъ и касаются вопросовъ о ихъ мѣстѣ и способахъ доказательствъ. Въ дополненіяхъ изложены тѣ части, которыхъ недостаетъ въ „Началахъ". Въ концѣ сочиненія приложены задачи къ каждой книгѣ, съ указаніемъ, какія именно теоремы каждой книги должны быть взяты въ соображеніе при рѣшеніи указанныхъ задачъ.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о каждой книгѣ, о примѣчаніяхъ и дополненіяхъ.

„Начала" Евклида состоятъ изъ 15-ти книгъ, двѣ послѣднія приписываютъ Гипсиклу. Изъ тринадцати остальныхъ 5, 7, 8, 9 и 10-я составляютъ ариѳметику древнихъ, 5, 7, 8 и 9-я раціональную, а 10-я ирраціональную. Изъ ариѳметическихъ книгъ я перевелъ только 5-ю и 10-ю, которыя имѣютъ болѣе геометрическій характеръ, въ особенности 10-я. Остальныя же я нашелъ излишнимъ переводить.

Книга I. Книга первая состоитъ изъ 48-ми предложеній, которыя заключаютъ двѣ группы предложеній. Первую группу составляютъ 28 предложеній, вытекающихъ изъ количественныхъ аксіомъ и двухъ геометрическихъ—опредѣленія прямой и совмѣстимости частей плоскости какъ прямо, такъ и обратно. Эта группа теоремъ составляетъ основу Геометріи, онѣ размѣщены въ такомъ логическомъ порядкѣ, что, за исключеніемъ весьма ничтожныхъ перемѣщеній, другаго порядка имъ дать невозможно. Вторая группа теоремъ вытекаетъ изъ *допущенія* Евклида или его знаменитаго *постулата.* Эти теоремы составляютъ основу теоріи параллельныхъ линій и теоріи пропорціональности. Чтобы выяснить значеніе и смыслъ *допущенія* Евклида преподаватель, послѣ 28-го предложенія, долженъ изложить первыя шесть предложеній Введенія и отчетливо показать связь между *допущеніемъ* Евклида и суммою внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ. Изложеніе этой связи можетъ быть сдѣлано только въ педагогическомъ классѣ или въ послѣднемъ, при повтореніи, такъ какъ такое изложеніе для начинающихъ невозможно. Изъ теоріи параллельныхъ линій вытекаетъ группа теоремъ отъ 35-й до 48-й, относящихся къ преобразованію одной фигуры въ другую. Эта книга заканчивается знаменитой теоремой Пиѳагора, доказанной на основаніи преобразованія фигуръ.

Книга II. Вторая книга составлена изъ предложеній, представляющихъ геометрически алгебраическія тождества, вытекающія изъ трехъ основныхъ законовъ количествъ:

1) Закона *перестановительнаго*, выраженнаго двумя тождествами:

$$a+b=b+a \qquad ab=ba$$

изъ которыхъ, первое выражаетъ сложеніе линій, а второе построеніе прямоугольника, коего стороны суть a и b (см. примѣч. 1, кн. 2).

2) Закона *распредѣлительнаго*, выраженнаго тождествомъ (кн. 2, пред. 1)

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

3) Закона *повторительнаго*, выраженнаго тождествомъ

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

въ Планиметріи это тождество только втораго измѣренія, т. е. $a.a=a^2$, а въ Стереометріи третьяго, т. е. $a.a.a=a^2a=a^3$.

Предложенія 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10-е суть алгебраическія тождества, которыя написаны въ концѣ книги въ примѣчаніи 5. Съ помощью предложеній 4, 5, 6 и 7-го можно рѣшить геометрически уравненія второй степени формы

$$x^2 \pm px = q^2 \text{ и } px - x^2 = q^2$$

а какимъ образомъ будетъ показано въ „Историческомъ очеркѣ".

Предложеніе 11-е было названо древними *золотымъ дѣленіемъ* прямой.

Большая часть предложеній этой книги исчезла изъ нашихъ руководствъ, между тѣмъ какъ эти предложенія весьма важны для конкретнаго представленія алгебраическихъ тождествъ и для проведенія параллели между алгебраическими преобразованіями и геометрическими построеніями. Вторая книга есть Алгебра древнихъ: съ помощью изложенныхъ въ ней предложеній, древніе геометры дѣлали геометрическія преобразованія, соотвѣтствующія нашимъ алгебраическимъ. Въ педагогическомъ отношеніи эта книга имѣетъ большое значеніе: преподаватель долженъ воспользоваться ею для выясненія тѣсной связи между Алгеброй и Геометріей.

Книга III. Въ третьей книгѣ изложены всѣ основныя свойства круга, между этими предложеніями находятся 7 и 8-е, которыя должны служить къ объясненію, что такое *наибольшая*—maximum и *наименьшая*—minimum величины. Предложенія: 35, 36 и 37-е у насъ обыкновенно излагаются въ отдѣлѣ *подобія* фигуръ и *пропорціональности* линій, но изложеніе ихъ въ томъ смыслѣ, въ какомъ они изложены въ третьей книгѣ „Началъ", даетъ болѣе ясное конкретное представленіе.

Книга IV. Въ четвертой книгѣ излагаются предложенія: какъ вписать въ кругъ и какъ описать около него правильный треугольникъ, квадратъ, пятиугольникъ, шестиугольникъ и пятнадцатиугольникъ. Особенное вниманіе должно обратить на 10-е предложеніе, такъ какъ оно имѣетъ много слѣдствій, которыя указаны въ задачахъ, относящихся къ этой книгѣ.

Книга V,—это раціональная ариѳметика древнихъ. Такъ какъ нѣкоторыя опредѣленія этой книги были предметомъ многихъ споровъ, недоразумѣній и изслѣдованій, то я въ примѣчаніяхъ къ ней изложилъ нынѣшнее воззрѣніе на отношенія и пропорціи и показалъ, что пятое опредѣленіе Евклида, которое и было предметомъ недоразумѣній, тождественно съ нашимъ самымъ общимъ, относящимся къ несоизмѣримымъ величинамъ. Пятое опредѣленіе тѣмъ болѣе казалось непонятнымъ, что за нимъ слѣдуетъ шестое, въ которомъ опредѣляется пропорціональность весьма просто, но это опредѣленіе, по своему смыслу, относится только къ величинамъ соизмѣримымъ. Затѣмъ слѣдуетъ еще одно опредѣленіе пропорціональности—8-е. Эти три опредѣленія и сбивали геометровъ.

Я замѣтилъ, что эта часть у насъ въ школахъ весьма слаба, а потому я въ примѣчаніяхъ 3 и 5-мъ изложилъ все, что касается отношеній и пропорцій.

Книга VI. Въ шестой книгѣ изложены: отношеніе площадей фигуръ и всѣ теоремы пропорціональности и подобія. Въ этой книгѣ преподаватель долженъ обратить особенное вниманіе на тѣ предложенія, 8, 9, 10, 11, 12 и 13, которыя служатъ къ построенію алгебраическихъ выраженій, каковы:

$$\frac{ab}{c},\ \frac{a^2}{c},\ \frac{a^2bc}{efc},\ \frac{a^3}{bc},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{a^2 \pm b^2},\ \text{и т. д.}$$

Дóлжно обратить вниманіе на предложенія 24, 25, 26, 27 28 и 29, которыя изчезли изъ нашихъ руководствъ, но которыя весьма важны въ томъ отношеніи, что могутъ служить къ рѣшенію квадратныхъ уравненій. Предложеніе 30-е есть *золотое* дѣленіе прямой, которое было уже, только въ другой формѣ, дано во второй книгѣ.

Въ примѣчаніи 23-мъ прибавлены теоремы, которыя не находятся у Евклида.

Шестой книгой заканчивается Планиметрія. Слѣдовательно недостаетъ отдѣла объ измѣреніи круга, т. е. изслѣдованій объ опредѣленіи отношенія между окружностью и діаметромъ. Поэтому въ прибавленіи I я изложилъ, все то, чего у Евклида недостаетъ, именно: о многоугольникахъ вообще и о звѣздныхъ въ особенности, всѣ предложенія, служащія къ опредѣленію отношенія окружности къ діаметру, исторію этихъ розысканій и перевелъ книгу Архимеда „Объ измѣреніи круга“ (Κύκλου μέτρησις), о которой часто говорятъ, но которая мало кому извѣстна. Въ примѣчаніяхъ къ ней сдѣланы необходимыя поясненія;

наконецъ, изложенъ методъ предѣловъ и новѣйшіе методы для опредѣленія π.

Книга X, это ирраціональная ариѳметика или алгебра древнихъ, образецъ глубокомыслія древнихъ геометровъ. Въ примѣчаніи 14-мъ къ этой книгѣ—всѣ изслѣдованія, изложенныя въ ней, переведены на нашъ алгебраическій языкъ. Читатель долженъ обратить особенное вниманіе на первыя восемнадцать предложеній, въ которыхъ изложены основныя свойства несоизмѣримыхъ величинъ по способу древнихъ, но который не излишне прочесть и новымъ геометрамъ. Кромѣ того, заслуживаетъ вниманія предложеніе 29-е съ его слѣдствіями и предложеніе 117-е. Впрочемъ не безполезно прочесть внимательно всю книгу.

Книги XI, XII и *XIII* составляютъ Стереометрію; послѣднія двѣ *книги, XIV* и *XV*, нѣкоторые приписываютъ математику Гипсиклу, жившему во второмъ вѣкѣ по Р. Х. Въ примѣчаніяхъ и въ текстѣ, я пояснилъ то, что считается въ „Началахъ“ темнымъ или недосказаннымъ, и прибавилъ то, чего у Евклида недостаетъ. Особеннаго вниманія заслуживаетъ примѣчаніе 1-е къ тринадцатой книгѣ „Началъ“, въ которой Евклидъ опредѣляетъ кратко, что такое *анализъ* и *синтезъ* и приводитъ примѣры для обоихъ способовъ. Къ этому мѣсту я прибавилъ примѣчаніе, въ которомъ подробно разобралъ оба способа и привелъ примѣры, какъ того, такъ и другаго.

Въ книгахъ XIV-й и XV-й изложены свойства правильныхъ многогранниковъ, а въ прибавленіи VIII-мъ „О многогранникахъ“ мною изложены всѣ новѣйшія изслѣдованія объ этихъ тѣлахъ.

Наконецъ, такъ какъ въ „Началахъ“ Евклида не изложено измѣреніе объемовъ и поверхностей тѣлъ какъ ограниченныхъ плоскими поверхностями, такъ и круглыхъ тѣлъ, то я въ IX прибавленіи помѣстилъ все, что касается этихъ предметовъ.

Въ концѣ сочиненія я прибавилъ собраніе задачъ къ каждой книгѣ съ указаніемъ, къ какому отдѣлу каждой книги онѣ принадлежатъ, и какія предложенія должны употребляться при ихъ рѣшеніи. Въ концѣ же помѣщено еще нѣсколько замѣчательныхъ задачъ съ ихъ рѣшеніями.

Сочиненіе заканчивается двумя прибавленіями XI-мъ и XII-мъ; въ первомъ изъ нихъ изложено о *наибольшихъ* и *наименьшихъ* величинахъ въ Геометріи, а во второмъ объ *отрицательныхъ количествахъ*. Въ обоихъ прибавленіяхъ выбраны примѣры, которые могли-бы служить наилучшимъ поясненіемъ изложеннаго. Преподаватель, въ продолженіи всего курса, долженъ указывать на существованіе *наибольшей* или *наименьшей* величины въ извѣстномъ предложеніи и указывать связь этихъ величинъ съ возможностью и невозможностью рѣшенія квадратныхъ уравненій, т. е. когда квадратное уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные и когда мнимые. Точно также преподаватель долженъ разъяснить при каждомъ удобномъ предложеніи значеніе отрицательныхъ величинъ въ Геометріи. Такимъ образомъ воспитанникъ составитъ себѣ ясное понятіе о тѣхъ геометрическихъ представленіяхъ, которыя многимъ кажутся, съ перваго раза, неясными и запутанными.

Закончу настоящее предисловіе словами Боссю, сказанными имъ въ его „Исторіи математики": Jamais livre de science n'a eu un succès comparable à celui des Éléments d'Euclide. Ils ont été enseignés exclusivement, pendant plusieurs siècles, dans toutes les écoles de mathématiques, traduits et commentés dans toutes les langues: preuve certaine de leur excellence.

Живой свидѣтель подтверждающій слова, сказанныя Боссю, есть списокъ, приложенный въ концѣ сочиненія, всѣхъ изданій „Началъ" Евклида, которыя намъ удалось собрать, вышедшихъ съ 1482 г. по 1880 годъ на различныхъ языкахъ. Изданія, обозначенныя звѣздочкой (*) были въ моемъ распоряженіи. Изъ этого списка видно, что всѣхъ изданій было до 460; изъ нихъ 155 на латинскомъ и греческомъ языкахъ, 142—на англійскомъ, 48—на нѣмецкомъ, 38—на французскомъ, 27—на итальянскомъ, 14—на голландскомъ, 5—на русскомъ, 2—на польскомъ и 26 на различныхъ другихъ языкахъ, какъ то: шведскомъ, финскомъ, португальскомъ, испанскомъ, датскомъ, китайскомъ, арабскомъ и др. Настоящее изданіе есть *пятое* на русскомъ языкѣ.

Къ означенному списку я прибавилъ списокъ сочиненій по Неевклидовской Геометріи, расположенныхъ въ алфавитномъ порядкѣ. Изъ него видно, какая громадная литература возникла по этому предмету, въ особенности въ послѣднее десятилѣтіе. Во многихъ изъ этихъ сочиненій обобщаются основныя геометрическія понятія на которыхъ строится геометрическая система. Сочиненія, обозначенныя звѣздочкой (*), служили мнѣ при составленіи Введенія. Наконецъ, въ концѣ книги, помѣщенъ списокъ различныхъ сочиненій, которыми я пользовался при составленіи настоящаго труда.

Въ заключеніи позволяю себѣ обратиться съ истинною благодарностью къ Совѣту Императорскаго Университета св. Владиміра, который всегда, съ такою готовностью, даетъ возможность, по мѣрѣ своихъ средствъ, принести пользу обществу изданіемъ полезныхъ сочиненій, напечатаніе которыхъ у насъ, на свой счетъ, для частнаго лица почти немыслимо.

М. Е. Ващенко-Захарченко.

Г. Кіевъ.
Въ мартѣ 1880 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

Изслѣдованія геометровъ конца прошлаго и настоящаго столѣтій: Гаусса, Лежандра, Лобачевскаго, Болэя, Риммана, Бельтрами, Гельмгольца и другихъ, относительно началъ на которыхъ воздвигнутъ геометрическій строй нашего пространства, пролили яркій свѣтъ на эти начала, разорвавъ завѣсу, покрывавшую глубокой тайной ихъ происхожденіе, значеніе и взаимную связь.

Начала эти суть первообразныя, очевидныя, простѣйшія свойства пространства, недопускающія доказательства. Они опредѣляютъ пространство, изъ нихъ логически выводятся всѣ геометрическія построенія отъ самыхъ простыхъ до самыхъ сложныхъ. Это геометрическій строй—система, въ которой, по мѣрѣ возведенія зданія, мы, сравнивая факты съ данными науки, можемъ провѣрять на сколько тверды начала, положенныя въ основаніе зданія.

Казалось бы съ перваго взгляда, что такая взаимная провѣрка должна была устранить сомнѣніе въ истинѣ геометрическихъ началъ, но и здѣсь, какъ и вездѣ, пытливый умъ человѣка задаетъ себѣ вопросы: Начала эти суть-ли простѣйшія? Существуетъ ли между ними какая либо связь? Какъ они явились въ нашемъ умѣ, т. е. врожденныя-ли они—апріорическія или почерпнуты нами изъ наблюденій—эмпирическія? Эти и имъ подобные вопросы, какъ видно, близко касаются и математиковъ и философовъ, а поэтому и были обширной ареной споровъ между ними. Споры эти продолжаются и въ настоящее время.

Систематически изложилъ, въ первый разъ, геометрическіе элементы Евклидъ за 270 лѣтъ до Р. Х. Они извѣстны подъ названіемъ Ευκλείδου στοιχεῖον πρωτον.

Они содержатъ:

Опредѣленія ὅροι, definitiones. Числомъ 34.

Требованія Α'ιτήματα, postulata. Числомъ три.

Это суть три элементарныя построенія съ помощью которыхъ Евклидъ дѣлаетъ всѣ построенія въ своихъ элементахъ.

Аксіомы (ἀξίωμα, ἀξιοῦν, утверждать что либо достовѣрное, несомнѣнное положеніе). У Евклида онѣ названны καὶνοὶ ἔννοιαι, communes notiones, общія понятія—числомъ двѣнадцать.

Теоремы (θεωρεῖν, созерцать, разсматривать). У Евклида онѣ названны Πρότασις безъ различія будетъ-ли это то, что мы называемъ *теоремой*—*Propositio*, или то, что называемъ *задачей*—*Problema*.

Въ этомъ введеніи я исключительно займусь аксіомами, изложу всѣ новѣйшія изслѣдованія и постараюсь, такимъ образомъ, установить правильное пониманіе основныхъ геометрическихъ началъ, на которыя, у насъ въ особенности, обращается такъ мало вниманія.

Евклидъ даетъ слѣдующія двѣнадцать аксіомъ:

1. Величины равныя одной и той же величинѣ равны между собою.

2. Если къ величинамъ равнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ равныя.

3. Если отъ величинъ равныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ равные.

4. Если къ величинамъ неравнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ неравныя.

5. Если отъ величинъ неравныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ неравные.

6. Величины двойныя одной и той же величины равны между собою.

7. Половины одной и той же величины равны между собою.

8. Величины, которыя по наложеніи совмѣщаются, равны между собою.

9. Цѣлое болѣе своей части.

10. Всѣ прямыя углы равны между собою.

11. Если двѣ прямыя линіи встрѣчаются третьей такъ, что сумма внутреннихъ угловъ, лежащихъ по одну сторону третьей, меньше двухъ прямыхъ угловъ, то двѣ первыя прямыя, по достаточномъ продолженіи, встрѣтятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ.

12. Двѣ прямыя линіи не могутъ заключать пространства.

Эти двѣнадцать положеній, которыя уже неявно содержатся въ опредѣленіяхъ, раздѣляются на два класса: къ первому классу принадлежатъ положенія 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9; они выражаютъ равенство общее величинамъ и составляютъ часть основанія всѣхъ математическихъ наукъ; ко второму классу принадлежатъ положенія 8, 10, 11, 12. Это суть геометрическія аксіомы, онѣ опредѣляютъ пространство.

Всѣ аксіомы перваго класса сводятся только къ тремъ: 1, 2 и 4.

1. Величины равныя одной и той же величинѣ равны между собою.

2. Если къ величинамъ равнымъ прибавимъ величины равныя, то суммы получимъ равныя.

4. Если къ величанамъ неравнымъ прибавимъ величины равныя, то суммы получимъ неравныя.

Въ самомъ дѣлѣ, аксіома 3-я есть слѣдствіе 2-ой, такъ какъ вычитаніе есть дѣйствіе обратное сложенію.

Аксіома 5-я есть слѣдствіе 4-ой по той же причинѣ.

Аксіомы 6 и 7 суть частный случай аксіомы 1-й.

Аксіома 9-я есть слѣдствіе 2-й и 4-й, такъ какъ эта аксіома содержитъ опредѣленіе, что цѣлое есть сумма частей и что всякая величина всегда равна самой себѣ.

Слѣдовательно аксіомъ перваго класса, т. е. общихъ всѣмъ ученіямъ о величинѣ, есть только три.

Геометрическія аксіомы составляютъ положенія 8, 10, 11 и 12. Въ нѣкоторыхъ манускриптахъ аксіома 12-я стоитъ 11-й, а 11-я стоитъ двѣнадцатой: этотъ порядокъ находится поэтому и во многихъ переводахъ Евклида. Если принять въ соображеніе, что прямая линія уже опредѣлена въ опредѣленіяхъ (ὅροι), то первый порядокъ можетъ быть принятъ, но если аксіомы суть основанія геометрической системы, то нужно принять второй порядокъ, т. е. сначала опредѣлить прямую (акс. 12-я), а потомъ дать одно изъ ея свойствъ на плоскости (акс. 11-я). Такъ какъ опредѣленіе прямой въ *опредѣленіяхъ: прямая линія есть та, которая лежитъ одинаково относительно всѣхъ своихъ точекъ* не есть геометрическое, не можетъ служить для геометрическихъ построеній, а даетъ ея наглядную форму, то Евклидъ далъ 12-ю аксіому, которую онъ, вѣроятно, и помѣстилъ одиннадцатою.

Евклидъ строитъ геометрическую систему на поверхности, которую онъ называетъ *плоскостью*, слѣдовательно геометрическія аксіомы должны давать самыя общія, необходимыя свойства *плоскости*, изъ которыхъ логически вытекалъ бы цѣлый строй *плоской геометріи*. Что геометрическія аксіомы опредѣляютъ плоскость, выдѣляютъ ее, если не изъ всѣхъ возможныхъ поверхностей, то по крайней мѣрѣ изъ безчисленнаго множества существующихъ въ пространствѣ, въ этомъ мы убѣдимся послѣдовательнымъ выясненіемъ значенія и характера аксіомъ.

Разсмотримъ каждую изъ четырехъ геометрическихъ аксіомъ. Здѣсь мы можемъ сдѣлать анализъ каждой аксіомы только элементарный, въ концѣ же этого введенія мы изложимъ все то, что было сдѣлано геометрами по настоящее время.

Аксіома 8. Евклидъ, употребивъ способъ наложенія для доказательства равенства треугольниковъ, тѣмъ самымъ присвоилъ плоскости свойство, которое мы будемъ называть, свойствомъ *совмѣстимости.* Оно состоитъ въ томъ, что фигуры могутъ перемѣщаться по плоскости изъ одного мѣста въ другое безъ складокъ и разрыва, т. е. фигура совпадая всѣми своими точками съ плоскостью, въ одномъ мѣстѣ, совпадетъ всѣми своими точками съ плоскостью и въ какомъ нибудь другомъ. Разстояніе двухъ какихъ нибудь точекъ фигуры неизмѣняется при перемѣщеніи ея по плоскости. Это свойство *совмѣстимости* выражаютъ такъ: форма фигуры независитъ отъ положенія ея мѣста на плоскости. Слѣдовательно одно изъ основныхъ свойствъ плоскости есть *совмѣстимость*, это одно изъ самыхъ важныхъ ея свойствъ, такъ какъ только это свойство дозволяетъ сравненіе мѣровыхъ отношеній фигуръ на плоскости. Не одна впрочемъ плоскость обладаетъ этимъ свойствомъ, но есть множество поверхностей, которыя имѣютъ его, между ними я назову *сферу*, на которой, какъ и на плоскости, фигуры могутъ свободно передвигаться, безъ складокъ и разрывовъ, съ одного мѣста въ другое. Изъ этого уже видимъ, что первая геометрическая аксіома принадлежитъ многимъ поверхностямъ; мы увидимъ ниже, что эта аксіома такъ важна, что по ней дѣлятся поверхности на классы. Евклидъ не выразилъ эту аксіому такъ какъ мы ее выражаемъ теперь, а далъ ее въ видѣ опредѣленія равенства геометрическихъ величинъ. Эта аксіома и въ настоящее время упускается изъ виду въ элементарныхъ курсахъ, и допускается неявно въ доказательствахъ равенства фигуръ чрезъ наложеніе.

Есть поверхности, на которыхъ эта аксіома не имѣетъ мѣста: такова, напримѣръ, поверхность эллипсоида, на немъ фигура безъ складокъ или разрыва перемѣщена быть не можетъ, слѣдовательно способъ наложенія, для сравненія мѣровыхъ свойствъ фигуръ, на ней неприменимъ. Еще могу указать на яйцеобразную поверхность, на которой фигура съ остраго конца неможетъ быть передвинута безъ складокъ или разрыва на тупой и обратно.

Итакъ за первую геометрическую аксіому мы будемъ принимать восьмую аксіому Евклида, которую мы будемъ называть аксіомой *совмѣстимости* и которая, какъ мы видѣли, принадлежитъ не только плоскости, но и многимъ другимъ поверхностямъ.

Аксіома 10. Всѣ прямые углы равны, какъ увидимъ ниже, можетъ быть доказана и внесена въ число теоремъ.

Аксіома 12. Я ее помѣщаю въ томъ порядкѣ на какой указалъ выше, т. е. прежде одиннадцатой.

Двѣ прямыя линіи не могутъ заключать пространства, т. е. чрезъ двѣ данныя точки можно провести только одну прямую линію, или еще, двѣ прямыя линіи могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ. Въ такихъ формахъ, очевидно, можетъ быть выражена двѣнадцатая аксіома Евклида.

Очевидно это не есть собственно аксіома, это есть опредѣленіе, которое даетъ геометрическій масштабъ для построеній. Это опредѣленіе не даетъ никакого понятія о формѣ прямой линіи. Оно указываетъ на ту изъ безчисленнаго множества линій, проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки, которая вполнѣ ими опредѣляется. Такъ какъ двѣ данныя точки на плоскости вполнѣ опредѣляютъ кратчайшее разстояніе между ними, то говорятъ также, *что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*. Это опредѣленіе прямой принялъ въ первый разъ Архимедъ въ своемъ сочиненіи: περὶ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου.

Эта аксіома имѣетъ мѣсто и на другихъ поверхностяхъ, на которыя можно навить плоскость: таковы всѣ развертывающіяся поверхности, между которыми мы укажемъ на прямой цилиндръ и конусъ. Если навьемъ плоскость, на которой проведена прямая линія между двумя точками, то она и на цилиндрѣ останется кратчайшимъ разстояніемъ, хотя можетъ принять весьма различныя формы, смотря по тому, въ какомъ направленіи навивается плоскость на цилиндръ: она можетъ имѣть форму *прямой* на плоскости, она можетъ быть *кругомъ* и можетъ быть *гелисомъ*. Во всѣхъ этихъ формахъ она есть *прямая* линія, проведенная между двумя точками, на цилиндрѣ—кратчайшее разстояніе между двумя точками, считая по цилиндру.

Хотя кратчайшее разстояніе, на всякой поверхности, опредѣляется двумя данными точками, но есть поверхности, которыя допускаютъ нѣкоторыя исключенія, напримѣръ, на сферѣ кратчайшее разстояніе между двумя точками есть дуга большаго круга и хотя вообще опредѣляется двумя данными точками на сферѣ, но эти точки могутъ имѣть такое положеніе, что кратчайшихъ разстояній между ними есть безчисленное множество, таковы: двѣ діаметрально противоположныя точки, чрезъ нихъ проходитъ безчисленное множество дугъ большихъ круговъ, которыя всѣ равны и суть всѣ кратчайшія разстоянія между такими точками. Изъ этого также видимъ, что на сферѣ всѣ прямыя пересѣкаются въ двухъ точкахъ и всегда заключаютъ пространство, т. е. часть сферы. Евклидъ въ 12-й аксіомѣ недопускаетъ исключеній, а поэтому она принадлежитъ только такого рода поверхностямъ, на которыхъ двѣ точки вполнѣ опредѣляютъ прямую линію безъ всякихъ исключеній.

Итакъ, вторая геометрическая аксіома есть опредѣленіе прямой линіи: *Прямая линія есть та, которая вполнѣ опредѣляется двумя точками,* или *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.* Эта аксіома, также какъ и первая, принадлежитъ многимъ поверхностямъ.

Первыя двадцать восемь положеній Евклида доказанны имъ на основаніи *только* двухъ первыхъ геометрическихъ аксіомъ и только для дальнѣйшаго развитія системы потребовалась еще одна аксіома *одиннадцатая.*

Аксіома 11. Аксіома 11-я можетъ быть выраженна еще въ слѣдующихъ двухъ формахъ:

Перпендикуляръ и косвенная по нѣкоторомъ продолженіи встрѣтятся.

Чрезъ данную точку, внѣ данной прямой, можно провести *только одну* прямую, невстрѣчающую данной.

Легкое доказательство первыхъ двадцати восьми положеній съ помощью только двухъ первыхъ аксіомъ, неочевидность одиннадцатой аксіомы—были причиной многихъ изслѣдованій, какъ въ древности, такъ и въ наше время, которыя были направленны къ тому, чтобы доказать одиннадцатую аксіому на основаніи двухъ первыхъ и внести ее въ число теоремъ, или замѣстить ее другою болѣе очевидною. Изслѣдованія эти не дали положительныхъ результатовъ, но выяснили смыслъ и значеніе аксіомъ.

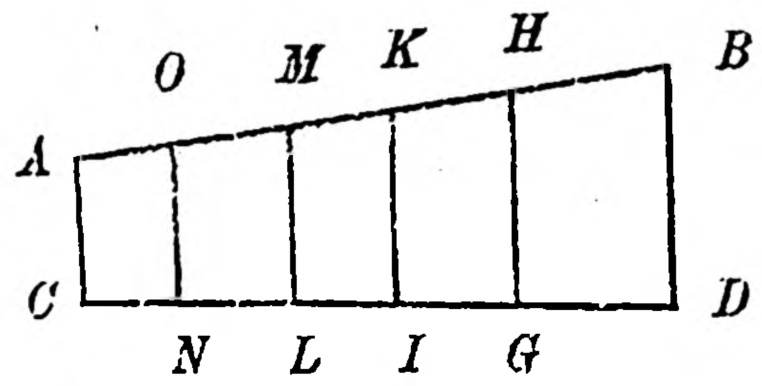
Я уже сказалъ, что аксіомы опредѣляютъ то пространство—поверхность, на которой строится система. Первыя двѣ аксіомы, какъ я пояснилъ выше, принадлежатъ многимъ поверхностямъ, слѣдовательно доказать одиннадцатую аксіому на основаніи двухъ первыхъ, это значитъ показать, что свойство, выраженное этой аксіомой, принадлежитъ всѣмъ тѣмъ поверхностямъ, на которыхъ первыя двѣ аксіомы имѣютъ мѣсто безъ всякихъ исключеній и что онѣ достаточны для построенія геометрической системы Евклида, которая, такимъ образомъ, будетъ принадлежать не только плоскости, но и многимъ другимъ поверхностямъ.

Я исторически изложу важнѣйшія изслѣдованія относительно одиннадцатой аксіомы, такъ какъ этимъ путемъ всего легче показать, какъ постепенно развивалось пониманіе смысла и значенія геометрическихъ аксіомъ.

Уже комментаторъ Проклъ жившій въ V вѣкѣ по Р. Х., зная, что одиннадцатая аксіома есть обратное предложеніе семнадцатому предложенію Евклида, вводитъ новую аксіому: *что разстояніе между сторонами угла, продолженными неопредѣленно, дѣлается болѣе всякой данной величины,* и на основаніи ея доказываетъ одиннадцатую аксіому. Это одно изъ древнѣйшихъ доказательствъ, дошедшихъ до насъ.

Затѣмъ только въ XIII в. Нассиръ-Эддинъ Ат-Туси, персидскій математикъ, доказалъ, что сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, на основаніи двухъ предложеній изъ коихъ одно онъ принялъ за аксіому по его очевидности, вотъ она: положимъ, что двѣ прямыя AB и

Фиг. 1.



CD пересѣченны другими прямыми NO, LM, IK, GH, перпендикулярными къ CD и составляющими съ прямою AB два угла, острый и тупой, допустимъ, что острые углы обращены въ сторону A, а тупые въ сторону B. Утверждается, что прямыя AB и CD приближаются со стороны AC и удаляются со стороны BD, т. е. что перпендикуляры $AC<NO<LM$.....

Въ 1507 году Клавій въ своемъ изданіи Евклида даетъ доказательство одиннадцатой аксіомы, допуская положеніе: *что геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ данной прямой на плоскости, есть прямая линія.*

Симсонъ, въ своемъ изданіи Евклида въ 1781 году **The elements of Euclid,** повторилъ доказательство Нассиръ-Эддина.

Бертранъ изъ Женевы въ 1778 году далъ въ сочиненіи: **Dévelopement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques** новое доказательство одиннадцатой аксіомы, основанное на началѣ: *что изъ двухъ неопредѣленныхъ пространствъ объемлемое менѣе объемлющаго.*

Всѣ предъидущія доказательства имѣютъ тотъ общій характеръ, что въ нихъ вводится новое начало, которое считается авторами проще и на основаніи его доказывается одиннадцатая аксіома. Всѣ эти изслѣдованія собраны въ разсужденіи В. Я. Буняковскаго *о параллельныхъ линіяхъ* и указаны недостатки каждаго изъ нихъ.

Изслѣдованія Лежандра. Болѣе всѣхъ въ этомъ направленіи сдѣлалъ французскій геометръ Лежандръ, который въ продолженіи своей математической карьеры принимался нѣсколько разъ за эту задачу. Первая его попытка изложена въ его первомъ изданіе **Éléments de géometrie** въ 1794 году. Онъ не вводитъ новаго начала, но старается доказать, на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ, что перпендикуляръ и косвенная, по нѣкоторомъ продолженіи, встрѣтятся. Доказательство это онъ самъ находитъ неудовлетворительнымъ, говоря, что опредѣленіе прямой должно быть таково, чтобы исключало всякое сходство ея съ гиперболой, тогда только наше доказательство было бы строго.

Въ третьемъ изданіи того же сочиненія въ 1800 году онъ даетъ другой оборотъ задачѣ и въ этомъ направленіи изслѣдованія его имѣютъ важное значеніе, хотя онъ желаемаго результата не достигъ.

Если одиннадцатая аксіома имѣетъ мѣсто на плоскости, то сумма угловъ въ плоскомъ треугольникѣ равна друмъ прямымъ и обратно, если сумма угловъ въ плоскомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, то на плоскости одиннадцатая аксіома имѣетъ мѣсто. Зная это, Лежандръ хотѣлъ доказать, на основаніи первыхъ двухъ геометрическихъ аксіомъ, что сумма угловъ въ плоскомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

Пріемъ его состоитъ въ слѣдующемъ: такъ какъ относительно суммы угловъ въ треугольникѣ можно сдѣлать три предположенія: что она *больше*, *равна* или *меньше* двухъ прямыхъ, то слѣдуетъ только показать, что она не можетъ быть ни больше, ни меньше двухъ прямыхъ.

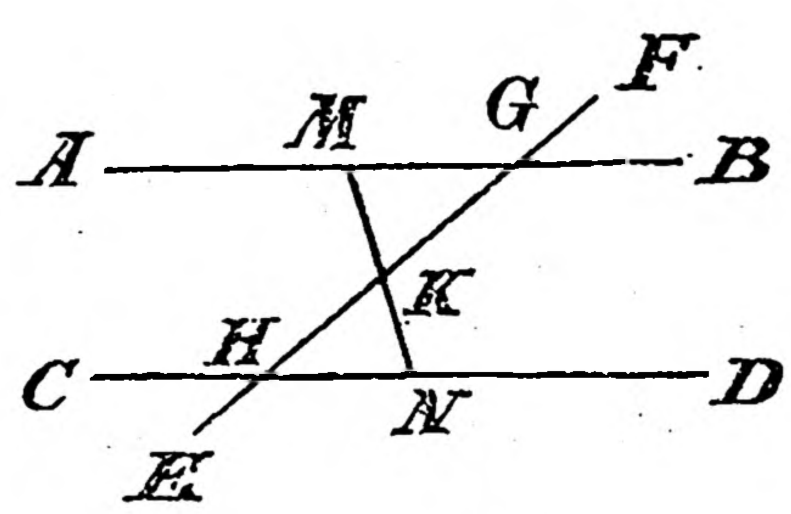
Первое предположеніе, т. е. что сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть больше двухъ прямыхъ, онъ доказалъ строго, а что она не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ онъ могъ доказать строго только введя новое положеніе, которое въ сущности есть ничто иное какъ одиннадцатая аксіома. Именно: *что чрезъ данную точку внутри угла можно всегда провести такъ прямую, что она встрѣтитъ обѣ стороны угла.*

Во первыхъ докажемъ, что на поверхностяхъ, допускающихъ первыя двѣ геометрическія аксіомы, и слѣдовательно и на плоскости, существуютъ прямыя невстрѣчающіяся.

Предложеніе 1. Если сумма внутреннихъ угловъ, составленныхъ двумя прямыми AB и CD съ третьею EF, равна двумъ прямымъ, то прямыя не встрѣтятся.

Доказат. По условію мы имѣемъ:

Фиг. 2.



$BGE+DHF=2d$, а чрезъ d мы будемъ всегда означать прямой уголъ. Но мы имѣемъ также:

$$CHF+DHF=2d$$

слѣдовательно $BGE=CHF$. Такимъ же образомъ найдемъ, что $AGE=DHF$. Изъ равенства этихъ угловъ слѣдуетъ равенство открытыхъ фигуръ $DHGB$ и $AGHC$, которыя очевидно совмѣстятся, если фигуру $AGHC$ наложимъ на фигуру $DGHB$, такъ чтобы точка H упала въ точку G и точка G въ точку H, то по равенству выше показанныхъ угловъ GA пойдетъ по HD, а HC пойдетъ по GB. Если AG и CH встрѣчаются, то, очевидно, встрѣтятся линіи BG и DH; слѣдовательно прямыя AB и CD будутъ имѣть двѣ общія точки и будутъ совпадать.

Слѣдствіе. Пусть K будетъ средина отрѣзка GH и NM прямая проведенная чрезъ точку K, въ произвольномъ направленіи, но только такъ, чтобы она пересѣкла прямыя AB и CD. Я говорю, что сумма угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой NM будетъ также равна двумъ прямымъ угламъ. Легко видѣть что треугольники KMG и KNH равны, такъ какъ въ нихъ стороны HK и KG равны и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, также равны.

Откуда слѣдуетъ, что:

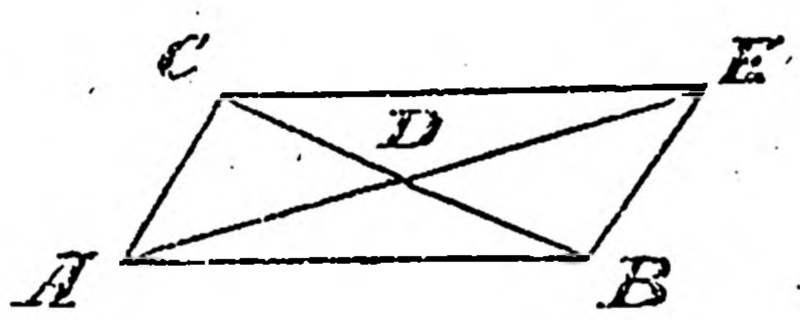
$$CNM+AMN=CNM+(2d-CNM)=2d.$$

Изъ этого видимъ, что плоскость есть такая поверхность, на которой, чрезъ данную точку внѣ данной прямой, можно провести *по крайней мѣрѣ одну прямую, которая не встрѣтитъ данной.*

Предложеніе 2. Сумма угловъ въ треугольникѣ на поверхности, допускающей первыя двѣ аксіомы, не можетъ быть болѣе двухъ прямыхъ угловъ.

Доказат. Если въ треугольникѣ ABC чрезъ средину D стороны BC проведемъ прямую $AE=2AD$, то получимъ двѣ пары равныхъ треугольниковъ $CDE=BDA$ и $EDB=ADC$. Эти треугольники равны вслѣдствіе равенства сторонъ.

Фиг. 3.



Изъ равенства этихъ треугольниковъ имѣемъ равенство слѣдующихъ угловъ $CEA=BAD$ и $ACE=ACB+CBA$; $AEB=EAC$ и $EBA=ACB+CBA$.

Изъ треугольника ABC образовался треугольникъ AEB равной съ нимъ площади и имѣющій углы $BAD=A_1$, $ABE=B_1$ и $AEB=C_1$. Если уголъ A_1 будетъ меньшій изъ угловъ BAD и DAC, то, соображаясь съ предъидущимъ, найдемъ:

$$A_1 \leqq \frac{1}{2} A, \quad A_1+C_1=A, \quad B_1=B+C$$

откуда:

$$A_1+B_1+C_1=A+B+C$$

Изъ треугольника AEB, полученнаго такимъ образомъ, можно точно также образовать треугольникъ съ углами A_2, B_2, C_2 въ которомъ площадь будетъ равна площади треугольника ABC и

$$A_2 \leqq \frac{1}{2} A_1 \leqq \frac{1}{4} A, \quad A_2+C_2=A_1, \quad B_2=B_1+C_1$$

откуда:

$$A_2+B_2+C_2=A_1+B_1+C_1=A+B+C.$$

Продолжая подобнымъ образомъ построенія, мы получимъ треугольникъ площади равной треугольнику ABC съ углами A_n, B_n, C_n въ которомъ:

$$A_n \leqq \frac{1}{2^n} A, \quad A_n+B_n+C_n=A+B+C$$

Въ слѣдующемъ за этимъ треугольникѣ мы будемъ имѣть:

$$A_{n+1}+C_{n+1} \leqq \frac{1}{2^n} A$$

Изъ этого видимъ, что изъ треугольника ABC можно построить, указаннымъ способомъ, такой треугольникъ, въ которомъ площадь будетъ равна площади треугольника ABC, сумма угловъ будетъ равна суммѣ угловъ того же треугольника, и въ которомъ, наконецъ, сумма двухъ угловъ можетъ быть сдѣлана какою угодно малою.

Послѣ этого легко доказать наше предложеніе. Положимъ, что сумма угловъ въ треугольникѣ ABC больше двухъ прямыхъ, т. е. пусть:

$$A+B+C=2d+\alpha$$

Изъ треугольника ABC мы можемъ построить такой треугольникъ съ углами A_n, B_n, C_n, въ которомъ:

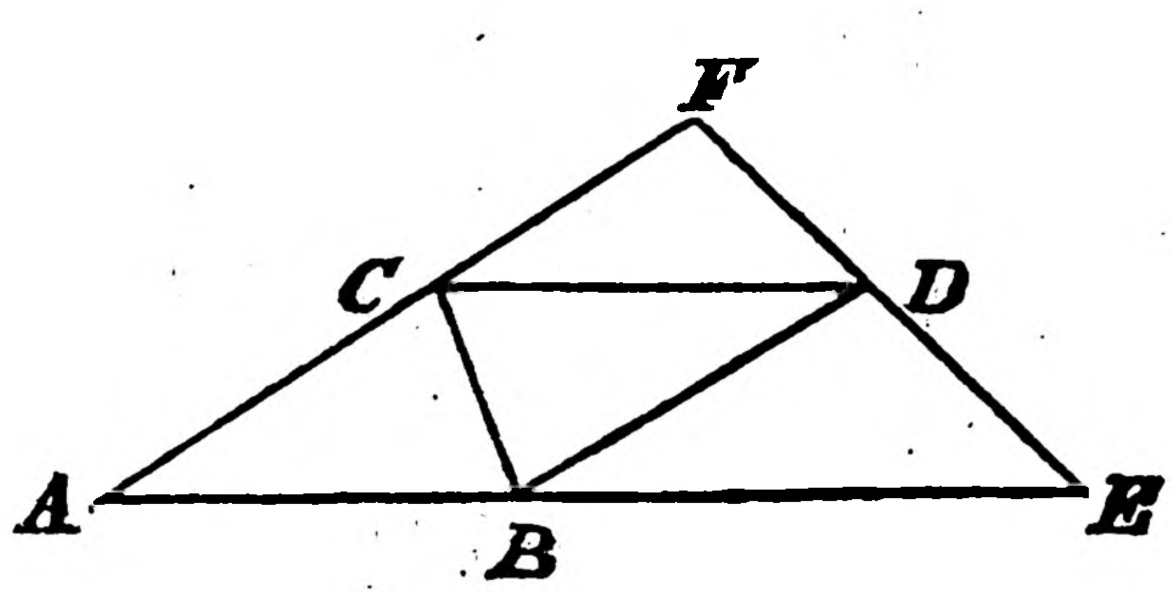
$$A_n+B_n+C_n=A+B+C=2d+\alpha, \quad A_n+C_n<\alpha$$

слѣдовательно третій уголъ B_n долженъ быть больше двухъ прямыхъ угловъ, т. е. $B_n>2d$, что невозможно.

Предложеніе 3. Сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть менѣе двухъ прямыхъ угловъ.

Доказат. Къ треугольнику ABC прибавимъ равный ему треугольникъ CBD.

Фиг. 4.



Чрезъ точку D проведемъ прямую EF *такъ, чтобы она встрѣтила стороны* AF и AE въ точкахъ F и E. Положимъ, что сумма угловъ въ треугольникѣ ABC будетъ $2d-\alpha$, въ треугольникѣ BED эта сумма пусть будетъ $2d-\alpha_1$, въ треугольникѣ CDF пусть она будетъ $2d-\alpha_2$, то сумма угловъ въ треугольникѣ AEF, очевидно будетъ:

$$2d-\alpha+2d-\alpha+2d-\alpha_1+2d-\alpha_2-6d=2d-2\alpha-\alpha_1-\alpha_2<2d-2\alpha$$

Изъ построеннаго, такимъ же образомъ, треугольника AEF мы можемъ построить еще треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ будетъ менѣе $2d-4\alpha$. Продолжая, подобнымъ образомъ, мы можемъ построить такой треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ можетъ быть сдѣлана менѣе какой угодно данной величины, но этого быть не можетъ, такъ какъ всѣ построенные треугольники имѣютъ общій уголъ A.

Въ приведенномъ выше доказательствѣ я подчеркнулъ слова, которыя составляютъ положеніе Лежандра: *чрезъ данную точку внутри угла можно всегда провести прямую, которая встрѣтитъ обѣ стороны угла.* Это положеніе равносильно одиннадцатой аксіомѣ. Лежандръ это сознавалъ, и поэтому старался пояснить его сравненіемъ безконечныхъ частей плоскости, но дѣла этимъ не уяснилъ. Онъ хочетъ показать, что *неприлично* прямой по ея свойству всей заключаться въ углѣ: **il repugne à la nature de la ligne droite qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée puisse être renfermée dans un angle.** Въ этомъ-то Лежандръ и ошибся, такъ какъ мы увидимъ ниже, что есть поверхность, на которой первыя двѣ геометрическія аксіомы имѣютъ мѣсто, а прямая вся можетъ заключаться въ углѣ.

Изъ этого видимъ, что на поверхности, допускающей двѣ первыя аксіомы безъ исключеній, сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть *болѣе* двухъ прямыхъ.

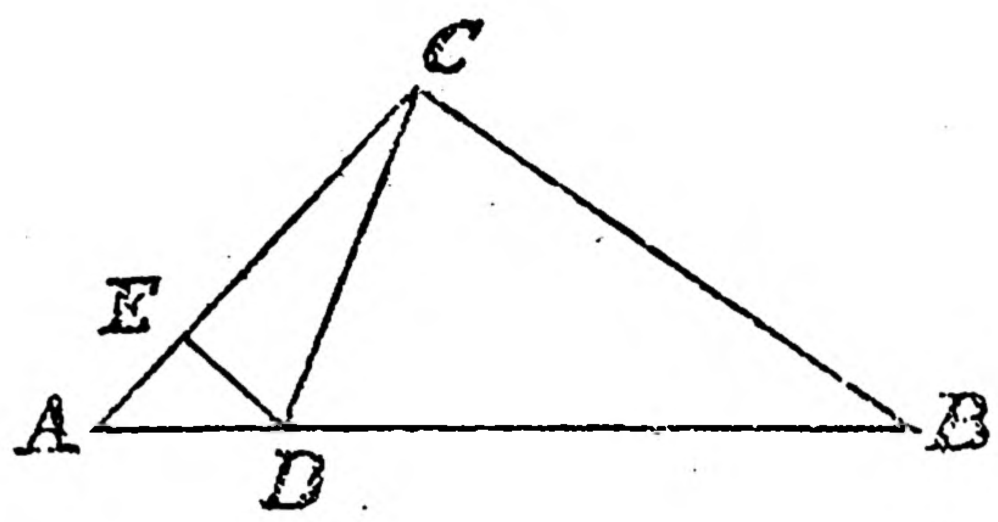
Слѣдовательно, относительно суммы угловъ въ треугольникѣ, можно сдѣлать двѣ *гипотезы:* что эта сумма равна двумъ прямымъ и что она меньше двухъ прямыхъ. Какая изъ этихъ двухъ гипотезъ имѣетъ мѣсто на плоскости, доказать нѣтъ возможности, почему? мы увидимъ ниже.

Я теперь покажу, что если бы мы нашли на плоскости хоть одинъ треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ была бы равна двумъ прямымъ, то всевозможные треугольники, построенные на плоскости, будутъ имѣть тоже свойство. Изъ этого будетъ слѣдовать, что сумма угловъ во *всѣхъ* треугольникахъ, построенныхъ на плоскости, или равна двумъ прямымъ или меньше.

Предложеніе 4. Если сумма угловъ въ одномъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, то она равна двумъ прямымъ и во всякомъ другомъ.

Доказат. 1) Если сумма угловъ въ треугольникѣ ABC равна двумъ прямымъ, то она равна двумъ прямымъ и въ каждомъ изъ треугольниковъ

Фиг. 5.

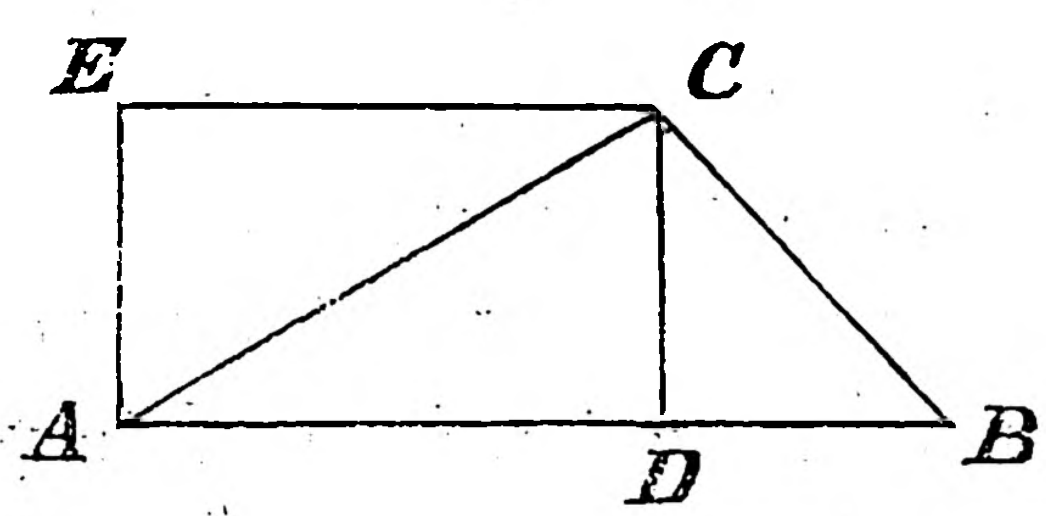


ADC, DCB, AED, отрѣзанныхъ отъ треугольника ABC.

Въ самомъ дѣлѣ, если-бы въ треугольникѣ ADC и DBC суммы угловъ были $2d—x$ и $2d—y$, то сумма угловъ въ треугольникѣ ABC была-бы не два прямыхъ, а $2d—x—y$. Тоже самое относится и къ треугольнику ADE.

2) Раздѣлимъ треугольникъ ABC высотою CD на два прямоугольные треугольника ADC и DBC.

Фиг. 6.



Одинъ изъ этихъ треугольниковъ, напримѣръ, ADC, можно дополнить равнымъ ему треугольникомъ AEC, до четыреугольника $ADCE$, въ которомъ каждый изъ угловъ прямой.

Изъ четыреугольника $ADCE$, прибавляя къ нему равные ему четыреугольники, мы составимъ четыреугольникъ, въ которомъ каждый изъ угловъ будетъ прямой, а стороны, заключающія какой нибудь изъ этихъ прямыхъ угловъ, будутъ $m.AE$ и EC. Изъ этого послѣдняго четыреугольника, точно такимъ же образомъ, можно построить четыреугольникъ, въ которомъ каждый изъ угловъ есть прямой, а стороны, заключающія уголъ, будутъ $m.AE$ и $n.EC$, гдѣ m и n суть цѣлыя произвольныя числа.

Этотъ послѣдній четыреугольникъ раздѣляется діагональю на два равные прямоугольные треугольника, въ которыхъ, очевидно, сумма угловъ будетъ равна двумъ прямымъ. Отъ такого треугольника можно отдѣлить произвольный треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ будетъ равна двумъ прямымъ. Слѣдовательно сумма угловъ въ произвольно взятомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

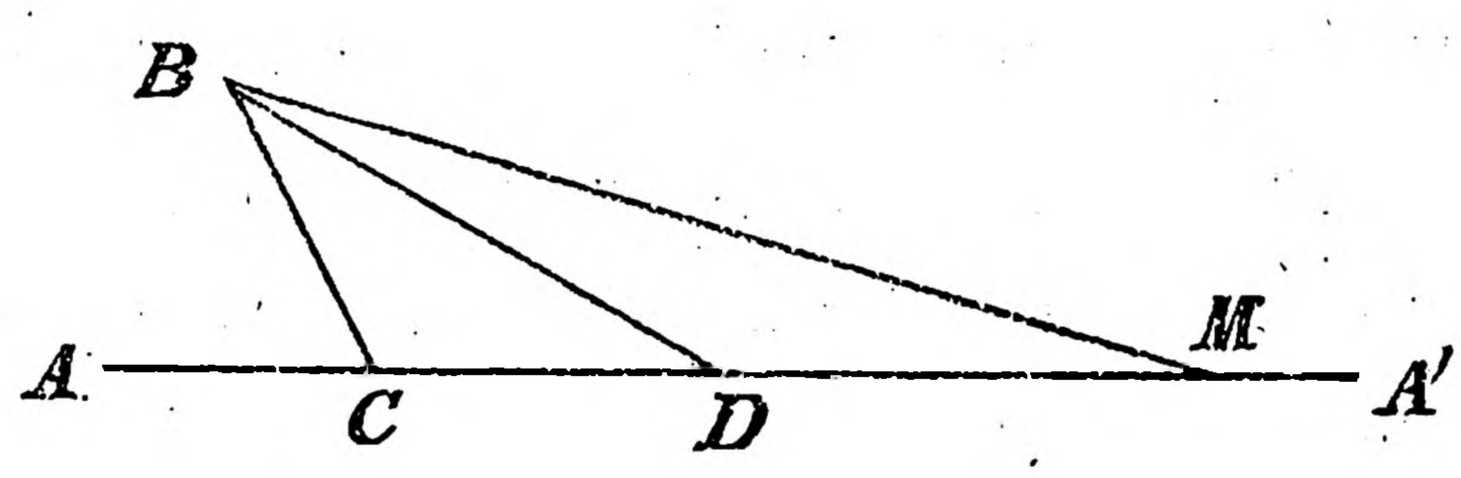
1) Что сумма угловъ *во всякомъ* треугольникѣ или равна двумъ прямымъ, или меньше двухъ прямыхъ.

2) Внѣшній уголъ *во всякомъ* треугольникѣ или равенъ суммѣ внутреннихъ съ нимъ не смежныхъ угловъ, или *больше* этой суммы.

3) Чрезъ данную точку B, внѣ данной прямой AA', можно всегда провести такъ прямую BM, что уголъ BMA можетъ быть произвольно малымъ.

Для этого проведемъ прямую BC, такъ чтобы она съ прямою AA'

Фиг. 7.



составляла острый уголъ ACB и сдѣлаемъ $BC=CD$, то уголъ $D \leqq \frac{1}{2} ACB$. Продолжая подобное построеніе, мы найдемъ такую прямую BM, что уголъ DMB будетъ менѣе какого нибудь даннаго угла.

Резюмируя все выше сказанное, мы приходимъ къ заключеніямъ, что на поверхности, допускающей двѣ первыя аксіомы:

1) Чрезъ данную точку внѣ данной прямой на плоскости можно всегда провести прямую, не встрѣчающую данной, но единственная ли это прямая не встрѣчающая, на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ, мы рѣшить не имѣемъ возможности.

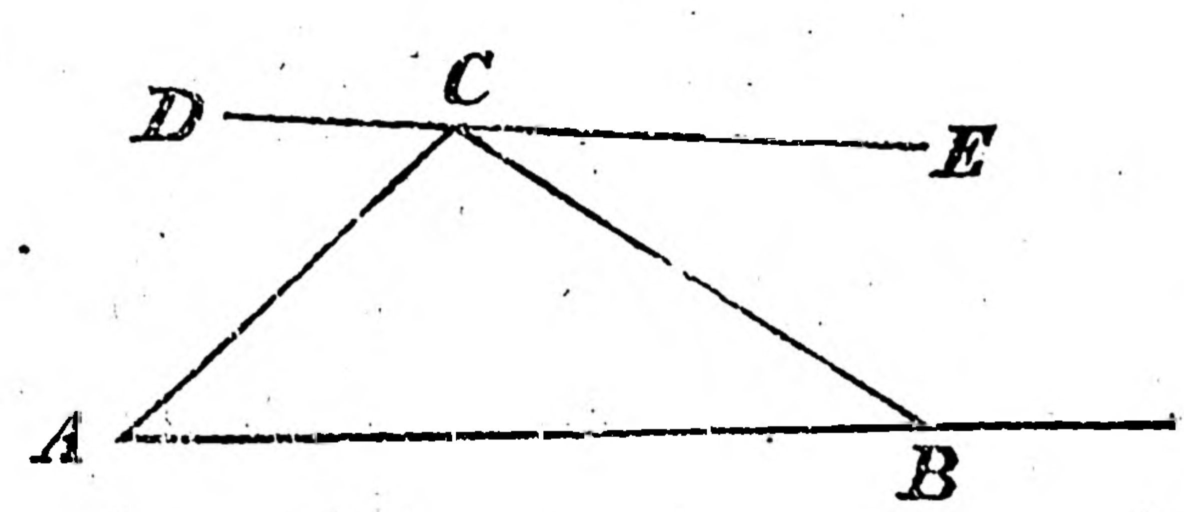
2) Что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ или равна двумъ прямымъ, или меньше двухъ прямыхъ. Какое изъ этихъ двухъ положеній имѣетъ мѣсто на плоскости, т. е. на поверхности, допускающей первыя двѣ аксіомы, мы рѣшить, на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ, также не можемъ.

Я теперь покажу связь двухъ предъидущихъ заключеній.

Предложеніе 5. Если чрезъ данную точку внѣ данной прямой можно провести *только одну* прямую, не встрѣчающую данной, которая въ такомъ случаѣ называется параллельною данной прямой, то сумма внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

Доказат. Чрезъ вершину C треугольника ABC проведемъ параллельную DE противулежащей сторонѣ AB.

Фиг. 8.



Такъ какъ DE есть единственная прямая, проходящая чрезъ точку

C и не встрѣчающая основанія AB, то (см. пр. 1) уголъ $A=ACD$, уголъ $B=BCE$, слѣдовательно:

$$A+B+C=2d.$$

Предложеніе 6. Обратно, если сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, то, чрезъ данную точку внѣ данной прямой, можно провести *только одну* линію не встрѣчающую (параллельную) данной.

Доказат. Пусть DE (см. чер. 8) будетъ параллельная прямой AB, проведенную чрезъ точку C, а AC сѣкущая. Положимъ, что сумма угловъ BAC и ACE не равна $2d$, т. е. пусть:

$$BAC+ACE=2d-\alpha.$$

Чрезъ точку C проведемъ прямую CB такъ, чтобы уголъ CBA былъ$<\alpha$. По гипотезѣ сумма угловъ въ треугольникѣ ABC равна двумъ прямымъ, т. е.:

$$BAC+ACB+CBA=2d$$

подставивъ вмѣсто $2d$ эту величину въ предъидущее выраженіе, найдемъ:

$$BAC+ACE=BAC+ACB+CBA-\alpha$$

или

$$ACE=ACB+CBA-\alpha$$

откуда:

$$ACE<ACB$$

чего быть не можетъ, такъ какъ прямая CB лежитъ внутри угла ACE.

Изъ всего сказаннаго видимъ, что всѣ усилія геометровъ доказать прямо одиннадцатую аксіому Евклида, на основаніи двухъ первыхъ аксіомъ, не имѣли успѣха. Оставалось одно предположить, что одиннадцатая аксіома на плоскости не имѣетъ мѣста и построить геометрическую систему въ этомъ предположеніи. Если одиннадцатую аксіому можно доказать, т. е. если она можетъ быть сведена на двѣ первыя аксіомы, то построенная система должна привести къ абсурду; въ противномъ случаѣ, т. е. если система всегда остается логична во всѣхъ своихъ частяхъ, мы должны заключить, что одиннадцатая аксіома доказана быть не можетъ.

Построеніе такой системы предпринялъ въ 1829 году русскій геометръ, профессоръ Казанскаго университета, Н. И. Лобачевскій.

Въ этомъ году Лобачевскій напечаталъ въ Казанскомъ Вѣстникѣ сочиненіе: О началахъ геометріи. Въ 1835, 1836 и 1838 гг. онъ напечаталъ въ Ученыхъ Запискахъ Казанскаго Университета: „Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ". Это сочиненіе было напечатано въ журналѣ Крелля подъ заглавіемъ: **Géométrie imaginaire** и въ 1874 году переведено на итальянскій языкъ.

Сочиненія эти, съ начала, не обратили на себя особеннаго вниманія геометровъ, которые, какъ видно изъ ихъ мнѣній, считали эти работы болѣе любопытными, нежели имѣющими научное значеніе. Можетъ быть это произошло и отъ того, что русскія математическія сочиненія были мало извѣстны въ западной Европѣ. Одинъ Гауссъ, въ то время, понималъ важное значеніе мысли Лобачевскаго и указывалъ, въ перепискѣ своей съ Шумахеромъ, по поводу теоріи параллельныхъ линій, на значеніе работъ Лобачевскаго. Вотъ что онъ пишетъ Шумахеру: „Недавно я имѣлъ случай снова прочесть записку Лобачевскаго подъ заглавіемъ: **Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.** Эта записка содержитъ элементы геометріи, которая должна была-бы существовать и коей развитіе составляло бы строгую систему, если бы геометрія Евклида не была истинна. Нѣкто Швейкартъ назвалъ эту геометрію звѣздную, Лобачевскій назвалъ ее воображаемою. Вы знаете, что уже пятьдесятъ четыре года я раздѣляю тѣже убѣжденія, не говоря о нѣкоторыхъ развитіяхъ, которыя, съ тѣхъ поръ, получили мои идеи объ этомъ предметѣ. Въ запискѣ Лобачевскаго я не нашелъ для себя ничего новаго, но его изложеніе отлично отъ того, которое я предполагалъ, притомъ авторъ изложилъ предметъ какъ истинный геометръ. Я совѣтую вамъ обратить ваше вниманіе на это сочиненіе, чтеніе котораго доставитъ вамъ живое удовольствіе. Ноября 28, 1846 г. Такъ говоритъ о сочиненіи Лобачевскаго одинъ изъ величайшихъ геометровъ нашего времени; но, не смотря на это, только въ 1868 году, послѣ работъ итальянскаго геометра Бельтрами, было обращено должное вниманіе на идею Лобачевскаго и окончательно разрѣшенъ вопросъ о теоріи параллельныхъ линій.

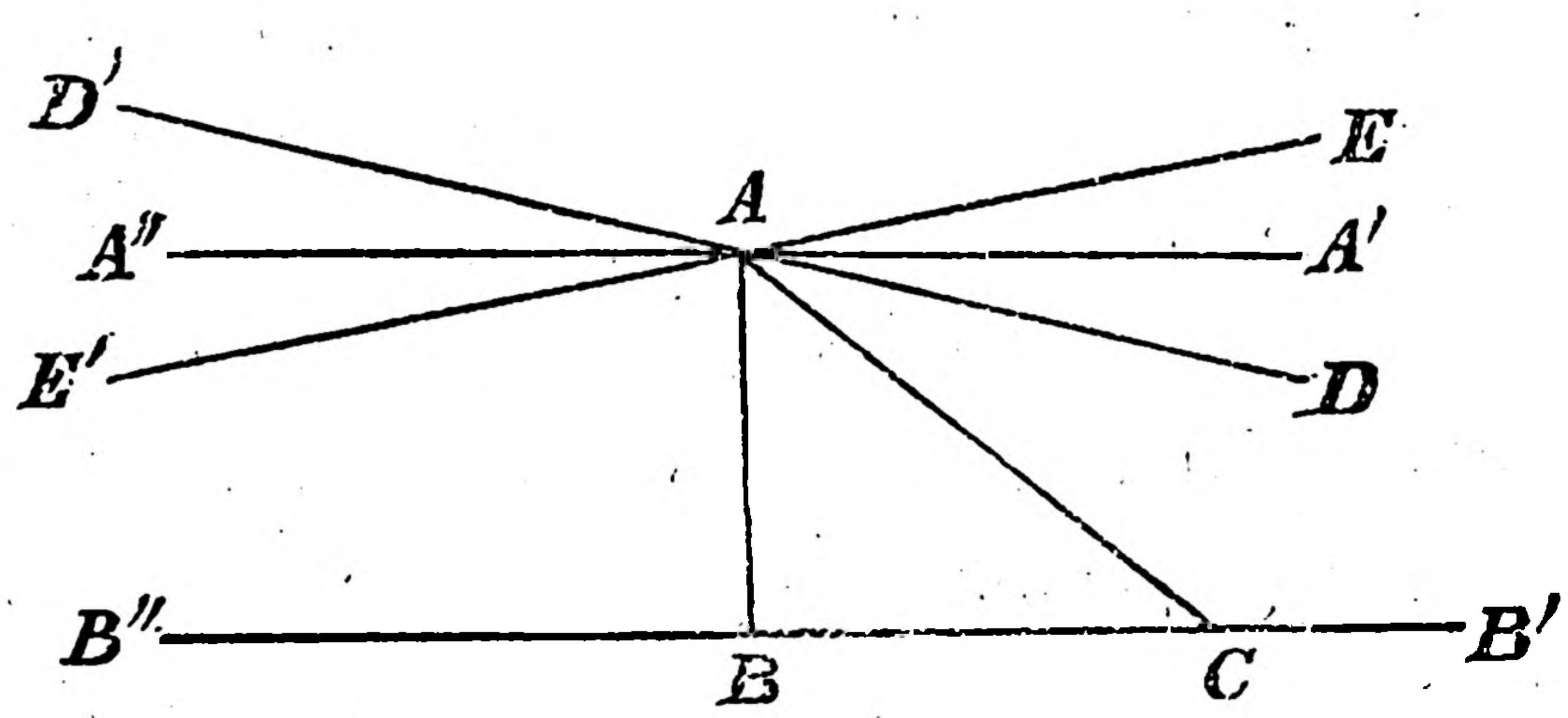
Система Лобачевскаго

Неевклидовская.

Мы выше видѣли (см. пр. 1), что чрезъ данную точку, внѣ данной прямой, можно провести по крайней мѣрѣ одну прямую, не встрѣчающую данной. Если эта прямая единственная, то мы будемъ имѣть систему Евклида—плоскую геометрію, если чрезъ данную точку можно провести нѣсколько прямыхъ, не встрѣчающихъ данную, то мы получимъ систему Лобачевскаго, которую Гауссъ назвалъ *Неевклидовскою.*

Пусть данная прямая будетъ $B'B''$, и данная точка A.

Фиг. 9.



Если изъ точки A опустимъ на $B'B''$ перпендикуляръ AB и возставимъ къ AB перпендикулярную линію $A'A''$, то (см. пр. 1), $A'A''$ не встрѣтитъ $B'B''$. Если $A'A''$ есть единственная прямая, не встрѣчающая прямой $B'B''$, то всѣ прямыя, лежащія въ углѣ $A'AB$, и проходящія чрезъ точку A, встрѣтятъ $B'B''$ по направленію BB', а всѣ прямыя, проходящія чрезъ туже точку A и лежащія въ углѣ $A''AB$, встрѣтятъ прямую $B'B''$ по направленію BB''. Въ этомъ случаѣ $A'A''$ называется прямою *параллельною* прямой $B'B''$.

Положимъ теперь, что чрезъ точку A можно провести не одну прямую, не встрѣчающую данной, тогда между этими прямыми будетъ находиться одна, напримѣръ AD, которая будетъ отдѣлять прямыя, встрѣчающія прямую $B'B''$, отъ невстрѣчающихъ ее, т. е. всѣ прямыя, лежащія въ углѣ

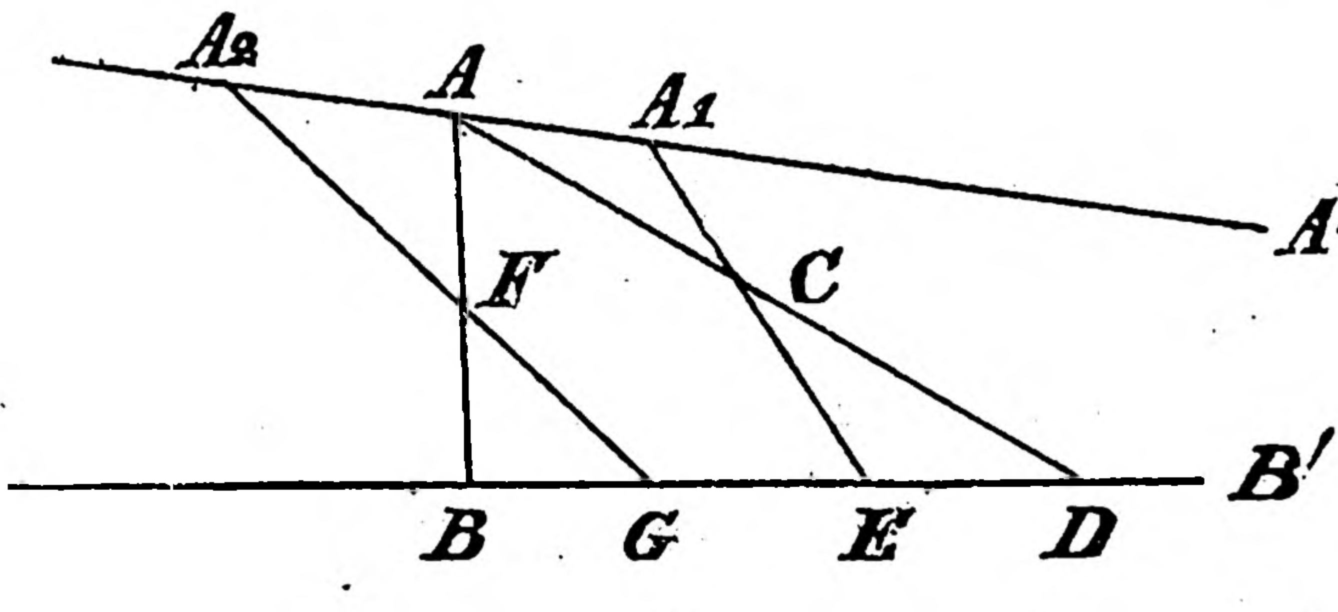
DAB будутъ встрѣчать $B'B''$ по направленію BB', а лежащія въ углѣ $A'AD$ не встрѣтятъ $B'B''$. Эта *предѣльная прямая*, не встрѣчающая прямой BB', называется *параллельною* $B'B''$ по направленію BB'. Если полосу $A'ABB'$ перегнемъ по линіи AB, то она совмѣстится съ полосою $A''ABB''$ (см. пр. 1) и прямая AD приметъ направленіе AE' и будетъ, очевидно, *параллельною* BB'' въ томъ же смыслѣ, въ какомъ мы называемъ AD параллельною BB', т. е. она будетъ отдѣлять прямыя, пересѣкающія BB'' отъ прямыхъ, не пересѣкающихъ ее. Уголъ $A'AD=A''AE'$. Изъ этого видимъ, что въ этой геометрической системѣ чрезъ данную точку A, внѣ данной прямой $B'B''$, можно провести двѣ параллельныя AD и AE': одна параллельна $B'B''$ въ направленіи BB', а другая параллельна въ направленіи BB''. Всѣ прямыя, проходящія чрезъ точку A и лежащія въ углѣ DAE', будутъ встрѣчать прямую $B'B''$, а лежащія въ углѣ EAD не встрѣчаютъ ее.

Итакъ, всѣ прямыя, проходящія чрезъ данную точку внѣ данной прямой на плоскости, раздѣляются на три класса: 1) встрѣчающія данную прямую, 2) двѣ параллельныя ей и 3) не встрѣчающія ее. Одна AD будетъ параллельна направленію BB', а другая AE' параллельна направленію BB''. Такой смыслъ параллельности мы будемъ означать символомъ $AD \parallel BB'$, $AE' \parallel BB''$.

Предложеніе 7. Прямая AA' параллельна прямой BB' во всѣхъ своихъ точкахъ, т. е. если $AA' \parallel BB'$, то $A_1A' \parallel BB'$, $A_2A' \parallel BB'$, . . . гдѣ A_1, A_2, . . суть произвольно взятыя точки въ обоихъ направленіяхъ на прямой AA'.

Доказат. Пусть AA' будетъ прямая параллельная BB', AB перпендикуляръ къ BB'.

Фиг. 10.



1) Возьмемъ какую нибудь точку A_1 на AA', чрезъ эту точку проведемъ прямую A_1C подъ произвольнымъ угломъ $A'A_1C$. Прямая AC, проведенная чрезъ точки A и C, очевидно, встрѣтитъ BB' въ какой нибудь точкѣ D. Въ прямоугольный треугольникъ ABD въ точкѣ C входитъ неопредѣленная прямая A_1C, слѣдовательно, она должна выйти изъ треугольника, а для этого она должна встрѣтить прямую BB' въ точкѣ E напримѣръ.

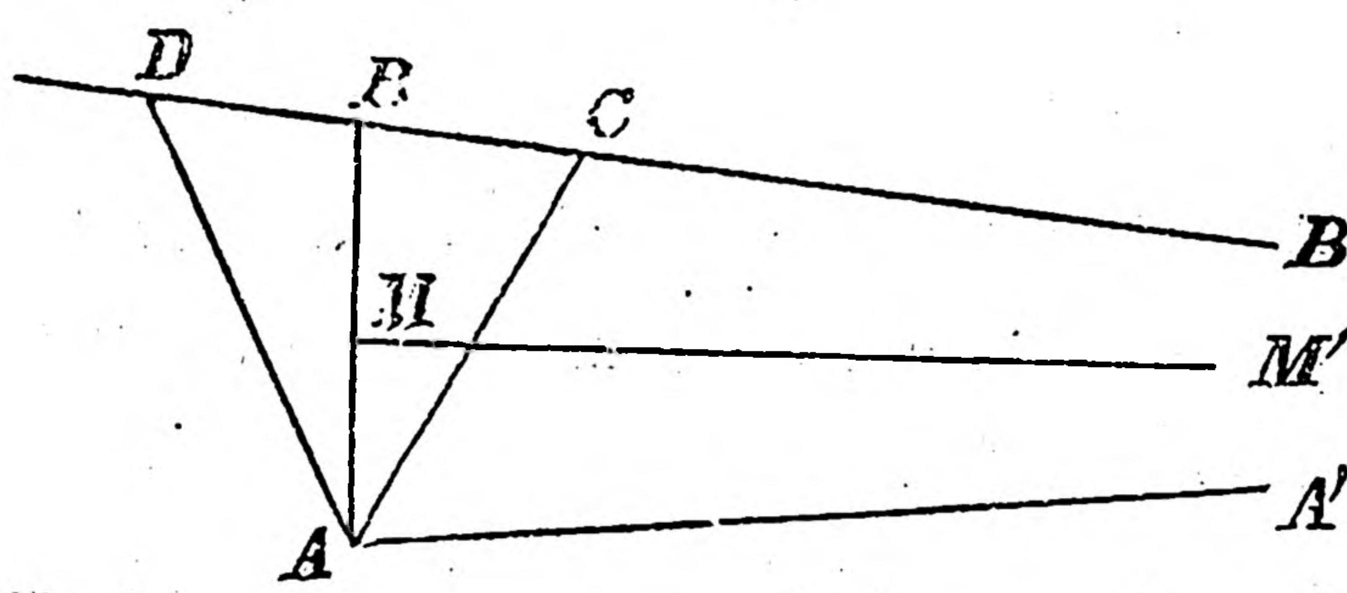
2) Возьмемъ еще точку A_2, лежащую по другую сторону перпендикуляра AB. Проведемъ прямую A_2F подъ такимъ угломъ, чтобы она встрѣтила AB въ точкѣ F, уголъ этотъ можетъ быть безконечно малъ. Чрезъ точку A проведемъ прямую AD такъ, чтобы уголъ $A'AD=A'A_2F$, прямая A_2F не встрѣтитъ прямой AD, входитъ въ треугольникъ ABD, слѣдовательно выйдетъ изъ него не иначе, какъ встрѣтивъ прямую AB въ извѣстной точкѣ G.

Предложеніе 8. Двѣ прямыя взаимно параллельны, т. е. если $AA' \parallel BB'$, то $BB' \parallel AA'$.

Доказат. Пусть прямая $AA' \parallel BB'$. Для произвольно взятой точки A на прямой AA' можно найти на прямой BB' такую точку B, чтобы уголъ $A'AB=B'BA$.

Соображаясь съ пр. 4, слѣд. 3 можно провести прямую AC такъ,

Фиг. 11.

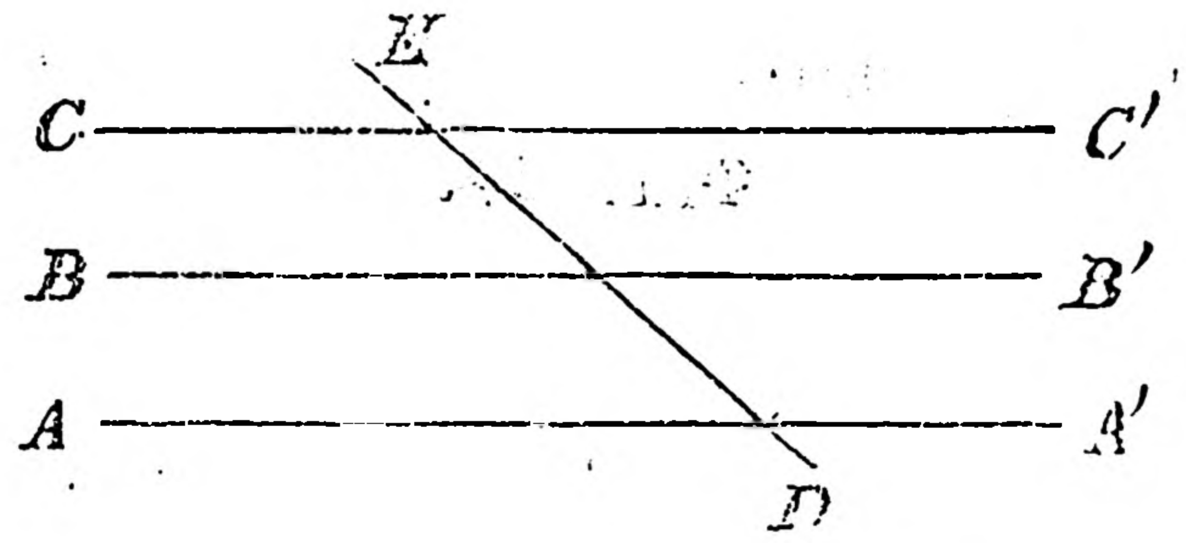


чтобы уголъ $A'AC<ACB'$. Продолжимъ прямую CB такъ, чтобы $CD=AC$, то уголъ $B'DA=DAC<DAA'$. Подвигая точку C къ D и соединяя каждое ея положенія съ точкою A мы, очевидно, найдемъ между C и D такую точку B, для которой будемъ имѣть уголъ $A'AB=B'BA$. Откуда непосредственно слѣдуетъ, что $BB' \parallel AA'$. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку M на срединѣ AB и возставимъ перпендикуляръ MM' къ AB, то MM' будетъ параллельна какъ къ AA', такъ и къ BB', ибо въ противномъ случаѣ AA' и BB' пересѣкутъ MM' въ одной точкѣ и сами не будутъ параллельны. Теперь, если подъ произвольнымъ угломъ къ AA' проведемъ прямую AC, то она встрѣтитъ MM', а слѣдовательно встрѣтитъ и BB'.

Предложеніе 9. Двѣ прямыя BB' и CC' параллельныя третьей AA', по одному направленію, будутъ параллельны и между собою.

Доказат. 1) Три прямыя лежатъ въ одной плоскости. Если прямыя лежатъ въ порядкѣ AA', BB', CC', то BB' и CC' не могутъ пересѣкаться, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, изъ точки ихъ пересѣченія было бы проведено двѣ прямыя, параллельныя прямой AA' въ одномъ и томъ же направленіи, что невозможно. Это слѣдуетъ еще и изъ того, что прямая ED, проведенная подъ произвольнымъ угломъ къ AA', встрѣтитъ ее, а слѣдовательно встрѣтитъ и прямую BB'.

Фиг. 12.

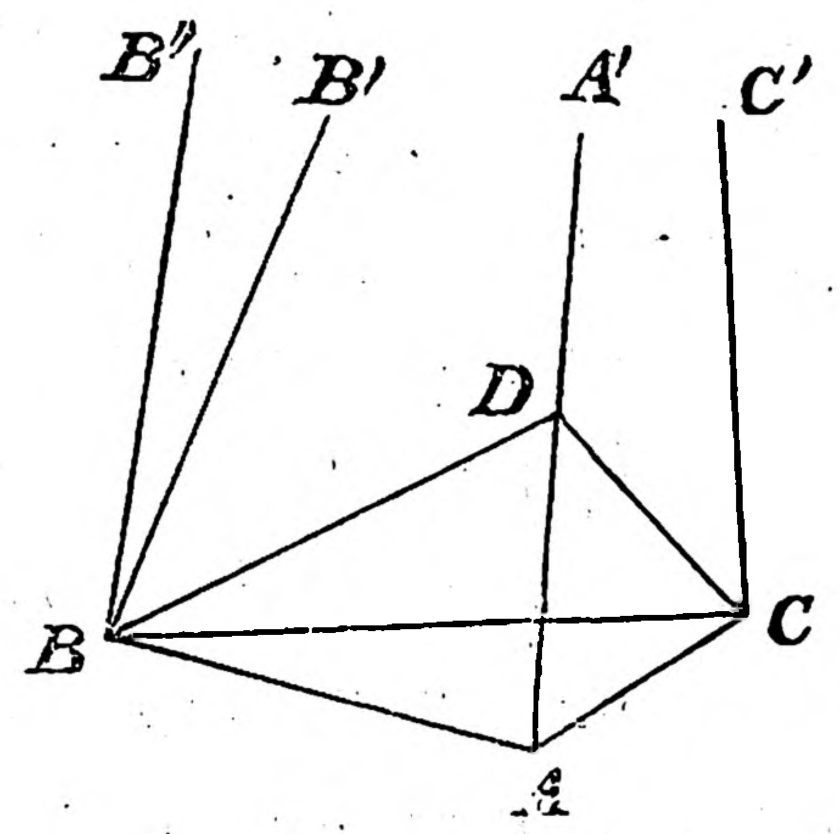


Если данныя прямыя расположены въ порядкѣ BB', AA', CC', то очевидно BB' и CC' не встрѣтятся, такъ какъ одна изъ нихъ должна прежде встрѣтить AA', что невозможно, потому что $AA' \parallel BB'$. Что BB' не только не встрѣчаетъ CC', но что онѣ параллельны, слѣдуетъ изъ того, что всякая прямая, проведенная чрезъ какую нибудь точку на BB', подъ произвольно малымъ угломъ къ ней, встрѣтитъ AA', а слѣдовательно встрѣтитъ и CC'.

2) Плоскость параллельныхъ BB' и AA' съ плоскостью параллельныхъ CC' и AA' составляетъ уголъ.

Во первыхъ докажемъ, что прямыя BB' и CC' лежатъ въ одной плоскости

Фиг. 13.



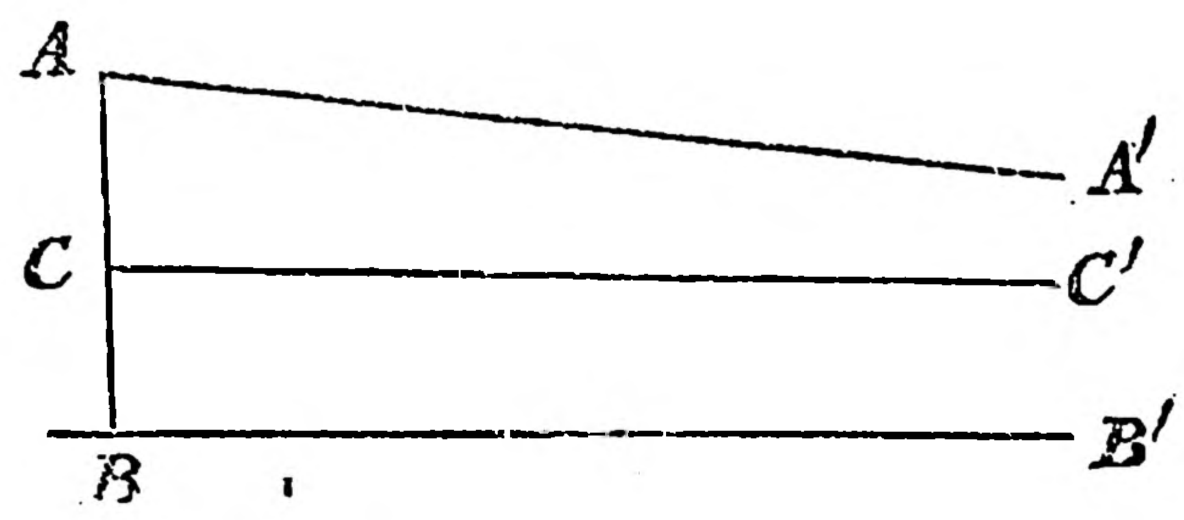
Пусть BD будетъ какая нибудь прямая въ плоскости параллельныхъ AA' и BB', пусть она встрѣтитъ AA' въ точкѣ D. Плоскость CBD встрѣтитъ плоскость параллельныхъ AA' и CC' по прямой CD. Будемъ теперь двигать плоскость CBD около BC такъ, чтобы точка D ушла въ безконечность; это будетъ тогда, когда прямая BD совпадетъ съ прямою BB', слѣдовательно, плоскость CBD совпадаетъ съ плоскостью CBB'. Точно также плоскость BCD совпадетъ съ плоскостью BCC'. Слѣдовательно, прямыя BB' и CC' лежатъ въ этомъ послѣднемъ положенiи плоскости CBD.

Теперь легко доказать что $BB' \parallel CC'$.

Въ самомъ дѣлѣ, если BB' не параллельна CC', то есть другая BB'' ей параллельная въ той же плоскости. $AA' \parallel CC'$ и $BB'' \parallel CC'$, слѣдовательно, по доказанному выше, BB'' и AA' находятся въ одной плоскости. Слѣдовательно, плоскость $A'AB$ пересѣкается съ плоскостью $C'CB$ по линiямъ BB' и BB'', что невозможно.

Свойства параллельныхъ. Пусть A будетъ точка внѣ прямой BB'. Изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AB на BB'.

Фиг. 14.



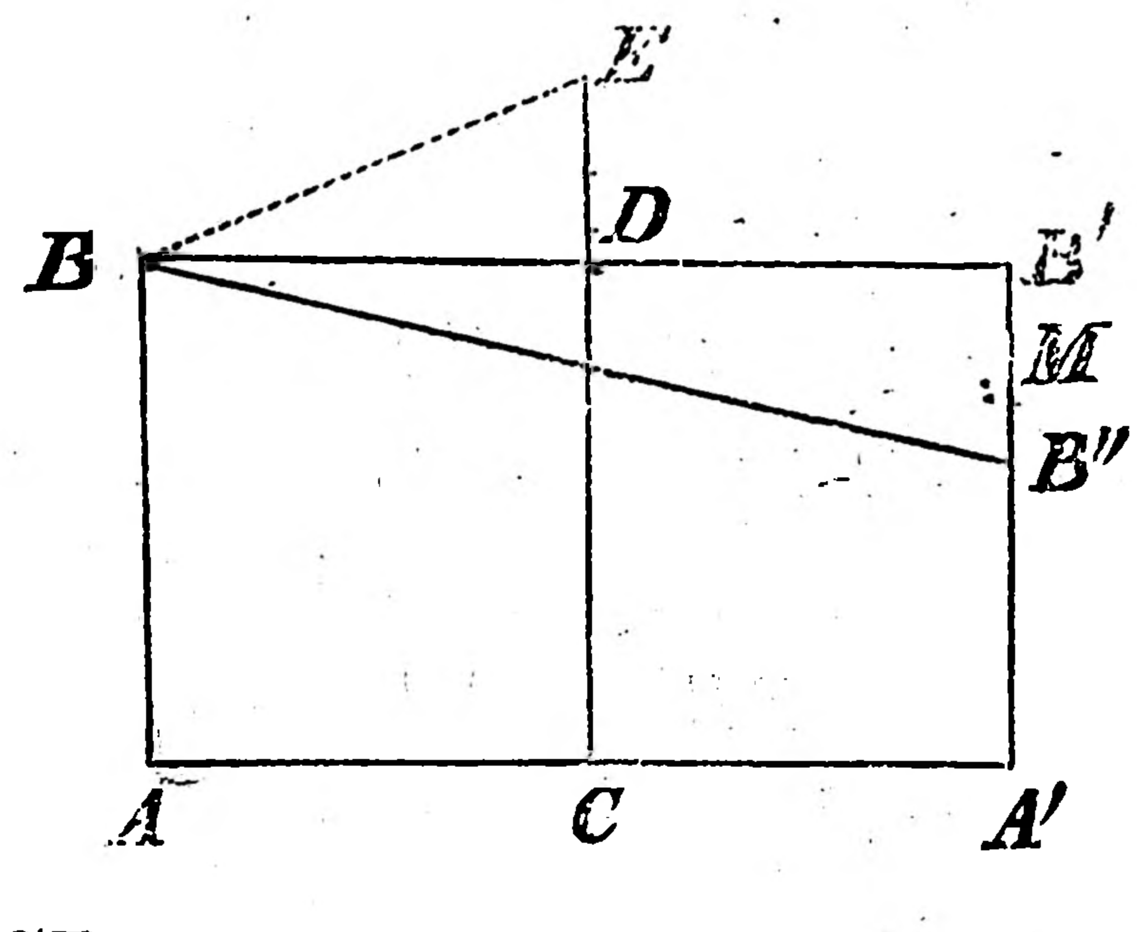
Чрезъ точку A проведемъ $AA' \parallel BB'$. Уголъ $A'AB$ между перпендикуляромъ AB и параллельною AA' называется угломъ *параллельности.*

Если разстояніе AB точки A отъ прямой BB' увеличивается или уменьшается, то уголъ параллельности уменьшается или увеличивается. Пусть, напримѣръ $CB < AB$, то для $CC' \parallel BB'$ уголъ $C'CB > A'AB$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы было $C'CB = A'AB$, или $C'CB < A'AB$, то для параллельныхъ AA' и CC' сумма внутреннихъ угловъ A и C была бы равна или больше двухъ прямыхъ. Для всякаго разстоянія p точки A отъ прямой BB' существуетъ опредѣленный уголъ *параллельности*, и обратно, для всякаго угла $A'AB$ существуетъ опредѣленное разстояніе $AB = p$, изъ конца котораго перпендикуляръ BB' будетъ линіей параллельной AA'. Этотъ уголъ параллельности обозначаютъ символомъ $\Pi(p)$, т. е. уголъ $A'AB$ есть функція разстоянія $AB = p$. Эта функція имѣетъ слѣдующія свойства: для $p = 0$ $\Pi(o) = d$, такъ какъ въ этомъ случаѣ $A'A$ совпадаетъ съ BB'. Если p увеличивается, то $\Pi(p)$ уменьшается и когда $p = \infty$, $\Pi(\infty) = 0$.

Предложеніе 10. Параллельныя прямыя сближаются неопредѣленно по направленію ихъ параллельности.

Доказат. Изъ точекъ A и A' прямой AA' возставимъ равные перпендикуляры AB и $A'B'$ и точки B и B' соединимъ прямою BB'. Прямая BB' не встрѣтитъ прямую AA'. Въ самомъ дѣлѣ, если возставимъ изъ средины C прямой AA' перпендикуляръ CD, то, очевидно, четыреугольникъ $CDB'A'$,

Фиг. 15.



перегнутый по линіи CD, совмѣстится съ четыреугольникомъ $CDBA$, слѣдовательно прямая BB' перпендикулярна къ прямой CD, но къ ней перпендикулярна и прямая AA', слѣдовательно AA' и BB' не встрѣтятся. Но, по опредѣленію параллельныхъ, прямая BB'' лежитъ ближе къ прямой AA', слѣдовательно она встрѣтитъ $A'B'$ въ такой точкѣ B'', для которой $A'B'' < A'B'$.

Изъ этого видимъ, что разстояніе точекъ прямой отъ ея параллельной, въ направленіи параллельности, будетъ убывать, а уголъ параллельности слѣдовательно будетъ возрастать; поэтому говорятъ, что двѣ параллельныя прямыя пересѣкаются на безконечности. Безграничная часть плоскости, заключающаяся между двумя параллельными прямыми, называется *полосой*. Двѣ полосы могутъ совмѣститься.

Предложеніе 11. Геометрическое мѣсто равно отстоящихъ точекъ отъ данной прямой есть кривая линія.

Доказат. Въ четыреугольникѣ $ACDB$ уголъ B острый. Если отложимъ (фиг. 15) на CD отрѣзокъ $CE = AB = A'B'$, то точка E упадетъ на продолженіи CD. Четыреугольникъ $ACEB$ совмѣстится съ четыреугольникомъ $CABE$, слѣдовательно уголъ $B = E$. Изъ этого слѣдуетъ, что линія, коей точки B, E, B', . . равно отстоятъ отъ прямой AA', не есть прямая. Равнымъ отрѣзкамъ AC и CA' прямой AA' соотвѣтствуютъ равныя части BE и EB' этой кривой. Если разстояніе точекъ кривой отъ прямой будетъ равно нулю, то кривая совпадаетъ съ прямою, по мѣрѣ же того, какъ это разстояніе увеличивается, углы хорды BE съ перпендикулярами AB и CE уменьшаются, такъ какъ изъ двухъ многоугольниковъ, имѣющихъ одинаковое число сторонъ и лежащихъ одинъ внутри другаго, въ меньшемъ изъ нихъ сумма угловъ будетъ больше суммы угловъ большаго [см. пред. 4. 1)].

Предложеніе 12. Двѣ не пересѣкающіяся прямыя имѣютъ наименьшее (minimum) разстояніе.

Доказат. Каждая прямая, соединяющая точку B (фиг. 15) съ какою нибудь точкою M, лежащей между B' и B'', не пересѣкаетъ прямую AA'. Разстояніе точекъ прямой BM отъ прямой AA' уменьшается, но это уменьшеніе не можетъ быть неопредѣленно, такъ какъ въ противномъ случаѣ прямая BM или будетъ сама параллельная AA', или пересѣчетъ ее, что по положенію прямой BM невозможно. Кромѣ того, не можетъ быть никакой части прямой BM, которой бы точки находились въ равномъ разстояніи отъ AA', какъ мы видѣли выше. Слѣдовательно на прямой BM должна находиться одна такая точка, которой разстояніе отъ прямой AA' будетъ наименьшее—minimum.

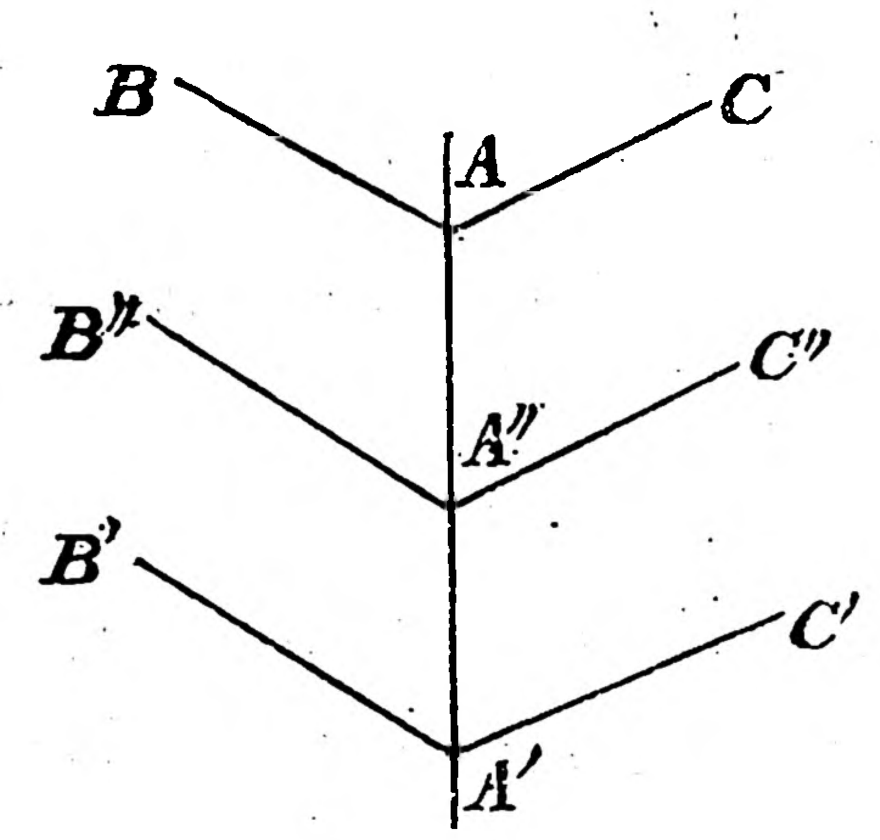
Прямая линія, не лежащая въ плоскости, встрѣчаетъ ее только въ одной точкѣ, называемой *основаніемъ*. Если прямая перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проходящимъ чрезъ ея основаніе по плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой прямой, проходящей чрезъ ея основаніе въ той же плоскости. Въ этомъ случаѣ прямую называютъ перпендикуляромъ къ плоскости. Обратно, прямыя перпендикулярныя, въ различныхъ плоскостяхъ, къ данной прямой въ одной ея точкѣ, всѣ лежатъ въ одной плоскости.

Двѣ плоскости, проходящія чрезъ одну и туже прямую, образуютъ двугранный уголъ. Прямая, чрезъ которую проходятъ плоскости, называется *ребромъ* угла, а плоскости называются *гранями*.

Предложеніе 13. Если изъ произвольно взятой точки A на ребрѣ двуграннаго угла возставимъ перпендикуляры AB и AC къ ребру въ обѣихъ граняхъ, то величина угла BAC не измѣняется съ измѣненіемъ положенія точки A на ребрѣ. Этотъ уголъ принимается за мѣру двуграннаго угла.

Доказат. Пусть A' будетъ другая, произвольно взятая точка на ребрѣ. $A'B'$, $A'C'$ пусть будутъ перпендикуляры къ ребру въ граняхъ. Если A'' будетъ средина AA', а $A''B''$, $A''C''$ перпендикуляры къ ребру

Фиг. 16.



въ граняхъ, то фигуру $B''A''C''B'A'C'$ можно такъ совмѣстить съ фигурою $C''A''B''CAB$, что прямыя:

$$A''B'',\ A''C'',\ A''A$$

первой фигуры, совпадутъ съ прямыми:

$$A''C'',\ A''B'',\ A''A'$$

второй фигуры, вслѣдствіе чего вершина и стороны угла BAC совпадутъ съ вершиною и сторонами угла $C'A'B'$.

Слѣдующія предложенія легко доказываются, соображаясь съ предъидущимъ и съ теоремой, что изъ точки на прямой, лежащей въ плоскости, можно возставить *только одинъ* перпендикуляръ къ этой прямой.

Предложеніе 14. Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ плоскости, лежатъ обѣ въ плоскости, перпендикулярной къ первой.

Предложеніе 15. Плоскость, проходящая чрезъ прямую, перпендикулярную къ другой плоскости, перпендикулярна сама къ этой плоскости.

Предложеніе 16. Прямая, пересѣченіе двухъ перпендикулярныхъ плоскостей къ третьей, перпендикулярна къ этой послѣдней.

Предложеніе 17. Если прямая MA перпендикулярна къ плоскости, а BC произвольно проведенная прямая на плоскости, то:

a) MD будетъ перпендикулярна къ BC, если AD перпендикулярна къ BC.

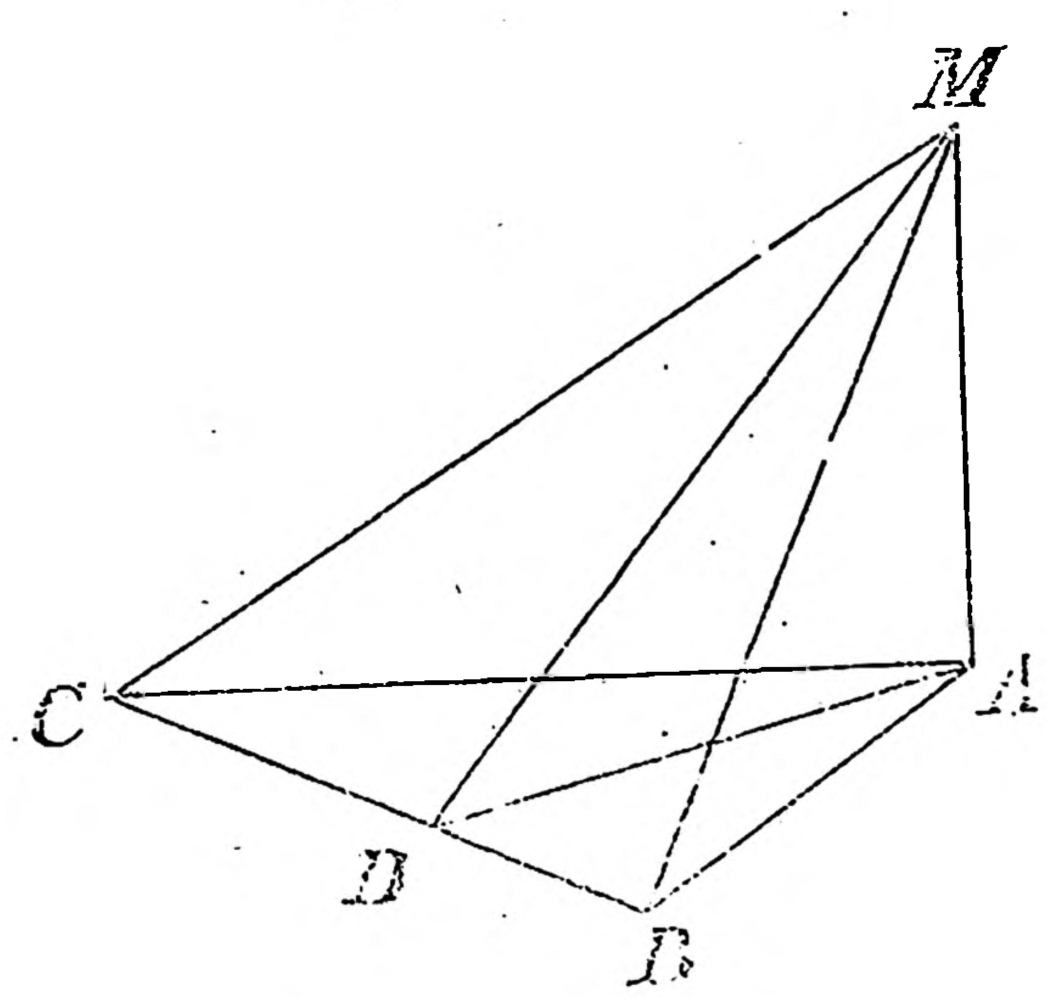
b) AD будетъ перпендикулярна къ BC, если MD перпендикулярна къ BC.

Доказат. Отложимъ $DB=DC$, то получимъ:

a) Изъ равенства треугольниковъ ADB и ADC, равенство треугольниковъ MAD и MAC.

b) Изъ равенства треугольниковъ MDB и MDC, получимъ равенство треугольниковъ MAB и MAC.

Фиг. 17.



Задача. 1) Изъ данной точки M опустить перпендикуляръ на данную плоскость?

Рѣшеніе. Проведемъ произвольную прямую BC на плоскости, изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MD на эту прямую (фиг. 17) и изъ точки D возставимъ перпендикуляръ DA къ BC въ плоскости. Перпендикуляръ MA, опущенный на прямую DA, и будетъ искомый.

Задача. 2) Изъ данной точки A на плоскости возставить перпендикуляръ къ плоскости?

Рѣшеніе. Изъ произвольно взятой точки M внѣ плоскости опустимъ на нее перпендикуляръ MN; въ плоскости MNA проведемъ AB перпендикулярно къ NA, то по предъидущему (пред. 17) AB и будетъ искомый перпендикуляръ.

Задача. 3) Найти линію пересѣченія двухъ плоскостей?

Рѣшеніе. Изъ произвольно взятой точки M внѣ плоскостей опустимъ перпендикуляры MA и MA_1 на плоскости, которые будутъ лежать въ плоскости, перпендикулярной къ линіи пересѣченія данныхъ плоскостей, возставимъ въ этой послѣдней плоскости перпендикуляры къ MA и MA_1, то эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ, лежащей на линіи пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей. Перпендикуляръ, возставленный изъ этой послѣдней точки къ плоскости перпендикуляровъ MA и MA_1 и будетъ искомая линія.

Если перпендикуляры, возставленные изъ точекъ A и A_1 въ плоскости перпендикуляровъ MA и MA_1, не пересѣкутся, то не пересѣкутся и данныя плоскости.

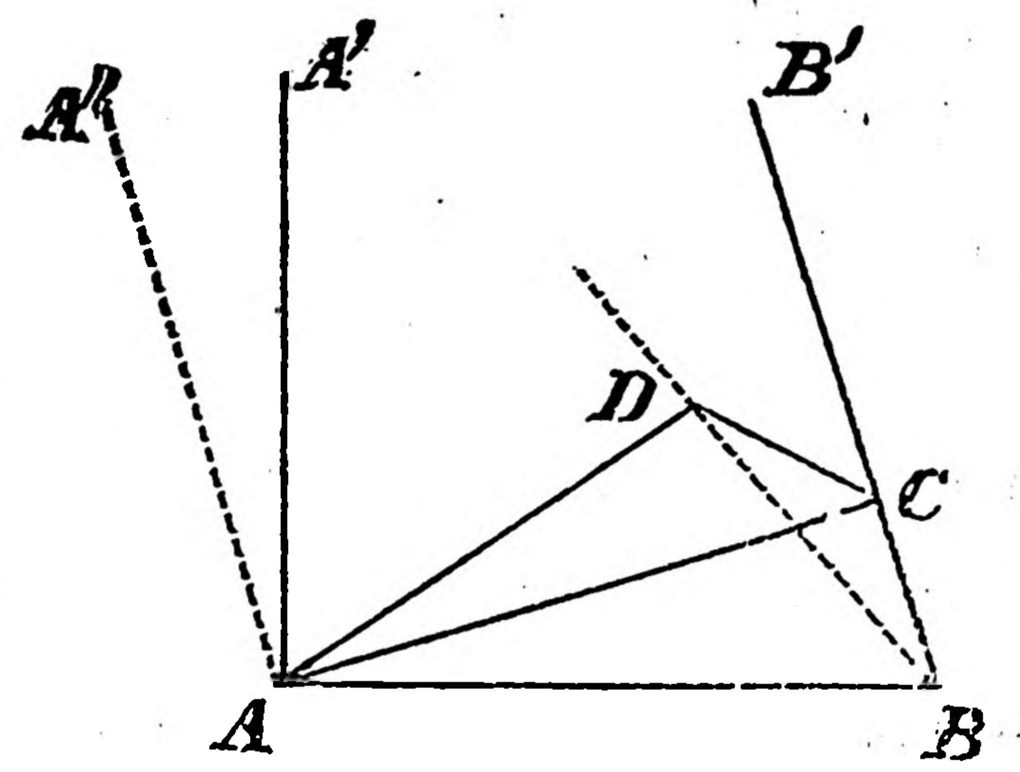
Предложеніе 18. Если три плоскости пересѣкаются по параллельнымъ прямымъ, то сумма внутреннихъ двугранныхъ угловъ не больше двухъ прямыхъ.

Доказат. Пусть AA', BB', CC' будутъ параллельныя линіи, пересѣченіе данныхъ плоскостей. Пусть A, B, C будутъ двугранные углы реберъ AA', BB', CC'. Чрезъ прямую AA' и линію DD', дѣлящую полосу между параллельными BB' и CC' пополамъ, проведемъ плоскость. Въ этой плоскости проведемъ линію EE', параллельную AA' такъ, чтобы линія DD' была средина линій AA' и EE'. На плоскости, проведенной чрезъ произвольную точку, перпендикулярно къ DD' образуется фигура, подобная фигурѣ (чер. 3), къ которой можно приложить тѣже разсужденія, замѣнивъ слова: уголъ, сторона, и треугольникъ, словами: двугранный уголъ, полоса...

Предложеніе 19. Если двѣ плоскости α и β, проходящія по параллельнымъ прямымъ AA' и BB', составляютъ съ плоскостью $A'ABB'$ двугранные углы такъ, что сумма двухъ внутреннихъ двугранныхъ угловъ, лежащихъ по одну сторону плоскости $A'ABB'$, меньше двухъ прямыхъ, то плоскости α и β встрѣтятся.

Доказат. 1) Пусть одинъ изъ двугранныхъ угловъ, напримѣръ плоскости α съ плоскостью $A'ABB'$, будетъ прямой, то уголъ плоскости β съ плоскостью $A'ABB'$ будетъ острый.

Фиг. 18.



Изъ точки A возставимъ перпендикуляръ AB къ AA' въ плоскости

$A'ABB'$ и опустимъ перпендикуляръ AC на BB'. Изъ точки C возставимъ перпендикуляръ CD къ BB' въ плоскости β, полученный уголъ ACD будетъ измѣрять наклоненіе плоскостей β и $A'ABB'$, слѣдовательно, будетъ острый. Изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AD на CD, то, очевидно, $AD<AC<AB$. Чрезъ точки A, B, D проведемъ плоскость γ, она встрѣтитъ плоскость α по линіи AA'', а плоскость β по линіи BD. Будемъ вращать плоскость γ около AB, то въ этомъ вращеніи линія AA'' опишетъ плоскость α, и когда AA'' совпадетъ съ AA', тогда BD упадетъ въ плоскость $A'ABB'$, а точка D упадетъ между AA' и BB'. Прямая BD, въ этомъ послѣднемъ положеніи, встрѣчаетъ прямую AA', слѣдовательно, прямая BD пересѣкаетъ прямую AA'' въ своемъ первоначальномъ положеніи. Такъ какъ эта точка пересѣченія лежитъ и въ плоскости α и въ плоскости β, то эти плоскости встрѣчаются.

2) Пусть двугранные углы плоскостей α и β съ плоскостью $A'ABB'$ будутъ острые или

3) Одинъ уголъ, напримѣръ, плоскости α съ $A'ABB'$ тупой, а другой острый.

Проведемъ чрезъ прямую BB' плоскость $\gamma\perp\alpha$, которая встрѣтитъ плоскость α по линіи $A_1A_1' \parallel AA' \parallel BB'$.

Въ случаѣ 2), двугранные углы плоскостей α и β съ γ будутъ первый прямой, а второй острый, слѣдовательно, по 1) случаю плоскости α и β пересѣкутся. Въ случаѣ 3) углы плоскостей α и β съ γ, первый будетъ прямой, а второй также острый, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, плоскости α и β встрѣтятся.

Слѣдствіе. Изъ предъидущаго выводимъ, что сумма внутреннихъ двугранныхъ угловъ, трехъ пересѣкающихся по параллельнымъ линіямъ плоскостей, равна двумъ прямымъ.

Предложеніе 20. Если на параллельныхъ $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, для данной точки A на прямой AA', опредѣлимъ на прямыхъ BB' и CC' точки B и C такъ, чтобы углы:

$$A'AB = B'BA, \quad A'AC = C'CA$$

то мы будемъ имѣть и уголъ (фиг. 19):

$$B'BC = C'CB.$$

Доказат. 1) Прямыя AA', BB', CC' не находятся въ одной плоскости.

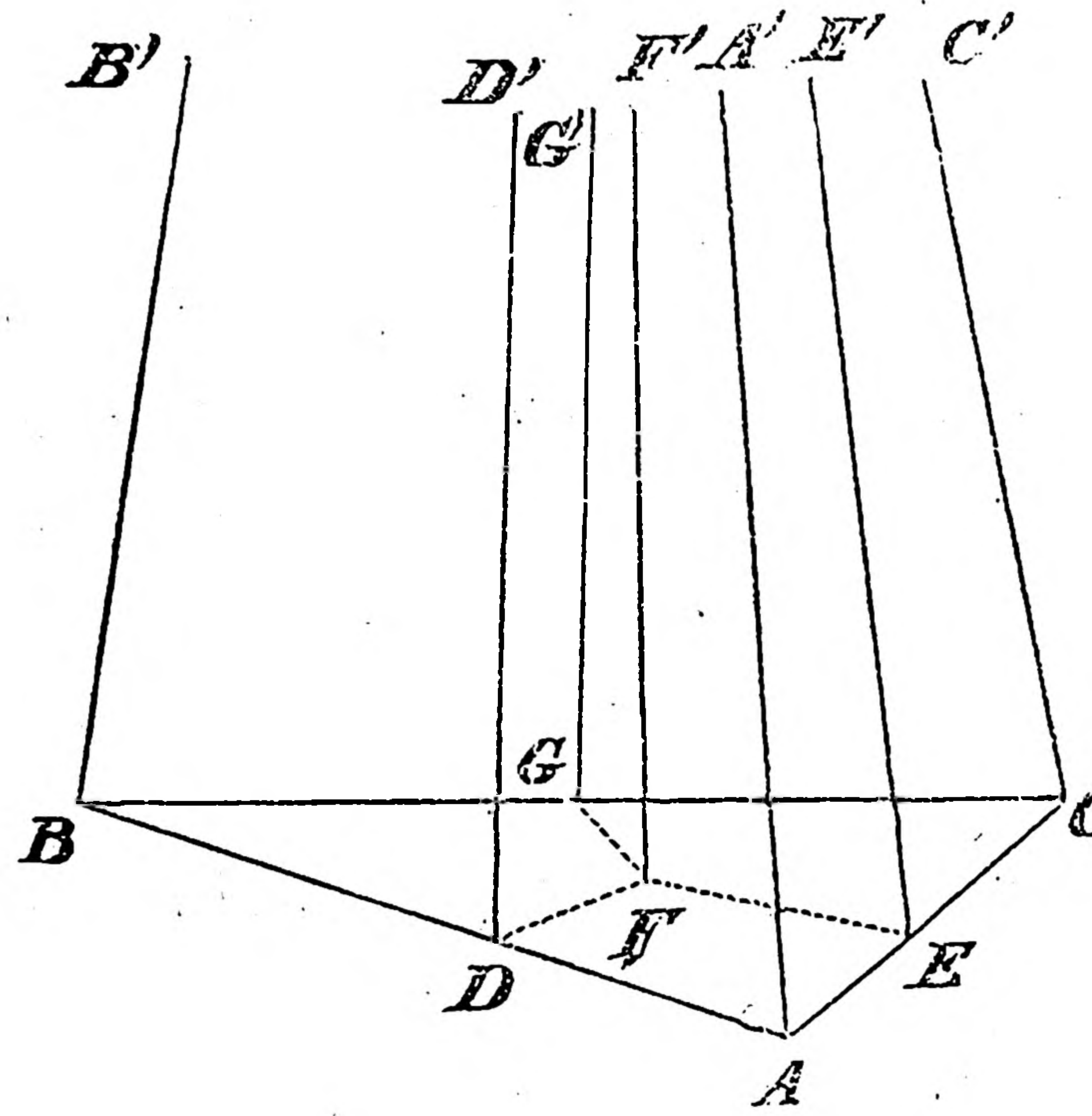
Проведемъ по линіямъ DD' и EE', дѣлящимъ полосы $BB'AA'$ и $A'ACC'$ пополамъ, плоскости перпендикулярныя къ плоскостямъ

$B'BAA'$ и $A'ACC'$. Эти плоскости пересѣкутся по линіи $FF' \parallel DD' \parallel EE'$. Если F будетъ точка встрѣчи прямой FF' съ плоскостью ABC, то мы будемъ имѣть:

$$BF = AF = CF$$

Линіи BF, AF, CF на чертежѣ не показаны.

Фиг. 19.



Проведемъ $FG \perp BC$, то $BG = GC$ и прямая BC будетъ перпендикулярна къ плоскости $F'FG$, слѣдовательно, будетъ перпендикулярна и къ прямымъ $GG' \parallel FF'$. Прямыя BB' и CC' параллельны прямой GG', слѣдовательно, GG' будетъ перпендикуляръ въ срединѣ G къ прямой BC, откуда мы имѣемъ $B'BC = C'CB$.

Слѣдствіе. Точка F есть центръ круга, проходящаго чрезъ три точки A, B, C. Одна изъ этихъ трехъ точекъ, напримѣръ A, на прямой AA', можетъ быть взята произвольно, остальныя B и C, на прямыхъ BB' и CC', опредѣляются затѣмъ вполнѣ.

2) Прямыя AA', BB', CC' находятся въ одной плоскости.

Проведемъ прямую $DD' \parallel AA'$ внѣ плоскости прямыхъ AA', BB', CC' и опредѣлимъ точку D такъ, чтобы уголъ $D'DA = A'AD$. Изъ равенства угловъ $D'DB = B'BD$ и $D'DC = C'CD$, слѣдуетъ равенство угловъ $B'BC = C'CB$.

Замѣтимъ, что предложенія 17, 18, 19 имѣютъ мѣсто независимо отъ аксіомы параллельныхъ линій.

Предѣльная поверхность.

Возьмемъ произвольно прямую AA' и на каждой прямой MM', параллельной AA', опредѣлимъ точку M соотвѣтственно данной точкѣ A на прямой AA' такъ, чтобы углы:

$$M'MA = A'AM$$

Геометрическое мѣсто точекъ M, опредѣленныхъ такимъ образомъ, относительно данной точки A, есть поверхность, которую называютъ *предѣльною*. Прямая AA' называется *осью* предѣльной поверхности и обратно, такимъ образомъ полученная поверхность называется *предѣльною поверхностью оси* AA'.

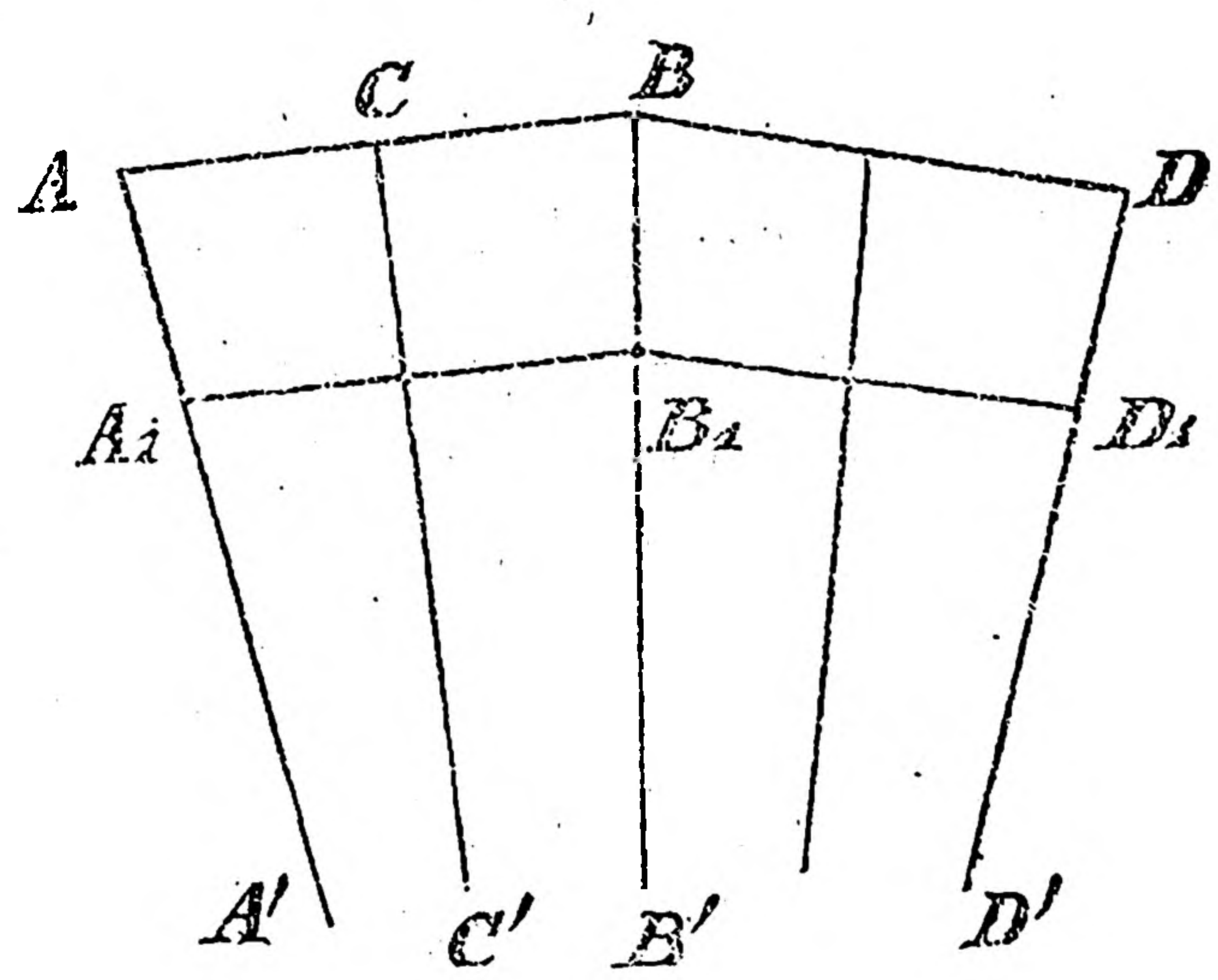
Пусть B и C будутъ двѣ, произвольно взятыя, точки на предѣльной поверхности, проведемъ BB' и $CC' \| AA'$, то (пред. 20) углы $B'BC = C'CB$, т. е. каждую изъ параллельныхъ BB', CC', . . , оси AA' можно разсматривать какъ *ось* той же предѣльной поверхности.

Предѣльная кривая.

Сѣченіе предѣльной поверхности плоскостью, проходящею по оси, есть кривая, которую называютъ *предѣльною линіею*.

Каждая предѣльная линія имѣетъ слѣдующее свойство: перпендикуляры, возставленные изъ срединъ хордъ, параллельны осямъ. На этомъ свойствѣ легко построить предѣльную линію на плоскости. Возьмемъ произвольную прямую AA' на плоскости и чрезъ данную точку A проведемъ прямую AB подъ произвольнымъ угломъ $A'AB$. На прямой AB возьмемъ

Фиг. 20.



отрѣзокъ AC такъ, чтобы перпендикуляръ CC' къ CB былъ параллеленъ AA', сдѣлаемъ $CB = AC$. Геометрическое мѣсто точекъ B, такимъ образомъ полученныхъ, будетъ предѣльная линія.

1) Если уголъ $A'AB$ будетъ прямой, то очевидно $AB = 0$, т. е. касательная къ предѣльной линіи, въ какой нибудь точкѣ A, будетъ перпендикулярна къ оси въ этой точкѣ. Каждая прямая не перпендикулярная къ оси въ точкѣ A, какъ напримѣръ AB, пересѣкаетъ предѣльную кривую въ двухъ точкахъ A и B.

2) Предѣльная кривая состоитъ изъ тождественныхъ частей, т. е.

каждая часть предѣльной линіи можетъ совмѣститься всѣми своими точками, гдѣ угодно, на остальной ея части. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ BD такъ, чтобы уголъ $DBB'=BAA'$ и $BD=AB$, то точка D будетъ также на предѣльной кривой.

Предѣльная линія расположена симметрично по обѣ стороны каждой оси.

Всѣ предѣльныя линіи тождественны, т. е. двѣ предѣльныя линіи совмѣщаются, если точка и ось въ этой точкѣ, одной изъ линій, совмѣстятся съ точкой и осью другой.

3) Если отъ осей AA', BB', DD' отложимъ равные отрѣзки AA_1, BB_1, DD_1, ..., то точки A_1, B_1, C_1, .. лежатъ также на предѣльной линіи. Въ самомъ дѣлѣ, фигуру $A'ABB'$ можно совмѣстить съ фигурою $B'BAA'$, отрѣзокъ A_1B_1 совмѣстится съ B_1A_1. Слѣдовательно, точка B_1 принадлежитъ предѣльной линіи оси A_1A'.

4) Кругъ, коего радіусъ возрастаетъ неопредѣленно, переходитъ въ предѣльную прямую.

Предложеніе 21. Сѣченіе предѣльной поверхности, съ какою нибудь плоскостью, не проходящею чрезъ ось, есть кругъ.

Доказат. Возьмемъ на линіи сѣченія три произвольныя точки A, B, C. Въ плоскости ABC мы найдемъ (см. пред. 20) такую точку F, что $FA=FB=FC$ и что перпендикуляръ FF' въ точкѣ F къ плоскости ABC будетъ параллеленъ AA', BB', CC', слѣдовательно, точка F будетъ центръ круга, проходящаго чрезъ точки A, B, C. Будемъ, теперь, вращать плоскость $F'FA$ около прямой $F'F$, прямая FA опишетъ плоскость ABC, а точка A опишетъ кругъ, проходящій чрезъ точки A, B, C и коего всѣ точки, очевидно, лежатъ на предѣльной поверхности, такъ какъ прямая AA' остается всегда параллельною FF'; кромѣ этихъ точекъ ни одна изъ точекъ плоскости не лежитъ на предѣльной поверхности (см. стр. 20).

Слѣдовательно предѣльная поверхность есть поверхность вращенія, которую можно еще получить, вращая предѣльную линію около одной изъ ея осей.

Сфера, коей радіусъ возрастаетъ неопредѣленно, переходитъ въ предѣльную поверхность.

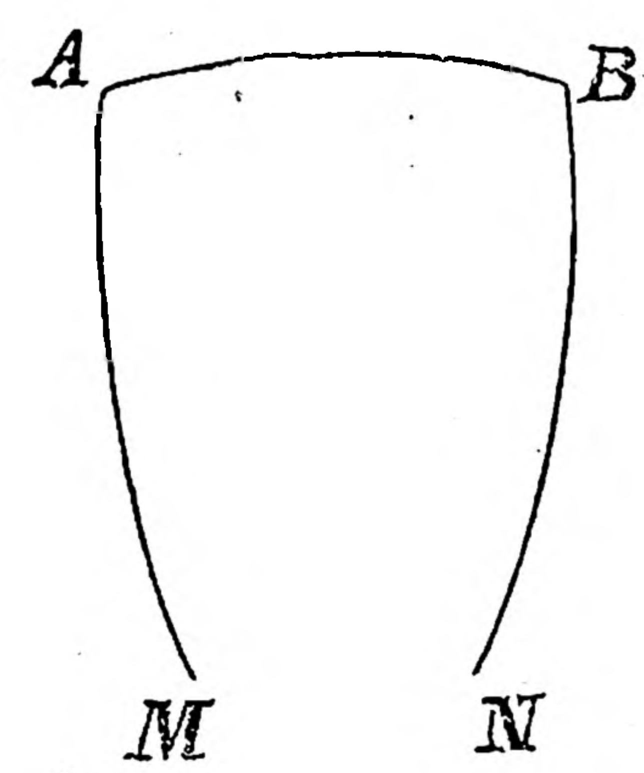
Свойства предѣльной поверхности.

Предложеніе 22. Двѣ точки на предѣльной поверхности вполнѣ опредѣляютъ предѣльную линію.

Предложеніе 23. Если сумма внутреннихъ угловъ, двухъ предѣльныхъ линій, пересѣченныхъ третьей, меньше двухъ прямыхъ угловъ, то такія предѣльныя линіи встрѣтятся.

Доказат. Плоскости предѣльныхъ линій AM и BN съ плоскостью предѣльной линіи AB, составляютъ углы, коихъ сумма меньше двухъ прямыхъ, обѣ плоскости (см. пред. 19) предѣльныхъ линій AM и BN пересѣкаются по прямой, слѣдовательно, предѣльныя линіи также пересѣкаются.

Фиг. 21.



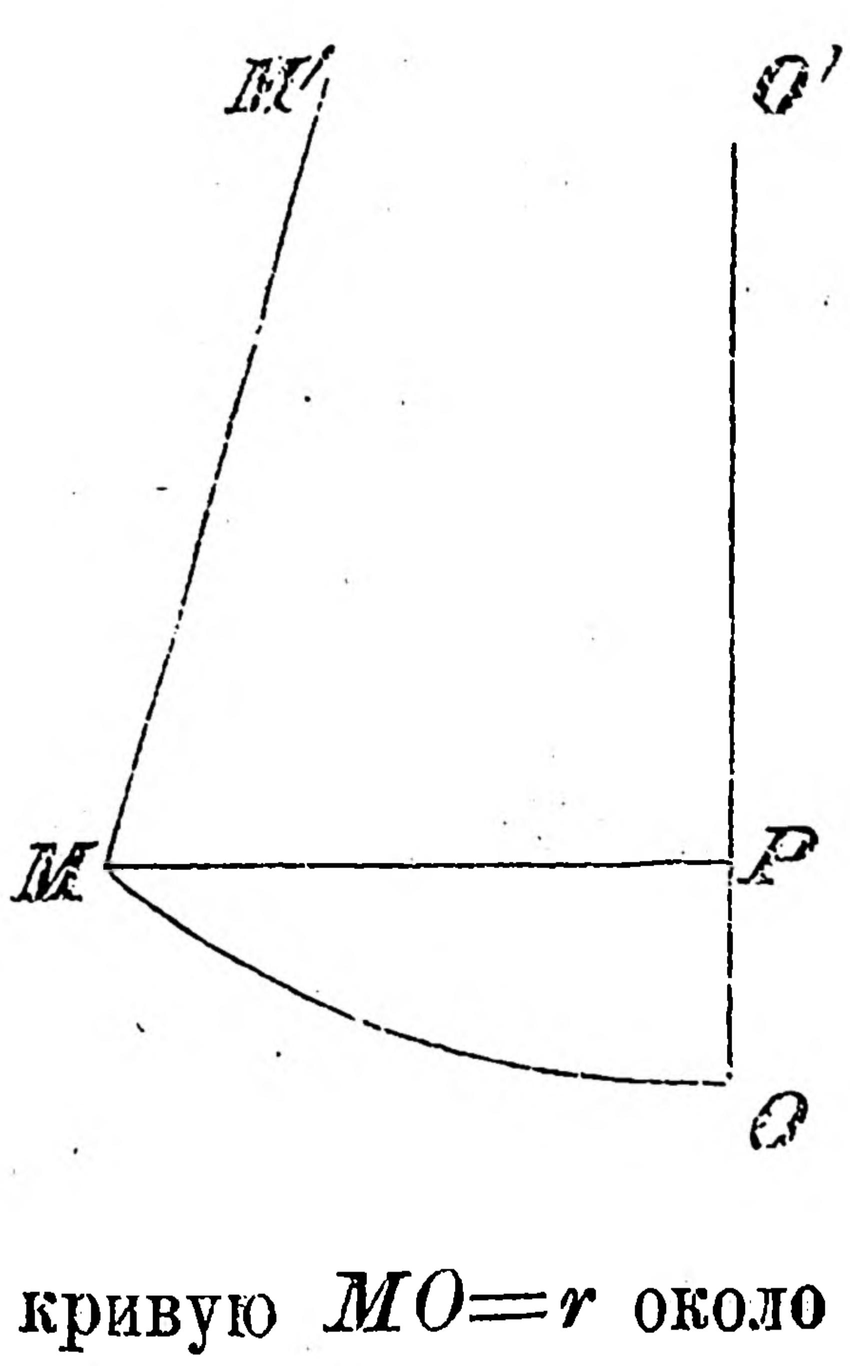
Изъ тождества частей предѣльной поверхности и предложеній 22 и 23, которыя суть Евклидовскія аксіомы на плоскости, слѣдуетъ, что геометрическая система на предѣльной поверхности есть система Евклидовская, на ней имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія:

1) Сумма угловъ въ треугольникѣ, коего стороны суть предѣльныя линіи, равна двумъ прямымъ.

2) Окружность круга, коего радіусъ r есть часть предѣльной линіи, равна $2\pi r$, гдѣ $\pi = 3,14159....$

Пусть O будетъ центръ круга на предѣльной поверхности, M произвольная точка окружности круга и $MM' \parallel OO'$.

Фиг. 22.



Вращая предѣльную кривую $MO = r$ около оси OO', получимъ окружность Опустимъ изъ точки M перпендикуляръ на ось OO', $MP = y$, этотъ перпендикуляръ опишетъ окружность ту-же самую. Если означимъ эту окружность символомъ *Ок.у*, то получимъ:

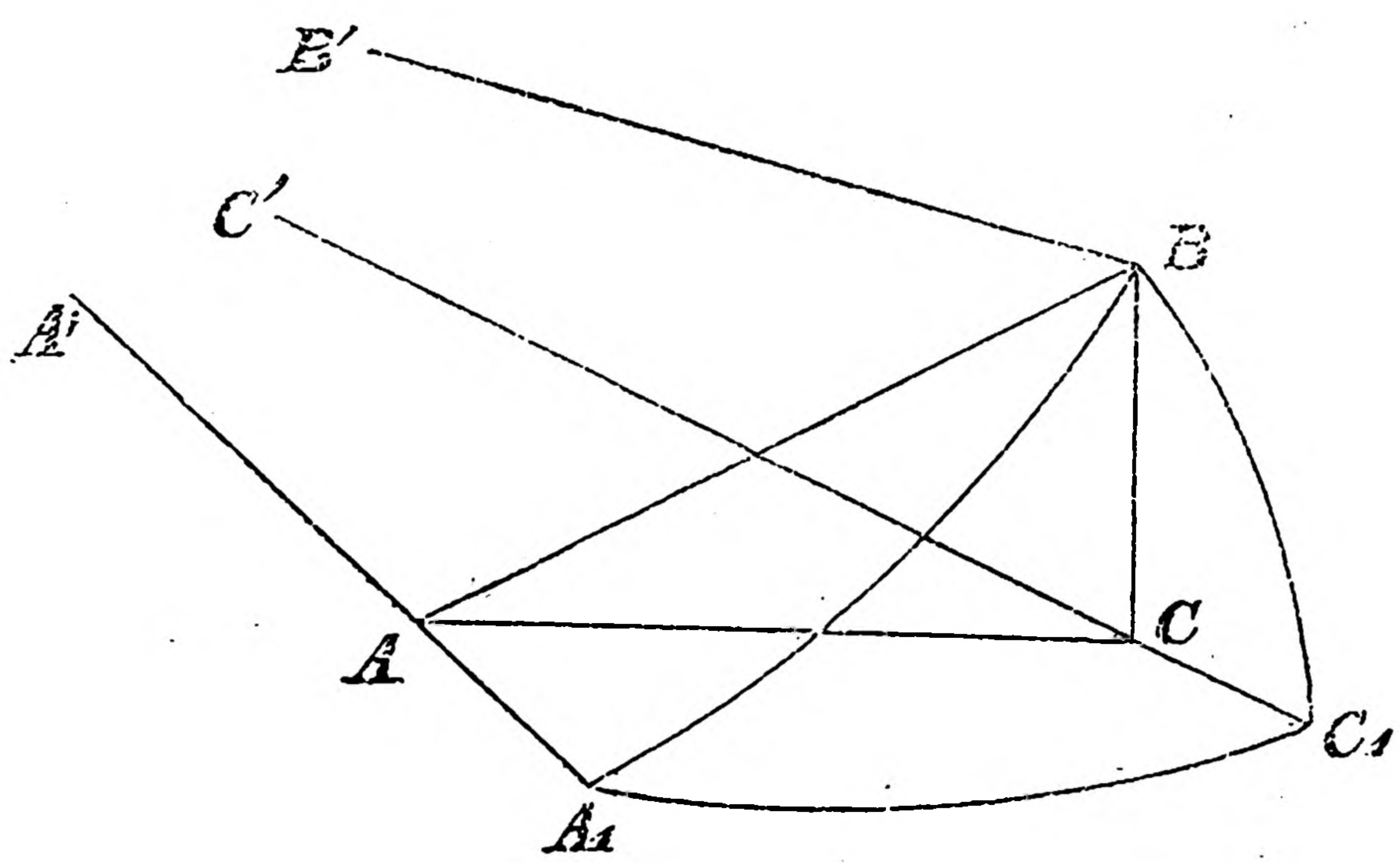
$$Ок.у=2\pi r.$$

Изъ этого видимъ, что въ Неевклидовской геометрической системѣ существуетъ поверхность, на которой имѣетъ мѣсто Евклидовская плоская геометрія и тригонометрія безъ исключеній.

Предложеніе 24. Во всякомъ треугольникѣ окружности круговъ, коихъ радіусы суть стороны треугольника, относятся между собою какъ синусы противулежащихъ угловъ.

Доказат. Пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ. Уголъ C прямой. Проведемъ въ точкѣ A или B, напримѣръ въ точкѣ A, перпендикуляръ AA' къ плоскости ABC, изъ точекъ B и C проведемъ прямыя BB', CC' параллельныя $A'A$.

Фиг. 23.



Чрезъ точку B, принимая прямую BB' за ось, проведемъ предѣльную поверхность, которая пересѣчетъ прямыя AA' и CC' въ точкахъ A_1 и C_1. Такимъ образомъ, на предѣльной поверхности, получимъ треугольникъ A_1BC_1, въ которомъ уголъ $A_1=A$. Слѣдовательно:

$$BC_1=A_1B\sin A$$

откуда:

$$2\pi\, BC_1=2\pi\, A_1B\sin A$$

Но окружности круговъ $2\pi BC_1$, и $2\pi A_1B$ на предѣльной поверхности равны окружностямъ круговъ *Ок.ВС, Ок.АВ* плоскихъ круговъ, коихъ радіусы суть BC и AB. Слѣдовательно:

$$Ок.BC=Ок.AB\sin A$$

Возьмемъ теперь какой нибудь треугольникъ ABC, коего стороны суть a, b, c, а противулежащіе сторонамъ углы A, B, C; поступая, какъ въ плоской тригонометріи, получимъ слѣдующую зависимость:

$$Ок.a : Ок.b : Ок.c = \sin A : \sin B : \sin C$$

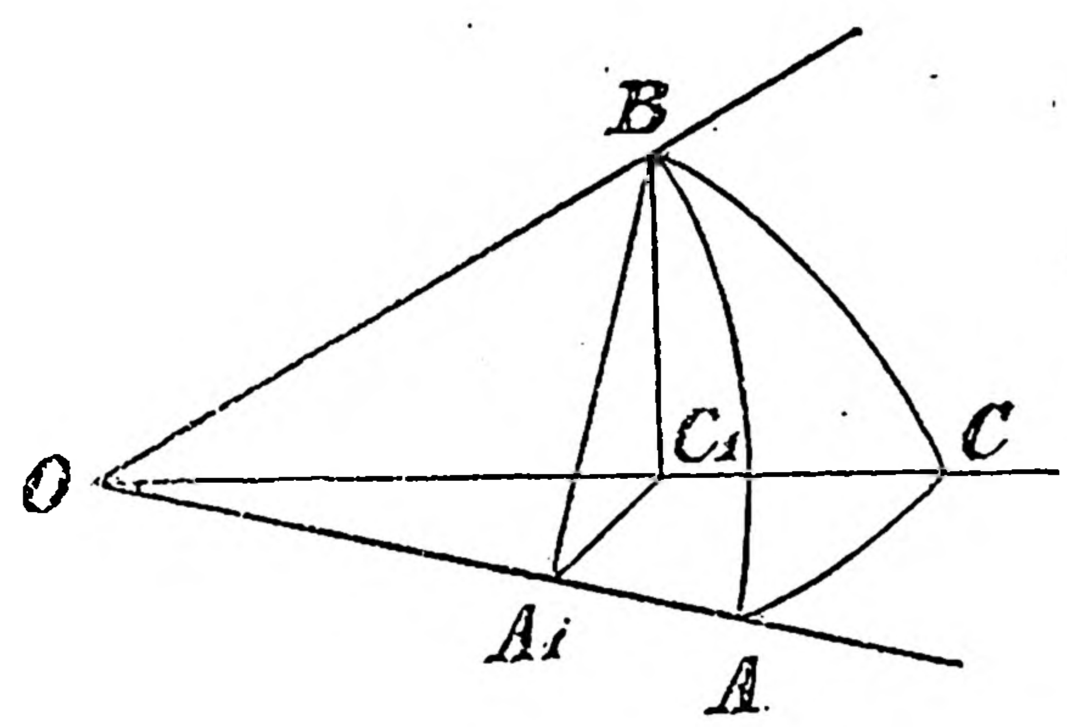
гдѣ $Ок.a$, $Ок.b$, $Ок.c$ суть окружности плоскихъ круговъ, коихъ радіусы суть a, b, c.

Предложеніе 25. Въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, въ которомъ уголъ C прямой, а стороны суть a, b, c мы имѣемъ:

$$\sin a = \sin c \sin A.$$

Доказат. Чрезъ одну изъ точекъ A или B, напримѣръ B, проведемъ прямую $BA_1 \perp OA$ и прямую $BC_1 \perp OC$; соединимъ точки A_1 и C_1, полу-

Фиг. 24.



чимъ, такимъ образомъ, прямоугольный треугольникъ A_1BC_1, въ которомъ уголъ C_1 прямой, а уголъ $A_1 = A$, слѣдовательно (см. пред. 24) имѣемъ:

$$Ок.BC_1 = Ок.BA_1 \sin A$$

Изъ треугольниковъ OBA_1 и OBC_1 слѣдуетъ:

$$Ок.BA_1 = Ок.OB \sin c, \quad Ок.BC_1 = Ок.OB \sin a$$

подставляя въ предъидущее уравненіе, получимъ:

$$\sin a = \sin c \sin A$$

Какъ извѣстно, изъ этой формулы вытекаетъ вся сферическая тригонометрія, которая, слѣдовательно, независитъ отъ аксіомы параллельныхъ линій.

Зависимость между дугами двухъ предѣльныхъ линій.

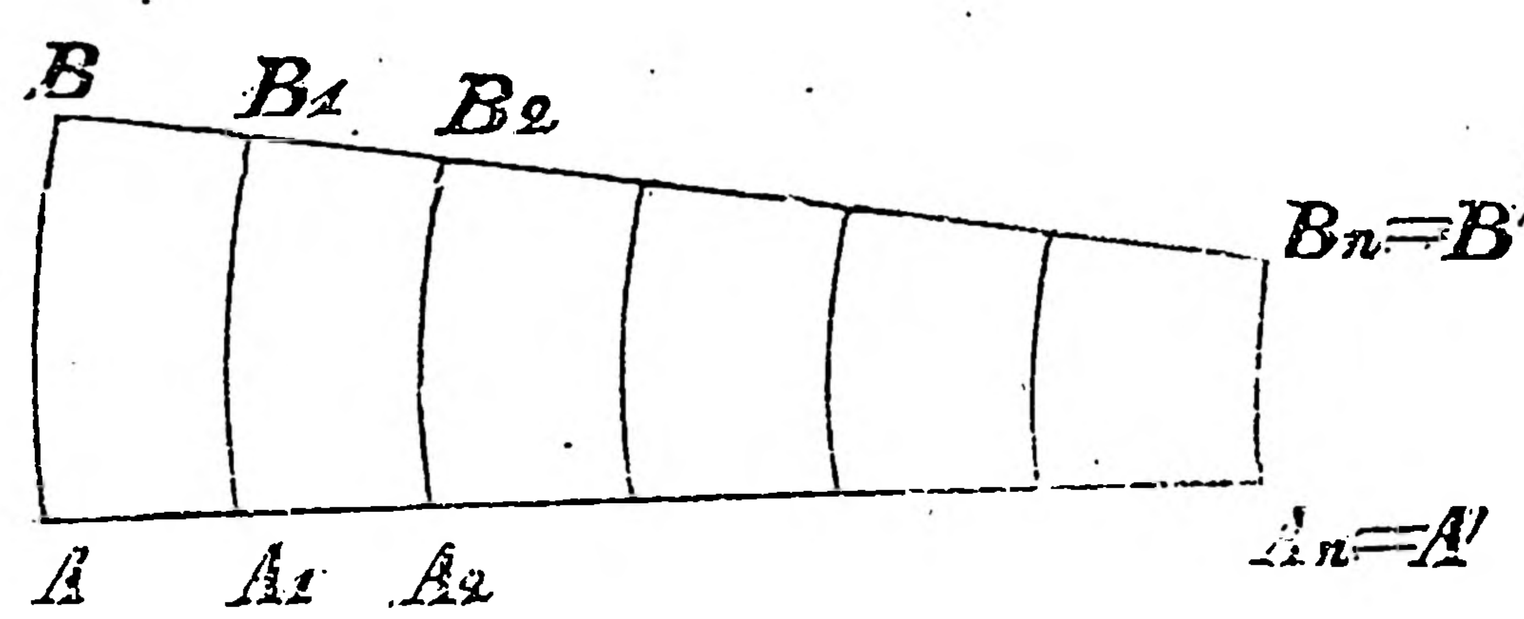
Если AD и A_1D_1 будутъ двѣ дуги предѣльныхъ линій, лежащихъ между двумя осями AA' и DD', то равнымъ хордамъ AB и BD, первой изъ нихъ, будутъ соотвѣтствовать равныя хорды A_1B_1, A_1D_1 второй, слѣдовательно (см. фиг. 20):

$$AA_1=BB_1=DD_1$$

Раздѣлимъ предѣльную дугу AM на m равныхъ частей, то осями, проведенными въ точкахъ дѣленія, и дуга $A'M'$ раздѣлится на столько же равныхъ частей, слѣдовательно, отношеніе двухъ такихъ дугъ не зависитъ отъ величины дугъ, а зависитъ отъ разстоянія AA' этихъ дугъ.

Чтобы опредѣлить это отношеніе, раздѣлимъ разстояніе AA' (фиг. 25) на n равныхъ частей; пусть $AA_1=A_1A_2 \,.\,.= A_{n-1}A'=a$, и $AB=s$, $A_1B_1=s_1$,

Фиг. 25.



$A_2B_2=s_2, \,.\,.\,, A'B'=s_n$, суть дуги, соотвѣтствующія точкамъ дѣленія $A, A_1, A_2, \,.\,.$ Мы сказали, что отношеніе между дугами зависитъ только отъ разстоянія между ними, слѣдовательно:

$$\frac{s}{s_1}=\frac{s_1}{s_2}=\frac{s_2}{s_3}=\,.\,.=\frac{s_{n-1}}{s_n}=\lambda$$

глѣ λ есть отношеніе, соотвѣтствующее разстоянію a. Перемножая эти n уравненій мы получимъ:

$$\frac{s}{s_n}=\lambda$$

Пусть k будетъ разстояніе двухъ предѣльныхъ дугъ, коихъ отношеніе равно данному числу e, и пусть $k=ma$, то:

$$e=\lambda^m \quad \text{и} \quad \lambda=e^{\frac{1}{m}}$$

слѣдовательно:

$$\frac{s}{s_n}=e^{\frac{n}{m}}=e^{\frac{na}{ma}}=e^{\frac{x}{k}}$$

Разстояніе k можно такъ выбрать, что e будетъ основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ:

$$e=2,718281828459.....$$

Слѣдствіе. Положимъ:

$$e^{\frac{x}{k}}=\zeta,\quad e^{\frac{y}{k}}=\eta$$

перемножая и раздѣляя, найдемъ:

$$\zeta\eta=e^{\frac{x+y}{k}},\quad \zeta:\eta=e^{\frac{x-y}{k}}$$

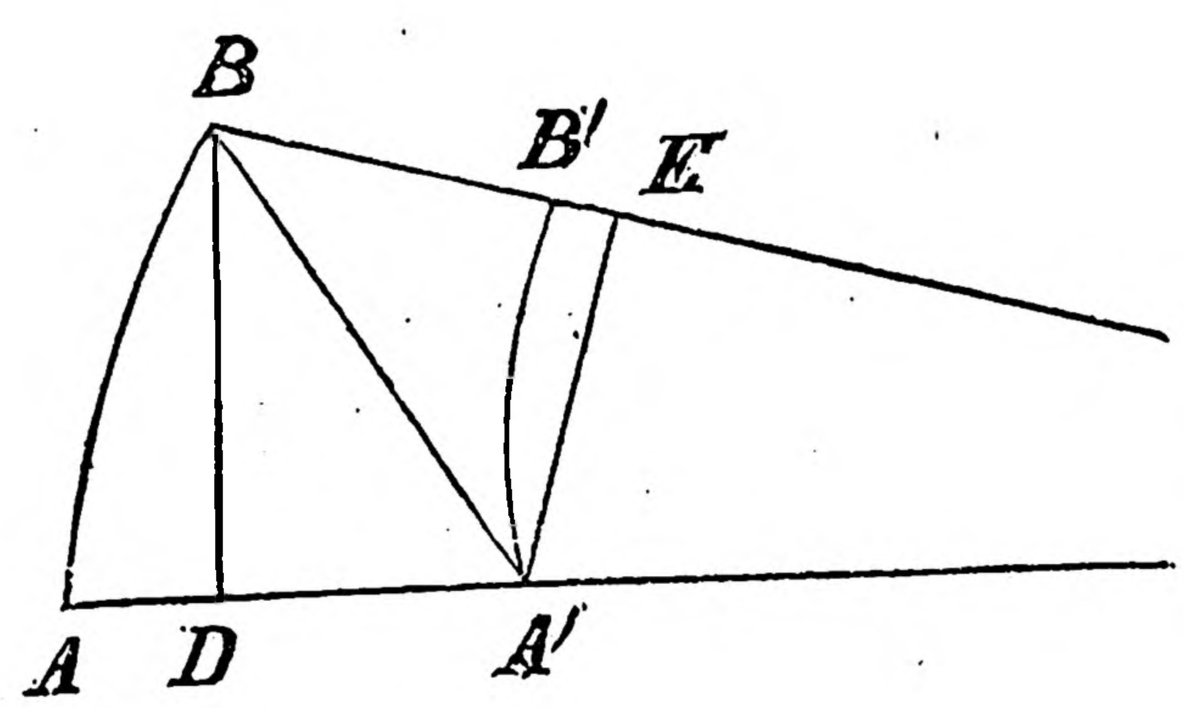
$\zeta\eta$ и $\zeta:\eta$ суть отношенія дугъ, соотвѣтствующія разстояніямъ $x+y$ и $x-y$. Если x выразить въ частяхъ k, то будемъ имѣть $s=s_n e^x$.

Предложеніе 26. Пусть AB и $A'B'$ будутъ двѣ предѣльныя дуги между двумя осями AA' и BB', то ихъ отношеніе будетъ:

$$AB:A'B'=\sin AA'B:\sin A'BB'$$

Доказат. Если проведемъ прямыя $BD\perp AA'$ и $A'E\perp BB'$, то будемъ имѣть:

Фиг. 26.



$$Ок.BD=Ок.A'B\sin AA'B,\quad Ок.A'E=Ок.A'B\sin A'BB'.$$

Но:

$$Ок.BD=2\pi AB,\quad Ок.A'E=2\pi A'B'$$

подставляя, получимъ требуемую пропорцію.

Зависимость между разстояніемъ и угломъ параллельности.

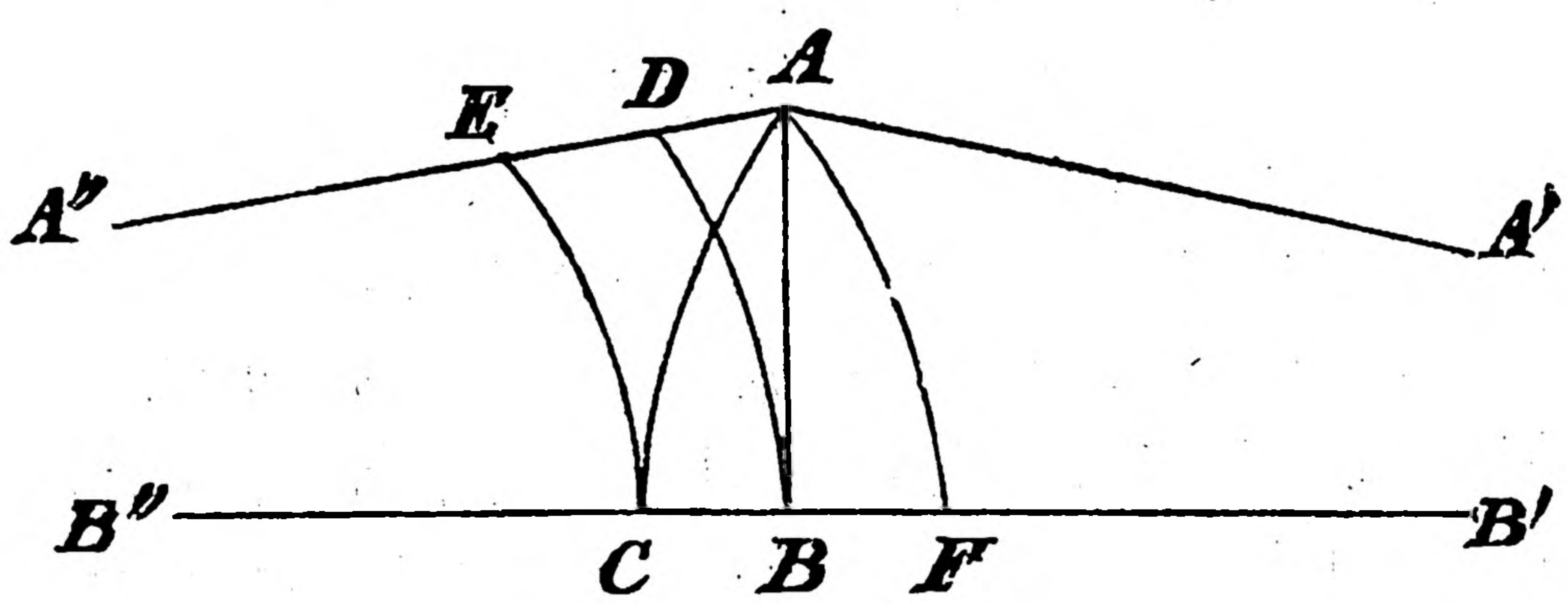
Предложеніе 27. Если p есть разстояніе какой нибудь точки отъ прямой и $\Pi(p)$ уголъ параллельности, то:

$$\cot g \tfrac{1}{2} \Pi(p) = e^{\frac{p}{k}}$$

Доказат. 1) Пусть A будетъ точка внѣ прямой $B''B'$, $AB \perp B'B''$, $AA' \parallel BB'$, $AA'' \parallel BB''$, и пусть AC, BD, CE будутъ предѣльныя линіи относительно осей AA', BB'', CB''; то $AD = DE = BC$, такъ какъ, проведя предѣльную дугу AF къ оси AA'', мы имѣемъ:

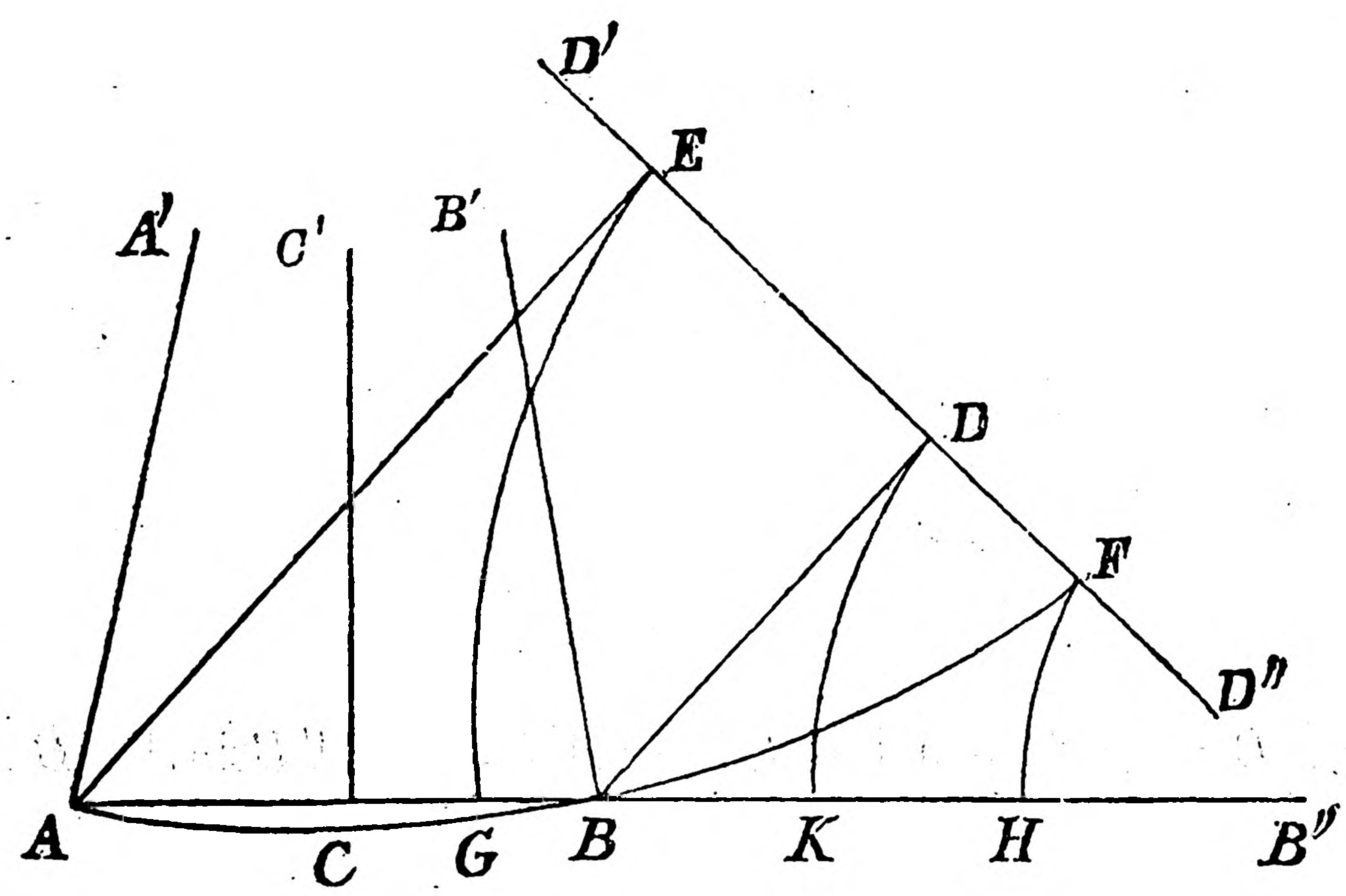
$$CB = BF, \quad CB = ED, \quad BF = DA$$

Фиг. 27.



2) Пусть $AA' \parallel BB'$ и $A'AB = B'BA$, и C средина прямой AB, то $CC' \perp AB$ будетъ параллельна къ AA' и BB'.

Фиг. 28.



Пусть BB'' будетъ продолженіе AB, а BD прямая, дѣлящая уголъ $B'BB''$ пополамъ. Мы можемъ такъ опредѣлить разстояніе BD, что

$D'D'' \perp BD$ будетъ параллельная въ одномъ направленіи DD', а въ другомъ направленіи DD'', т. е.

$$BB' \parallel DD', \quad BB'' \parallel DD''$$

слѣдовательно, также $AB'' \parallel DD''$; и какъ $AA' \parallel BB'$, то $AA' \parallel D'D''$. Слѣдовательно, прямая $AE \perp D'D''$ дѣлитъ уголъ $A'AB$ пополамъ.

3) Опишемъ предѣльную линію на AA' какъ на оси, эта кривая пройдетъ чрезъ точку B и встрѣтитъ прямую $D'D''$ въ точкѣ, напримѣръ, F. Предѣльныя линіи, описанныя на ED'' и FD'' какъ на осяхъ, встрѣтятъ прямую AB'' въ точкахъ G и H, слѣдовательно:

$$AH = 2AG = 2GH$$

Пусть еще K будетъ точка встрѣчи прямой AB'' съ предѣльною линіею DK оси DD'', то также будемъ имѣть:

$$BH = 2BK = 2KH$$

Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$AB = AH - BH = 2(AG - BK)$$

4) Полагая:

$$AB = 2p, \quad AG = x, \quad BK = y$$

имѣемъ:

$$p = x - y$$

Изъ предложенія 26 слѣдуетъ, что отношенія предѣльныхъ дугъ, соотвѣтствующія разстояніямъ $AG = x$ и $BK = y$, будутъ:

$$e^{\frac{x}{k}} = \sin\tfrac{\pi}{2} : \sin\tfrac{1}{2}\,\Pi(p) = 1 : \sin\tfrac{1}{2}\,\Pi(p)$$

$$e^{\frac{y}{k}} = \sin\tfrac{\pi}{2} : \sin\tfrac{1}{2}[2\pi - \Pi(p)] = 1 : \cos\tfrac{1}{2}\,\Pi(p)$$

откуда:

$$e^{\frac{p}{k}} = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\,\Pi(p)$$

Слѣдствіе. Изъ тригонометрическихъ уравненій:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{1+\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

слѣдуетъ:

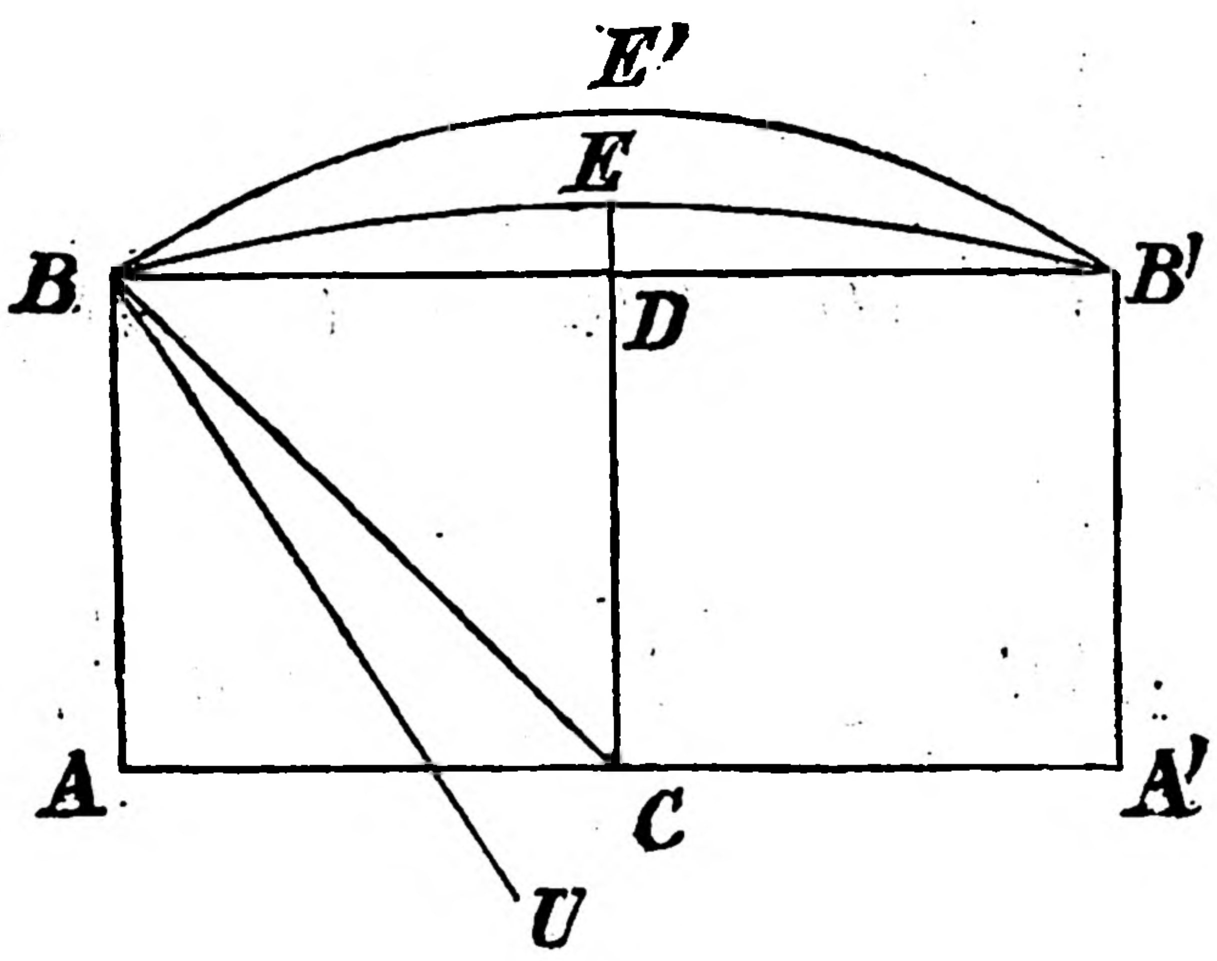
$$\sin\Pi(p) = \frac{2}{e^{\frac{p}{k}}+e^{\frac{-p}{k}}}, \quad \cos\Pi(p) = \frac{e^{\frac{p}{k}}-e^{\frac{-p}{k}}}{e^{\frac{p}{k}}+e^{\frac{-p}{k}}}.$$

Линіи и поверхности равнаго разстоянія.

Мы уже выше видѣли, что линія BEB', коей точки находятся въ равномъ разстояніи h отъ данной прямой AA', есть кривая, имѣющая слѣдующія свойства:

Пусть B и B' будутъ двѣ точки этой кривой, BA и $B'A'$ перпендикуляры изъ точекъ B и B' на прямую AA'.

Фиг. 29.



Пусть E будетъ точка на кривой BB', соотвѣтствующая срединѣ C прямой AA'; перпендикуляръ $CE=h$ встрѣчаетъ прямую BB' въ точкѣ D, такъ что $CE>CD$. Углы B и B', хорды BB' съ перпендикулярами BA и $B'A'$, будутъ острые. Если точка B' будетъ приближаться неопредѣленно къ точкѣ B, то углы B и B' будутъ увеличиваться, а прямая BB' будетъ приближаться къ касательной въ точкѣ B. Слѣдовательно, касательная въ точкѣ B перпендикулярна къ AB. Пусть $BU \parallel EC$, то BU будетъ лежать ближе къ EC нежели къ AB, AB есть прямая, не встрѣчающая прямой DC. Изъ этого видимъ, что предѣльная кривая $BE'B'$, проходящая чрезъ точки B и B', которой касательная въ точкѣ B перпендикулярна къ BU, лежитъ внѣ кривой равнаго разстоянія BB'.

Вращая кривую, равнаго разстоянія, около прямой CE какъ около оси, она опишетъ поверхность, коей точки будутъ въ равномъ разстояніи h, отъ плоскости, описанной прямою AC. Эта поверхность называется *поверхностью равнаго разстоянія* h. Каждая точка кривой BEB', напримѣръ B, опишетъ окружность, коей всѣ точки будутъ находиться въ равномъ разстояніи h, отъ окружности, описанной точкою A.

Отношеніе части кривой равнаго разстоянія къ части, соотвѣтствующей прямой, не зависитъ отъ величины этихъ частей, слѣдовательно можно вмѣсто этихъ частей поставить окружности, описанныя этими частями.

Первая окружность$=Ок.BD$, а вторая$=Ок.AC$.

Но мы имѣемъ:

$$Ок.BD=Ок.BC\sin BCE, \qquad Ок.AC=Ок.BC\sin ABC$$

и искомое отношеніе будетъ:

$$Ок.BD : Ок.AC=\sin BCE : \sin ABC$$

Отодвигая точку C все болѣе и болѣе отъ точки A, уголъ ACB будетъ уменьшаться, а уголъ BCE будетъ увеличиваться и когда точка C отодвинется на безконечное разстояніе, то $BCE=d$, а $ABC=\Pi(AB)=\Pi(h)$. Слѣдовательно, выше написанное постоянное отношеніе части кривой, равнаго разстоянія h, къ соотвѣтствующей части прямой, будетъ:

$$1 : \sin\Pi(h)=\tfrac{1}{2}(e^{\frac{h}{k}}+e^{\frac{-h}{k}})$$

Когда $h=0$, то кривая BEB' совпадетъ съ прямою AA'.

Оставимъ точки B и B' на мѣстѣ и будемъ строить чрезъ нихъ кривыя равныхъ разстояній для всѣхъ значеній h отъ $h=0$ до $h=\infty$, то эти кривыя будутъ все болѣе и болѣе выгнуты и при $h=\infty$ переходятъ въ предѣльную кривую, коей ось будетъ $BU \parallel DC$, такъ какъ при $h=\infty$ отношеніе:

$$1 : \sin\Pi(h)=\operatorname{cosec}\Pi(h)=\infty$$

т. е. $AA'=0$, слѣдовательно, прямыя AB и $B'A'$ встрѣчаются на безконечности.

Слѣдствіе. Такъ какъ $BCE=\frac{\pi}{2}-ACB$, то предъидущее отношеніе можно написать такъ:

$$\cos ACB : \sin ABC=\tfrac{1}{2}(e^{\frac{h}{k}}+e^{\frac{-h}{k}})$$

т. е. въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, въ которомъ уголъ A прямой, если сторона $AB=h$ остается постоянною, то остается постояннымъ также и отношеніе:

$$\cos ACB : \sin ABC = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{h}{k}} + e^{\frac{-h}{k}})$$

Окружность круга.

Если $AB \perp AC$ (фиг. 30), то для произвольной точки C, на прямой AC, вслѣдствіе выше найденнаго, мы имѣемъ:

$$\cos ACB : \sin ABC = \cos AC_1B : \sin ABC_1$$

или

$$\cos ACB : \cos AC_1B = \sin ABC : \sin ABC_1$$

но мы еще имѣемъ:

$$Ок.AC : Ок.AB = \sin ABC : \sin ACB$$

$$Ок.AC_1 : Ок.AB = \sin ABC_1 : \sin AC_1B$$

раздѣляя, найдемъ:

$$Ок.AC : Ок.AC_1 = \frac{\sin ABC}{\sin ABC_1} : \frac{\sin ACB}{\sin AC_1B}$$

или, въ силу предъидущихъ уравненій:

$$Ок.AC : Ок.AC_1 = \operatorname{cotg} ACB : \operatorname{cotg} AC_1B$$

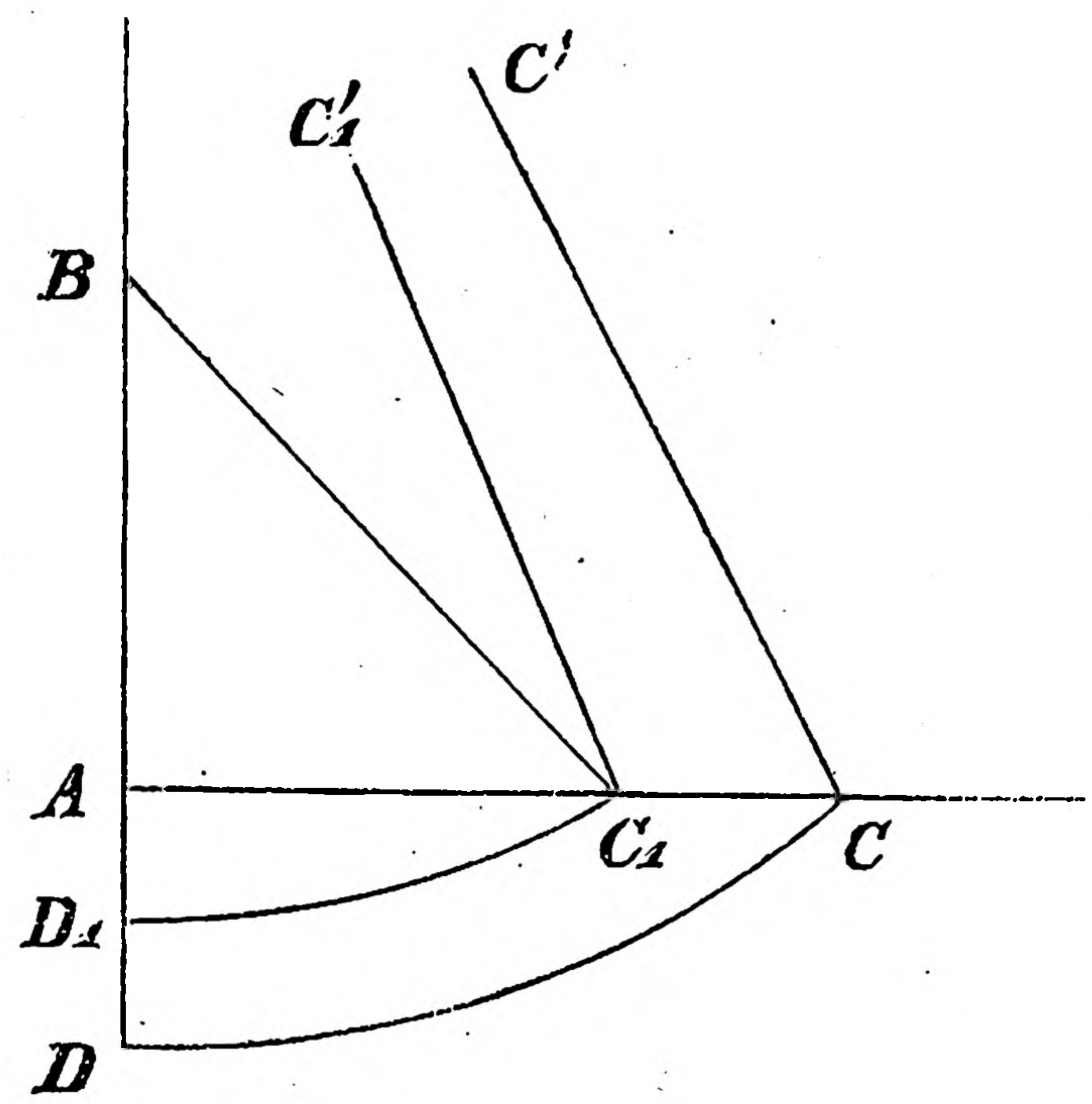
Опишемъ предѣльныя дуги CD и C_1D_1 на прямыхъ CC' и $C_1C_1' \parallel AB$ какъ осяхъ, то отношеніе этихъ дугъ будетъ:

$$2\pi CD : 2\pi C_1D_1 = Ок.AC : Ок.AC_1$$

слѣдовательно:

$$CD : C_1D_1 = \operatorname{cotg} ACB : \operatorname{cotg} AC_1B$$

Фиг. 30.



Полагая для краткости:

$$AC=y,\quad CD=r,\quad ACB=\varphi$$

$$AC_1=y_1,\quad C_1D_1=r_1,\quad AC_1B=\varphi$$

слѣдовательно:

$$Oy : Oy_1=r : r_1=\text{cotg}\varphi : \text{cotg}\varphi_1.$$

Положимъ $AB=\infty$, то углы φ и φ_1 сдѣлаются углами параллельности ACC' и AC_1C_1', соотвѣтствующими разстояніямъ y и y_1, слѣдовательно:

$$r : \text{cotg}\Pi(y)=r_1 : \text{cotg}\Pi(y_1)=C$$

гдѣ C есть постоянное число. Отсюда слѣдуетъ:

$$r=C\,\text{cotg}\Pi(y)=\tfrac{C}{2}\,(e^{\frac{y}{k}}-e^{\frac{-y}{k}}).$$

Чтобы опредѣлить постоянное C, замѣтимъ, что отношеніе:

$$\frac{r}{y}=\frac{C\,\text{cotg}\Pi(y)}{y}$$

при $y=0$ дѣлается $=1$, слѣдовательно для $y=0$:

$$C=\frac{y}{\text{cotg}\Pi(y)}$$

Но мы имѣемъ:

$$\frac{\cot g \Pi(y)}{y} = \frac{1}{k} + \frac{y^2}{1.2.3.k^3} + \ldots,$$

слѣдовательно при $y=0$, $C=k$, и

$$Ок.y = k\pi \left(e^{\frac{y}{k}} - e^{\frac{-y}{k}}\right)$$

Задача 1. Чрезъ данную точку B, внѣ данной прямой AC, провести параллельную линію BG прямой AC, т. е. по данному разстоянію AB найти соотвѣтствующій уголъ параллельности?

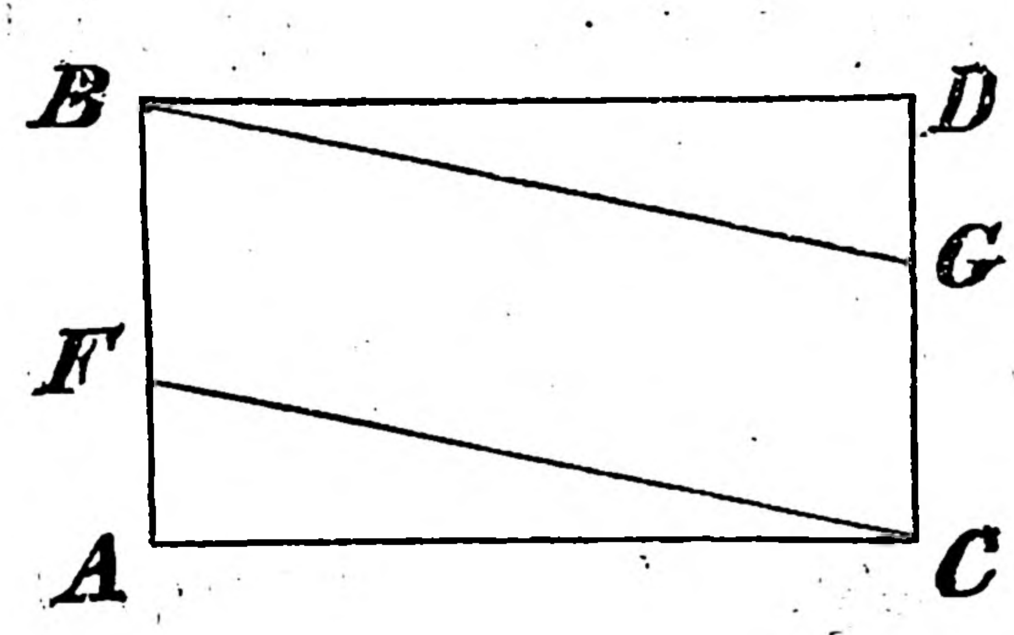
Рѣшеніе. Пусть $BA \perp AC$, $BD \perp BA$, D произвольная точка на прямой BD и $DC \perp AC$, то мы имѣемъ (см. стр. 37).

$$Ок.BD : Ок.AC = 1 : \sin \Pi(h)$$

гдѣ $h=AB$ разстояніе точки B отъ прямой AC, а $\Pi(h)$ уголъ параллельности.

Такъ какъ $1 > \sin \Pi(p)$, то $BD > AC$.

Фиг. 31.



Изъ точки C радіусомъ BD опишемъ кругъ, который встрѣтитъ прямую AB въ точкѣ F. Изъ треугольника ACF имѣемъ:

$$Ок.CF : Ок.CA = 1 : \sin AFC$$

слѣдовательно:

$$\Pi(h) = AFC$$

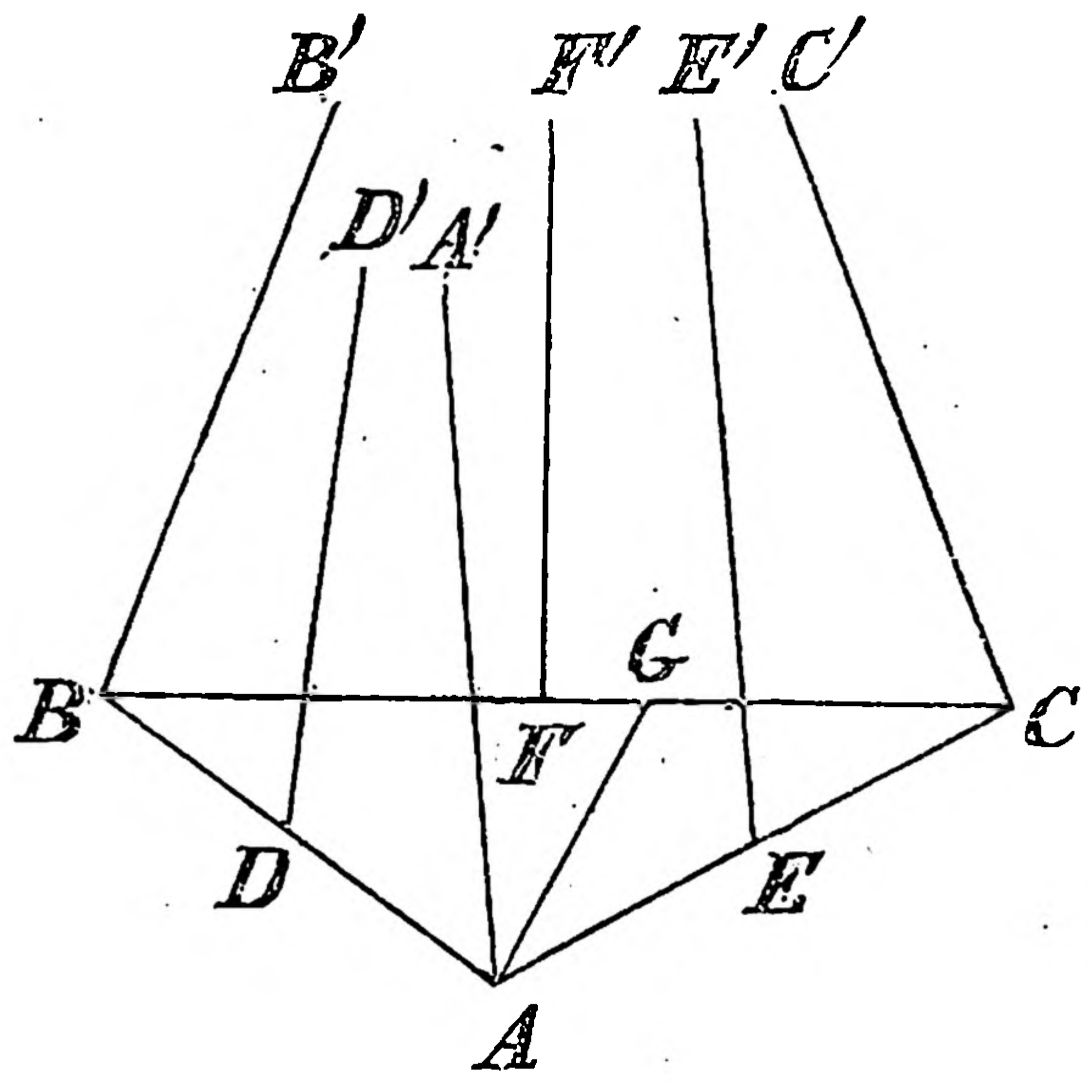
Изъ точки B проведемъ прямую BG такъ, чтобы уголъ $ABG = AFC$, то $BG \parallel AC$.

Задача 2. По данному углу параллельности найти соотвѣтствующее разстояніе?

Рѣшеніе. Если два изъ перпендикуляровъ DD', EE' FF', возставленныхъ изъ срединъ сторонъ AB, AC, BC треугольника ABC, будутъ параллельны, то и всѣ три будутъ параллельны.

1) Чрезъ вершины A,B,C треугольника ABC проведемъ параллельныя AA', BB', CC', къ параллельнымъ перпендикулярамъ, DD' и EE', то, соображаясь съ предл. 20, 2) мы увидимъ, что и третій перпендикуляръ будетъ параллеленъ двумъ первымъ.

Фиг. 32.



2) Пусть $2a$, $2b$, $2c$ будутъ стороны противулежащія угламъ A,B,C, и A наибольшій изъ угловъ, то, въ этомъ случаѣ, мы получимъ слѣдующія уравненія между углами и сторонами:

$$A = \Pi(b) + \Pi(c)$$
$$B = \Pi(c) - \Pi(a)$$
$$C = \Pi(b) - \Pi(a)$$

3) Проведемъ AG такъ чтобы уголъ $A'AG = B'BC = \Pi(a)$, то въ треугольникѣ ACG, такъ какъ $GAC = \Pi(b) - \Pi(a) = C$, $AG = CG$.

Изъ этихъ трехъ предложеній, непосредственно, слѣдуетъ рѣшеніе нашей задачи:

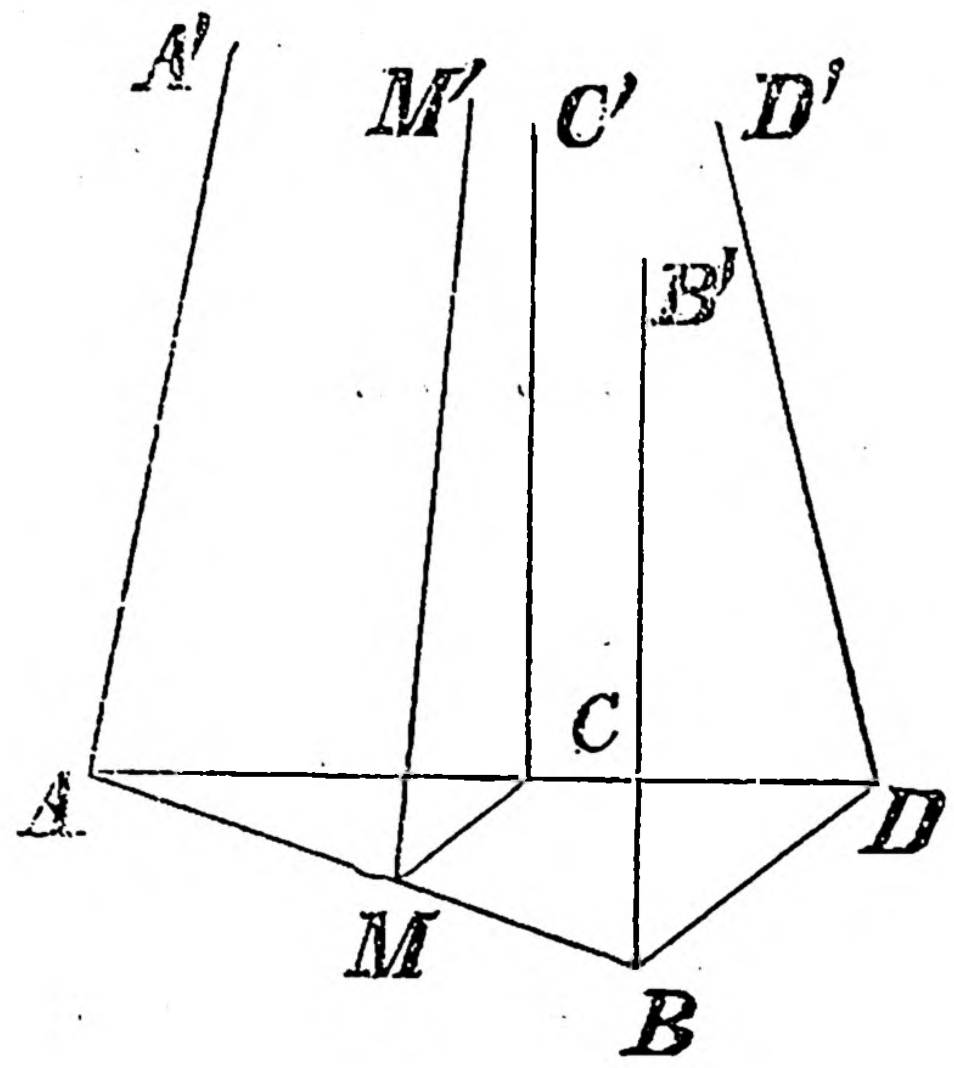
Пусть $B'BC$ будетъ данный уголъ, то, съ помощью предъидущихъ предложеній, можно, для достаточно малаго разстоянія BD, построить уголъ параллельности $B'BD > B'BC$.

Сдѣлаемъ $DA = BD$, $AA' \parallel BB'$, $A'AG = B'BC$ и $GC = AG$ на прямой BC, то средина F стороны BC даетъ разстояніе, соотвѣтствующее углу параллельности $B'BC$.

Задача 3. Пусть $AA' \parallel BB'$. По данной точкѣ A на прямой AA' требуется найти точку B на прямой BB', такъ чтобы $A'AB = B'BA$?

Рѣшеніе. Проведемъ внѣ плоскости $AA'BB'$ прямую $CC' \parallel AA'$, сдѣлаемъ $AC \perp CC'$, $CD = AC$ и $DD' \parallel CC'$.

Фиг. 33.



По прямой CC' проведемъ плоскость такъ, чтобы она съ плоскостью $AA'CC'$ составляла такой же уголъ, какъ и плоскость $DD'BB'$ и (см. пред. 16) найдемъ ея пересѣченіе MM' съ плоскостью $AA'BB'$. Прямая $AB \perp MM'$ опредѣлитъ искомую точку B.

Чрезъ точку A на оси AA' построимъ предѣльную поверхность, на этой поверхности четыре плоскости $AA'DD'$, $AA'BB'$, $DD'BB'$, $CC'MM'$ образуютъ два подобныхъ предѣльныхъ треугольника, изъ которыхъ, такъ какъ $AC = CD$, $AM = MB$, будемъ имѣть $A'AB = B'BA$.

Задача 4. Найти предѣльную дугу, которая была бы равна суммѣ двухъ предѣльныхъ дугъ AB и CD?

Рѣшеніе. Опредѣлимъ (см. зад. 1) углы $\Pi(\frac{1}{2}AB)$ и $\Pi(\frac{1}{2}CD)$, соотвѣтствующіе $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{2}CD$ и соединимъ хорды AB и CD подъ угломъ $\Pi(\frac{1}{2}AB) + \Pi(\frac{1}{2}CD)$. Точка A, начало первой хорды и D конецъ второй опредѣляютъ двѣ точки искомой предѣльной дуги, которая вполнѣ опредѣляется этими двумя точками.

Точно также опредѣлимъ предѣльную дугу, равную разности двухъ предѣльныхъ дугъ.

Задача 5. По даннымъ тремъ предѣльнымъ дугамъ SA, SB, SC, найти четвертую пропорціональную?

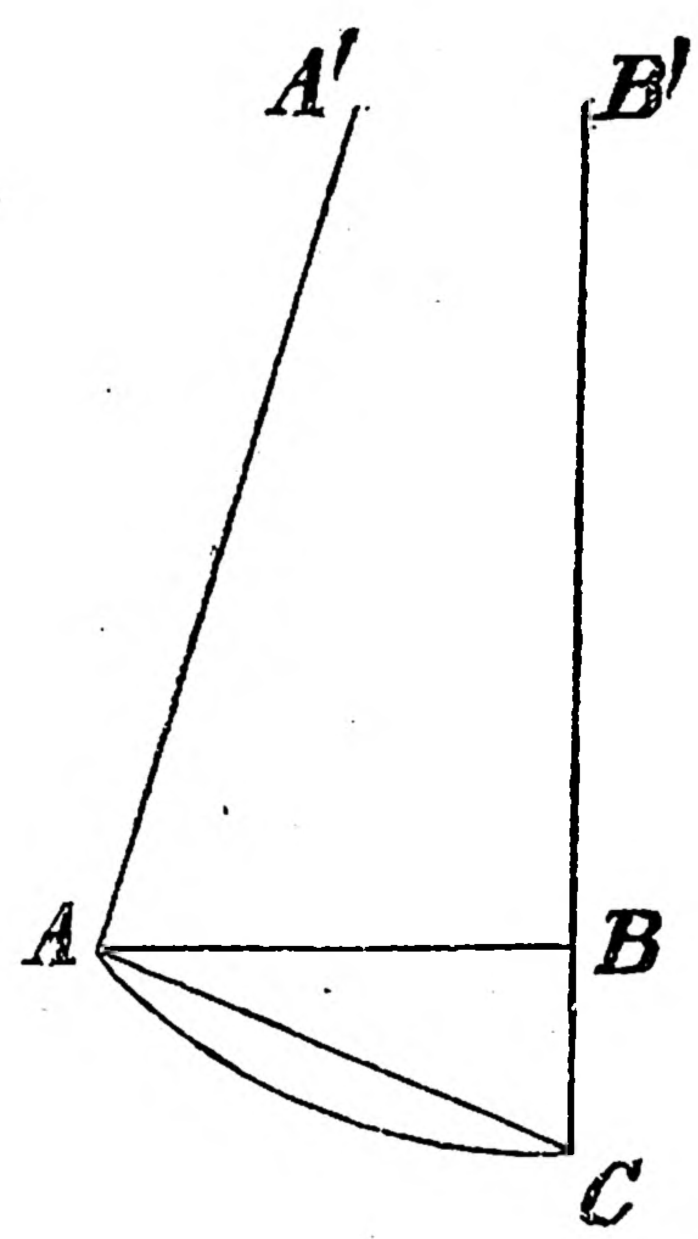
Задача эта рѣшается какъ и въ Евклидовской системѣ. Въ плоскости α проведемъ хорды дугъ SA и AB такъ, чтобы точки S, A, B лежали на одной предѣльной кривой, т. е. чтобы уголъ $SAB = \Pi(\frac{1}{2}SA) + \Pi(\frac{1}{2}AB)$. Пусть SS' будетъ ось этой предѣльной кривой, чрезъ эту ось проведемъ произвольную плоскость α' и въ этой плоскости проведемъ прямую $CC' \parallel SS'$ такъ, чтобы SC была равна хордѣ третьей дуги и уголъ

$S'SC = C'CS = \Pi(\frac{1}{2} SC)$. Чрезъ BB' проведемъ плоскость подъ такимъ угломъ къ плоскости α, подъ какимъ плоскость α наклонена къ плоскости $AA'CC'$ и опредѣлимъ (см. стр. 23) ее пересѣченіе съ плоскостью α', то получимъ четвертую пропорціональную CD, если опредѣлимъ точку D такъ, чтобы уголъ $D'DC = C'CD$. Точно также можно построить средне пропорціональную и другія подобныя построенія. Однимъ словомъ на предѣльной поверхности можно сдѣлать всѣ тѣ построенія, которыя возможны въ Евклидовской системѣ.

Слѣдовательно возможно дѣленіе ED на равныя части.

Примѣръ. Пусть $A'AB = \frac{\pi}{6}$, и разстояніе AB такъ взято, что $BB' \perp AB$ и параллельна AA'. Опредѣлимъ на прямой BB' точку C, такъ

Фиг. 34.



чтобы $A'AC = B'CA$. Пусть $BC = x$, то мы имѣемъ:

$$e^{\frac{x}{k}} = 1 : \sin\frac{\pi}{6} = 2$$

Если бы мы уголъ $A'AB$ такъ выбрали, чтобы $\sin A'AB = \frac{1}{e}$, то имѣли бы $x = k$. Приблизительно этотъ уголъ будетъ:

$$A'AB = 21^{\circ},35',5'',63$$

Зависимость между суммою угловъ треугольника и его площадью.

Кривая равныхъ разстояній даетъ возможность найти зависимость между суммою угловъ треугольника и его площадью.

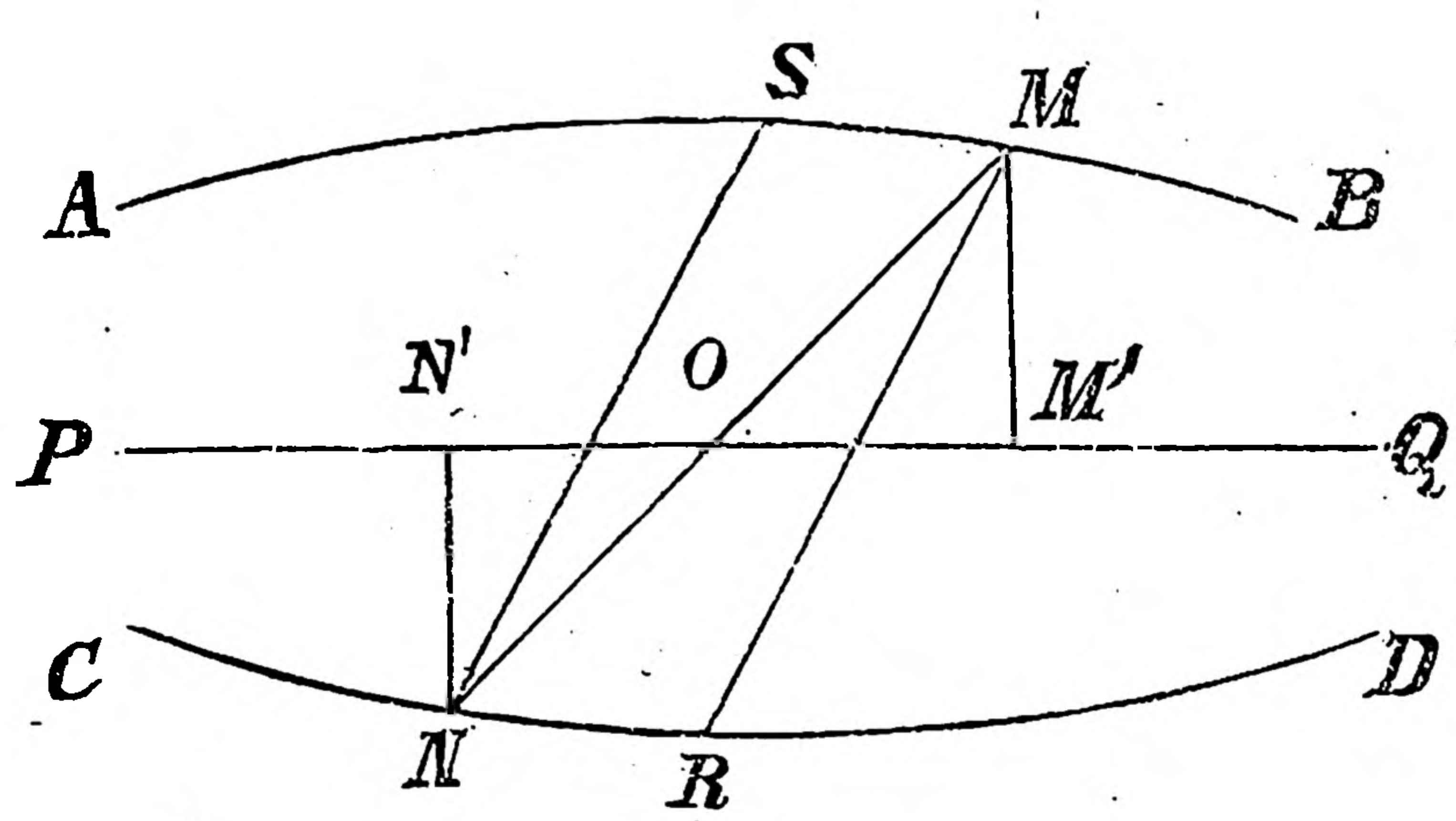
Предложеніе 28. Если AB и CD суть двѣ кривыя равнаго разстоянія h отъ данной прямой PQ, то каждая прямая MN, соединяющая двѣ точки кривыхъ AB и CD, дѣлится прямою PQ въ точкѣ O пополамъ.

Доказат. Проведемъ $MM' \perp PQ$ и $NN' \perp PQ$, то:

$$\triangle OMM' = \triangle ONN'$$

слѣдовательно: $MO = ON$.

Фиг. 35.



По симметріи построенія кривыхъ AB и CD уголъ $AMN = MND$.

Легко видѣть теперь, что сумма угловъ треугольника MNR, коего одна сторона NR есть часть кривой равнаго разстоянія отъ прямой PQ и, коего вершина M лежитъ на другой кривой AB равнаго разстоянія отъ той же прямой PQ, равна двумъ прямымъ угламъ.

И въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ:

$$N + M + R = AMN + NMR + RMB = 2d$$

Если проведемъ хорду NR, то сумма угловъ въ треугольникѣ $NMR < 2d$.

Предложеніе 29. Если сдѣлаемъ дугу $MS = NR$, то можно къ четыреугольнику $NRMS$, составленному изъ смѣшанныхъ линій, приложить всѣ теоремы прямолинейнаго параллелограмма въ Евклидовской геометріи. Такъ напримѣръ, всѣ треугольники, имѣющіе основаніемъ хорду NR, дуги линіи равнаго разстоянія CD отъ прямой PQ, а вершины на другой линіи равнаго разстоянія отъ той же прямой PQ, будутъ имѣть равныя площади и равныя суммы угловъ.

На этомъ основаніи можно рѣшить слѣдующія задачи.

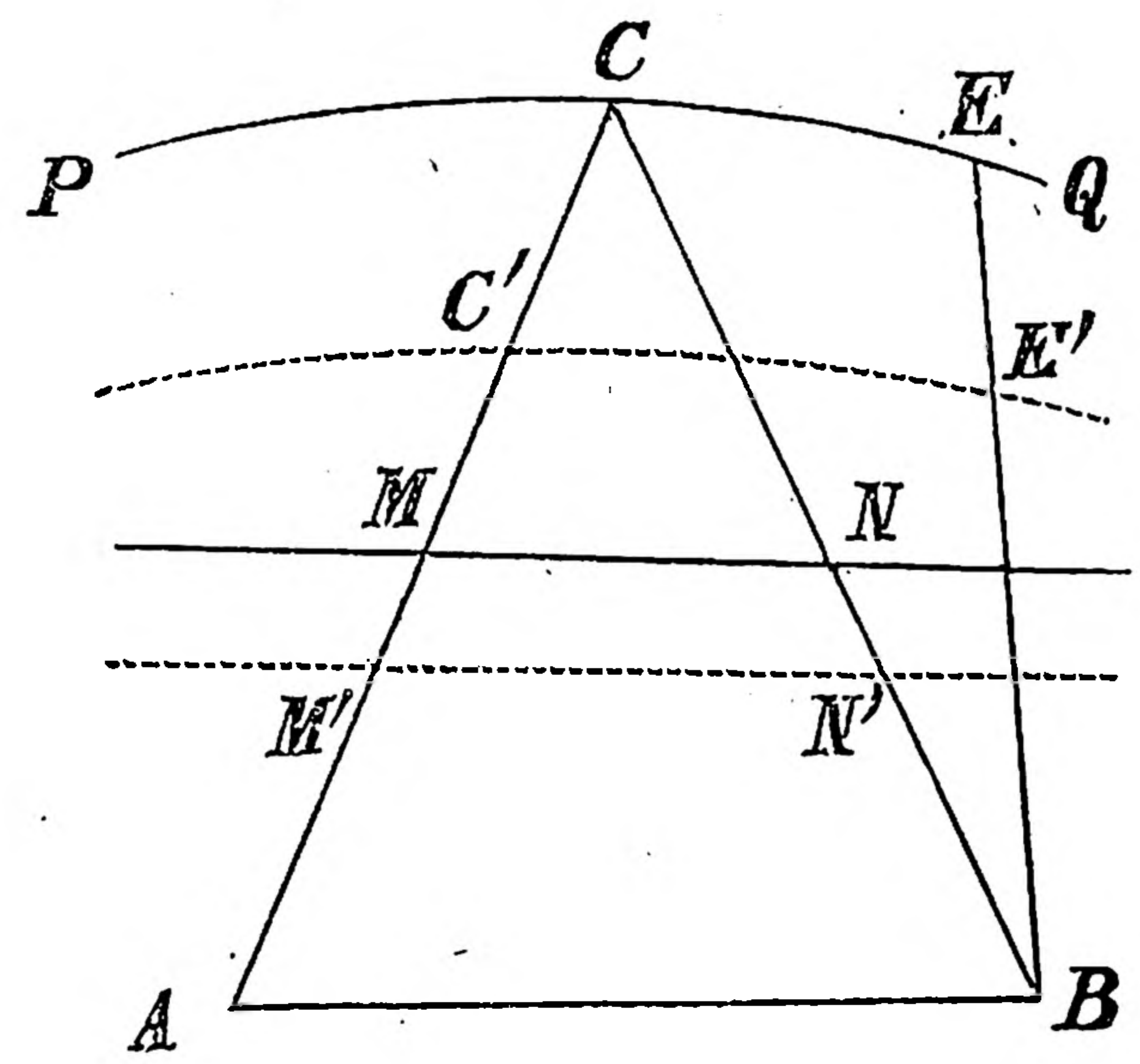
a) Преобразовать треугольникъ въ равносторонній?

b) Преобразовать треугольникъ въ прямоугольный? и т. д.

Предложеніе 30. Два треугольника ABC и ABD, имѣющіе площади равныя и одно основаніе AB, имѣютъ и равныя суммы угловъ.

Доказат. Пусть M и N будутъ средины сторонъ AC и BC, то разстоянія точекъ A, B, C отъ прямой MN будутъ равны, напримѣръ h. Всѣ треугольники имѣющіе основаніемъ прямую AB, а вершины лежащія на линіи PQ равнаго разстоянія h, отъ прямой MN, имѣютъ равныя площади и равныя суммы угловъ. Слѣдовательно, надобно только доказать, что точка D, непоказанная на чертежѣ, лежитъ на линіи PQ.

Фиг. 36.



Пусть точка D не находится на линіи PQ, проведемъ линію BD.

1) Если прямая BD пересѣчетъ прямую MN, то она пересѣчетъ и PQ, напримѣръ, въ точкѣ E. Изъ равенства треугольниковъ:

$$\triangle ABC = \triangle ABE, \quad \triangle ABC = \triangle ABD$$

слѣдуетъ равенство треугольниковъ:

$$\triangle ABE = \triangle ABD$$

что невозможно, если точка D не совпадаетъ съ E.

2) Если прямая BD не встрѣчаетъ прямой MN, то мы возьмемъ за точку C, точку пересѣченія перпендикуляра, возставленнаго изъ средины основанія AB съ линіею PQ, т. е. положимъ треугольникъ равностороннимъ. На прямыхъ MA и NB возьмемъ точки M' и N' такъ, чтобы $AM' = BN'$ и чтобы прямая BD пересѣкала прямую $M'N'$. Чрезъ точку C', такъ взятую, чтобы $M'C' = M'A$, проведемъ линію $C'E'$ равнаго разстоянія отъ прямой $M'N'$, которая прямую BD встрѣчаетъ въ точкѣ E', то будемъ имѣть:

$$\triangle ABC' = \triangle ABE'$$

$$\triangle ABD < \triangle ABE'$$

$$\triangle ABC' < \triangle ABC$$

слѣдовательно:

$$\triangle ABD < \triangle ABC$$

что не согласно съ положеніемъ. Слѣдовательно, точка D прямой BD должна упасть на линію PQ, гдѣ нибудь, въ точкѣ E.

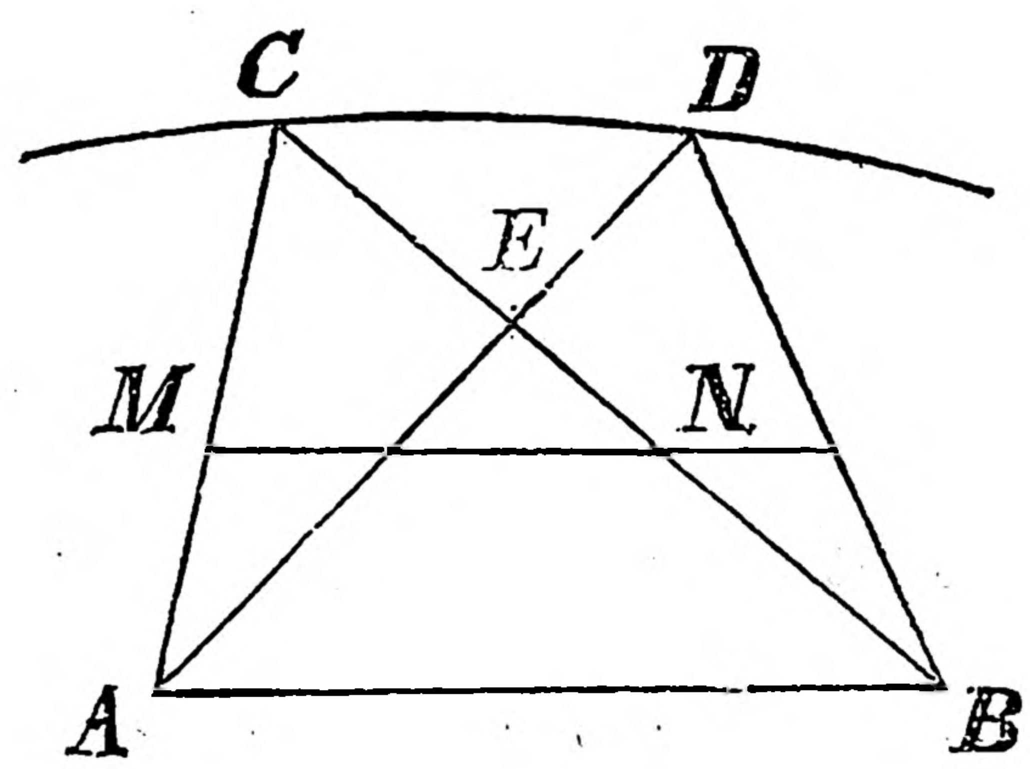
Слѣдствіе. Не равные треугольники равнаго основанія AB и равной высоты не имѣютъ площадей равныхъ, такъ какъ линіи равнаго разстоянія, проведенныя чрезъ точку C, относительно прямыхъ AB и MN, различны.

Предложеніе 31. Два треугольника ABC и $A'B'C'$, имѣющіе равныя площади, имѣютъ и равныя суммы угловъ.

Доказат. Можно сдѣлать предположеніе, что въ обоихъ треугольникахъ, прямыя, проведенныя чрезъ средины M и N, M' и N' сторонъ AC и BC, $A'C'$ и $B'C'$, перпендикулярны къ сторонамъ AC и $A'C'$.

Пусть $AC<A'C'$, опредѣлимъ на линіи CD равнаго разстоянія отъ прямой MN точку D такъ, чтобы $AD=A'C'$. Изъ равенства площадей

Фиг. 37.



треугольниковъ ABC и $A'B'C'$, ABC и ABD, а также треугольниковъ $A'B'C'$ и ABD слѣдуетъ, соображаясь съ предъидущимъ предложеніемъ, равенство суммъ угловъ въ треугольникахъ ABC, ABD, $A'B'C'$.

Предложеніе 32. Два треугольника ABC и $A'B'C'$, имѣющіе равныя суммы угловъ, имѣютъ и равныя площади.

Доказат. Если бы было $\triangle ABC > \triangle A'B'C'$, то пусть будетъ $\triangle ABE = \triangle A'B'C'$, гдѣ точка E находится на сторонѣ BC. По предлож. 31 треугольники ABC и ABE имѣютъ равныя суммы угловъ, что по предл. 4 а) только тогда возможно, когда сумма угловъ въ треугольникѣ ACB равна двумъ прямымъ угламъ.

Предложеніе 33. Площади двухъ треугольниковъ относятся между собою какъ избытки двухъ прямыхъ угловъ надъ суммою угловъ въ треугольникахъ, т. е. если:

$$A+B+C=2d-u, \quad A'+B'+C'=2d-u'$$

то:

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = u : u'$$

Доказат. Пусть площади треугольниковъ относятся какъ два числа

m и m'; раздѣлимъ треугольникъ ABC прямыми, проходящими чрезъ вершину C, на m равныхъ α треугольниковъ и также точно раздѣлимъ треугольникъ $A'B'C'$ на m' равныхъ α' треугольниковъ.

Изъ равенствъ:

$$\triangle ABC = m\alpha, \quad \triangle A'B'C' = m'\alpha'$$

слѣдуетъ равенство площадей и суммъ угловъ треугольниковъ α и α'. Пусть $2d - \varepsilon$, будетъ сумма угловъ одного изъ этихъ треугольниковъ, то сумма угловъ въ треугольникѣ ABC будетъ:

$$m(2d-\varepsilon)-(m-1)2d=2d-m\varepsilon$$

а въ треугольникѣ $A'B'C'$ эта сумма будетъ $2d-m'\varepsilon$, слѣдовательно:

$$u=m\varepsilon, \quad u'=m'\varepsilon$$

откуда:

$$u : u'=m : m'.$$

Слѣдовательно, если $\triangle$ есть площадь треугольника ABC, то:

$$\triangle = \lambda u$$

гдѣ λ есть постоянное число.

Плоская тригонометрія.

Мы видѣли, что если въ треугольникѣ ABC уголъ C прямой, то (пред. 25):

$$Ок.a=Ок.c \sin A$$

подставивъ вмѣсто $Ок.a$ и $Ок.c$ ихъ выраженія (см. стр. 40) найдемъ:

$$e^{\frac{a}{k}}-e^{\frac{-a}{k}}=(e^{\frac{c}{k}}-e^{\frac{-c}{k}})\sin A$$

также точно: (1)

$$e^{\frac{b}{k}}-e^{\frac{-b}{k}}=(e^{\frac{c}{k}}-e^{\frac{-c}{k}})\sin B$$

Но мы имѣемъ (см. стр. 38):

$$\cos A : \sin B=\tfrac{1}{2}(e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{-a}{k}})$$

(2)

$$\cos B : \sin A=\tfrac{1}{2}(e^{\frac{b}{k}}+e^{\frac{-b}{k}})$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\sin A = \frac{e^{\frac{a}{k}} - e^{\frac{-a}{k}}}{e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}}$$

$$\cos A = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}}\right) \frac{e^{\frac{b}{k}} - e^{\frac{-b}{k}}}{e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}}$$

эти выраженія, подставленныя въ уравненіе:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

даютъ:

$$\left(e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}}\right)^2 \left(e^{\frac{b}{k}} - e^{\frac{-b}{k}}\right)^2 + \left(e^{\frac{a}{k}} - e^{\frac{-a}{k}}\right)^2$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ этого уравненія 4, и замѣчая что:

$$(e^x + e^{-x})^2 = (e^x - e^{-x})^2 + 4$$

найдемъ:

$$\left(e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}}\right)^2 \left(e^{\frac{b}{k}} + e^{\frac{-b}{k}}\right)^2$$

такъ какъ e^x для всѣхъ дѣйствительныхъ величинъ x есть величина положительная, то мы будемъ имѣть:

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}}\right) \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{b}{k}} + e^{\frac{-b}{k}}\right) \qquad (3)$$

Изъ уравненій (2), перемножая ихъ, найдемъ:

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}}\right) \qquad (4)$$

Съ помощью уравненій (1), (2), (3) и (4) можно рѣшить всѣ задачи относительно прямоугольныхъ треугольниковъ.

Такъ какъ всякій треугольникъ можно разбить на два прямоугольные треугольника, то изъ предъидущихъ формулъ, для прямоугольнаго треугольника, можно получить формулы для какого угодно треугольника. Но этотъ выводъ можетъ быть облегченъ слѣдующимъ замѣчаніемъ: формулы для прямоугольнаго треугольника, выведенныя выше, переходятъ въ формулы прямоугольнаго сферическаго треугольника, когда вмѣсто отношеній $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ поставить ai, bi, ci, гдѣ $i=\sqrt{-1}$, а k принятъ за радіусъ сферы. Слѣдовательно, можно вывесть общія формулы плоской тригонометріи, не только тѣмъ способомъ, которымъ выводяться общія формулы сферической тригонометріи, но просто замѣщая въ общихъ формулахъ сферической тригонометріи стороны a, b, c отношеніями $\frac{ai}{k}$, $\frac{bi}{k}$, $\frac{ci}{k}$. Такимъ образомъ получимъ слѣдующія формулы *плоской* тригонометріи:

$$e^{\frac{a}{k}}-e^{\frac{-a}{k}} : e^{\frac{b}{k}}-e^{\frac{-b}{k}}=\sin A : \sin B \tag{5}$$

$$\frac{e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{-a}{k}}}{2}=\frac{e^{\frac{b}{k}}+e^{\frac{-b}{k}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{c}{k}}+e^{\frac{-c}{k}}}{2}-\frac{e^{\frac{b}{k}}-e^{\frac{-b}{k}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{c}{k}}-e^{\frac{-c}{k}}}{2}\cos A \tag{6}$$

$$\frac{2\sin B\cot A}{e^{\frac{c}{k}}+e^{\frac{-c}{k}}}+\cos B=\frac{e^{\frac{c}{k}}-e^{\frac{-c}{k}}}{e^{\frac{c}{k}}+e^{\frac{-c}{k}}} : \frac{e^{\frac{a}{k}}-e^{\frac{-a}{k}}}{e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{-a}{k}}} \tag{7}$$

$$\cos A\cos B+\cos C=\frac{e^{\frac{c}{k}}+e^{\frac{-c}{k}}}{2}\sin A\sin B \tag{8}$$

Задачи рѣшаются въ этой тригонометріи совершенно такъ, какъ и въ сферической.

Если вмѣсто выраженій:

$$\frac{e^{\frac{x}{k}}+e^{\frac{-x}{k}}}{2},\quad \frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{\frac{-x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}}+e^{\frac{-x}{k}}},\quad \frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{\frac{-x}{k}}}{2}$$

поставимъ въ формулы (1), (2), (3) и (4) ихъ выраженіе въ функціи угла параллельности:

$$\operatorname{cosec}\Pi(x),\quad \cos\Pi(x),\quad \operatorname{cotg}\Pi(x)$$

то эти формулы сдѣлаются:

$$\operatorname{cotg}\Pi(a)=\operatorname{cotg}\Pi(c)\,\sin A$$

$$\sin\Pi(b)\,\cos B=\sin A$$

$$\sin\Pi(c)=\sin\Pi(a)\,\sin\Pi(b)$$

$$\operatorname{tg}A\,\operatorname{tg}B=\sin\Pi(c)$$

а формулы (5), (6), (7), (8) сдѣлаются:

$$\operatorname{cotg}\Pi(a)\,:\,\operatorname{cotg}\Pi(b)=\sin A\,:\,\sin B$$

$$\cos A\,\cos\Pi(b)\,\cos\Pi(c)+\frac{\sin\Pi(b)\,\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}=1$$

$$\operatorname{cotg}A\,\sin B\,\sin\Pi(c)+\cos B=\frac{\cos\Pi(c)}{\cos\Pi(a)}$$

$$\cos A\,\cos B+\cos C=\frac{\sin A\,\sin B}{\sin\Pi(c)}$$

Формулы *плоской* тригонометріи примутъ видъ болѣе удобный, если мы введемъ гиперболическія функціи (см. прибавленіе II):

$$\sin h(\tfrac{a}{k})\,:\,\sin h(\tfrac{b}{k})=\sin A\,:\,\sin B$$

$$\cos h(\tfrac{a}{k})=\cos h(\tfrac{b}{k})\,\cos h(\tfrac{c}{k})-\sin h(\tfrac{b}{k})\,\sin h(\tfrac{c}{k})\,\cos A$$

$$\frac{\sin B\,\operatorname{cotg}A}{\cos h(\frac{c}{k})}+\cos B=\operatorname{tg}h(\tfrac{c}{k})\,:\,\operatorname{tg}h(\tfrac{a}{k})$$

$$\cos A\,\cos B+\cos C=\cos h(\tfrac{c}{k})\,\sin A\,\sin B.$$

Безконечно малыя фигуры.

Если, въ предъидущихъ формулахъ, положимъ отношенія $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ очень малыми, то получимъ слѣдующія формулы:

$$a : b = \sin A : \sin B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\sin B \cot g A + \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\cos A \cos B + \cos C = \sin A \sin B$$

Двѣ послѣднія формулы можно преобразовать въ слѣдующія:

$$a \sin(A+B) = c \sin A$$

$$\cos(A+B) + \cos C = 0$$

откуда:

$$a \sin(A+B+C) = a \sin(A+B) \cos C + a \cos(A+B) \sin C$$

$$= c \sin A \, [\cos C + \cos(A+B)] = 0$$

т. е.

$$A+B+C = 2d.$$

Слѣдовательно, формулы Неевклидовской тригонометріи переходятъ въ Евклидовскія, если отношенія $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ дѣлаются очень малыми.

Отношенія эти могутъ быть очень малыми, когда k есть величина конечная, а a, b, c суть величины очень малыя, или когда a, b, c суть величины конечныя, а k есть величина очень большая.

Изъ перваго предположенія слѣдуетъ, что геометрическая система безконечно малыхъ фигуръ есть Евклидовская, слѣдовательно, она независитъ отъ аксіомы параллельныхъ линій. Изъ втораго предположенія слѣдуетъ, что евклидовская геометрическая система есть частный случай системы неевклидовской, когда въ этой послѣдней k дѣлается величиною безконечно большою.

Если разстоянія, измѣряемыя на землѣ и въ нашей солнечной системѣ, суть величины безконечно-малыя относительно k, то наша геометрическая система—Евклидовская можетъ быть только приближеніемъ Неевклидовской системы нашего пространства. Лобачевскій пытался провѣрить есть-ли наше пространство Евклидовское или Неевклидовское, вычисляя сумму угловъ въ треугольникѣ, коего стороны не меньше земной орбиты.

Вычисленія показали, что сумма эта разнится отъ двухъ прямыхъ угловъ на 0,003. Такая незначительная разность можетъ происходить отъ погрѣшностей въ наблюденіяхъ.

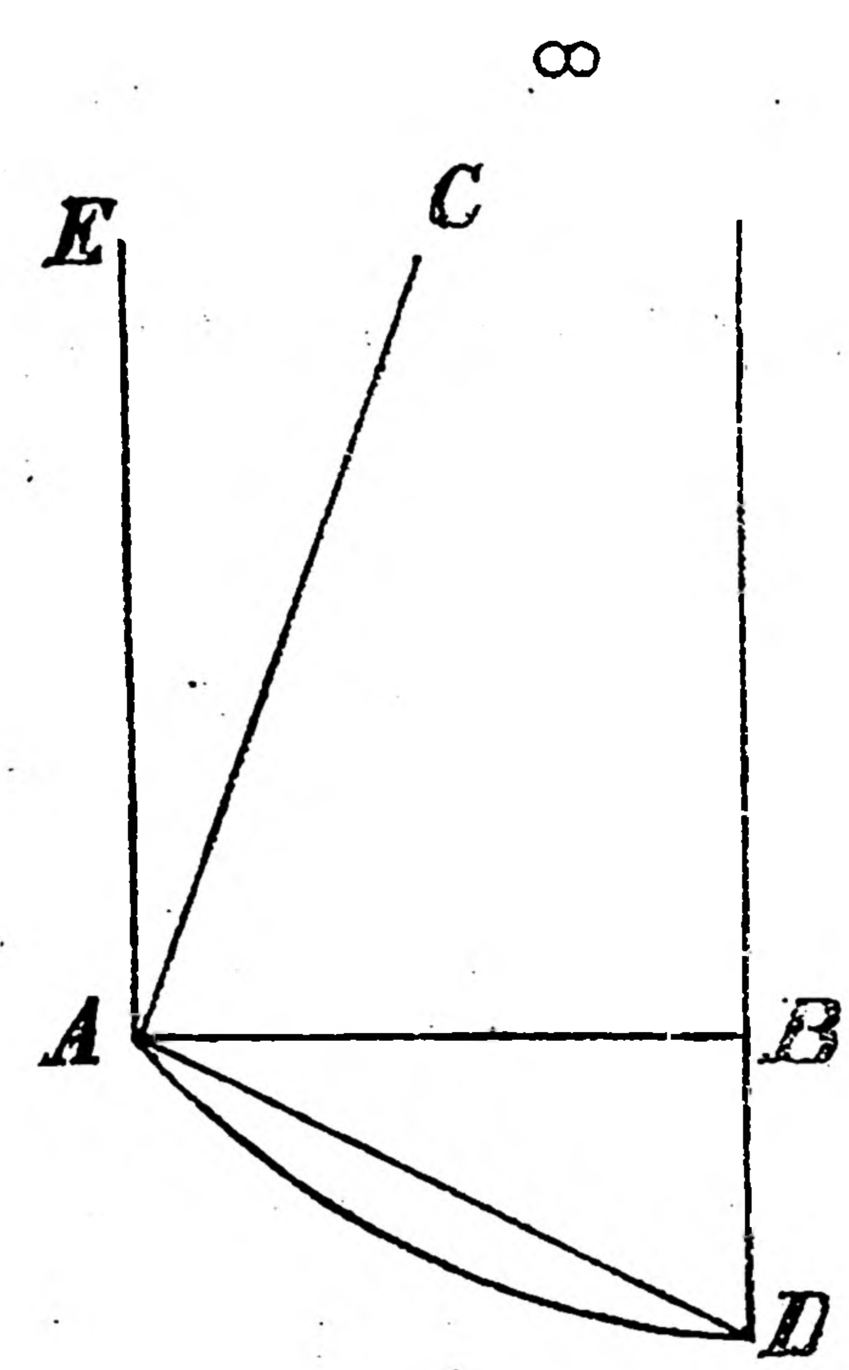
Площадь треугольника.

Мы видѣли, что площадь треугольника равна:

$$\triangle = \lambda u$$

гдѣ λ есть постоянное, а u избытокъ двухъ прямыхъ надъ суммою угловъ въ треугольникѣ. Возьмемъ треугольникъ ABC, въ которомъ уголъ $B=d$, а вершина C лежитъ на безконечности, т. е. уголъ $C=0$, или что тоже $AC \parallel BC$.

Фиг. 38.



Пусть $AE \perp AB$, то уголъ:

$$EAC = 2d - A - B = u.$$

Опишемъ предѣльную кривую AD, то будемъ имѣть (см. о кругѣ):

$$AD = k \operatorname{cotg} \Pi(AB) = k \operatorname{tg}(u)$$

Площадь P, ограниченная предѣльною дугою AD и осями AC и DC, (см. прибавленіе I) будетъ:

$$P = k.\, AD = k^2 \operatorname{tg}(u)$$

слѣдовательно, отношеніе:

$$\frac{P}{ABC}=\frac{k^2\operatorname{tg}(u)}{\lambda u}=\frac{k^2}{\lambda}\cdot\frac{\operatorname{tg}(u)}{u}$$

Когда сторона AB, уменьшаясь, приближается къ нулю, то отношеніе $\frac{AD}{AB}$, а также и отношенія $\frac{P}{ABC}$ и $\frac{\operatorname{tg}(u)}{u}$ приближаются къ единицѣ. Въ предѣлѣ, слѣдовательно, мы будемъ имѣть $\lambda=k^2$.

Откуда площадь треугольника будетъ:

$$\triangle=k^2u=k^2(\pi-A-B-C)$$

Площадь многоугольника.

Пусть A_1, A_2, . . , A_n будутъ внутренніе углы многоугольника, имѣющаго n сторонъ. Площадь его M, очевидно, будетъ:

$$M=k^2\left[(n-2)\pi-A_1-A_2-\,.\;.\,-A_n\right]$$

Если многоугольникъ правильный, то $A_1=A_2=\,.\;.\,=A_n$, слѣдовательно, площадь его будетъ:

$$M=k^2\left[(n-2)\pi-nA_1\right].$$

Если $A_1=A_2=\,.\;.\,=A_n=0$, то:

$$M=(n-2)\pi k^2$$

будетъ наибольшая площадь. Если $n=3$, то наибольшая площадь треугольника будетъ:

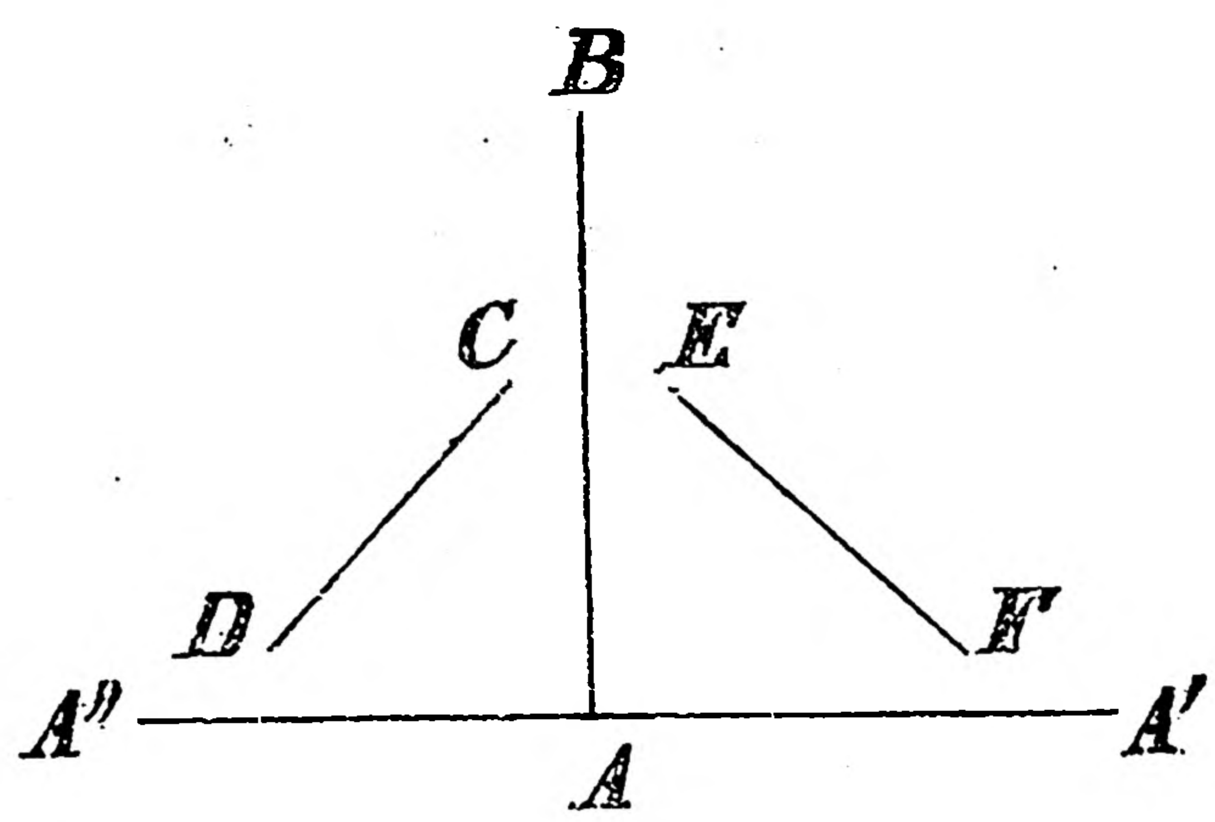
$$\triangle=\pi k^2$$

Построить этотъ треугольникъ можно слѣдующимъ образомъ (фиг. 39): изъ точки A на прямой $A'A''$ возставимъ перпендикуляръ AB къ $A'A''$ и опредѣлимъ, какъ было показано (см. зад. 2, стр. 40), прямыя CD и EF такъ, чтобы:

$$CD \parallel AA'', \quad CD \parallel AB$$

$$EF \parallel AA', \quad EF \parallel AB$$

Фиг. 39.



Заключеніе.

Все выше изложенное даетъ возможность провесть параллель между системами Евклидовской и Лобачевскаго, и показать въ какихъ частяхъ эти двѣ системы сходны, и въ какихъ различаются между собою.

1. Всѣ предложенія, доказанныя на основаніи только 8-й и 12-й аксіомъ, принадлежатъ обѣимъ системамъ, слѣдовательно двадцать восемь предложеній Евклида принадлежатъ и системѣ Лобачевскаго.

2. Геометрія безконечно-малыхъ фигуръ принадлежащая, какъ мы видѣли, обѣимъ системамъ, не зависитъ отъ одиннадцатой аксіомы.

3. Обѣимъ системамъ, будутъ принадлежать также и тѣ предложенія, въ которыхъ конечныя фигуры могутъ быть замѣщены безконечно-малыми. Таковы слѣдующія предложенія:

a) Двѣ прямыя BB' и CC', параллельныя третьей AA', по тому же направленію, параллельны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, BB' и CC' приближаются, со стороны параллельности, къ $A'A''$ неопредѣленно. На безконечно большомъ разстояніи, точки прямой AA' находятся въ безконечно маломъ разстояніи отъ точекъ прямыхъ BB' и CC'. Если возьмемъ одну изъ такихъ точекъ на AA', и чрезъ нее проведемъ плоскость перпендикулярную къ AA', то она будетъ перпендикулярна и къ прямымъ BB' и CC'. Слѣдовательно, три прямыя AA', BB', CC', перпендикулярныя къ одной плоскости, будутъ параллельны между собою.

b) Сумма двугранныхъ угловъ трехъ плоскостей, пересѣкающихся по параллельнымъ прямымъ, равна двумъ прямымъ угламъ. Разсужденіе тоже, что и въ a).

c) Сферическая геометрія, т. е. геометрія фигуръ на сферѣ, ограниченныхъ дугами большихъ круговъ, одинакова въ обѣихъ системахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ центра данной сферы опишемъ безконечно-малую сферу, то всѣ фигуры на данной сферѣ будетъ проектироваться на безконечно-малой сферѣ, безконечно-малыми фигурами, имѣющими тѣже свойства.

Или еще вслѣдствіе того, что геометрія сферы основана на 8-й и 12-й аксіомахъ, съ нѣкоторыми исключеніями для послѣдней (слѣд. стр. 5), и на аксіомѣ, отличной отъ одиннадцатой Евклида и Лобачевскаго, именно: всѣ прямыя на сферѣ пересѣкаются.

Въ этихъ частяхъ сбѣ системы сходны, въ слѣдующихъ различны:

1. Въ системѣ Евклида. Кругъ касательный въ извѣстной точкѣ прямой, съ увеличеніемъ радіуса приближается къ прямой и переходитъ въ нее, когда радіусъ сдѣлается безконечно большимъ.

Въ системѣ Лобачевскаго. Такой же кругъ переходитъ не въ прямую, но въ предѣльную кривую.

2. Въ системѣ Евклида есть двѣ кривыя, которыхъ каждая часть можетъ совмѣститься, гдѣ угодно, на остальной части безъ изгиба—это прямая и кругъ.

Въ системѣ Лобачевскаго есть четыре такихъ линіи: прямая, кругъ, предѣльная кривая и кривая равныхъ разстояній.

3. Въ системѣ Евклида есть двѣ поверхности, на которыхъ фигуры могутъ быть передвинуты безъ изгиба: плоскость и сфера.

Въ системѣ Лобачевскаго ихъ есть четыре: плоскость, сфера, предѣльная поверхность и поверхность равныхъ разстояній.

Геометрія на предѣльной поверхности въ системѣ Лобачевскаго есть геометрія Евклида.

4. Мѣровыя зависимости, самыя обыкновенныя на плоскости, не имѣютъ мѣста на плоскости Лобачевскаго. Таковы, напримѣръ, теорема Пиѳагора и подобіе фигуръ.

5. Уголъ параллельности въ системѣ Евклида есть прямой, въ системѣ Лобачевскаго онъ опредѣляется выраженіемъ:

$$\operatorname{cotg} \Pi(p) = \frac{e^{\frac{p}{k}} - e^{\frac{-p}{k}}}{2}$$

гдѣ e есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, p есть извѣстное разстояніе, а k есть постоянный параметръ, которымъ одна система Лобачевскаго отличается отъ другой. Этотъ параметръ, если наше пространство не есть Евклидовское, а Лобачевскаго, можетъ быть опредѣленъ опытомъ, который показываетъ, что онъ безконечно большой въ сравненіи со всѣмъ тѣмъ, что мы можемъ измѣрять въ нашей солнечной системѣ.

6. Если въ формулахъ сферической геометріи системы Евклида введемъ радіусъ и этотъ радіусъ измѣнимъ въ ki, $i=\sqrt{-1}$, то получимъ формулы геометрической системы Лобачевскаго, откуда слѣдуетъ, что система Лобачевскаго, построенная на сферѣ, коей радіусъ мнимая величина ki, или квадратъ радіуса есть величина отрицательная.

Такова въ общихъ чертахъ система Лобачевскаго, которую онъ построилъ, измѣнивъ одиннадцатую аксіому Евклида. Такъ какъ система оказалась возможною и логичною во всѣхъ своихъ частяхъ и заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, систему Евклида, то изъ этого можно заключить, что одиннадцатая аксіома Евклида, на основаніи 8-й и 12-й, доказана быть не можетъ. Съ одиннадцатой аксіомы геометрическая система раздвояется на Евклидовскую и Лобачевскаго, сообразно смыслу, данному одиннадцатой аксіомѣ.

Спрашивается теперь, дѣйствительно-ли эти двѣ системы возможны совмѣстно на плоскости, или же Евклидовская существуетъ на плоскости, а Лобачевскаго на другой какой-то поверхности? Этотъ вопросъ былъ вполнѣ разрѣшенъ итальянскимъ геометромъ Бельтрами въ мемуарахъ: **Resolutione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che linee geodetiche vengano representato da linee rette. Annali matematiche. Roma 1866. Saggio di interpretatione della geometria non euclidea. Giornale matimatico di Napoli 1868** и **Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di matematiche.** 1869.

Ниже я изложу только результаты этихъ изслѣдованій, такъ какъ полное изложеніе несообразно съ цѣлью и элементарнымъ характеромъ настоящаго сочиненія. Такое общее изложеніе результатовъ достаточно покажетъ конкретное значеніе системы Лобачевскаго и другихъ возможныхъ системъ и выяснитъ тѣ результаты системы Лобачевскаго, которые, съ перваго взгляда, намъ кажутся несообразными на плоскости.

Кривизна поверхностей.

Извѣстно, что для изслѣдованія кривой линіи сравниваютъ ее съ прямыми и кругами. Для этого берутъ, въ извѣстной точкѣ кривой, прямую, имѣющую двѣ общія точки съ кривой—прямая эта называется *сѣкущею*; если же двѣ точки сѣченія сольются въ одну, то такая прямая называется *касательной*, въ данной точкѣ къ данной кривой. Касательная къ кривой въ извѣстной точкѣ, вообще, въ этой точкѣ, не пересѣкаетъ кривую, т. е. всѣ сосѣднія точки кривой лежатъ по одну сторону касательной, исключая особенныхъ точекъ кривой, какъ напримѣръ, въ точкѣ *перегиба*, гдѣ кривая, дѣлаясь изъ выпуклой вогнутою, переходитъ на другую сторону касательной и слѣдовательно пересѣкаетъ ее. Построивъ касательную, въ извѣстной точкѣ кривой, мы можемъ уже судить о ея кривизнѣ въ этой точкѣ, опредѣляя насколько сосѣднія точки удаляются отъ касательной. Если сосѣднія точки кривой удаляются значительно отъ касательной, то мы говоримъ, что кривизна кривой больше и обратно. Подъ сосѣдними точками я разумѣю точки, лежащія безконечно близко отъ точки касанія. Еще болѣе опредѣленное понятіе мы составимъ о кривизнѣ кривой, сравнивъ кривизну ея, въ извѣстной точкѣ, съ кривизною круга. Для этого мы возьмемъ три произвольныя точки на кривой, чрезъ эти точки проведемъ кругъ, центръ и радіусъ этого круга будутъ зависѣть отъ положенія взятыхъ трехъ точекъ на кривой. Если мы будемъ измѣнять положеніе взятыхъ точекъ на кривой, то, очевидно, будетъ измѣняться положеніе центра круга и величина радіуса его. Если вторая точка совпадетъ съ первой, то кругъ, въ нѣкоторомъ смыслѣ, сдѣлается опредѣленнѣе; это будетъ одинъ изъ тѣхъ круговъ, которые имѣютъ общую касательную съ кривой въ первой точкѣ. Если и третья точка совпадетъ съ первой и второй, т. е. если всѣ три взятыя на кривой точки совпадутъ съ первою, то кругъ вполнѣ опредѣлится, положеніе центра и величина радіуса сдѣлаются извѣстными и опредѣленными, для взятой точки. Кругъ этотъ называется *кругомъ кривизны* кривой въ данной точкѣ, а радіусъ его называется *радіусомъ кривизны*. Кругъ этотъ, вообще пересѣкаетъ кривую въ данной точкѣ, т. е. переходитъ, въ этой точкѣ, съ одной стороны кривой на другую. Кривизна этого круга намъ даетъ болѣе точное понятіе о кривизнѣ кривой въ извѣстной точкѣ, такъ какъ о кривизнѣ круга, когда радіусъ его извѣстенъ, мы всегда имѣемъ точное понятіе. Поэтому условились измѣрять кривизну кривой, въ извѣстной точкѣ, единицей раздѣленной на радіусъ кривизны, т. е. если чрезъ ω назовемъ кривизну кривой въ данной точкѣ, чрезъ R радіусъ кривизны въ этой точкѣ, то:

$$\omega=\frac{1}{R}$$

Если въ извѣстной точкѣ кривой $R=\infty$, то говорятъ, что кривизна кривой въ этой точкѣ есть нуль, т. е. три безконечно близкія точки на кривой лежатъ на одной прямой линіи. Касательная въ этой точкѣ имѣетъ три общія точки съ кривой. Если кривизна кривой равна нулю въ каждой ея точкѣ, то кривая линія есть прямая. На плоскости есть *только* двѣ кривыя коихъ кривизна есть величина постоянная: прямая кривизна которой, во всѣхъ ея точкахъ, есть нуль и кругъ, кривизна котораго есть извѣстная, опредѣленная положительная величина.

Перейдемъ къ поверхностямъ: возьмемъ на какой нибудь поверхности точку, чрезъ эту точку проведемъ кривыя по поверхности во всевозможныхъ направленіяхъ, къ каждой изъ этихъ кривыхъ проведемъ касательную въ точкѣ взятой на поверхности, всѣ эти касательныя лежатъ въ одной плоскости, которая и называется *касательною плоскостью* къ поверхности въ данной точкѣ. Если точки поверхности, лежащія безконечно близко точки касанія, всѣ лежатъ по одну сторону касательной плоскости, то говорятъ, что поверхность, въ сосѣдствѣ точки касанія, *выпуклая* или *вогнутая*. Если же однѣ точки лежатъ по одну сторону касательной плоскости, а другія по другую, то говорятъ, что поверхность, въ сосѣдствѣ точки касанія, *выпукло-вогнутая*.

Прямая, проведенная чрезъ точку касанія перпендикулярно къ касательной плоскости, называется *нормальною линіею* къ поверхности.

Первыя изслѣдованія, относительно кривизны поверхностей, были сдѣланы Эйлеромъ и Монжемъ. Онѣ состоятъ въ слѣдующемъ: чрезъ данную точку на поверхности проведемъ нормальную линію, чрезъ эту линію проводятъ, во всевозможныхъ направленіяхъ плоскости, плоскости эти пересѣкутъ поверхность по кривымъ, которыя расходятся, по всѣмъ направленіямъ отъ взятой точки.

Если теперь опредѣлимъ, какъ выше указано, радіусы кривизны каждой кривой въ данной точкѣ, то мы составимъ себѣ понятіе о кривизнѣ каждой кривой, а слѣдовательно составимъ понятіе и о кривизнѣ поверхности въ этой точкѣ. Анализъ показываетъ, что между этими радіусами кривизны есть всегда два, изъ коихъ одинъ будетъ больше всѣхъ, а другой меньше всѣхъ. Эти радіусы кривизны называются *главными*, также какъ и соотвѣтствующія линіи сѣченія. Плоскости главныхъ сѣченій, т. е. сѣченій въ которыхъ кривизна кривыхъ есть наименьшая и наибольшая, наклонены между собою всегда подъ прямымъ угломъ. Если означимъ чрезъ α уголъ, который какая нибудь изъ плоскостей, проведенныхъ чрезъ нормаль, составляетъ съ плоскостью, содержащею кривую съ наибольшимъ радіусомъ кривизны, то, означая чрезъ R_1 и R_2 наибольшій и наименьшій радіусы кривизны, а чрезъ R радіусъ кривизны кривой, лежащей въ плоскости, составляющей уголъ α, нашли что:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{R_2}\sin^2\alpha.$$

Слѣдовательно, радіусы кривизны кривыхъ зависятъ отъ наклоненія α и радіусовъ R_1 и R_2.

Если поверхность въ данной точкѣ будетъ выпукло-вогнутая, то какъ мы видѣли, она, въ точкѣ касанія, лежитъ по обѣ стороны касательной плоскости, слѣдовательно, кривизна кривыхъ, происшедшихъ отъ нормальныхъ сѣченій, въ извѣстномъ направленіи, должна изъ выпуклой перейти въ вогнутую или обратно, слѣдовательно, радіусы кривизны должны быть направлены въ противуположную сторону своего прежняго направленія, т. е. изъ положительныхъ сдѣлаться отрицательными, или обратно. Кривизна кривыхъ должна, слѣдовательно, перейти чрезъ нуль, а радіусы кривизны должны перейти чрезъ безконечность. Въ выпукло-вогнутыхъ поверхностяхъ главные радіусы кривизны не будутъ наибольшій и наименьшій, а оба будутъ наименьшіе, одинъ между положительными, а другой между отрицательными. Одна изъ плоскостей, проходящая между главными плоскостями сѣченія, содержитъ кривую, которая въ этой точкѣ имѣетъ кривизну нуль, слѣдовательно, радіусъ кривизны равенъ безконечности. Одинъ изъ главныхъ радіусовъ кривизны будетъ положительный, а другой отрицательный. Переходъ радіусовъ кривизны отъ положительныхъ къ отрицательнымъ бываетъ или чрезъ кривую, имѣющую точку перегиба, или чрезъ прямую. Это послѣднее свойство имѣетъ однополый гиперболоидъ и параболическій гиперболоидъ. Эти поверхности съ касательной плоскостью пересѣкаются по прямой линіи. Такимъ образомъ, мы можемъ составить понятіе о кривизнѣ поверхности въ данной точкѣ, но самыхъ важныхъ результатовъ въ этомъ отношеніи достигъ Гауссъ.

Чтобы судить о кривизнѣ поверхности, Гауссъ беретъ извѣстную часть поверхности, т. е. фигуру и сравниваетъ ее съ соотвѣтствующей фигурой на шарѣ, коего радіусъ есть единица, слѣдующимъ образомъ: изъ каждой точки контура фигуры на поверхности онъ проводитъ нормальную линію, а изъ центра сферы проводитъ радіусы параллельно проведеннымъ нормалямъ; такимъ образомъ на сферѣ образуется фигура, соотвѣтствующая фигурѣ на поверхности. Площадь фигуры на сферѣ Гауссъ назвалъ *полною кривизною*, взятой на поверхности фигуры. *Средней кривизной* онъ назвалъ отношеніе площади фигуры на сферѣ къ площади фигуры на поверхности.

Если площадь взятой фигуры на поверхности будетъ безконечно малая, то средняя кривизна называется *кривизною поверхности* въ точкѣ, лежащей внутри безконечно малаго контура.

Если означимъ чрезъ Ω площадь безконечно малой фигуры на поверхности, чрезъ ω площадь соотвѣтствующей фигуры на сферѣ, то кривизна поверхности, въ точкѣ лежащей внутри контура фигуры Ω, будетъ:

$$\frac{\omega}{\Omega}$$

Гауссъ нашелъ, что это отношеніе равно:

$$\frac{\omega}{\Omega}=\frac{1}{R_1R_2}$$

гдѣ R_1 и R_2 суть радіусы кривизны главныхъ сѣченій поверхности въ точкѣ на площади фигуры Ω. Если поверхность въ данной точкѣ выпуклая, то кривизна ея есть величина положительная, а если выпукло-вогнутая, то кривизна поверхности, въ этой точкѣ, есть величина отрицательная.

Теперь я докажу, что если мы будемъ выгибать поверхность, такъ чтобы не образовалось ни складокъ, ни разрывовъ, т. е. чтобы разстояніе, какихъ нибудь двухъ точекъ на поверхности оставалось безъ измѣненія, то при всѣхъ такихъ выгибаніяхъ кривизна поверхности, въ извѣстной точкѣ, не перемѣнится, т. е. отношеніе $\frac{\omega}{\Omega}$ не измѣнится, а слѣдовательно, не измѣнится и произведеніе R_1R_2 главныхъ радіусовъ кривизны въ данной точкѣ.

Во первыхъ замѣтимъ, что при такихъ выгибаніяхъ величина площади фигуры Ω и ея контура не измѣняется, слѣдовательно, надобно только показать, что не измѣняется, при выгибаніи фигуры Ω, и площадь фигуры ω.

Для этого вспомнимъ сначала слѣдующее свойство многоугольника на сферѣ, образованнаго дугами большихъ круговъ. Если периметръ такого многоугольника назовемъ чрезъ P, а площадь, соотвѣтствующаго ему полярнаго многоугольника, назовемъ чрезъ Π, то извѣстно, что:

$$P+\Pi=4d.$$

Возьмемъ на площади элемента Ω точку, эту точку возьмемъ за центръ сферы, коей радіусъ есть единица. Проведемъ чрезъ эту точку къ контуру Ω безчисленное множество прямыхъ линій, которыя продолжимъ до встрѣчи съ сферой, на сферѣ образуется многоугольникъ съ безчисленнымъ числомъ сторонъ. Периметръ этого многоугольника назовемъ чрезъ P. Если элементъ Ω выгибается, то очевидно периметръ P не измѣняется. Полярный многоугольникъ, соотвѣтствующій многоугольнику, коего периметръ есть P, очевидно, будетъ ничто иное какъ элементъ ω. Означивъ периметръ этого послѣдняго элемента чрезъ Π, мы выше видѣли, что:

$$P+\Pi=4d$$

откуда видимъ, что при выгибаніи элемента Ω, элементъ ω не измѣняется, слѣдовательно, отношеніе:

$$\frac{\omega}{\Omega}=\frac{1}{R_1R_2}$$

остается постояннымъ.

Диге (Diguet) показалъ еще, что если чрезъ данную точку A на поверхности проведемъ, по всѣмъ направленіямъ, геодезическія линіи, на которыхъ возьмемъ постоянную безконечно малую длину s, то на поверхности образуется элементъ Ω, котораго периметръ δ и площадь Ω выражаются слѣдующими уравненіями:

$$\delta=2\pi s-\frac{\pi s^2}{3R_1R_2}\,,\quad \Omega=\pi s^2-\frac{\pi s^4}{12R_1R_2} \qquad \text{(a)}$$

Изъ послѣдняго уравненія легко видѣть, что если кривизна поверхности есть величина постоянная, то элементы, образованные въ различныхъ точкахъ, подобно элементу Ω, будутъ совмѣщаться, слѣдовательно способъ наложенія можетъ быть примѣненъ къ такимъ поверхностямъ, т. е. на такихъ поверхностяхъ аксіома *совмѣстимости* имѣетъ мѣсто.

Изъ этого видимъ, что свойствомъ *совмѣстимости* обладаютъ не только плоскость и сфера, какъ мы выше сказали, но всѣ поверхности, имѣющія постоянную кривизну. На всѣхъ такихъ поверхностяхъ 8-я Евклидовская аксіома имѣетъ мѣсто и можетъ быть приложенъ способъ наложенія для сравненія мѣровыхъ отношеній фигуръ.

Если, какую нибудь, поверхность мы будемъ изгибать всѣми возможными способами, но только такими, при которыхъ не образовались бы ни складки, ни разрывы, то получимъ всѣ поверхности, которыя могутъ быть навиты, очевидно, безъ складокъ и разрывовъ одна на другую. Такъ какъ при выгибаніи поверхности, кривизна ея въ каждой точкѣ не измѣняется, то изъ этого слѣдуетъ, что для того, чтобы одна поверхность могла быть навита на другую, необходимо, чтобы, въ соотвѣтствующихъ точкахъ, кривизны обѣихъ поверхностей были равны. Но этого условія недостаточно, надобно еще, чтобы элементы геодезическихъ линій на обѣихъ поверхностяхъ были равны. Это послѣднее условіе вытекаетъ изъ втораго уравненія (a).

Постоянная кривизна поверхности можетъ быть *нуль, положительная* и *отрицательная.*

Типомъ поверхностей съ кривизной нуль служитъ *плоскость.*

Типомъ поверхностей съ постоянной положительной кривизной служитъ *сфера.*

И, наконецъ, типомъ поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной служитъ *псевдо-сфера* или *плоскость Лобачевскаго.*

Поверхности съ кривизною нуль.

Кривизна плоскости, очевидно, есть нуль, такъ какъ главные радіусы кривизны оба равны безконечности. Слѣдовательно, поверхности, которыя можно развернуть на плоскости, или на которыя можно навить плоскость, будутъ имѣть всѣ кривизну нуль. Таковы: поверхности *цилиндрическія, коническія*, и вообще всѣ поверхности извѣстныя подъ названіемъ *развертывающихся* поверхностей.

На всѣхъ этихъ поверхностяхъ всѣ три аксіомы Евклида имѣютъ мѣсто безъ исключеній, слѣдовательно, геометрическая система Евклида принадлежитъ не только плоскости, но и всѣмъ поверхностямъ съ кривизною *нуль*.

Пояснимъ это обстоятельнѣе: возьмемъ прямой цилиндръ съ круговымъ основаніемъ и что скажемъ о цилиндрѣ, то легко отнести и ко всякой другой развертывающейся поверхности.

Аксіома 8. Возьмемъ на плоскости какую нибудь фигуру, напримѣръ, треугольникъ и перенесемъ его по плоскости въ какое нибудь другое мѣсто, затѣмъ навьемъ плоскость на цилиндръ; очевидно, что вообще, изгибъ треугольника на цилиндрѣ, въ одномъ мѣстѣ, будетъ отличенъ отъ изгиба въ другомъ, но одинъ изъ треугольниковъ можно передвинуть по цилиндру и совмѣстить съ другимъ. Тоже самое можно сказать о совмѣстимости и на другихъ развертывающихся поверхностяхъ. Слѣдовательно, аксіома совмѣстимости имѣетъ мѣсто на всѣхъ развертывающихся поверхностяхъ.

Аксіома 12. Прямая линія вполнѣ опредѣляется двумя данными точками на плоскости, она же есть и кратчайшее разстояніе между этими точками.

Если плоскость, на которой между двумя точками проведена прямая линія, навьемъ на какую нибудь развертывающуюся поверхность, напримѣръ, цилиндръ, то прямая, навитая на цилиндръ съ плоскостью, можетъ остаться прямой и на цилиндрѣ, можетъ обратиться въ кругъ и можетъ сдѣлаться гелисомъ. При такихъ разнообразныхъ формахъ, которыя прямая принимаетъ на цилиндрѣ, она будетъ и на цилиндрѣ вполнѣ опредѣляться двумя точками и останется кратчайшимъ разстояніемъ и на цилиндрѣ. Все, что я сказалъ о цилиндрѣ, можно отнести и ко всѣмъ развертывающимся поверхностямъ.

Изъ сказаннаго видимъ, что 12-я аксіома, или опредѣленіе прямой есть масштабъ для геометрическихъ построеній на поверхностяхъ, не представляющихъ исключеній для этого опредѣленія. Этотъ масштабъ измѣняется по формѣ, не только отъ поверхности къ поверхности, но и на одной и той же поверхности.

Мы привыкли съ этимъ опредѣленіемъ прямой соединять неразрывно ея частную форму въ нашемъ пространствѣ, или на плоскости; для насъ она есть форма натянутой нити или отвѣса, между тѣмъ какъ опредѣленіе ея допускаетъ самыя разнообразныя формы. Евклидъ въ четвертомъ своемъ опредѣленіи, очевидно, имѣлъ въ виду форму прямой нашего пространства. Это опредѣленіе даетъ дѣйствительно понятіе о формѣ прямой, но не можетъ служить для геометрическихъ построеній.

Аксіома 11. Разсуждая точно также и относительно этой аксіомы, мы видимъ, что она, въ формѣ Евклида, или Лобачевскаго, будетъ имѣть мѣсто и на всѣхъ развертывающихся поверхностяхъ, если дѣйствительно обѣ геометрическія системы совмѣстно существуютъ на плоскости.

Изъ этого видимъ, что геометрическія системы Евклида и Лобачевскаго, существуя совмѣстно на плоскости, будутъ существовать и на всѣхъ развертывающихся поверхностяхъ. Это будутъ геометрическія системы поверхностей съ кривизною *нуль*.

Поверхности съ положительной кривизной.

Представителемъ поверхностей съ постоянной положительной кривизной есть сфера. Въ каждой точкѣ сферы, коей радіусъ есть R, всѣ радіусы кривизны равны R, слѣдовательно кривизна сферы, въ каждой ея точки, будетъ равна $\frac{1}{R^2}$.

Аксіома 8. Такъ какъ сфера есть поверхность съ постоянной положительной кривизной, то на ней, какъ мы выше показали, аксіома совмѣстимости имѣетъ мѣсто, какъ и на плоскости. Способъ наложенія для сравненія мѣровыхъ отношеній фигуръ на ней примѣняется.

Аксіома 12. На сферѣ двумя точками опредѣляется дуга большаго круга, она же есть и кратчайшее разстояніе между двумя точками. Слѣдовательно, на сферѣ прямая линія есть дуга большаго круга. Хотя двѣ точки на сферѣ и опредѣляютъ всегда дугу большаго круга, но положеніе двухъ точекъ бываетъ таково, что чрезъ нихъ можно провести безчисленное множество дугъ большихъ круговъ. Таковы двѣ діаметрально противуположныя точки. Кромѣ того, разстояній между двумя точками на сферѣ всегда два, одно изъ нихъ есть кратчайшее, а другое, хотя имѣетъ въ каждой своей точкѣ свойство кратчайшаго, но не есть кратчайшее. Слѣдовательно, двѣнадцатая аксіома на сферѣ имѣетъ мѣсто съ нѣкоторыми исключеніями. Вслѣдствіе этихъ исключеній не всѣ двадцать восемь первыхъ положеній Евклида имѣютъ мѣсто на сферѣ.

Напримѣръ, двѣ прямыя перпендикулярныя къ третьей на сферѣ встрѣчаются.

Аксіома 11. Всѣ прямыя (дуги большихъ круговъ), на сферѣ встрѣчаются. Геометрическая система построенная на этихъ аксіомахъ не имѣетъ теоріи параллельныхъ линій, въ ней нѣтъ подобія фигуръ. Сумма угловъ въ треугольникѣ, въ такой системѣ, больше двухъ прямыхъ. Площадь треугольника зависитъ отъ суммы угловъ. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что:

$$\triangle ABC = R^2(A+B+C-\pi).$$

Теперь становиться ясно почему Лежандръ успѣлъ доказать, что сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ, введя аксіому: что чрезъ данную точку внутри угла всегда можно провести прямую, встрѣчающую обѣ стороны угла. Очевидно, это одиннадцатая аксіома для сферы, а на сферѣ сумма угловъ въ треугольникѣ больше двухъ прямыхъ, слѣдовательно, Лежандръ, введя эту аксіому, перешелъ безсознательно къ геометрической системѣ сферы.

Все то, что я сказалъ относительно сферы, относится ко всѣмъ поверхностямъ, навивающимся на сферу, т. е. къ поверхностямъ, которыя имѣютъ кривизну равную кривизнѣ $\frac{1}{R^2}$ сферы. Слѣдовательно, геометрическую систему сферы можно назвать системой *постоянной положительной кривизны.*

Геометрическая система нулевой кривизны *одна.* Геометрическихъ системъ постоянной положительной кривизны безчисленное множество, и всѣ онѣ отличаются между собою только постояннымъ числомъ, выражающимъ кривизну, которая входитъ извѣстнымъ образомъ въ геометрическія зависимости системы. Напримѣръ, мы уже видѣли, что площадь треугольника на сферѣ равна:

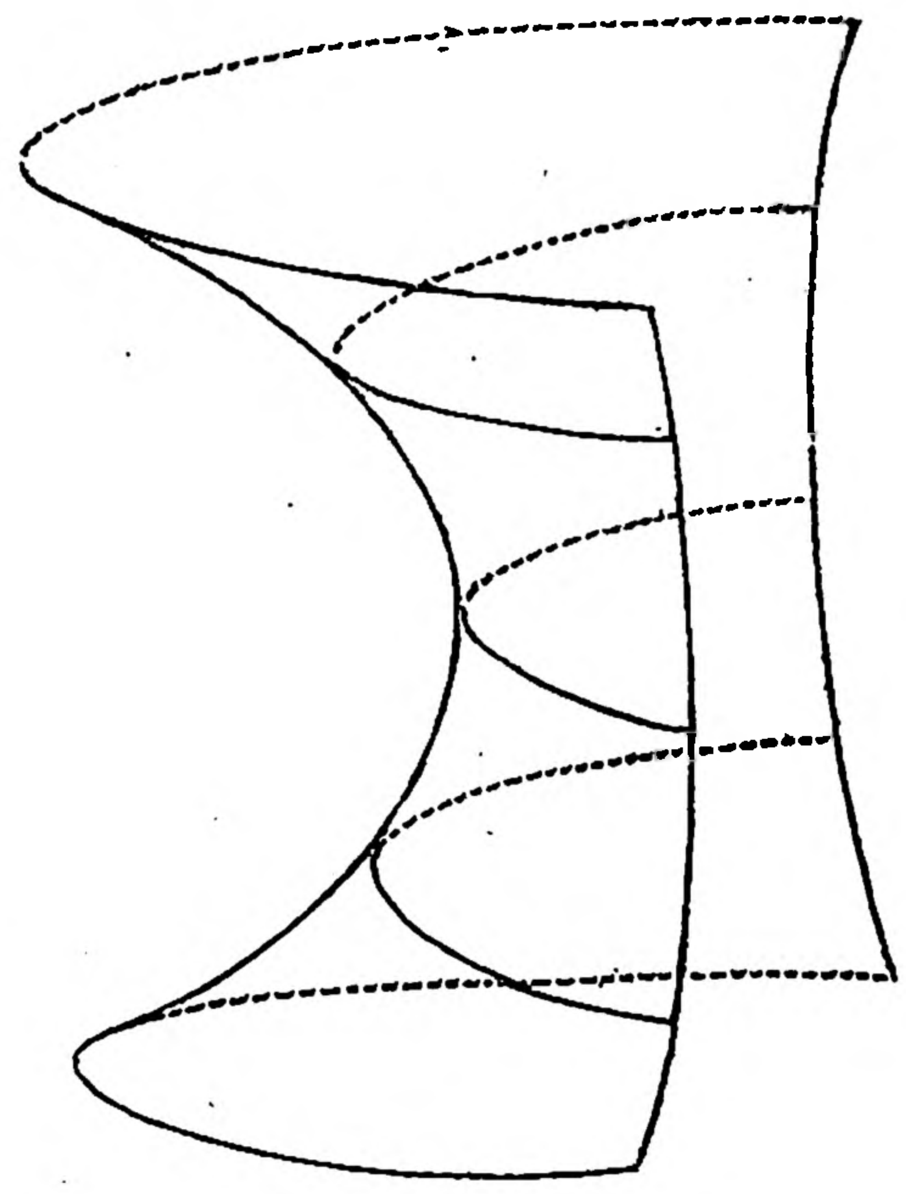
$$\triangle ABC = R^2\,(A+B+C-\pi)$$

R^2 для различныхъ системъ будетъ различно.

Поверхности съ постоянной отрицательной кривизной.

Мы видѣли, что если въ извѣстной точкѣ поверхности кривизна ея есть величина отрицательная, то въ этой точкѣ поверхность выпукло-вогнутая и лежитъ частію съ одной, а частію съ другой стороны касательной плоскости въ данной точкѣ. Если поверхность имѣетъ во всѣхъ своихъ точкахъ отрицательную кривизну, то ее называютъ *сѣдло-образною,* такъ какъ въ каждой ея точкѣ она имѣетъ форму сѣдла, главные радіусы кривизны обращены въ противуположныя стороны. Если кривизна такой по-

Фиг. 40.



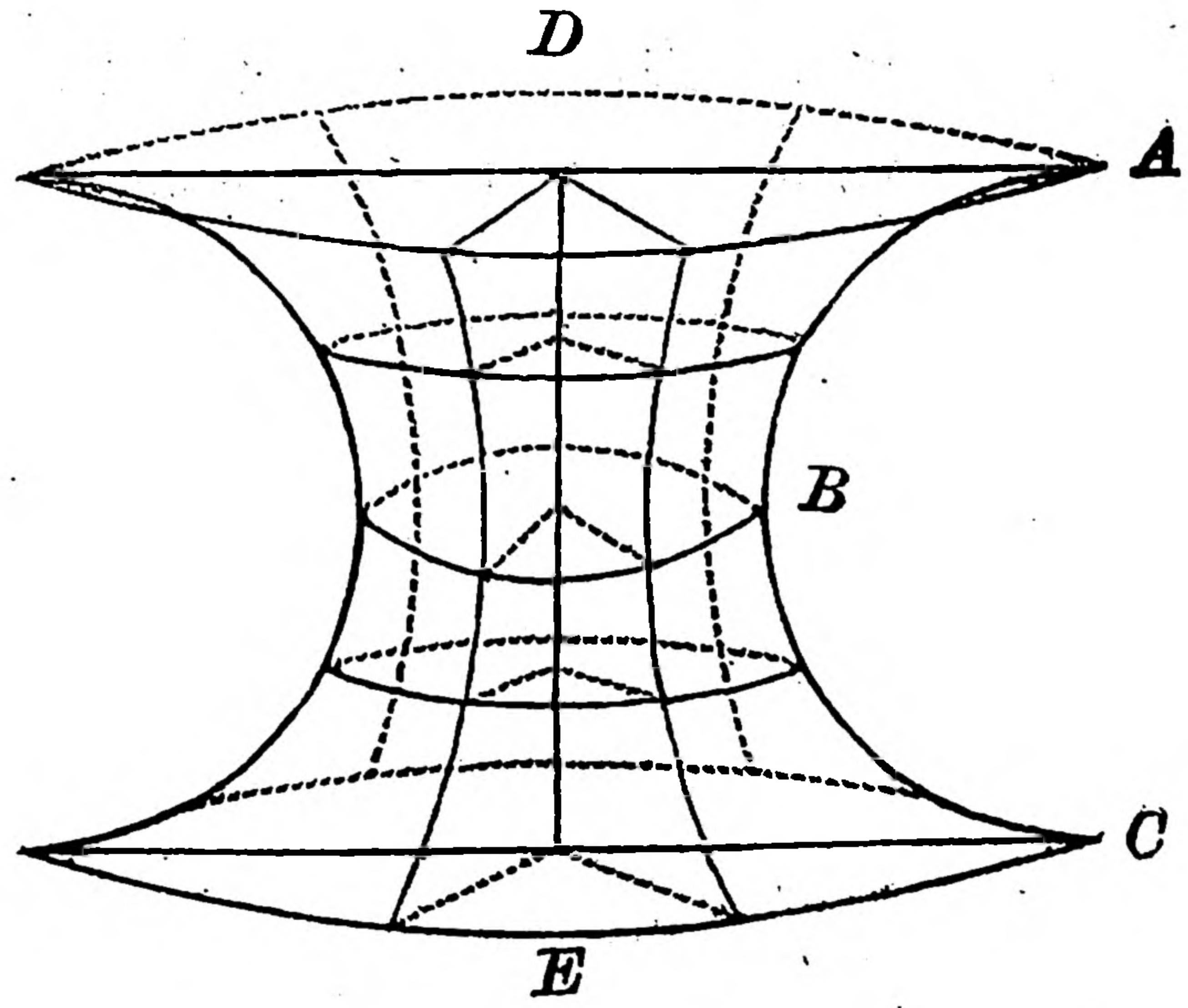
верхности есть величина постоянная, т. е. если произведеніе главныхъ радіусовъ кривизны R_1 и R_2 будетъ:

$$R_1 R_2 = -R^2$$

то такую поверхность называютъ *псевдо-сферой*. Названіе это далъ итальянскій геометръ Бельтрами, который въ первый разъ и изслѣдовалъ свойства псевдо-сферы. Сходства между сферой и псевдо-сферой нѣтъ никакого, единственное сходство заключается въ томъ, что какъ въ той, такъ и въ другой поверхности, кривизна постоянная, но въ одной положительная, а въ другой отрицательная.

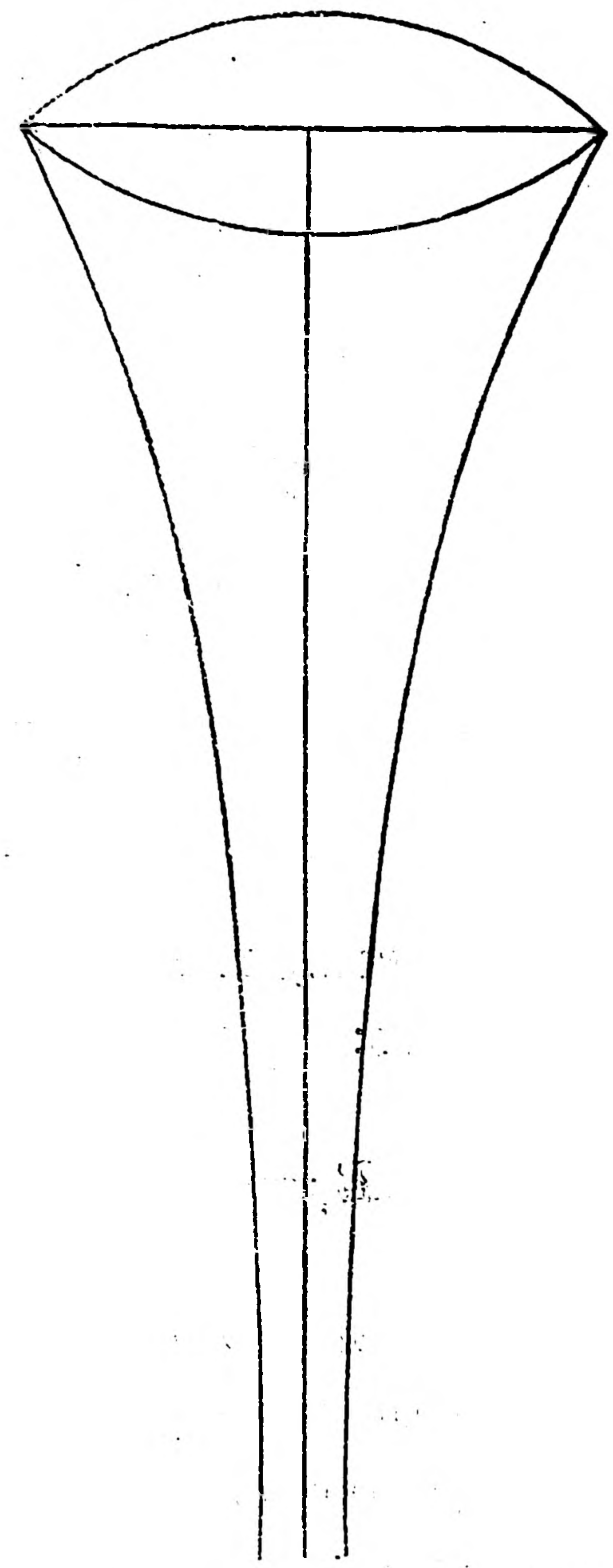
Часть псевдо-сферической поверхности можно получить обращая полуокружность ABC около оси DE. Въ каждой точкѣ, такимъ образомъ полу-

Фиг. 41.



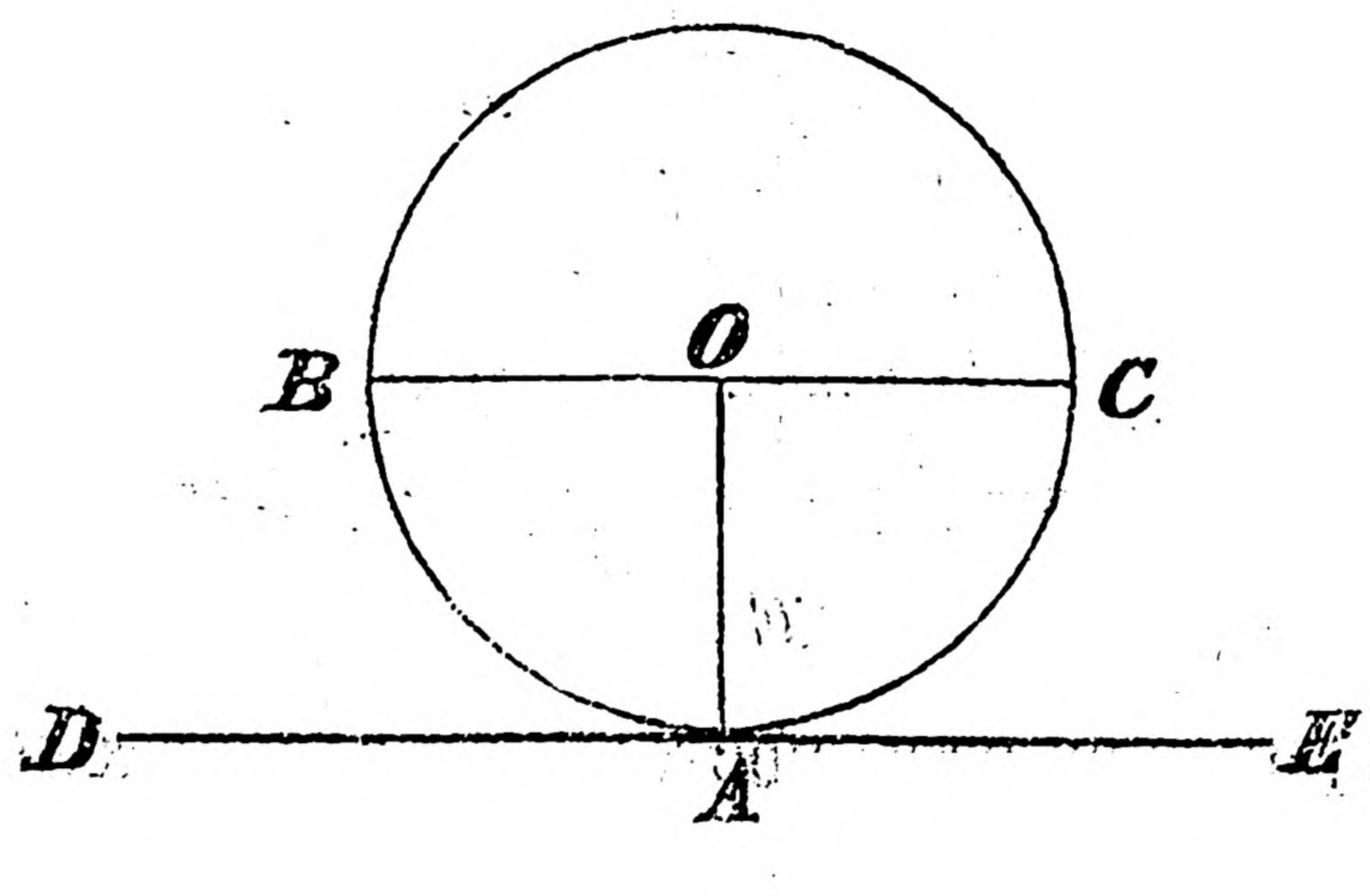
ченной поверхности, кривизна есть постоянная отрицательная величина. Еще часть псевдо-сферы представитъ шампанскій бокалъ, если острую ножку послѣдняго, съуживая, продолжить до безконечности.

Фиг. 42.



Изслѣдованія Бельтрами. Бельтрами сначала рѣшаетъ слѣдующую задачу: найти поверхности, точки которыхъ, можно бы было такъ отнести къ плоскости, чтобы линіи кратчайшихъ разстояній на поверхности (геодезическія) изображались прямыми линіями на плоскости? Бельтрами показываетъ, что такія поверхности суть сфера и псевдо-сфера. Пояснимъ это на сферѣ. Возьмемъ сферу O и на ней точку A, назовемъ эту точку полюсомъ и проведемъ чрезъ нее касательную плоскость DE къ сферѣ. Проведемъ чрезъ центръ шара O прямыя по всѣмъ направленіямъ къ точкамъ плоскости, эти пря-

Фиг. 43.



мыя пересѣкутъ полу-сферу *BAC* въ точкахъ, которыя будутъ соотвѣтствовать точкамъ плоскости и обратно. Очевидно, что каждой точкѣ плоскости будетъ соотвѣтствовать *одна* только точка полу-сферы *BAD*. Каждой линіи на одной изъ поверхностей будетъ соотвѣтствовать линія на другой. Каждой геодезической линіи на одной изъ поверхностей соотвѣтствуетъ геодезическая линія на другой. И въ самомъ дѣлѣ, каждая плоскость, проходящая чрезъ центръ сферы, пересѣкаетъ плоскость *DE* по прямой, а полу-сферу по большому кругу. Точки большаго круга на сферѣ, коего плоскость параллельна плоскости *DE*, будутъ соотвѣтствовать безконечно удаленнымъ точкамъ на плоскости. Двумъ параллельнымъ прямымъ на плоскости будутъ соотвѣтствовать два большихъ круга сферы, коихъ общій діаметръ параллеленъ касательной плоскости *DE*. Слѣдовательно, зная такую зависимость, мы, отъ теоремъ геометрической системы на плоскости, можемъ переходить къ теоремамъ на сферѣ и построить, такимъ образомъ, сферическую геометрическую систему.

Псевдо-сфера. Другая поверхность, найденная Бельтрами, есть псевдосфера. Онъ находитъ, что она распространяется въ безконечность, но въ безконечности ограничена кругомъ, коего радіусы суть безконечно большія геодезическія линіи на поверхности, исходящія изъ одной точки. За предѣломъ этого геодезическаго круга, поверхность не продолжается, точки ея дѣлаются мнимыми, идеальными. Всѣ ея точки можно такъ отнести къ плоскости, что соотвѣтствующія точки плоскости будутъ всѣ лежать внутри конечнаго круга, окружность котораго будетъ соотвѣтствовать точкамъ поверхности, лежащимъ на безконечности, т. е. на выше упомянутой геодезической окружности.

ѐодезическимъ линіямъ на поверхности будутъ соотвѣтствовать хорды круга на плоскости.

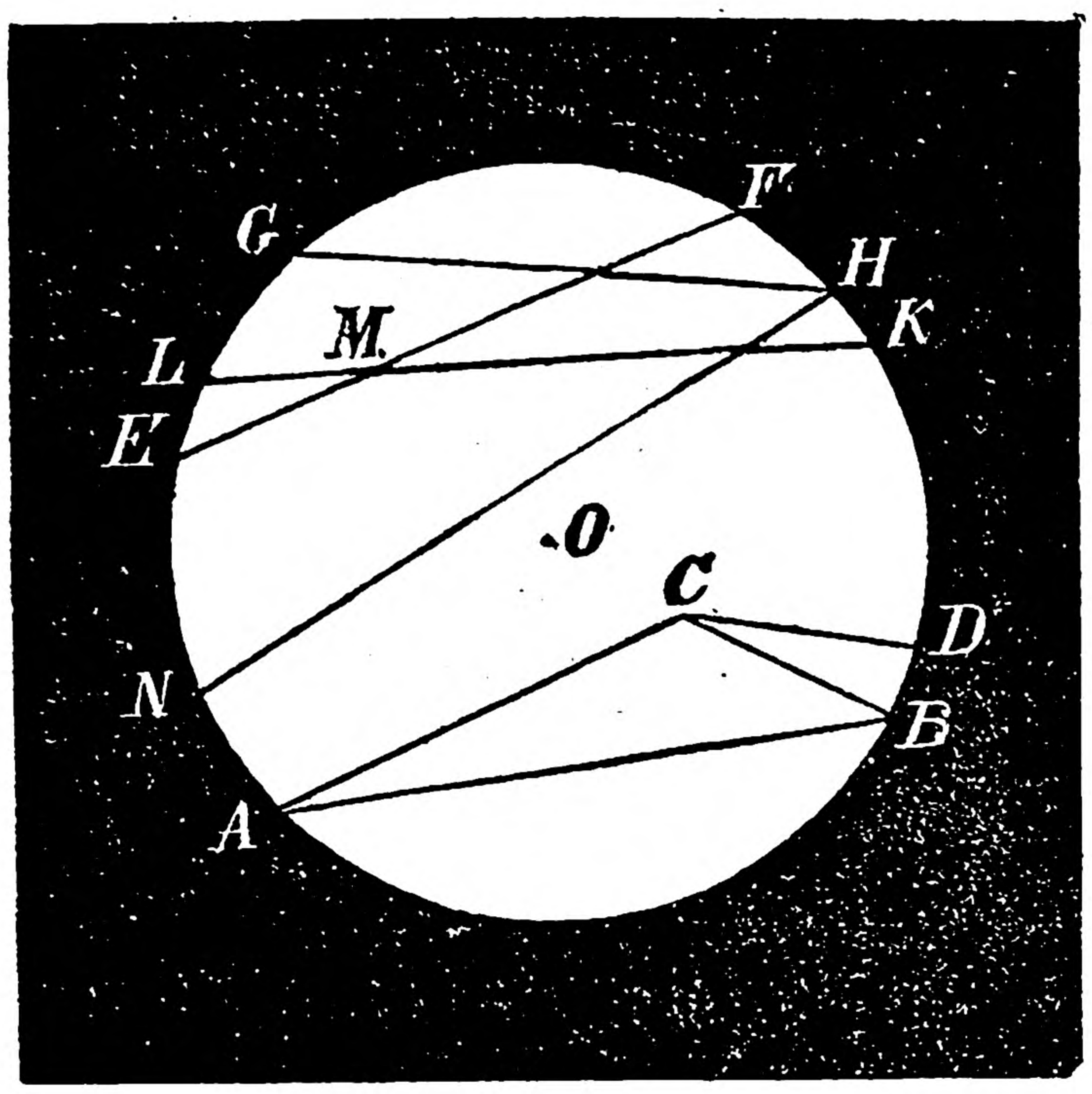
Аксіома 8. Такъ какъ кривизна псевдо-сферы есть величина постоянная, то аксіома совмѣстимости на ней имѣетъ мѣсто и способъ наложенія можетъ быть примѣненъ какъ и на плоскости.

Аксіома 12. Геодезическая линія, или линія кратчайшаго разстоянія между двумя точками, *вполнѣ* опредѣляется двумя данными точками безъ всякихъ исключеній, слѣдовательно вполнѣ соотвѣтствуетъ опредѣленію прямой на плоскости.

Изъ этого видимъ, что 8-я и 12-я аксіомы принадлежатъ и плоскости и псевдо-сферѣ вмѣстѣ, слѣдовательно первыя двадцать восемь положеній Евклида будутъ общими и плоскости и псевдо-сферѣ.

Аксіома 11. Я уже сказалъ, что каждой точкѣ на псевдо-сферѣ соотвѣтствуетъ только *одна* точка круга на плоскости, коего радіусъ есть величина конечная, и что геодезическимъ линіямъ соотвѣтствуютъ хорды круга. Точкамъ встрѣчи хорды съ окружностью соотвѣтствуютъ безконечно удаленныя точки геодезической линіи на псевдо-сферѣ.

Фиг. 44.

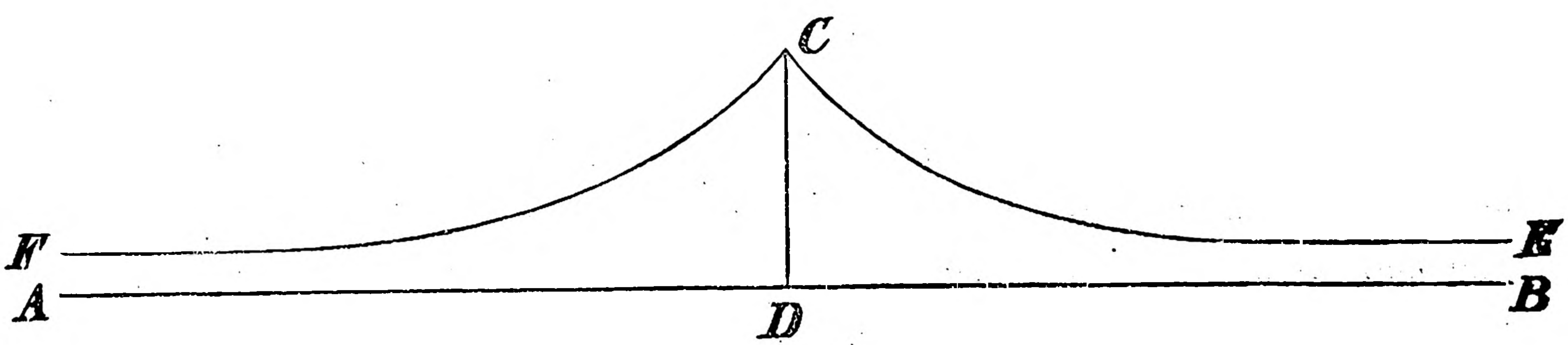


Пусть O будетъ центръ круга, коего точки соотвѣтствуютъ точкамъ псевдо-сферы (фиг. 44). Окружность $ABFE$ будетъ соотвѣтствовать точкамъ безконечно удаленнымъ на псевдо-сферѣ. Хорда, напримѣръ AB, соотвѣтствуетъ геодезической линіи на псевдо-сферѣ. Точки A и B хорды AB соотвѣтствуютъ безконечно удаленнымъ точкамъ геодезической линіи. Если двѣ хорды пересѣкаются внутри круга $ABFE$, какъ напримѣръ хорды LK и EF въ точкѣ M, то соотвѣтствующія геодезическія линіи пересѣкаются на псевдо-сферѣ въ конечномъ разстояніи. Если двѣ хорды пересѣкаюся на окружности, какъ напримѣръ хорды GH и NH, то геодезическія линіи пересѣкаются на безконечности. Если наконецъ двѣ хорды, какъ напримѣръ GH и LK, пересѣкаются внѣ круга, то геодезическія линіи, соотвѣтствующія такимъ хордамъ на псевдо-сферѣ, не пересѣкаются.

Возьмемъ на псевдо-сферѣ геодезическую линію A_1B_1 и точку C_1, лежащую внѣ геодезической линіи. Пусть въ кругѣ $ABEF$ хорда AB соотвѣтствуетъ геодезической линіи A_1B_1 на псевдо-сферѣ, а точка C пусть соотвѣтствуетъ тоикѣ C_1. Если чрезъ точку C въ кругѣ проведемъ двѣ хорды CA и CB, то на псевдо-сферѣ имъ будутъ соотвѣтствовать двѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку на псевдо-сферѣ и встрѣчающія данную геодезическую линію A_1B_1 на безконечности. Хордамъ, проходящимъ чрезъ точку C и лежащимъ внутри угла ACB, будутъ соотвѣтствовать на псевдо-сферѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку и встрѣчающія данную геодезическую линію. Хордамъ, проходящимъ чрезъ туже точку C и лежащимъ внѣ угла ABC, будутъ соотвѣтствовать геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку и не встрѣчающія данной геодезической линіи. Изъ этого видимъ, что если на псевдо-сферѣ дана геодезическая линія и точка лежащая внѣ геодезической линіи, то всѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку, дѣлятся на встрѣчающія и невстрѣчающія данную. Двѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку, встрѣчающія данную на безконечности отдѣляютъ встрѣчающія отъ невстрѣчающихъ. Если эти послѣднія двѣ линіи назовемъ *параллельными* данной, то мы сейчасъ видимъ, что геометрическая система Лобачевскаго есть система на псевдо-сферѣ, такъ какъ три аксіомы на псевдо-сферѣ суть аксіомы, положенныя Лобачевскимъ въ основаніе своей системы. Такимъ образомъ, Лобачевскій первый изслѣдовалъ ту поверхность, которую Бельтрами назвалъ псевдо-сферой и которую слѣдовало бы назвать плоскостью Лобачевскаго.

Далѣе Бельтрами показываетъ, что если AB будетъ геодезическая линія на псевдо-сферѣ и C точка внѣ ея, $CD=p$ перпендикулярная геоде-

Фиг. 45.



зическая линія къ AB, CE и CF параллельныя AB, то, назвавъ уголъ ECD чрезъ $\Pi(p)$ будетъ:

$$\cot g \tfrac{1}{2}\, \Pi(p) = e^{\frac{p}{k}}$$

гдѣ k радіусъ кривизны псевдо-сферы. Слѣдовательно, постоянное k системы Лобачевскаго есть ничто иное, какъ радіусъ кривизны псевдо-сферы.

Бельтрами находитъ, что окружность круга на псевдо-сферѣ, коего радіусъ есть r, какъ и у Лобачевскаго, имѣетъ выраженіе:

$$Ок.r = \pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{\frac{-r}{k}}\right)$$

Сумма угловъ въ геодезическомъ треугольникѣ на псевдо-сферѣ меньше двухъ прямыхъ. Площадь его, если A, B, C суть углы треугольника, будетъ:

$$\Delta = k^2 (\pi - A - B - C).$$

Однимъ словомъ Бельтрами показываетъ полное тождество геометрической системы Лобачевскаго съ системою на псевдо-сферѣ, которое уже становиться яснымъ, какъ только онъ показалъ, что аксіомы Лобачевскаго и псевдо-сферы тождественны.

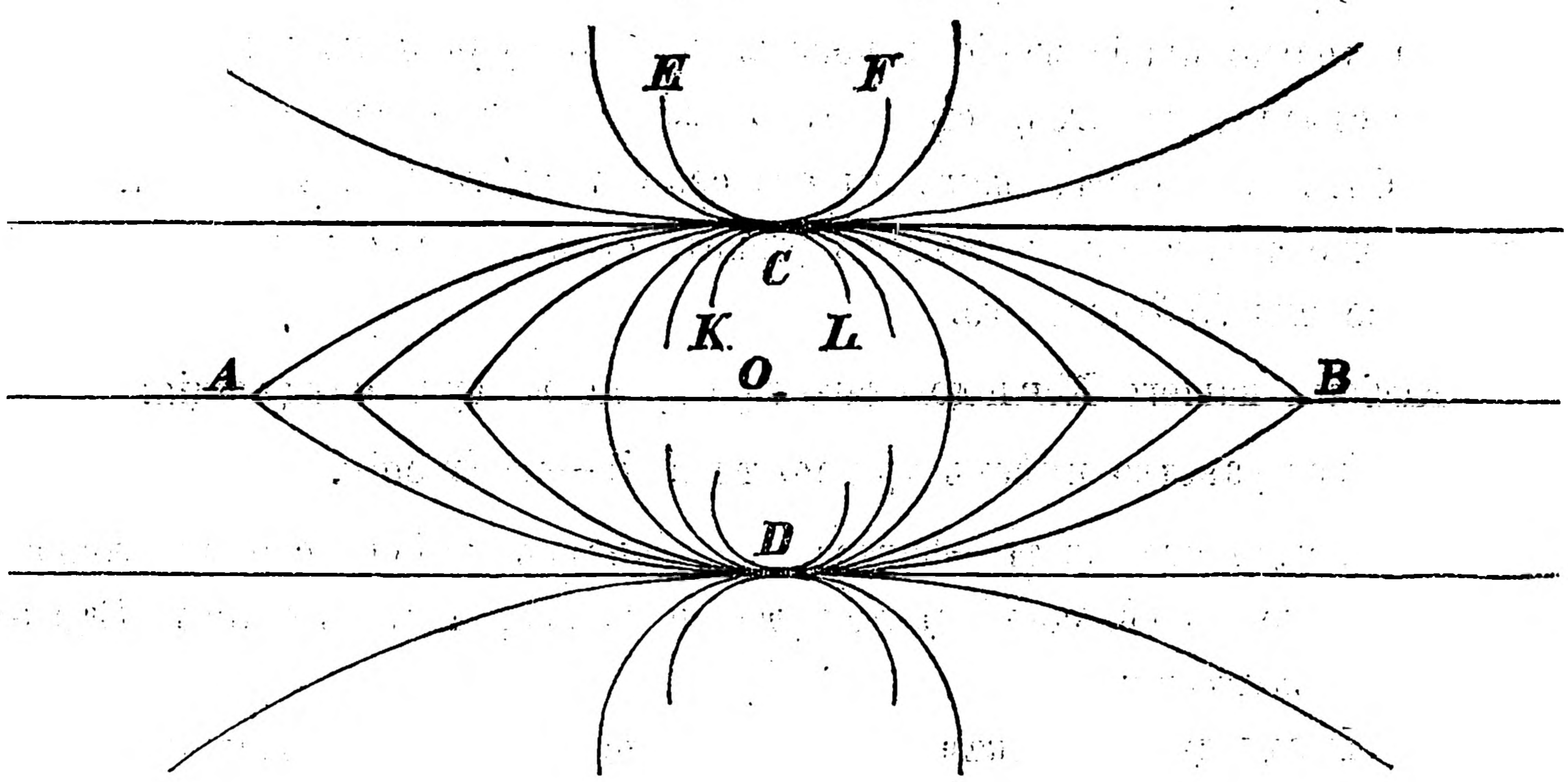
Послѣ этого ясно видно почему одиннадцатая аксіома не можетъ быть доказана на основаніи 8-й и 12-й. Аксіомы 8-я и 12-я принадлежатъ и плоскости и псевдо-сферѣ, слѣдовательно, доказать съ помощью 8-й и 12-й одиннадцатую аксіому, это значитъ показать, что свойство, выраженное ею, принадлежитъ и плоскости и псевдо-сферѣ, а эти поверхности только и отличаются смысломъ одиннадцатой аксіомы.

Геометрическихъ системъ съ постоянной отрицательной кривизной есть безчисленное множество, всѣ онѣ отличаются между собою только числовымъ значеніемъ кривизны. Система эта принадлежитъ и всѣмъ поверхностямъ, которыя навиваются на псевдо-сферу.

Изъ всего сказаннаго видимъ, что существуетъ три геометрическія системы: система на поверхности съ кривизною *нуль* или плоская геометрія—Евклидовская, система на поверхности съ постоянной *положительной* кривизной, или сферическая геометрія и система на поверхности съ постоянной *отрицательной* кривизной или геометрія псевдо-сферическая—Лобачевскаго. Плоская геометрія составляетъ переходъ отъ сферической къ псевдо-сферической. Изъ этого также видимъ, что одиннадцатая аксіома тѣсно связана съ кривизною той поверхности на которой строится геометрическая система.

Риманъ весьма наглядно рисуетъ систему поверхностей, имѣющихъ всевозможныя постоянныя кривизны. Для этого сначала построимъ поверхности, которыя можно навить на сферу. Возьмемъ сферу съ извѣстнымъ радіусомъ и на ней двѣ діаметрально противуположныя точки, соединимъ эти точки двумя дугами большихъ круговъ и часть сферы, заключающейся между этими кругами, т. е. сферическую лодку, вырѣжемъ и края остальной части сферы сведемъ, такимъ образомъ, получится веретено-образная поверхность, которая очевидно, навивается на сферу. Чѣмъ вырѣзанная часть сферы будетъ больше, тѣмъ полученная веретено-образная поверхность будетъ тоньше. Мы взяли сферу съ предѣльнымъ радіусомъ, напримѣръ, R. Теперь будемъ брать сферы, радіусы которыхъ, начиная съ R, дѣлались бы все больше и больше до ∞. Изъ такихъ сферъ будемъ вырѣзывать сферическія лодки и сближать края остальныхъ частей сферъ. Лодки должны быть такъ вырѣзаны, чтобы полученныя веретено-образныя поверхности заключали внутри взятую сферу и касались бы ея по большому кругу. Когда мы возьмемъ наконецъ сферу съ радіусомъ равнымъ безконечности, то, очевидно, веретено-образная поверхность обратится въ прямой цилиндръ, радіусъ основанія котораго есть R. Все это суть поверхности вращенія около оси AB.

Фиг. 46.



Если еще возьмемъ два полукруга KCL и ECF, которые касаются круга O и коихъ радіусы меньше R, то они опишутъ около оси AB поверхности изъ коихъ одна, описанная полукругомъ KCL, будетъ навиваться на сферу, коей радіусъ равенъ радіусу круга KCL, а другая ECF опишетъ часть псевдо-сферы. Вся система такихъ поверхностей вращенія будетъ представлять поверхности со всевозможными постоянными кривизнами, отъ $-\infty$ до $+\infty$. Цилиндрическая поверхность съ кривизною нуль отдѣляетъ поверхности съ положительной кривизной отъ поверхностей съ кривизной отрицательной. На каждой изъ поверхностей можетъ быть построена геометрическая система, которая и будетъ одной изъ трехъ выше упомянутыхъ.

Каждая изъ всевозможныхъ поверхностей съ постоянной кривизной можетъ быть навита на одну изъ предъидущей системы поверхностей.

Мы уже видѣли, что Евклидовская система есть частный случай системы Лобачевскаго, и что Лобачевскій пытался провѣрить это, построеніемъ такихъ треугольниковъ, которыхъ бы стороны были не меньше земной орбиты. Онъ вычислилъ сумму угловъ въ такихъ треугольникахъ и нашелъ, что она меньше двухъ прямыхъ на 0,003 секунды. Такая незначительная разница можетъ происходить отъ погрѣшностей при наблюденіяхъ, но если обратимъ вниманіе на то, что, дѣлая подобныя повѣрки, *всегда* находятъ сумму угловъ въ треугольникахъ меньше двухъ прямыхъ, то можно, съ нѣкоторою вѣроятностію, предположить, что если бы стороны построенныхъ треугольниковъ были еще значительнѣе, напримѣръ, были бы равны, по крайнѣй мѣрѣ, разстоянію Сиріуса отъ земли, то могло случиться, что найденная сумма угловъ въ такихъ треугольникахъ отличалась бы отъ двухъ прямыхъ на количество болѣе значительное. Изъ этого мы заключили бы, что наше пространство имѣетъ законы отличные отъ Евклидовскихъ, которые суть только приближеніе законовъ псевдо-сферическаго пространства. Какъ не странно кажется, съ перваго взгляда, что наше пространство можетъ быть не такимъ, какъ мы его себѣ представляемъ, но мы выше видѣли, что только опытъ можетъ рѣшить есть-ли наше пространство Евклидовское или Лобачевскаго.

Аксіомы нашего Евклидовскаго пространства суть слѣдующія:

1) Пространство имѣетъ три протяженія—измѣренія.

2) Каждая его часть—фигура, совмѣщаясь всѣми своими точками въ одномъ его мѣстѣ, совмѣщается, точно также, и въ другомъ. Это аксіома *совмѣстимости*.

3) Между двумя точками въ пространствѣ можно провести только *одну* прямую линію.

4) Сумма угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ въ пространствѣ равна двумъ прямымъ угламъ.

Пространство, опредѣляемое этими аксіомами, мы будемъ называть *плоскимъ* или Евклидовскимъ.

Изъ этихъ основныхъ аксіомъ Евклидовскаго пространства вытекаютъ слѣдующія свойства его:

a) Евклидовское пространство безконечно и безгранично. Въ немъ можно построить безчисленное множество пространствъ двухъ протяженій—поверхностей, отдѣляющихъ одну часть пространства отъ другой. Онѣ дѣлятся на конечныя, но безграничныя—это поверхности съ положительной кривизной, на безграничныя и безконечныя—съ кривизною нуль и на безконечныя, но ограниченныя—это поверхности съ отрицательной кривизной. Типы ихъ: сфера, плоскость и псевдо-сфера.

b) Чрезъ три точки въ пространствѣ, не лежащія на одной прямой линіи, можно провести только *одну* плоскость.

c) Если двѣ точки прямой, лежащей въ одной плоскости, совпадаютъ съ двумя точками прямой лежащей въ другой плоскости, то обѣ прямыя совпадаютъ всѣми своими точками.

d) Уголъ, образуемый перпендикулярами, возставленными изъ какой нибудь точки пересѣченія двухъ плоскостей къ этому пересѣченію въ плоскостяхъ, есть величина постоянная—имъ измѣряется наклоненіе двухъ плоскостей.

На этихъ свойствахъ пространства построена Евклидовская стереометрія.

Если мы оставимъ первыя три аксіомы Евклидовскаго пространства безъ измѣненія, а измѣнимъ четвертую, сказавъ что сумма угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ меньше двухъ прямыхъ, то мы получимъ пространство, которое уже изслѣдовалъ Лобачевскій, а въ 1868 году Бельтрами, въ мемуарѣ Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Бельтрами назвалъ такое пространство *псевдо-сферическимъ*, но лучше бы было его назвать пространствомъ Лобачевскаго.

Вотъ результаты данные Бельтрами:

a) Въ псевдо-сферическомъ пространствѣ тремя точками вполнѣ опредѣляется псевдо-сфера, или плоскость Лобачевскаго.

b) Если двѣ точки геодезической линіи, лежащей на одной псевдосферѣ, совпадаютъ съ двумя точками геодезической линіи, лежащей на другой псевдо-сферѣ, то обѣ геодезическія линіи совпадаютъ всѣми своими точками.

c) Если двѣ псевдо-сферическія поверхности или плоскости Лобачевскаго пересѣкаются, то уголъ наклоненія есть величина постоянная.

Изъ этого видимъ, что псевдо-сфера въ псевдо-сферическомъ пространствѣ тоже, что плоскость въ Евклидовскомъ.

Поверхностямъ сферическимъ въ пространствѣ Евклидовскомъ соотвѣтствуютъ, въ пространствѣ псевдо-сферическомъ, поверхности, которыя пересѣкаютъ всѣ геодезическіе радіусы, исходящіе изъ одной точки, подъ прямымъ угломъ—это суть геодезическія сферы. Здѣсь также случается, что чрезъ три данныя точки, а тѣмъ болѣе чрезъ четыре, нельзя провести геодезической сферы, имѣющей свой центръ въ данной точкѣ. Геодезическая сфера, коей центръ находится на безконечности, есть ничто иное какъ *предѣльная поверхность* Лобачевскаго. Эта поверхность въ псевдосферическомъ пространствѣ имѣетъ кривизну нуль и на ней имѣетъ мѣсто геометрическая система Евклида.

Изъ этихъ результатовъ данныхъ Бельтрами видимъ, что геометріи Лобачевскаго соотвѣтствуетъ геометрія въ псевдо-сферическомъ пространствѣ на псевдо-сферѣ, съ тою только разницею, что плоская геометрія Лобачевскаго можетъ быть конкретно представлена на *дѣйствительной* поверхности въ пространствѣ Евклида, а для геометріи трехъ измѣреній въ псевдо-сферическомъ пространствѣ нѣтъ конкретнаго представленія, такъ какъ это пространство отлично отъ нашего и конкретнаго о немъ представленія мы имѣть не можемъ; эти два пространства сходны между собою, но только тогда когда радіусъ кривизны есть величина безконечно-большая, т. е. когда кривизна мало отличается отъ нуля. Слѣдовательно только опытъ можетъ рѣшить этотъ вопросъ.

Я сказалъ выше: *когда кривизна пространства есть нуль.* Чтобы пояснить это выраженіе, вспомнимъ, что площадь треугольника на псевдо-сферѣ имѣетъ выраженіе:

$$R^2(\pi - A - B + C)$$

гдѣ R есть радіусъ кривизны псевдо-сферы. Если площади всѣхъ треугольниковъ, построенныхъ въ псевдо-сферическомъ пространствѣ, будутъ имѣть предъидущее выраженіе, то $-\frac{1}{R^2}$ называется *кривизною пространства.* Слѣдовательно кривизна Евклидовскаго пространства есть нуль, поэтому его называютъ *плоскимъ.*

Гельмгольцъ наглядно изображаетъ какимъ образомъ мы можемъ представить возможность пространства, отличнаго отъ нашего. Для этого онъ воображаетъ существа двухъ измѣреній, живущія на какой нибудь поверхности. Поверхность эта будетъ для такихъ существъ пространствомъ, въ которомъ они живутъ и движутся. Если эти существа разумныя и занимаются геометріей, то они найдутъ, что ихъ пространство двухъ протяженій, о томъ же, что существуетъ внѣ этой поверхности, они не будутъ имѣть никакого понятія; для нихъ выйти изъ поверхности невозможно, какъ и намъ изъ нашего пространства. Если эта поверхность—ихъ пространство—есть плоскость, то ихъ геометрія будетъ Евклидовская. Положимъ теперь, что наши существа живутъ на прямомъ цилиндрѣ, котораго радіусъ основанія весьма большой. Существо, двигаясь по женератрисѣ, по директрисѣ и по гелису, параллельно самому себѣ, очевидно не измѣнитъ своей формы, но если оно будетъ обращаться около одной изъ своихъ точекъ, то изгибъ его фигуры будетъ измѣняться, хотя разстояніе между точками фигуры не измѣнится. Такъ какъ все вмѣстѣ съ существомъ измѣняется въ такомъ же смыслѣ, то существо этого и не замѣтитъ. Всѣ расходящіяся направленія, по которымъ существо можетъ двигаться, будутъ ему казаться тождественными. Всѣ линіи кратчайшихъ разстояній будутъ ему казаться одинаковыми, какъ намъ представляется прямая. Если при этомъ, существо можетъ изучить только небольшую часть своей поверхности, то его геометрія будетъ наша плоская—Евклидовская. Положимъ, теперь, что существо двигаясь по директрисѣ—по окружности основанія—возвратилось въ точку исхода и затѣмъ, изслѣдуя свое пространство во всѣхъ направленіяхъ, было въ состояніи построить геометрію цилиндрическую такую, какая она есть для насъ. Очевидно, что эта последняя геометрiя будетъ для него дѣйствительною, а прежняя Евклидовская будетъ только субъективно возможная—идеальная. Существо найдетъ радiусъ основанiя своего пространства и построитъ всѣ геометрическiя системы на цилиндрахъ, коихъ радiусы будутъ имѣть всевозможныя величины отъ 0 до ∞; построитъ наконецъ систему сферическую и псевдо-сферическую. Всѣ эти системы будутъ для него идеальными, существующими субъективно, выраженными извѣстными аналитическими комбинацiями.

Въ такомъ положенiи находимся мы въ нашемъ пространствѣ. Субъективно-аналитически мы можемъ построить безчисленное множество другихъ пространствъ, между которыми пространство съ постоянной положительной кривизной или сферическое и пространство съ постоянной отрицательной кривизной или псевдо-сферическое суть самыя простыя.

Сферическое пространство можетъ быть построено по слѣдующимъ законамъ:

1) Оно трехъ протяженiй.

2) Совмѣстимость въ немъ имѣетъ мѣсто.

3) Прямая всегда возвращается въ точку своего исхода.

4) Сумма угловъ въ геодезическомъ треугольникѣ всегда больше двухъ прямыхъ.

Пространство плоское Евклидовское безконечно и безгранично.

Пространство сферическое конечно, но безгранично.

Пространство псевдо-сферическое—Лобачевскаго безконечно, но ограниченно.

Если бы мы аналитически построили пространство четырехъ измѣренiй—протяженiй, обобщенiемъ нашего пространства плоскаго, то всѣ пространства трехъ измѣренiй относились бы къ нему такъ, какъ всѣ поверхности—пространства двухъ измѣренiй,—относятся къ нашему плоскому пространству.

Лобачевскiй.

Николай Ивановичъ Лобачевскiй родился въ Нижнемъ-Новгородѣ въ 1793 году, воспитывался въ Казанской гимназiи и въ 1807 году поступилъ въ Казанскiй университетъ въ число студентовъ математическаго факультета. Будучи студентомъ, онъ пользовался особеннымъ расположенiемъ профессора Бартельса, который замѣтилъ въ немъ необыкновенное дарованiе къ математикѣ. Въ 1811 году онъ былъ утвержденъ магистромъ математическихъ наукъ и началъ свою преподавательскую дѣятельность въ университетѣ изложенiемъ Небесной Механики Лапласа и Disquisitiones arithmeticae Гаусса. Въ 1816 году онъ занялъ каѳедру чистой математики и съ этого времени начинаются ученые труды Лобачевскаго. Онъ былъ 6 разъ сряду избираемъ ректоромъ университета, пробылъ въ этой должности 19 лѣтъ. Состоялъ членомъ Геттингенскаго, Копенгагенскаго и другихъ ученыхъ обществъ и почетнымъ членомъ университетовъ Московскаго и Казанскаго. Дѣятельность его была по истинѣ удивительная: онъ присутствовалъ на всѣхъ засѣданіяхъ, которыхъ въ то время было очень много, читалъ лекціи за профессоровъ, посылаемыхъ заграницу, присутствовалъ на всѣхъ экзаменахъ и былъ не строгъ, но иногда своенравенъ, требовалъ отвѣтовъ не бойкихъ, но показывающихъ развитіе. Самыя глубокомысленныя и замѣчательныя сочиненія, которыя ставятъ Лобачевскаго на ряду съ самыми геніальными математиками всѣхъ временъ, суть слѣдующія:

1) О началахъ геометріи. Рядъ статей, въ Казанскомъ Вѣстникѣ за 1829—1830 г.

2) Géométrie imaginaire. Crell's, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 17.

3) Воображаемая геометрія. Ученыя Записки Казанскаго университета 1835 г.

4) Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ. Учен. Записки Казанск. универс. 1835, 1836, 1837 и 1838.

5) Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ. Учен. Зап. Казан. унив. 1836.

6) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840.

7) Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, въ Сборникѣ, изданномъ въ 1856 году, по случаю 50-тилѣтняго юбилея Казанскаго университета.

Прежде нежели это послѣднее сочиненіе было издано, авторъ лишился зрѣнія и вскорѣ умеръ, въ 1856 году.

Всѣ вышеуказанныя сочиненія были направлены къ тому, чтобы пополнить пробѣлъ Евклидовской геометрической системы. Для пополненія этого пробѣла онъ предпринялъ построеніе системы, независимой отъ одиннадцатой аксіомы. Предшественниковъ въ этомъ направленіи онъ не имѣлъ, онъ былъ полный творецъ своей системы, которая оставалась въ забвеніи цѣлыхъ сорокъ лѣтъ, и только разъ, мелькомъ, въ продолженіи этого времени, указалъ на нее Гауссъ. Но когда Риманъ, Бельтрами и Гельмгольцъ указали на важное значеніе этой системы, не только въ математикѣ, но и въ философіи, когда Бельтрами спеціально занялся изслѣдованіями для конкретнаго уясненія системы Лобачевскаго, тогда его сочиненія были переведены на нѣмецкій, французскій и итальянскій языки и имя Лобачевскаго сдѣлалось, въ настоящее время, европейскимъ. Важность системы Лобачевскаго я выражу слѣдующими словами: кто глубоко не изучилъ геометрической системы Лобачевскаго, тотъ не можетъ составить полнаго понятія о смыслѣ и значеніи геометрическихъ аксіомъ.

Евклидъ.

Тѣ незначительныя свѣдѣнія, которыя мы имѣемъ о развитіи началъ геометріи у Грековъ, переданы намъ Прокломъ, Боеціемъ, Симплиціемъ, Теономъ изъ Смирны и другими. Свѣдѣнія эти суть выдержки изъ двухъ утерянныхъ сочиненій Теофраста и Евдема, учениковъ Аристотеля, изъ которыхъ первый написалъ исторію геометріи и ариѳметики, а второй исторію геометріи и астрономіи. Изъ этихъ немногихъ отрывковъ мы узнаемъ, что уже до Евклида начала геометріи были собраны и приведены въ порядокъ: Анаксимандромъ, написавшимъ „введеніе въ геометрію", Гераклитомъ изъ Понта, написавшимъ „О началахъ геометріи", Гипократомъ изъ Хіоса, Леономъ ученикомъ Неоклида, Ксенократомъ и Тевдіусомъ изъ Магнезіи. Сочиненіе этого послѣдняго считалось лучшимъ. Всѣ эти сочиненія утеряны, но избѣжало этой участи только сочиненіе Евклида „*Начала*", что заставляетъ предполагать, что оно считалось самымъ лучшимъ и имѣло много списковъ.

Въ настоящее время можно положительно утверждать, что начала геометріи въ томъ видѣ, въ какомъ ихъ изложилъ Евклидъ, принадлежатъ исключительно эллинскому генію. Въ самомъ дѣлѣ, если Греки могли почерпнуть гдѣ либо геометрическія свѣдѣнія, то только у Египтянъ и Индусовъ; но какія свѣдѣнія имѣлъ тотъ народъ, котораго жрецы (каста ученая) и царь удивлялись Ѳалесу, измѣрившему высоту пирамиды по ея тѣни! Что же касается Индусовъ, то изслѣдованія настоящаго времени показали, что у нихъ не было ничего похожаго на геометрическую систему. О томъ значеніи и смыслѣ аксіомъ, какія послѣднія имѣли у грековъ, Индусы не имѣли никакого понятія, свойства фигуръ—теоремы доказываются у нихъ часто изъ симметріи фигуры, а равенство линій и угловъ просто изъ чертежа и тому подобное. Этимъ я не хочу сказать, что Египтяне и Индусы не имѣли геометрическихъ свѣдѣній, напротивъ, ихъ свѣдѣнія были далеко не элементарныя; я только хочу сказать, что они не имѣли системы; выстроить пирамиды, храмы, перенесть громадныя массы гранита изъ одного мѣста въ другое, дать ему извѣстную форму, требовало вовсе не элементарныхъ свѣдѣній. Точно тоже можно сказать и объ Индусахъ, изъ сочиненій Брагмагупта и Бгаскара мы узнаемъ, что они умѣли опредѣлить площадь треугольника по тремъ даннымъ его сторонамъ и найти радіусъ вписаннаго въ него круга и много другихъ предложеній относительно треугольника и четыреугольника; но не знали чему равна сумма угловъ въ треугольникѣ, знали еще отношеніе діаметра къ окружности и другія свойства фигуръ, но эти сочиненія не представляютъ собою Началъ геометріи или свода основныхъ предложеній. Слѣдовательно греки дали ту строго-логическую форму началамъ геометріи, въ которой ихъ передалъ Евклидъ.

Жизнь Евклида мало извѣстна, мы знаемъ только, что онъ жилъ въ Александріи, куда переселился изъ Греціи при первыхъ Птоломеяхъ, около 280 года до Р. Х. Его считаютъ основателемъ александрійской математической школы. Онъ написалъ нѣсколько весьма замѣчательныхъ математическихъ сочиненій, но всеобщую извѣстность пріобрѣлъ своими *Началами* Στοιχεία, сочиненіе, которое и въ настоящее время, послѣ всѣхъ новѣйшихъ изслѣдованій, представляетъ образецъ ясности, логической послѣдовательности въ порядкѣ теоремъ и строгости ихъ доказательствъ.

Проклъ, одинъ изъ комментаторовъ Евклида, жившій въ V вѣкѣ по Р. Х., говоритъ, что Евклидъ собралъ начала геометріи, привелъ въ порядокъ и строго доказалъ то, что до него было слабо доказано. Начала геометріи состоятъ изъ 13-ти книгъ, изъ коихъ шесть содержатъ плоскую геометрію, 7, 8 и 9 содержатъ ариѳметику, 10-я занимается несоизмѣримыми величинами и приложеніемъ ихъ къ геометріи. Книги 11, 12 и 13 содержатъ стереометрію. Къ тринадцати книгамъ присоединяютъ еще двѣ о правильныхъ тѣлахъ, но ихъ приписываютъ геометру Гипсиклу.

Кромѣ Прокла Евклидъ имѣлъ многихъ комментаторовъ, изъ коихъ самые древніе, о которыхъ упоминается, были: Геронъ, Паппусъ, Еней изъ Гіераполиса, Теонъ младшій александрійскій. Теонъ не только комментировалъ Евклида, но и далъ новое изданіе Началъ съ прибавленіями и измѣненіями.

Боецій въ V вѣкѣ по Р. Х., въ своемъ трактатѣ геометріи, далъ только теоремы и фигуры первыхъ четырехъ книгъ Евклида, утверждая при этомъ, что Евклидъ только привелъ въ порядокъ предложенія, найденныя и доказанныя другими, а что настоящій творецъ есть Теонъ Есть даже списки, въ которыхъ говорится, что все сочиненіе почерпнуто изъ бесѣдъ Теона (ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν). Симсонъ, большой знатокъ древней математической литературы, издавшій Евклида на англійскомъ языкѣ въ 1781 году, говоритъ: „сравнивая опредѣленія и доказательства теоремъ различныхъ списковъ греческихъ изданій, какія мы имѣемъ, я нахожу, что

Теонъ или кто-бы ни былъ издателемъ греческаго текста, прибавляя, выбрасывая и смѣшивая свои доказательства съ Евклидовскими, все это сдѣлалъ къ худшему". Боецій былъ единственный писатель по геометріи, извѣстный въ Европѣ до IX вѣка нашей эры, а Евклида даже имя не было извѣстно.

Въ концѣ VIII и началѣ IX вѣка при калифахъ Аль-Мансурѣ и Гарунъ-аль-Рашидѣ начали переводить греческія сочиненія на арабскій языкъ, но переводили сначала на сирійскій языкъ, а съ этого послѣдняго на арабскій. Переводы эти были сдѣланы сирійскими медиками, находившимися при дворѣ калифовъ и знавшими греческій языкъ. Въ числѣ переведенныхъ сочиненій было и твореніе Евклида „Начала". Самый знаменитый переводчикъ его былъ Гонейнъ-бенъ-Исгакъ и сынъ его Исгакъ-бенъ-Гонейнъ, но такъ какъ отецъ и сынъ не знали математики, то ихъ переводъ требовалъ исправленія, которое и было сдѣлано Тебетъ-бенъ-Корра между 892 и 902 годами. Отманъ изъ Дамаска, неизвѣстно когда жившій, но позже XIII вѣка, далъ переводъ полнѣе предъидущихъ, по списку, который онъ нашелъ въ Римѣ и въ которомъ было 40-а предложеніями больше, чѣмъ въ обыкновенныхъ спискахъ. Астрономъ и геометръ Нассиръ-Еддинъ, жившій около 1260 года, перевелъ Евклида на персидскій языкъ; къ этому же времени относятся комментаріи Евклида, сдѣланные арабскимъ математикомъ Маймонъ-Рашидомъ. Комментаріи Нассиръ-Еддина были напечатаны на арабскомъ языкѣ въ Римѣ въ 1594 году*). Ганкель говоритъ, что у Арабовъ было до 50-ти переводовъ и передѣлокъ Евклида, въ особенности они много занимались 10-й книгою объ несоизмѣримыхъ величинахъ, которая и въ настоящее время представляетъ образецъ въ своемъ родѣ. Арабы также занимались много значеніемъ аксіомъ, опредѣленіями и порядкомъ теоремъ, и въ этомъ отношеніи они не уступаютъ Европейцамъ, такъ напримѣръ доказательство 11-й аксіомы Нассиръ-Еддина не хуже тѣхъ, о которыхъ мы упомянули въ началѣ введенія. Евклидъ былъ въ первый разъ переведенъ въ 1130 году на латинскій языкъ Ателяромъ (Athelard de Bath) съ арабскаго списка, найденнаго имъ въ Испаніи. Этотъ переводъ былъ напечатанъ, въ первый разъ, въ 1482 году въ Венеціи Эргардомъ Ратгольтомъ (Erhard Rathold) съ комментаріями Кампануса (Campanus). Французскій математикъ Шаль (Chasles) полагаетъ, что арабскіе списки Евклида были привезены изъ Испаніи Кампанусомъ, въ числѣ другихъ математическихъ сочиненій, и переведены имъ.

Съ этихъ поръ Евклидъ быстро распространился въ Европѣ и до семнадцатаго вѣка оставался исключительнымъ руководствомъ. Считали

---

*) Нѣкоторые говорятъ, что это изданіе было напечатано въ 1598 г. во Флоренціи.

святотатствомъ измѣнять порядокъ теоремъ, данный Евклидомъ. Паскаль говоритъ, что если бы геометрія была снова изобрѣтена, то *Начала* были бы даны въ томъ порядкѣ, какой имъ далъ Евклидъ; это и понятно, такъ какъ, безъ сомнѣнія, въ философскихъ школахъ Греціи, каждая теорема была разсмотрѣна во всѣхъ отношеніяхъ.

Первое изданіе *Началъ,* напечатанное въ Венеціи, не имѣетъ заглавія, а начинается словами: **Preclarissimus Liber Elementorum Euclidis, perspicacissimi in artem geometrie incipit quam felicissime.**

Второе изданіе *Началъ*, перепечатано съ перваго. Оно напечатано въ Виченцѣ въ 1491 г.

Третье изданіе было издано Замберти (**Zamberti**) подъ заглавіемъ: **Euclidis Megariensis, philosophi Platonici, mathematicarum disciplinarum janitoris, Opera, Zamberto Veneto, interprete.** Въ концѣ тома напечатано: **Impressum Venetiis..... in edibus Ioannis Tamini, M. D. V. VIII kalendas novembris.** Замберти въ предисловіи говоритъ, что онъ перевелъ съ греческаго оригинала.

Четвертое изданіе было издано Лукою Пачіолусомъ (**Lucas Paciolus**), который болѣе извѣстенъ подъ именемъ **Lucas di Borgo**, въ Венеціи въ 1509 г. Заглавіе этого изданія слѣдующее: **Euclidis Megarensis, philosophi acutissimi, mathematicorum omnium sine controversia principis Opera.**

До шестнадцатого вѣка смѣшивали Евклида съ Евклидомъ Мегарскимъ, философомъ, который жилъ вѣкомъ раньше перваго.

Пятое изданіе, вольный переводъ *Началъ*, былъ подготовленъ Якобомъ Лефевромъ изъ Етапля (**Jacques Lefèvre d'Estaples**) и напечатанъ въ Парижѣ въ 1516 г. Генрихомъ Етьеномъ (**Henri Estienne**).

Итакъ видимъ, что въ продолженіи тридцати пяти лѣтъ было пять изданій Евклида, всѣ **in fol.**, на латинскомъ языкѣ.

Греческій текстъ Евклида съ комментаріями Прокла въ первый разъ былъ изданъ Симономъ Гриномъ (**Gryne**) въ Базелѣ въ 1533 году.

Греческое и латинское изданіе, приписываемое знаменитому математику Бриггу, напечатанное въ Лондонѣ Вильямомъ Джономъ въ 1620 г., содержитъ только первыя шесть книгъ, хотя въ заглавіи сказано, что изданы всѣ 13 книгъ.

Въ 1608 г. Начала Евклида были переведены на китайскій языкъ іезуитомъ Маттео Риччи (**Matteo Ricci**), который въ предисловіи къ своему переводу упоминаетъ о переводахъ сдѣланныхъ на китайскій языкъ до него. Эти переводы можно отнести къ тому времени, когда въ 1368 году императоръ велѣлъ перевесть всѣ арабскіе манускрипты, находившіеся въ его библіотекѣ, на китайскій языкъ, а это показываетъ, что въ то время въ Китаѣ высоко цѣнилась арабская ученость. Послѣ того Начала были переведены еще нѣсколько разъ. Послѣдній переводъ сдѣланъ въ 1857 г. Вили (Wylie) и напечатанъ въ Шанхаѣ.

Изъ тѣхъ свѣдѣній, которыя мнѣ удалось собрать, видно, что въ XVI вѣкѣ было напечатано 80 изданій Евклида, въ XVII—59, въ XVIII—50 и въ XIX-мъ—115, на всѣхъ европейскихъ языкахъ. Въ концѣ книги поименована большая часть изданій съ 1482 года до настоящаго времени, съ указаніемъ гдѣ и кѣмъ издано. Всего съ 1837 по 1874 г. въ одной Англіи было 63 изданія Евклида.

Полное собраніе сочиненій Евклида на греческомъ языкѣ было издано въ Оксфордѣ въ 1703 году Давидомъ Грегори подъ заглавіемъ: Ἐυκλείδου τὰ σωζόμενα. Другаго изданія въ этомъ родѣ не существуетъ. Евклидъ, какъ я замѣтилъ выше, до XVIII столѣтія былъ единственнымъ руководствомъ начальной геометріи въ Европѣ. Съ XVIII столѣтія начали появляться сочиненія оригинальныя или передѣлки Евклида, въ особенности во Франціи и въ Германіи, а въ Англіи *Начала* Евклида и понынѣ остаются единственнымъ руководствомъ въ школахъ. Отъ этого школа выигриваетъ то, что для нея есть самое важное, именно: однообразіе преподаванія и одну систему. Этимъ, если можно такъ выразиться, влагаютъ одну математическую душу всѣмъ, изучающимъ математику. Евклидъ дѣлается математическимъ Евангеліемъ, на текстъ котораго можно всегда сослаться. Лагранжъ часто говорилъ: „тотъ, кто не изучилъ геометріи по Евклиду, похожъ на человѣка, желающаго изучить древніе языки не по древнимъ оригиналамъ, а по сочиненіямъ, написаннымъ въ настоящее время на этихъ языкахъ".

На русскомъ языкѣ были слѣдующія изданія Евклида:

1. Евклидовы Елементы Геометріи, сокращенныя проф. Фарварсономъ, пер. съ латин. И. Сатаровъ. 1739 г. Спб. *)

*) Андрей Фарварсонъ (Farwharson), профессоръ абердинскаго университета, былъ приглашенъ въ Россію Петромъ Вел., когда онъ былъ въ Англіи въ 1698 г. По прибытіи въ Россію, онъ составилъ уставъ для морскаго училища, въ которомъ былъ первымъ преподавателемъ. Съ открытіемъ въ Петербургѣ морской академіи, ему было поручено выбирать для нея учениковъ, а потомъ онъ былъ и самъ переведенъ туда. Даже въ оффиціальныхъ бумагахъ о немъ сохранилось извѣстіе, что съ помощью его „первое обученіе математики въ Россіи введено". По словамъ же Перри, онъ ввелъ у насъ и арабскія цыфры, которыя въ первый разъ примѣнены были въ „Журналѣ объ осадѣ Нотебурга", изданномъ въ концѣ 1702 г. Въ 1703 г. при участіи Фарварсона, изданы были, „Таблицы логариѳмовъ", а въ 1722 г. „Таблицы горизонтальныя сѣверныя и южныя широты". Въ 1730-хъ гг.

2. Евклидовы Элементы Геометріи, перев. съ франц. Н. Кургановъ 1769 г. Спб.

3. Евклидовы Стихіи. Перев. съ греч. П. Суворовъ и В. Никитинъ 1789 г. Спб.

4. Евклидовыхъ Началъ 8 книгъ. Пер. съ греч. Θ. Петрушевскій 1819 г. Спб.

Самыя лучшія изданія Началъ съ комментаріями считаются: Дасиподіуса (1564), Коммандина (1572), Клавіуса (1574), Баррова (1659), Грегори (1703), Кейля (1708), Лоренца (1781), Симсона (1781), Камерера и Гаубера (1824), Августа (1826), Валькера (1827) и Тотгентера (1864). Въ настоящемъ столѣтіи лучшимъ переводомъ Началъ считается переводъ сдѣланный Пейраромъ въ 1814 году по списку IX вѣка, находившемуся въ Парижской Національной Библіотекѣ, а нынѣ въ Ватиканской Библіотекѣ.

Настоящее изданіе, съ пояснительнымъ введеніемъ и разъясненіями относительно значенія и мѣста каждой теоремы, убѣдитъ, я надѣюсь, каждаго преподавателя, что единственнымъ руководствомъ, къ преподаванію элементарной геометріи, долженъ быть Евклидъ, съ тѣми незначительными измѣненіями, которыя указаны въ приложенной въ концѣ программѣ.

напечатано его сочиненіе „Тригонометрія плоская и сферическая“; кромѣ того ему принадлежатъ: алгебра, трактатъ о новой инвенціи, для отвращенія вліянія качки при обсерваціяхъ, о которыхъ сохранились только извѣстія. Сочиненія его служили руководствами въ тогдашнихъ русскихъ школахъ. При Петрѣ Вел. Фарварсону поручены были и астрономическія наблюденія, о которыхъ онъ обязанъ былъ сообщать царю, гдѣ бы тотъ ни былъ, и которыя тогда же печатались. Изданіе Евклида озаглавлено такъ: „Эвклидовы элементы изъ двѣнадцати ньютоновыхъ книгъ выбранные, и въ осемь книгъ чрезъ профессора математики Андрея Фарварсона сокращенные“, которые переводилъ съ латин. хирургусъ Сатаровъ въ 1719 г. См. Пекарскій, Литер. и наука при Петрѣ Вел. т. I, 122, 123, 269—272, 281; т. II, 458. Біогр. Фарварсона въ Морск. Сборн. 1856 г. № 14 и 1866 № 5.

НАЧАЛА ЕВКЛИДА.

КНИГА I.

Опредѣленія (ὅροι, definitiones).

1. Точка есть то, что не имѣетъ частей.

2. Линія есть длина безъ ширины.

3. Концы линіи суть точки.

Примѣч. 1. Эти опредѣленія суть отвлеченія понятій, полученныхъ опытомъ.

4. Прямая линія есть та, которая одинаково лежитъ относительно всѣхъ своихъ точекъ (Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται).

Примѣч. 2. Этимъ опредѣленіемъ, очевидно, Евклидъ желаетъ описать форму прямой въ нашемъ пространствѣ, данную опытомъ. Геометрическаго значенія это опредѣленіе не имѣетъ. Этому опредѣленію удовлетворяетъ и кругъ.

5. Поверхность (ἐμβαδόν, ἐπιφάνεια) есть то, что имѣетъ только длину и ширину.

6. Концы поверхности суть линіи.

Примѣч. 3. Тоже можно сказать, что сказали о 1, 2 и 3.

7. Плоская поверхность (ἐπίπεδος) есть та, которая одинаково расположена относительно всѣхъ прямыхъ линій на ней лежащихъ.

Примѣч. 4. Это опредѣленіе можно отнести и къ сферѣ относительно большихъ круговъ.

8. Плоскій уголъ (γωνία) есть взаимное наклоненіе двухъ линій, которыя встрѣчаются въ плоскости и имѣютъ различныя направленія.

9. Если линіи, образующія уголъ на плоскости, суть прямыя, то уголъ называется прямолинейнымъ.

10. **Если прямая, встрѣчающая другую прямую, составляетъ съ ней два равные смежные угла, то каждый изъ этихъ угловъ есть** *прямой*, **а прямая, составляющая ихъ, называется** *перпендикуляромъ* **ко второй прямой.**

11. *Тупымъ* угломъ называется уголъ, который больше прямаго.

12. *Острымъ* угломъ называется уголъ, который меньше нрямаго.

Примѣч. 5. Опредѣленіе 8 говоритъ о наклоненіи вообще линій, слѣдовательно и кривыхъ, но въ такомъ случаѣ, это опредѣленіе не даетъ понятія объ углѣ, составляемомъ двумя кривыми линіями, а такъ какъ Евклидъ въ своихъ Началахъ этимъ опредѣленіемъ нигдѣ не пользуется, то Симсонъ думаетъ, что здѣсь есть неловкая вставка переписчика и полагаетъ, что опредѣленія 8 и 9 можно слить въ одно.

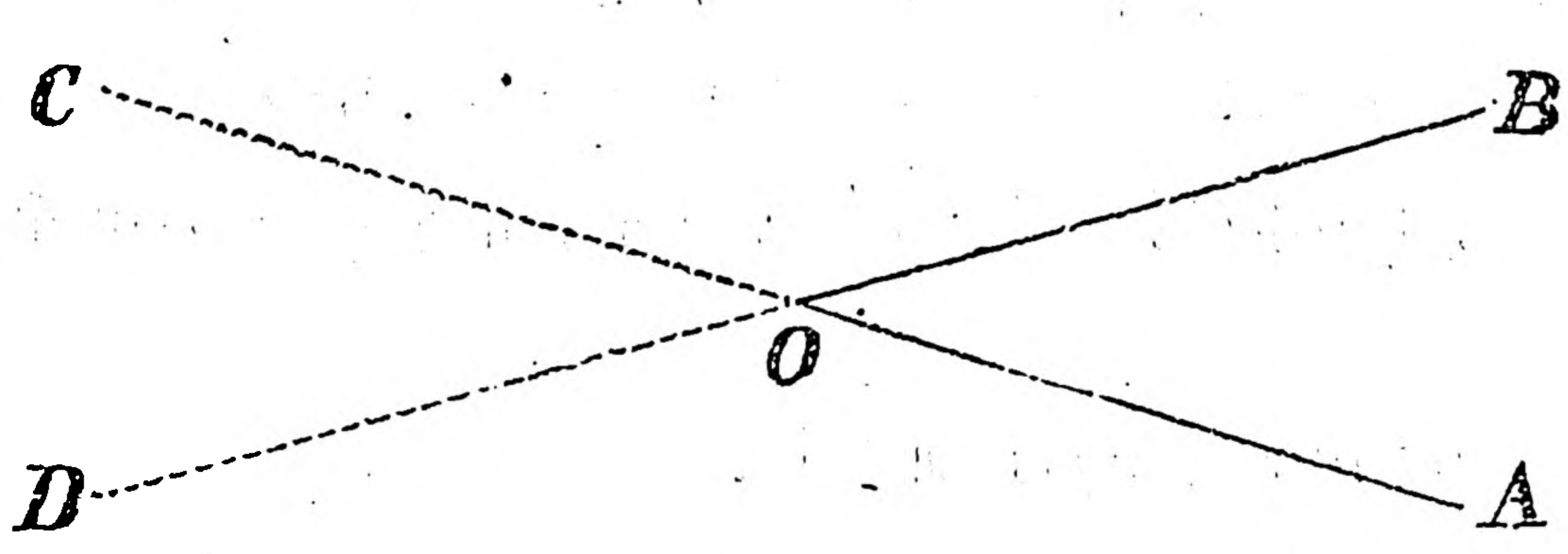
Опредѣленія: Уголъ есть взаимное наклоненіе двухъ прямыхъ линій, или разность направленій, или величина поворота одной прямой до совпаденія съ другою, представляютъ уголъ *какъ какое-то количество* и выраженія часто употребляемыя: точка лежитъ въ углѣ или внѣ, прямая отдѣляетъ отъ угла треугольникъ и друг. не имѣютъ смысла. Бертранъ изъ Женевы первый опредѣлилъ уголъ какъ часть плоскости (Dévelоppement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques 1778 г.).

Плоскость раздѣляется двумя пересѣкающимися прямыми на четыре части, которыя называются углами. Части прямыхъ, исходящія изъ общей точки сѣченія и заключающія уголъ, называются *сторонами* угла, а общая точка сѣченія называется *вершиною* его.

Уголъ называется *выпрямленнымъ*, если его стороны имѣютъ противуположныя направленія, слѣдовательно составляютъ одну прямую линію. Всѣ *выпрямленные* углы равны между собою, такъ какъ они совмѣщаются. Уголъ называется *вогнутымъ* или *выпуклымъ*, смотря потому будетъ-ли онъ меньше или больше *выпрямленнаго* угла.

Каждому *вогнутому* углу принадлежатъ два *смежныхъ* угла, которые составлены одною изъ сторонъ угла и продолженіемъ другой.

Фиг. 47.



Смежные углы угла AOB суть: BOC и AOD (фиг. 47). Уголъ COD, составленный продолженіемъ сторонъ угла AOB, называется *противуположнымъ* угломъ.

Противуположные углы равны, то есть $AOB = COD$. Въ самомъ дѣлѣ, $AOB + BOC \equiv BOC + COD$, такъ какъ всѣ выпрямленные углы равны, откуда $AOB = COD$.

Вогнутый уголъ называется *острымъ, прямымъ* или *тупымъ*, смотря потому будетъ ли онъ меньше, равенъ или больше своего смежнаго угла. *Всѣ прямые углы равны*, какъ половины выпрямленнаго угла. Если прямыя составляютъ прямой уголъ, то онѣ называются перпендикулярными одна къ другой (*κάθετοι*).

13. *Предѣломъ* (ὅρος) называется оконечность чего нибудь.

14. *Фигурой* (σχῆμα) называется то, что ограничено однимъ или нѣсколькими предѣлами.

15. *Кругъ* (κύκλος) есть плоская фигура, ограниченная одной линіей, называемой *окружностью*, къ которой всѣ прямыя линіи, называемыя *радіусами*, проведенныя изъ нѣкоторой точки, лежащей внутри ея, равны между собою.

16. Эта точка называется *центромъ* (κέντρον) круга.

17. *Діаметръ* (διάμετρος) круга есть прямая, проведенная чрезъ центръ и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностью: эта прямая дѣлитъ кругъ пополамъ.

18. *Полукругъ* есть фигура ограниченная діаметромъ и равною частью окружности, на которыя этотъ діаметръ дѣлитъ окружность.

19. *Сегментъ*, отрѣзокъ (τμῆμα) есть фигура, ограниченная прямою и одной неравной частью окружности, на которыя эта прямая дѣлитъ окружность.

20. *Прямолинейная* (εὐθύγραμμος) фигура есть та, которая ограничена прямыми линіями.

21. *Трехстороннія* (τρίπλευρος) фигуры суть тѣ, которыя ограничены тремя прямыми линіями.

22. *Четырехстороннія* (τετράπλευρος) фигуры суть тѣ, которыя ограничены четырьмя прямыми линіями.

23. *Многостороннія* (πολύπλευρος) фигуры суть тѣ, которыя ограничены болѣе чѣмъ четырьмя прямыми линіями.

24. Между трехсторонними фигурами, равностороннимъ треугольникомъ, называютъ ту, въ которой всѣ стороны равны.

25. Треугольникомъ *равнобедреннымъ* (ισοσκελής) называется тотъ, въ которомъ двѣ стороны равны.

26. *Разностороннимъ* (σκαληνία) треугольникомъ называется тотъ, въ которомъ всѣ стороны неравны.

27. *Прямоугольный* (ὀρθογώνιος) треугольникъ есть тотъ, въ которомъ одинъ уголъ прямой.

28. *Тупоугольный* (ἀμβλυγώνιος) треугольникъ есть тотъ, въ которомъ одинъ уголъ тупой.

29. *Остроугольный* (ὀξυγώνιος) треугольникъ есть тотъ, въ которомъ всѣ три угла острые.

30. *Квадратъ* есть четырехсторонникъ, въ которомъ всѣ стороны равны и углы прямые.

31. *Ромбъ* (ρόμβος) есть четыреугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны, но углы не прямые.

32. *Параллелограмъ* (ῥομβοειδής) есть четыреугольникъ, въ которомъ только противоположныя стороны и противоположные углы равны, но непрямые.

33. Всѣ прочія четырехстороннія фигуры называются *трапеціями* (τραπέζιον).

34. *Параллельныя* (παράλληλος) *прямыя линіи* суть такія, которыя, находясь въ одной плоскости, и будучи продолжены въ обѣ стороны, какъ угодно далеко, никогда не встрѣчаются.

Примѣч. 6. Въ нѣкоторыхъ спискахъ нѣтъ опредѣленія 19.

Требованія (αἰτήματα, postulata).

Допускается:

1. Что отъ одной точки до другой, какой нибудь, можно провести прямую линію.

2. Что конечную прямую можно продолжить неопредѣленно.

3. Что изъ какой нибудь точки, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ, можно описать кругъ.

Примѣч. 7. Всѣ элементарныя построенія дѣлаются съ помощью этихъ трехъ требованій.

Аксіомы (κοιναὶ ἔννοιαι, communes notiones).

Евклидъ даетъ слѣдующія двѣнадцать аксіомъ:

1. Величины, равныя одной и той же величинѣ, равны между собою.

2. Если къ величинамъ равнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ равныя.

3. Если отъ величинъ равныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ равные.

4. Если къ величинамъ неравнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ неравныя.

5. Если отъ величинъ неравныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ неравные.

6. Величины двойныя одной и той же величины равны между собою.

7. Половины одной и той же величины равны между собою.

8. Величины, которыя по наложеніи совмѣщаются, равны между собою.

9. Цѣлое болѣе своей части.

10. Всѣ прямые углы равны между собою.

11. Если двѣ прямыя линіи встрѣчаются третьей такъ, что сумма вну-

тренних углов, лежащих по одну сторону третьей, меньше двух прямых углов, то двѣ первыя прямыя, по достаточномъ продолженіи, встрѣтятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ.

12. Двѣ прямыя линіи не могутъ заключать пространства.

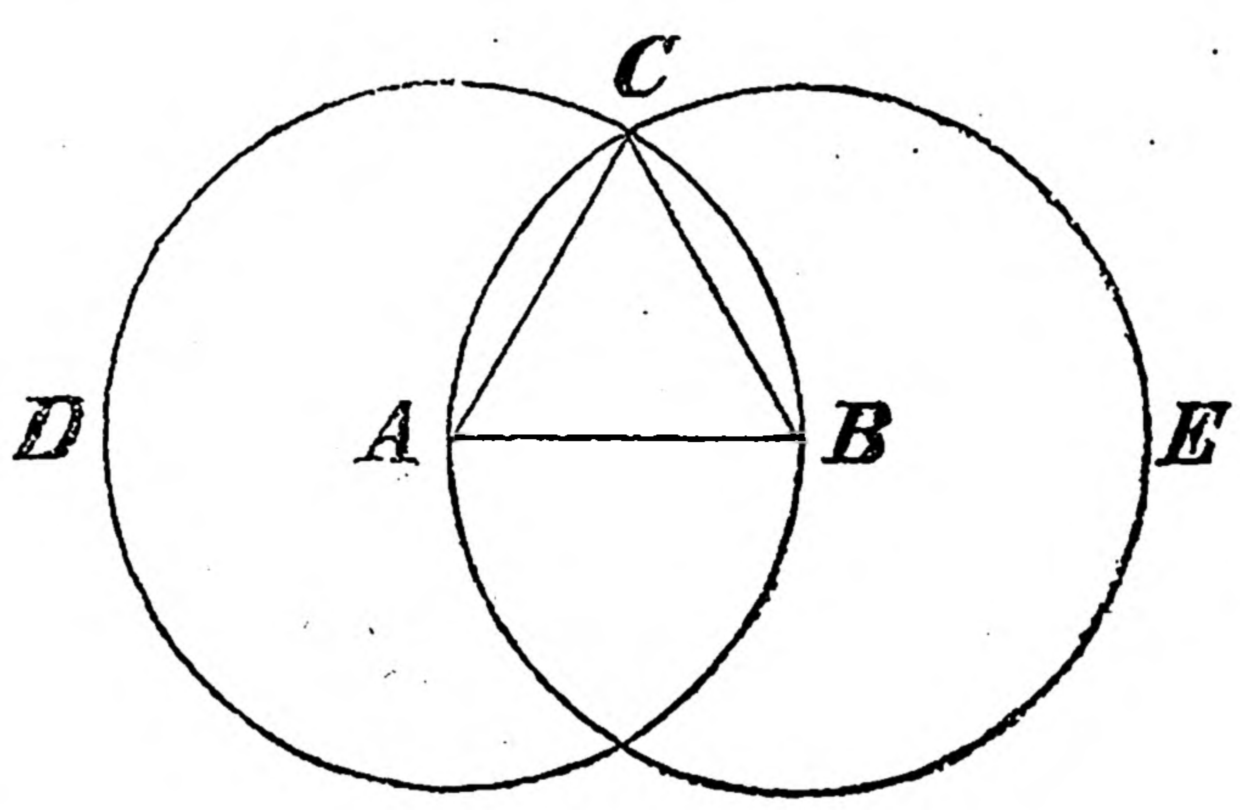
Подробный анализъ аксіомъ изложенъ во введеніи.

Предложенія (πρότασις, **propositio, problema**).

Предложеніе 1. На данной конечной прямой AB построить равносторонній треугольникъ (фиг. 48)?

Рѣшеніе. Изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ AB опишемъ кругъ BCD (тр. 3); изъ точки B, какъ изъ центра, тѣмъ же радіусомъ AB опишемъ кругъ ACE.

Фиг. 48.



Изъ точки C, въ которой пересѣкаются оба круга, проведемъ къ точкамъ A и B прямыя CA и CB (тр. 1). Треугольникъ ABC будетъ требуемый.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ $AC=AB$ (опр. 15) и $BC=BA$, откуда $AC=BC$ (акс. 1). Слѣдовательно $AC=BC$, т. е. треугольникъ, построенный на AB, есть равносторонній (опр. 24).

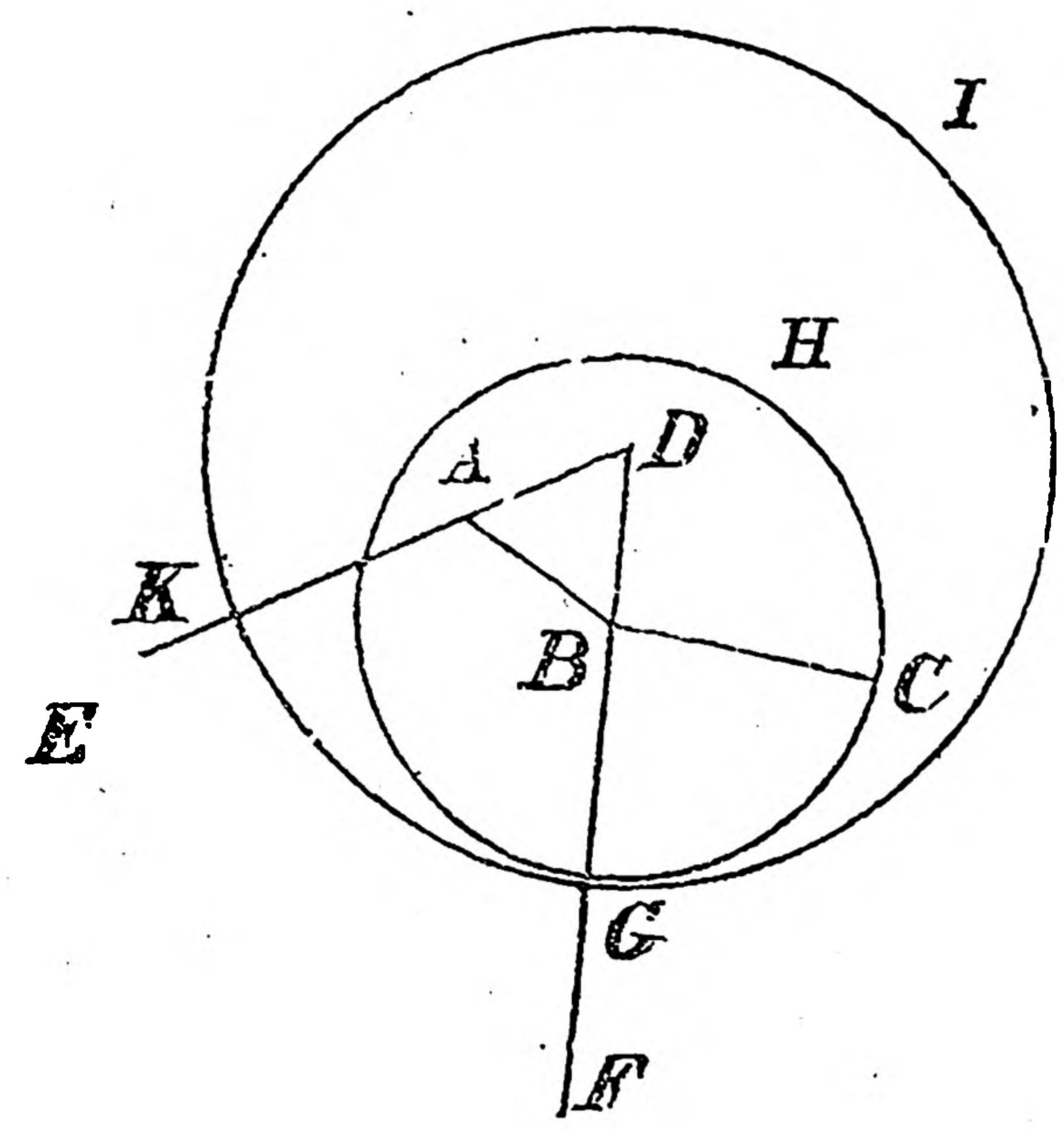
Примѣч. 8. Находятъ, что это построеніе неполное, потому, что не показано, что оба круга пересѣкутся; но для этого надобно только замѣтить, что каждый изъ круговъ имѣетъ одну точку внутри, а другую внѣ, относительно другаго круга.

Намъ воспитаннымъ на французскихъ руководствахъ странно, что это предложеніе стоитъ первымъ, мы привыкли имѣть дѣло сейчасъ съ углами и при этомъ предполагаемъ такія построенія, которыя не умѣемъ еще сдѣлать. Евклидъ распредѣляетъ предложенія такъ, что въ каждомъ изъ нихъ всѣ построенія извѣстны изъ предъидущаго.

Предложеніе 2. Изъ данной точки A провести прямую равную данной прямой BC (фиг. 49)?

Рѣшеніе. Соединимъ точки A и B прямою AB (тр. 1). На этой прямой построимъ равносторонній треугольникъ ABD (пред. 1). Продолжимъ стороны DA и DB треугольника до E и F (тр. 2).

Фиг. 49.

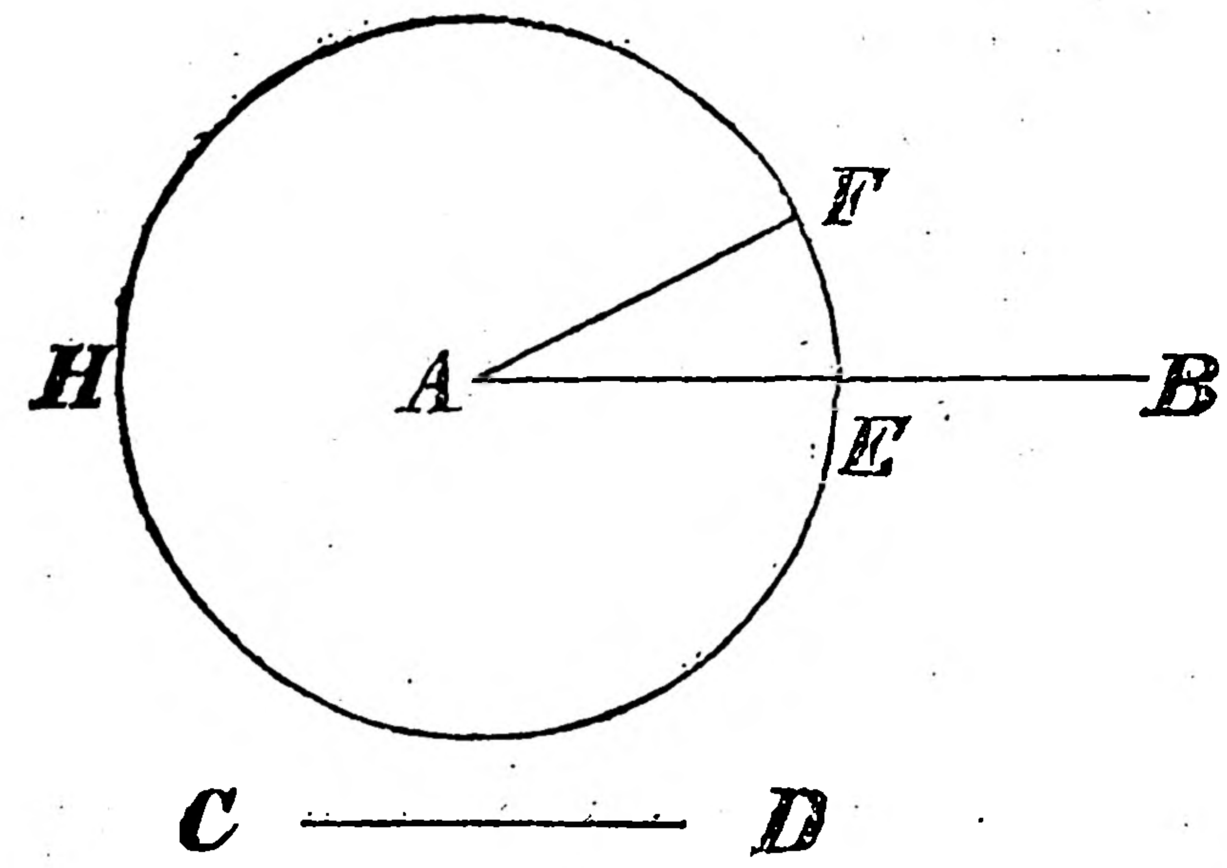


Изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ BC опишемъ кругъ CGH; изъ точки D, какъ изъ центра, радіусомъ DG опишемъ кругъ GIK (тр. 3). Прямая $AK=BC$ и будетъ требуемая прямая. Въ самомъ дѣлѣ, $DK=DG$ (опр. 15), а $DA=DB$ (опр. 24), то $AK=BG$ (акс. 3). Но $BC=BG$, слѣдовательно AK и BC равны BG, откуда $AK=BC$ (акс. 1).

Примѣч. 9. Эта задача въ Евклидовскомъ рѣшеніи имѣетъ восемь рѣшеній. Можно данную точку A соединить или съ B или съ C, на каждой изъ этихъ прямыхъ AB и AC можно построить равносторонніе треугольники съ одной и съ другой стороны, наконецъ можно продолжить стороны AD и BD въ противоположномъ направленіи. Задача эта неопредѣленная имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и рѣшается просто слѣдующимъ образомъ: изъ данной точки A, какъ изъ центра, опишемъ кругъ радіусомъ, равнымъ данной прямой BC (трб. 3) и центръ A соединимъ съ какою нибудь точкою D окружности (трб. 1), прямая AD и будетъ рѣшеніе.

Предложеніе 3. Даны двѣ неравныя прямыя AB и CD отнять отъ большей AB меньшую CD (фиг. 50)?

Фиг. 50.

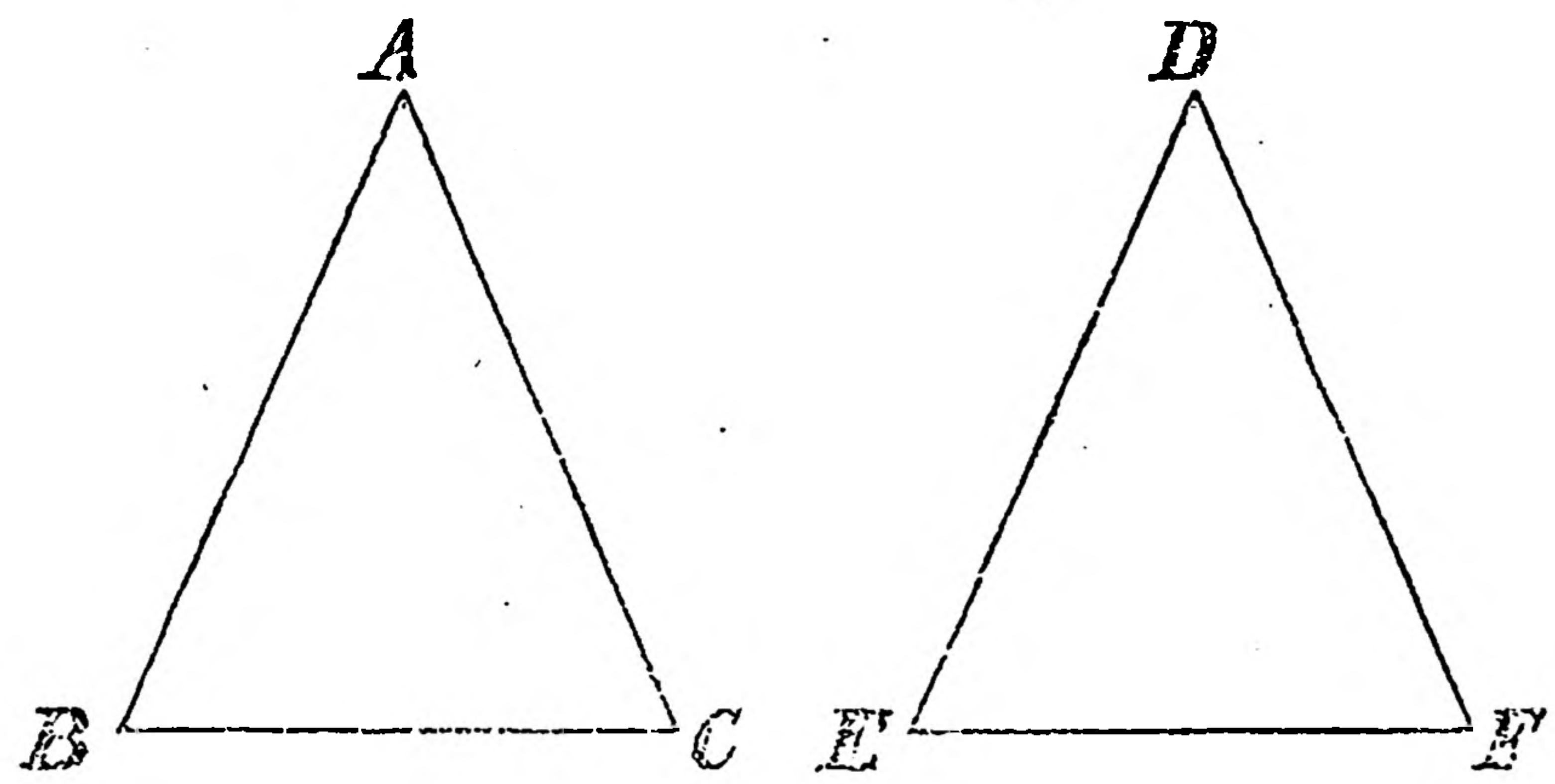


Рѣшеніе. Изъ точки A проведемъ прямую AF равную CD (пред. 2) и изъ A, какъ изъ центра, радіусомъ AF опишемъ кругъ EFH (тр. 3), который встрѣтитъ AB въ точкѣ E. Слѣдовательно отъ AB отняли прямую $AE=CD$. Въ самомъ дѣлѣ, $AE=AF$ (опр. 15); но $AF=DC$, слѣдовательно $BE=AB-CD$.

Предложеніе 4. Если двѣ стороны AB и AC треугольника ABC равны двумъ сторонамъ DE и DF треугольника DEF, каждая каждой, и углы BAC и EDF, заключенные между равными сторонами, равны, то треугольники будутъ имѣть равныя основанія BC и EF, будутъ сами равны и остальные углы ABC и DEF, ACB и DFE, противолежащіе равнымъ сторонамъ, будутъ равны каждый каждому (фиг. 51).

Доказат. Наложимъ треугольникъ ABC на треугольникъ DEF такъ, чтобы точка A совмѣстилась съ точкою D и сторона AB совмѣстилась съ DE.

Фиг. 51.



Точка B совмѣстится съ E, такъ какъ $AB=DE$. Такъ какъ уголъ BAC равенъ углу EDF, то AC приметъ направленіе DF и какъ $AC=DF$, то точка C совмѣстится съ F. Если точка B совмѣстилась съ E, и точка C съ F, то сторона BC совмѣстится съ EF, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, эти двѣ прямыя, имѣя общіе концы, заключали бы пространство, что невозможно (акс. 12). Слѣдовательно $BC=EF$.

Откуда:

$$\triangle ABC=\triangle DEF$$

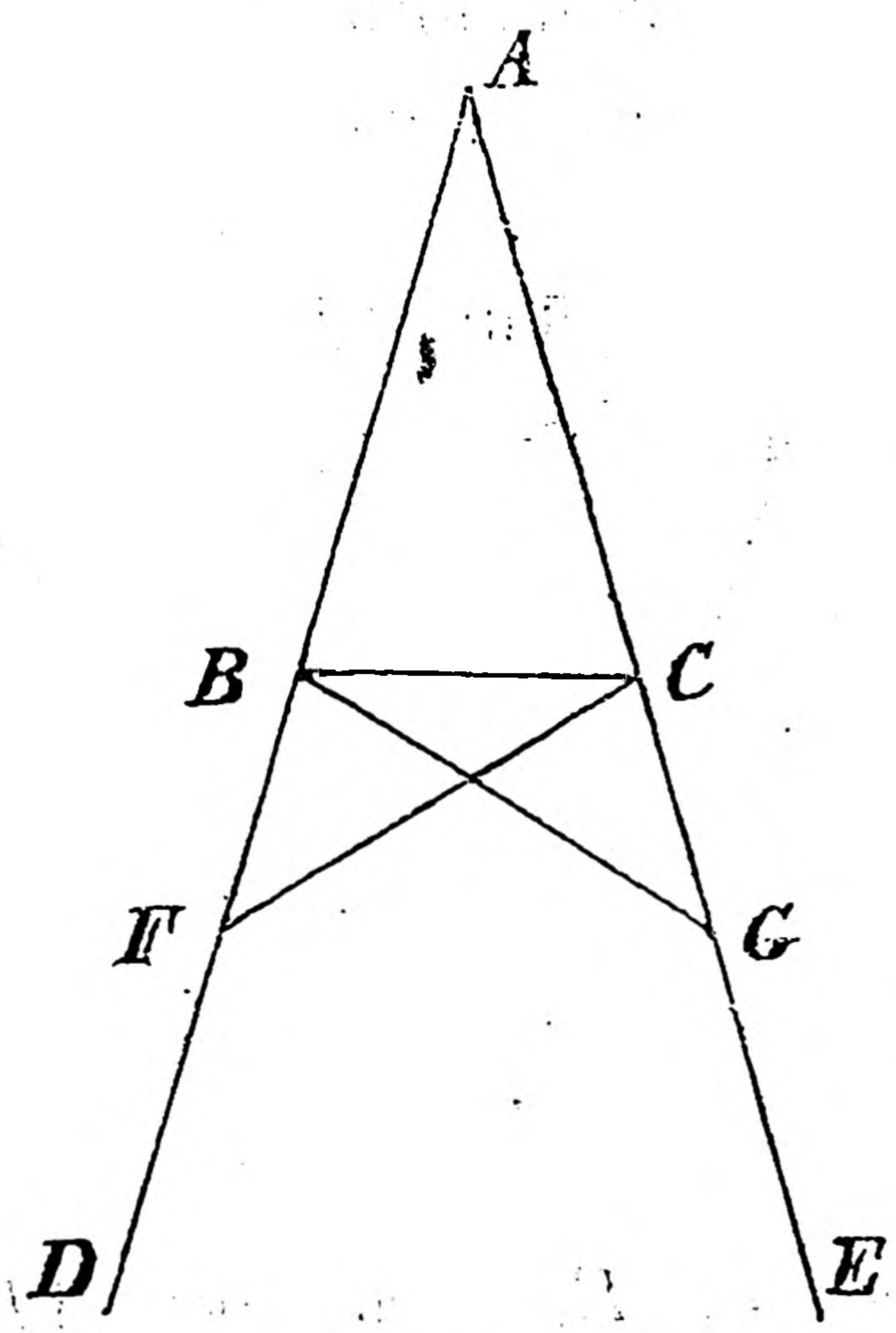
$$\angle ABC=\angle DEF, \quad \angle ACB=\angle DFE.$$

Примѣч. 10. Доказательство этой теоремы основано на томъ свойствѣ плоскости, которое мы назвали аксіомой совмѣстимости, т. е. что на плоскости фигура можетъ быть перенесена въ другое мѣсто безъ измѣненія взаимнаго разстоянія точекъ на ней и безъ измѣненія угловъ. Евклидъ только разъ примѣняетъ это свойство плоскости для доказательства пред. 4, не упоминая нигдѣ о немъ, какъ объ аксіомѣ. Мы подробно разобрали эту аксіому во введеніи. За предложеніемъ 4-мъ, въ нашихъ руководствахъ слѣдуетъ доказательство, съ помощью наложенія, равенства треугольниковъ, имѣющихъ по два равные угла, каждый каждому, и по равнымъ сторонамъ прилежащимъ этимъ угламъ. Доказывается это слѣдующимъ образомъ: пусть въ треугольникахъ ABC и DEF (фиг. 51), $BC=EF$ и $\angle ABC=\angle DEF$, $\angle ACB=\angle DFE$. Наложимъ треугольникъ DEF на треугольникъ ABC такъ, чтобы основаніе EF совпало съ основаніемъ BC, по равенству угловъ E и B, F и C, стороны ED и FD совпадутъ съ сторонами BA и CA, а слѣдовательно и точка D совпадетъ съ точкою A.

Предложенiе 5. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC: 1) углы ABC и ACB при основанiи BC равны между собою; 2) если продолжимъ равныя стороны AB и AC, то углы образованные ниже основанiя: DBC и ECB будутъ также равны (фиг. 52).

Доказат. На продолженiи BD стороны AB возьмемъ произвольную точку F, а на $AE > AF$, возьмемъ $AG = AF$ (пред. 3), затѣмъ соединимъ прямыми точки F съ C и G съ B.

Фиг. 52.



1. Въ треугольникахъ ACF и ABG мы имѣемъ: $AF = AG$, $AC = AB$, уголъ A общiй, слѣдовательно (пред. 4) $FC = BG$, $\angle ACF = \angle ABG$, $\angle AFC = \angle AGB$.

Но такъ какъ $AF = AG$ и $AB = AC$, то (акс. 3) $BF = CG$. Слѣдовательно (пред. 4) треугольники FBC и CBG равны, откуда и углы ниже основанiя равны.

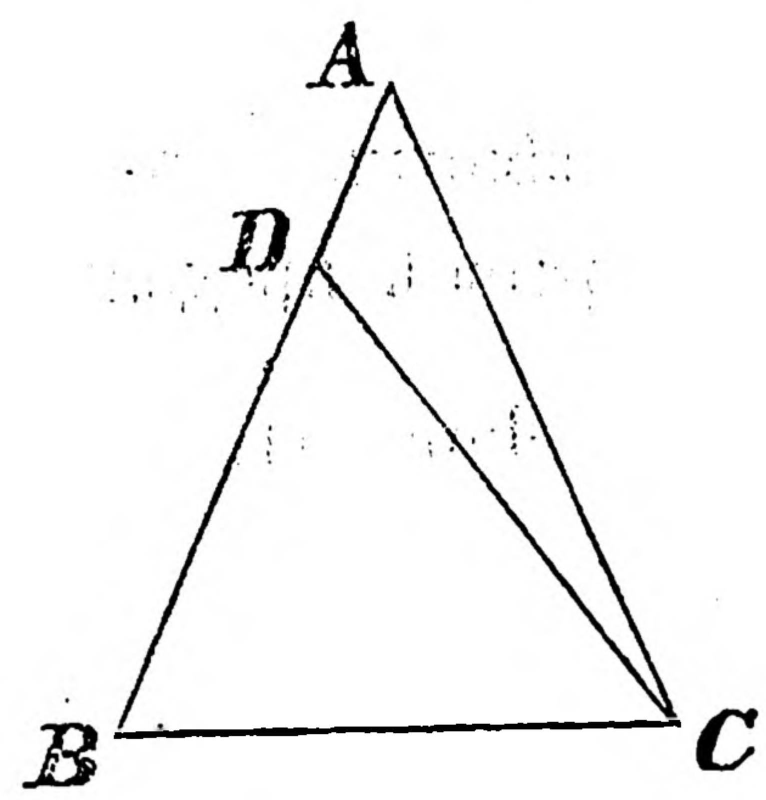
2. Мы видѣли, что $\angle ABG = \angle ACF$ и $\angle CBG = \angle BCF$, слѣдовательно (акс. 3) $\angle ABC = \angle ACB$, т. е. углы при основанiи BC равны.

Примѣч. 11. Равенство угловъ ABC и ACB можно доказать гораздо проще, если къ треугольникамъ BAC и CAB приложить пред. 4., т. е. наложить треугольникъ BAC самъ на себя такъ, чтобы сторона AB совмѣстилась съ AC, уголъ A равенъ углу A, слѣдовательно сторона AC пойдетъ по направленiю AB и по равенству ихъ точка C совмѣстится съ B, и точка B совмѣстится съ C. Такъ какъ Евклиду надобно, для послѣдующаго знать, что въ равнобедренномъ треугольникѣ, углы ниже основанiя равны, то это можно вывести на основанiи примѣч. 5, гдѣ показано, что сумма смежныхъ угловъ равна *выпрямленному* углу, или какъ говорятъ равна двумъ прямымъ.

Предложенiе 6. Если въ треугольникѣ ABC углы ABC и ACB равны, то и стороны AC и AB, противолежащiя этимъ угламъ, равны (фиг. 53).

Доказат. Если бы стороны AC и AB не были равны, то одна изъ нихъ, напримѣръ, AB будетъ больше.

Фиг. 53.



Отложимъ на большей сторонѣ AB, отъ точки B, меньшую $AC=BD$ (предл. 3) и соединимъ C съ D. Въ треугольникахъ ABC и DCB мы имѣемъ $BD=AC$, BC есть сторона общая и $\angle DBC=\angle ACB$, слѣдовательно (пред. 4):

$$\triangle DBC=\triangle ABC$$

что невозможно (акс. 9). Изъ этого слѣдуетъ, что AC и AB не могутъ быть неравными, слѣдовательно $AB=AC$.

Примѣч. 12. Было бы лучше изъ равенства треугольниковъ ABC и DBC заключить о равенствѣ угловъ ABC и DCB, а оттуда заключить о невозможномъ равенствѣ угловъ ACB и DCB.

Въ геометріи доказательства дѣлятся на прямыя и непрямыя. Въ прямомъ доказательствѣ показывается почему извѣстное предложеніе справедливо, а въ непрямомъ показывается, что оно не можетъ быть несправедливымъ. Пріемъ этотъ состоитъ въ приведеніи къ абсурду-несообразности. Прямое доказательство всегда надобно предпочитать непрямому.

Если бы Евклидъ послѣ 4 пред. доказалъ наложеніемъ, какъ мы показали въ примѣч. 10, равенство треугольниковъ, имѣющихъ по два равные угла, каждый каждому, и по равной сторонѣ имъ прилежащей, то пред. 6 могло бы быть доказано прямо, показавъ что треугольники BAC и CAB равны.

Предл. 6 есть обратное пред. 5. Говорятъ, что одно предложеніе есть обратное другому, когда заключеніе перваго есть положеніе втораго. Такъ въ предл. 5 положеніе есть равенство сторонъ, а заключеніе равенство угловъ; въ предл. 6 положеніе есть равенство угловъ, а заключеніе равенство сторонъ.

Если въ предложеніи есть нѣсколько положеній или нѣсколько заключеній, то мы можемъ составить нѣсколько обратныхъ предложеній. Напримѣръ, предложеніе 5 имѣетъ еще другое обратное именно: если въ треугольникѣ углы ниже основанія, образуемые продолженіемъ сторонъ, равны, то и стороны треугольника равны.

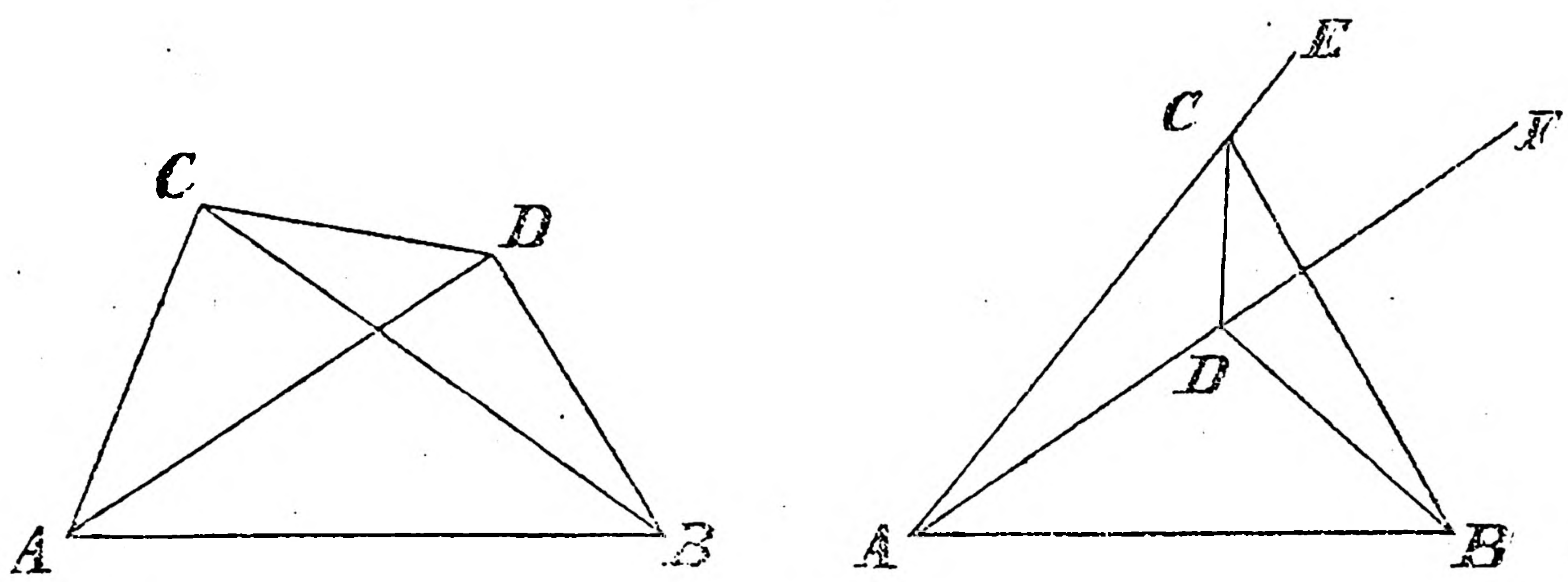
Обратное предложеніе не всегда вѣрно.

Замѣтимъ еще, что пред. 6 можно доказать и помѣстить и послѣ пред. 18, и послѣ 26, т. е. оно можетъ быть доказано или съ помощью пред. 18, или съ помощью пред. 26, такъ какъ Евклидъ его примѣняетъ только во 2-й книгѣ въ пред. 4.

Предложеніе 7. Если мы соединимъ концы основанія AB съ двумя точками C и D, лежащими по одну сторону прямой AB, то разстоянія CA и CB точки C отъ концевъ основанія AB, не могутъ быть равны, каждое каждому, разстояніямъ DA и DB точки D отъ тѣхъ же концевъ основанія AB (фиг. 54).

Доказат. Положимъ что возможно, чтобы $AD=AC$ и $BD=BC$. Соединимъ C съ D (во второмъ чертежѣ продолжимъ AC и AD къ E и F).

Фиг. 54.



1. Точка D внѣ треугольника ACB. Такъ какъ $AD=AC$, то $\angle ADC=\angle ACD$ (пред. 5), слѣдовательно $\angle ADC>\angle DCB$ (акс. 9), а тѣмъ болѣе $\angle BDC>\angle DCB$. Но мы имѣемъ также $BD=BC$, откуда $\angle BDC=\angle DCB$ (пред. 5), что противорѣчитъ предъидущему.

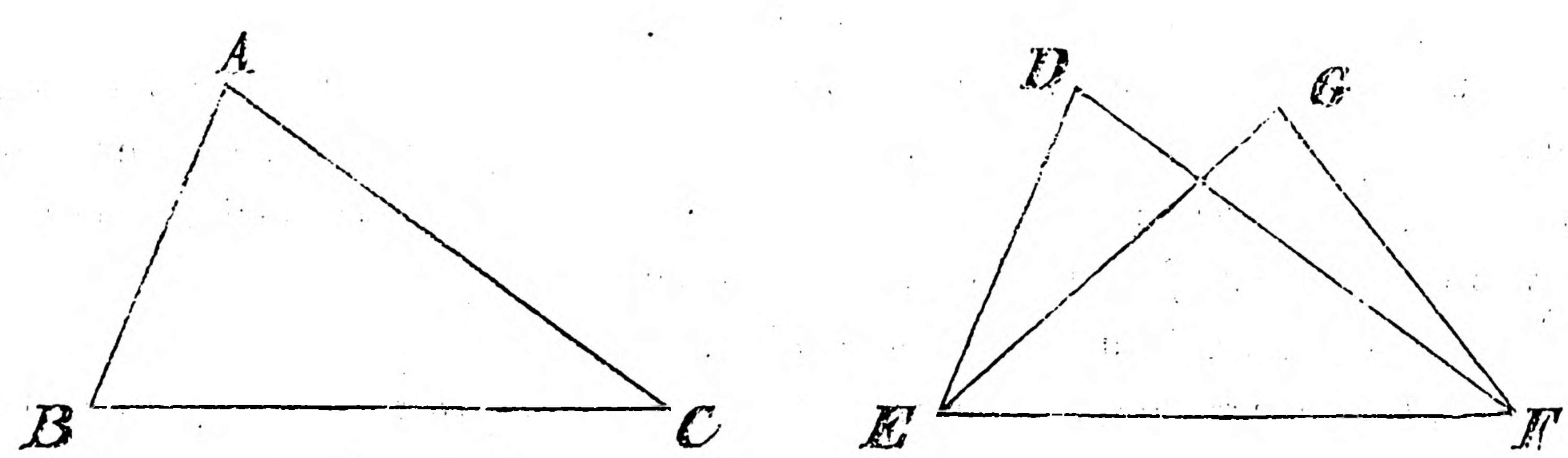
2. Точка D внутри треугольника ACB. Такъ какъ $AD=AC$, то (пред. 5) $\angle FDC=\angle ECD$, но $\angle FDC<\angle BDC$, слѣдовательно $\angle ECD<\angle BDC$, тѣмъ болѣе $\angle BDC>\angle DCB$, что противорѣчитъ положенію $BD=BC$.

Примѣч. 13. Предложеніе это служитъ единственно для доказательства предложенія 8 и нигдѣ больше у Евклида не прилагается.

Предложеніе 8. Если два треугольника ABC и DEF имѣютъ равныя стороны $AB=DE$, $AC=DF$ и равныя основанія $BC=EF$, то и углы, заключенные между равными сторонами, равны (фиг. 55).

Доказат. Нанесемъ треугольникъ ABC на треугольникъ DEF такъ, чтобы ихъ основанія BC и EF совпали.

Фиг. 55.

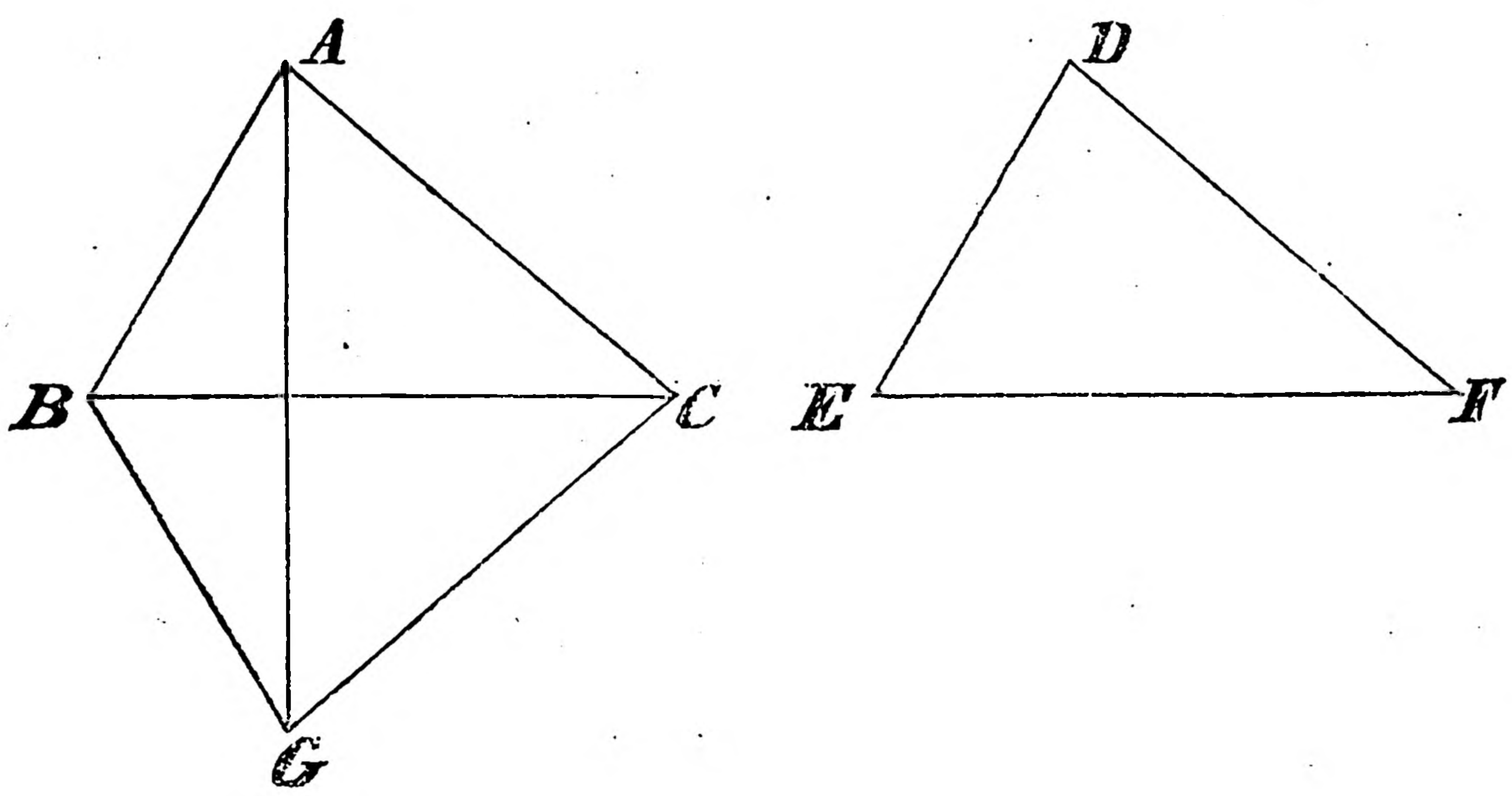


Такъ какъ $AB=DE$ и $AC=DF$, то точка A упадетъ въ точку D, ибо если бы точка A не упала въ точку D, а въ какую нибудь другую G, то невозможно имѣть равенствъ $AB=DE$, $AC=DF$ (пред. 7). Слѣдовательно уголъ $\angle BAC=\angle EDF$. Откуда (пред. 4) $\triangle ABC=\triangle DEF$.

Итакъ два треугольника, имѣющіе по три равныя стороны, каждую каждой, по наложеніи совмѣщаются, слѣдовательно равны.

Примѣч. 14. Предложеніе 8 можно доказать слѣдующимъ образомъ: наложимъ треугольникъ DEF, на треугольникъ ABC такъ, чтобы ихъ основанія BC и EF совмѣстились, и чтобы вершина D упала, относительно точки A, по другую сторону основанія BC въ точку G (фиг. 56).

Фиг. 56.



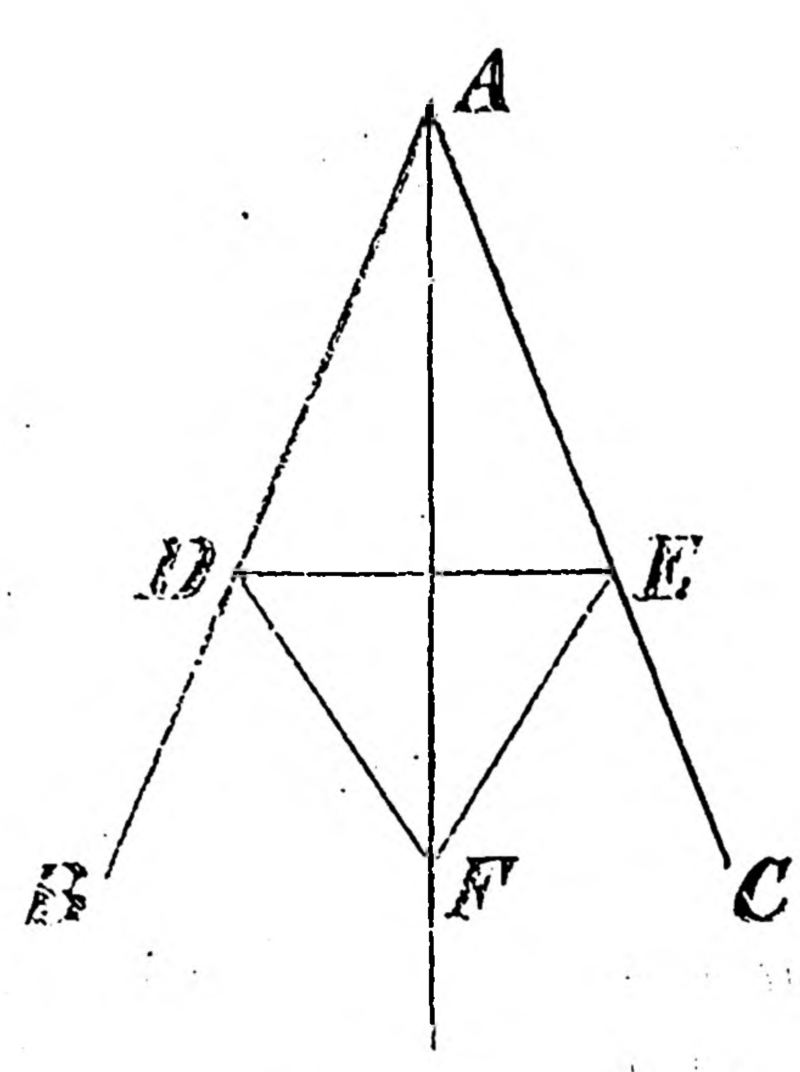
Соединимъ A съ G. Въ треугольникѣ ABG стороны BA и BG равны, слѣдовательно и углы BAG и BGA также равны (пред. 5). Точно также въ треугольникѣ ACG углы GAC и CGA равны. Откуда (акс. 2) $\angle BAC=\angle BGC=\angle EDF$. Слѣдовательно треугольники BAC и EDF равны (пред. 4).

Можетъ случиться, что линія AG пройдетъ чрезъ точки B или C, или же можетъ упасть внѣ основанія BC. Эти оба случая не представляютъ затрудненій.

Предложеніе 9. Раздѣлить прямолинейный уголъ BAC на двѣ равныя части (фиг. 57)?

Рѣшеніе. Возьмемъ на AB какую нибудь точку D и отъ точки A на прямой AC отложимъ $AE=AD$ (пред. 3).

Фиг. 57.



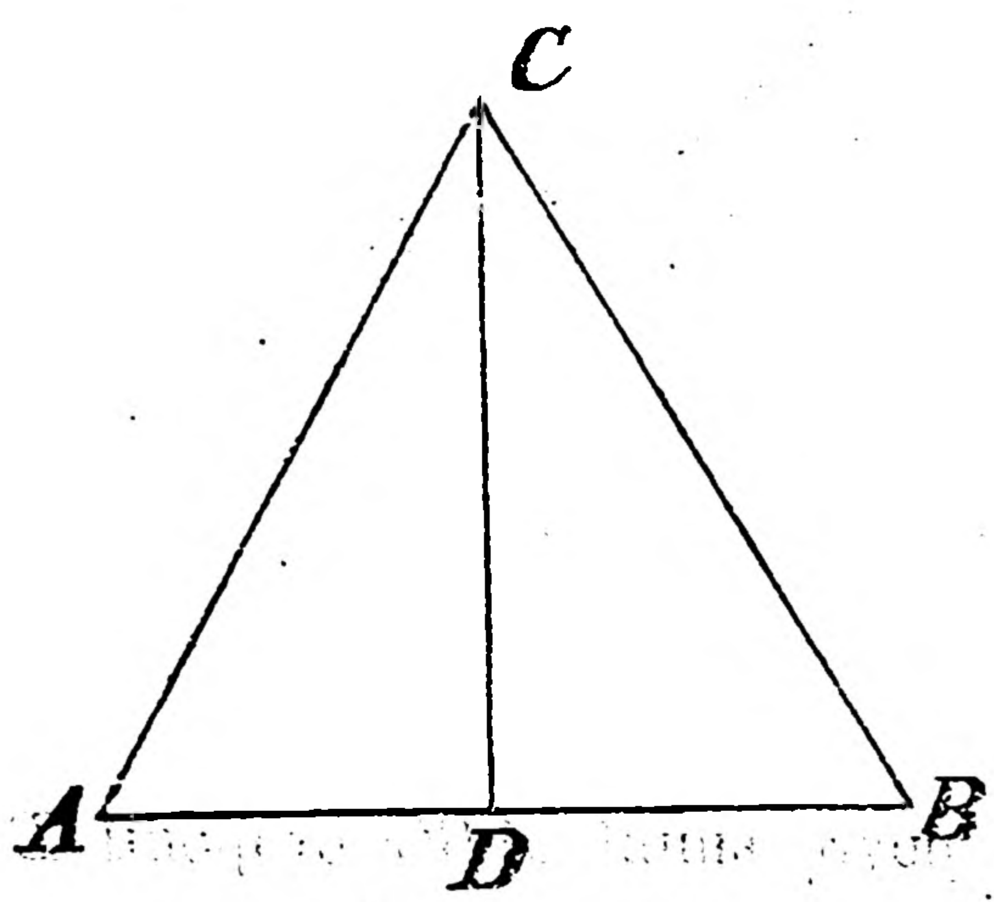
Соедииимъ D съ E и на прямой DE построимъ равносторонній треугольникъ FDE (пред. 1). Если соединимъ A съ F, то прямая AF раздѣлитъ уголъ BAC пополамъ. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники ADF и AEF имѣютъ общую сторону AF, сторона $AD = AE$ и $DF = EF$, слѣдовательно треугольники равны (пред. 8), откуда и $\angle DAF = \angle EAF$.

Примѣч. 15. Равносторонній треугольникъ DEF, можно построить и съ другой стороны прямой DE, но можетъ случиться, что точка F совпадетъ съ точкою A и тогда задача не можетъ быть рѣшена.

Предложеніе 10. Конечную прямую AB раздѣлить на двѣ равныя части (фиг. 58).

Рѣшеніе. На AB построимъ равносторонній треугольникъ ABC (пред. 1).

Фиг. 58.

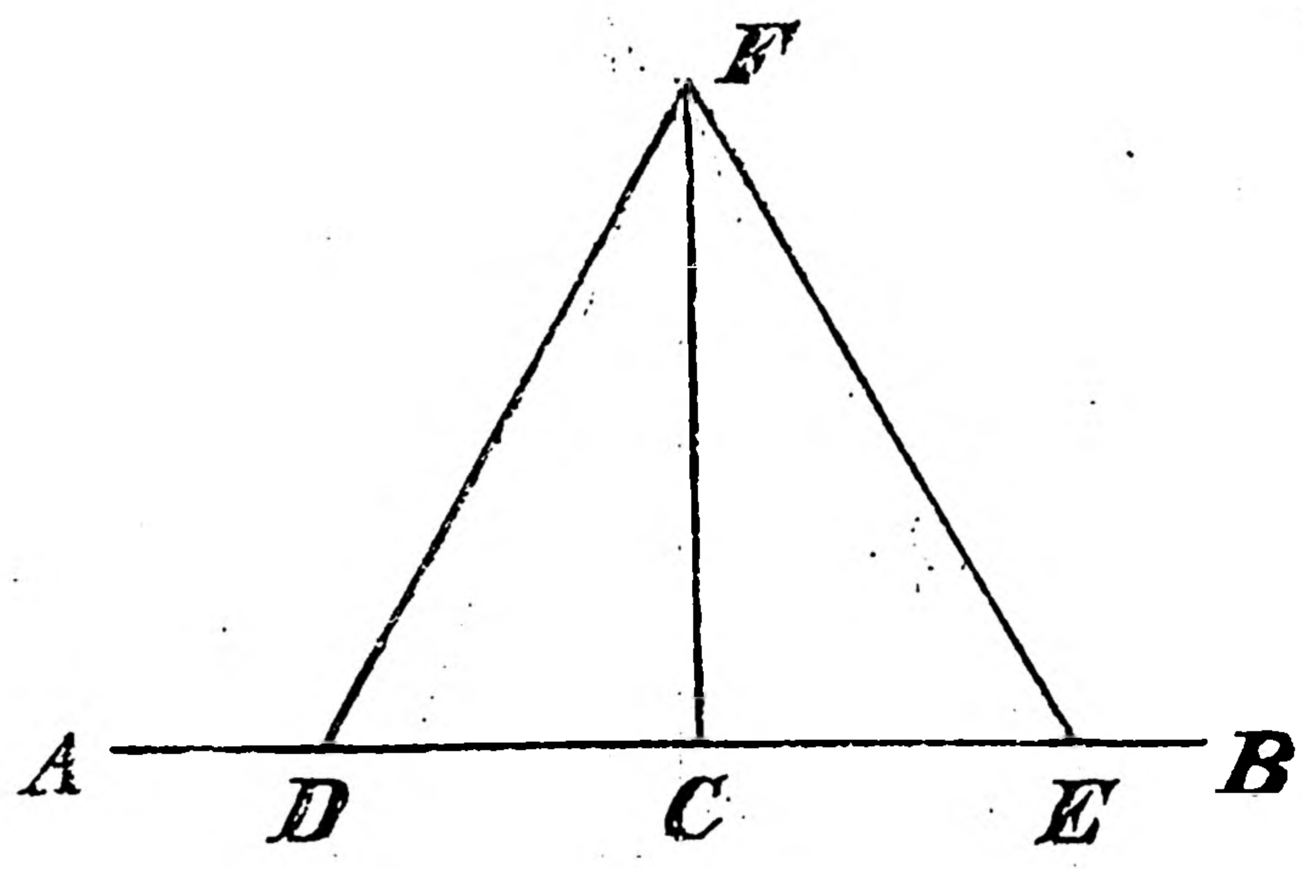


Раздѣлимъ уголъ ACB на двѣ равныя части (пред. 9) прямою DC, эта прямая раздѣлитъ AB въ точкѣ D пополамъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ACD и BCD, сторона CD общая, $AC = CB$ и $\angle ACD = \angle BCD$, слѣдовательно (пред. 4) $AD = DB$.

Предложеніе 11. Изъ данной точки C на прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ (фиг. 59)?

Рѣшеніе. Возьмемъ на AB какую нибудь точку D и построимъ $CE = CD$ (пред. 3).

Фиг. 59.

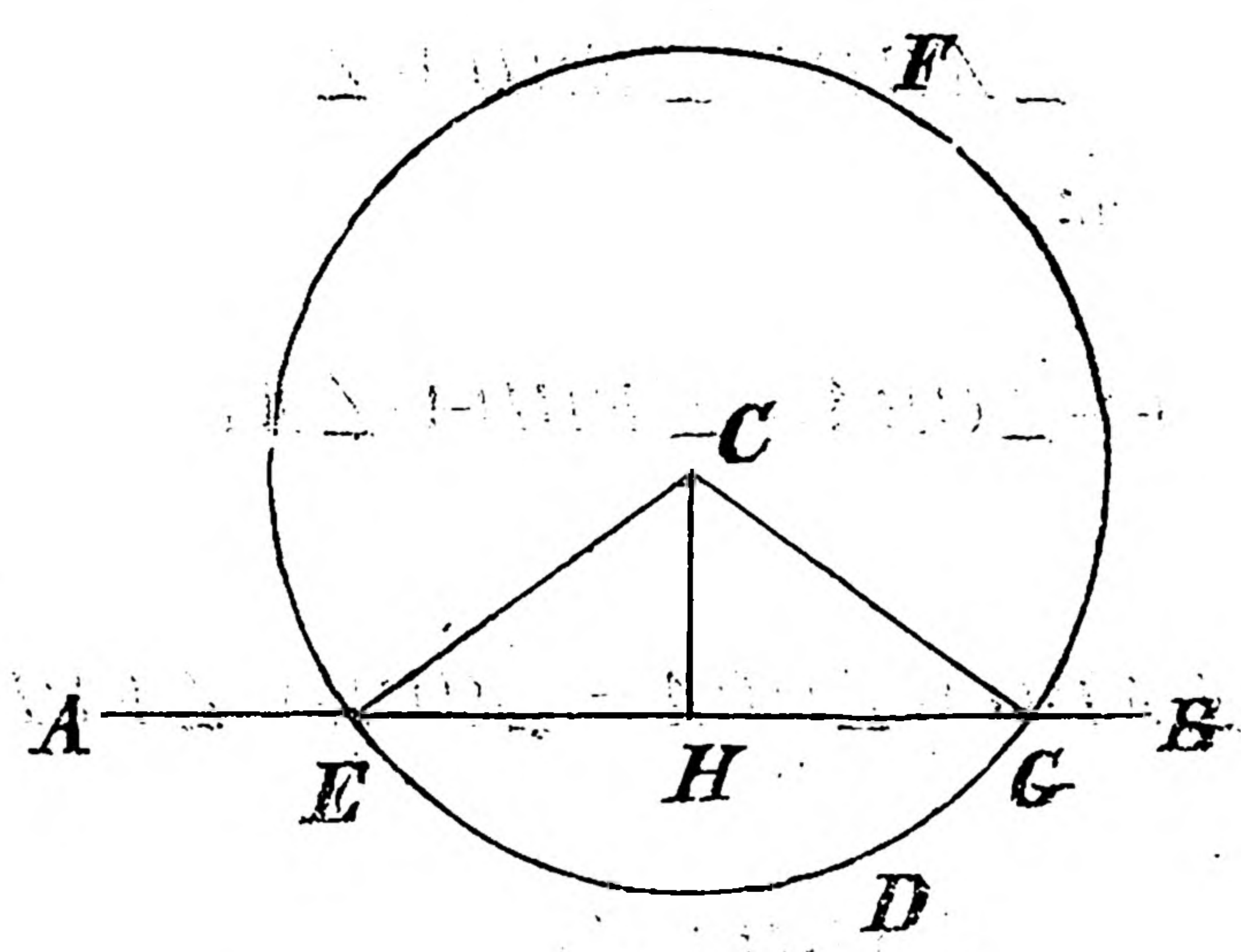


На прямой DE построимъ равносторонній треугольникъ DEF (пред. 1), соединимъ F съ C Прямая CF и будетъ перпендикуляръ къ AB въ точкъ C. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ DCF и ECF, сторона CF общая, $DC=CE$ и $DF=EF$, слѣдовательно (пред. 8) $\angle DCF=\angle ECF$, откуда (опр. 10) FC есть перпендикуляръ къ AB.

Предложеніе 12. Изъ данной точки C опустить перпендикуляръ на неопредѣленную прямую AB (фиг. 60)?

Рѣшеніе. Возьмемъ по другую сторону, прямой AB, относительно точки C, какую нибудь, точку D, изъ точки C какъ изъ центра радіусомъ CD опишемъ кругъ EFG (тр. 3).

Фиг. 60.

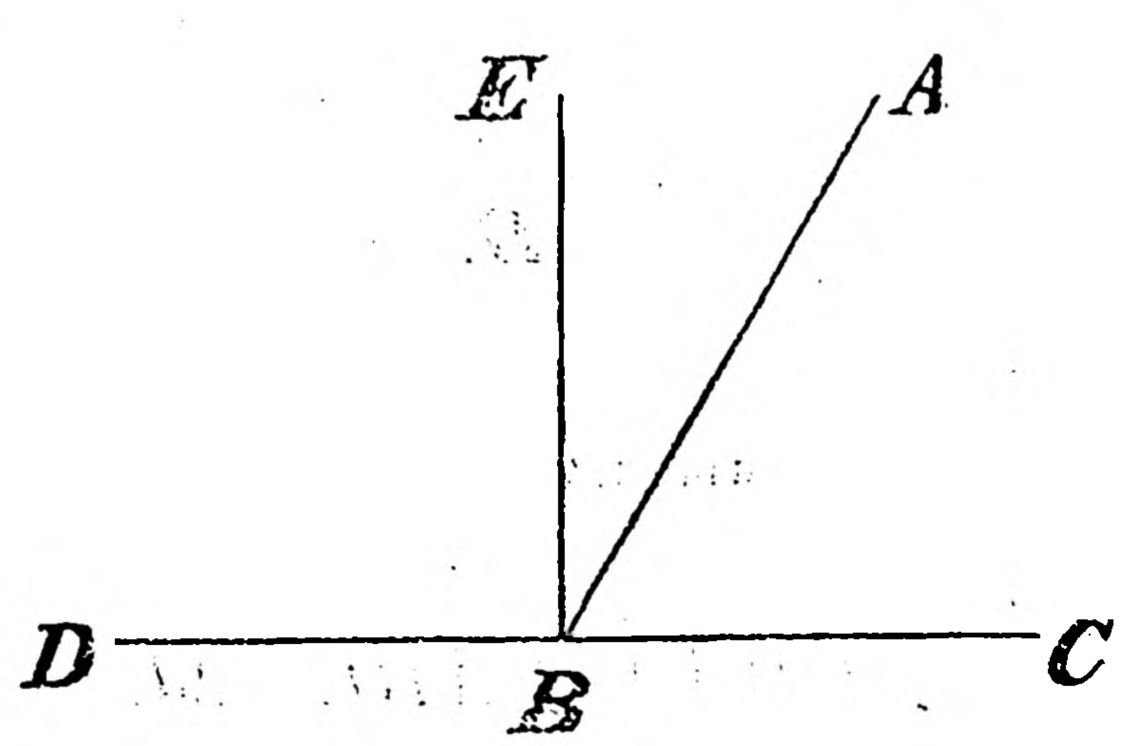


Раздѣлимъ EG пополамъ въ точкѣ H (пред. 10) и соединимъ C съ H, это и будетъ искомый перпендикуляръ къ AB. Въ самомъ дѣлѣ, соединяя E съ C и G съ C, мы имѣемъ два треугольника ECH и GCH, въ которыхъ, сторона CH общая, $EC=GC$ (опр. 15) и $EH=GH$ по построенію, слѣдовательно (пред. 8) $\angle EHC=\angle GHC$. Откуда (опр. 10) CH есть перпендикуляръ къ AB.

Предложеніе 13. Смежные углы ABD и ABC, которые составляетъ прямая AB съ другою прямою CD, будутъ или оба прямые, или сумма ихъ равна двумъ прямымъ (фиг. 61).

Доказат. Если углы ABD и ABC равны между собою, то каждый изъ нихъ есть прямой (опр. 10).

Фиг. 61.



Если же они неравны, то, возставивъ перпендикуляръ BE изъ точки B къ прямой CD (пред. 11), мы будемъ имѣть два прямые угла CBE и EBD (опр. 7).

Но мы имѣемъ:

$$\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства уголъ EBD (акс. 2), получимъ:

$$\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD.$$

Точно также, прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства:

$$\angle ABD = \angle EBD + \angle ABE$$

по углу CBA, получимъ:

$$\angle ABD + \angle CBA = \angle EBD + \angle ABE + \angle CBA.$$

Откуда (акс. 1):

$$\angle ABD + \angle CBA = \angle CBE + \angle EBD$$

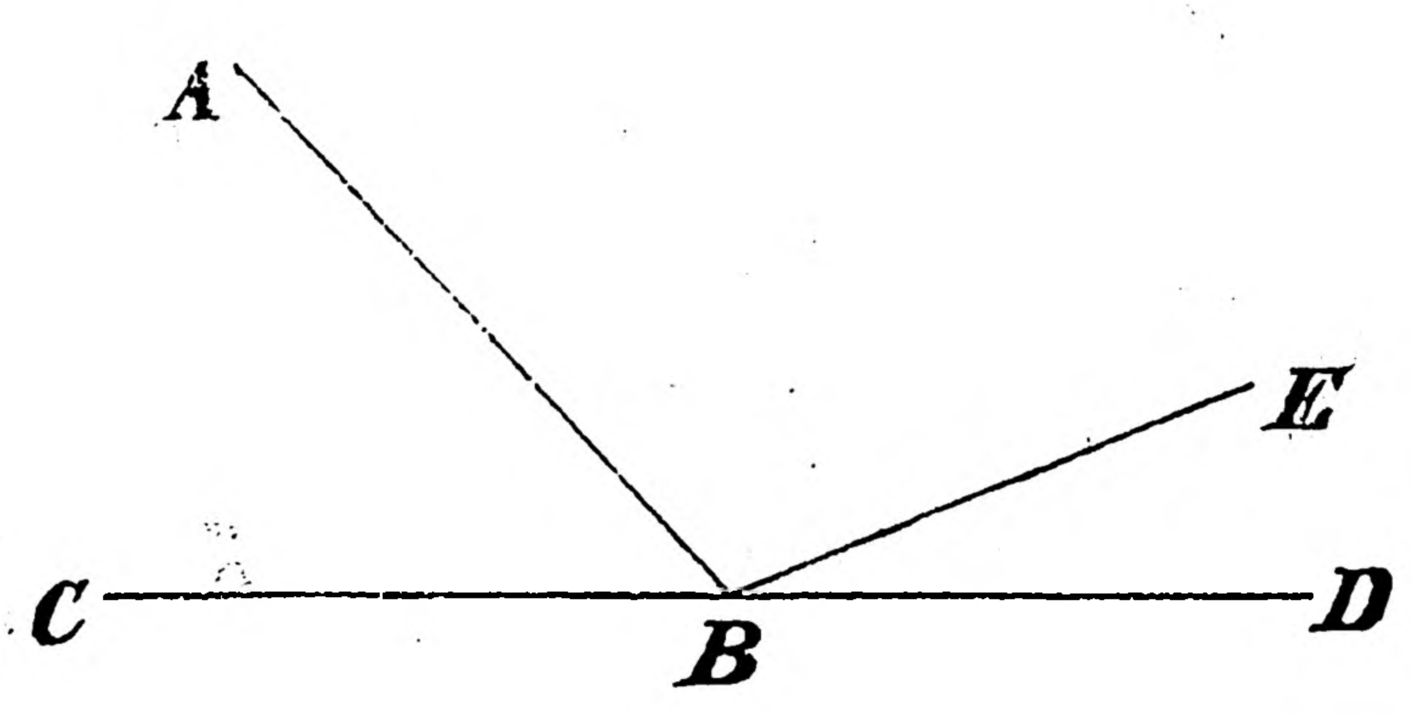
т. е.:

$$\angle ABD + \angle CBA = 2d.$$

Предложеніе 14. Если въ точкѣ B прямой AB, двѣ прямыя BC и BD составляютъ съ прямой AB, съ противоположныхъ ея сторонъ, смежные углы ABC и ABD, коихъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ, то двѣ прямыя BD и BC составляютъ одну прямую CD (фиг. 62).

Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, если бы BD не было продолженіе прямой BC, то продолженіе было бы напримѣръ BE.

Фиг. 62.



Въ этомъ предположеніи мы имѣемъ (пред. 13):

$$\angle CBA + \angle ABE = 2d.$$

Но по предположенію мы имѣемъ:

$$\angle ABC + \angle ABD = 2d$$

Слѣдовательно (акс. 1 и 10):

$$\angle ABC + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABE.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей по углу ABC (акс. 3), получимъ:

$$\angle ABD = \angle ABE$$

что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно, BE не можетъ быть продолженіемъ прямой BC, тоже разсужденіе можно приложить и ко всякой другой прямой, отличной отъ BD. Слѣдовательно прямыя BC и BD суть продолженія одна другой.

Примѣч. 16. Если бы Евклидъ опредѣлилъ сначала уголъ выпрямленный, а за тѣмъ прямой, какъ половину выпрямленнаго, то предложенія 13 и 14 можно бы было поставить въ началѣ. Для доказательства ихъ не было бы надобности въ предложеніи 11, такъ какъ они были бы просто слѣдствіемъ опредѣленія. Предложеніе 5 могло бы быть доказано проще.

Предложеніе 15. Если двѣ прямыя AB и CD пересѣкаются въ точкѣ E, то въ этой точкѣ онѣ образуютъ равные противоположные углы AEC и DEB, AED и CEB, которые равны, т. е. (фиг. 63):

$$\angle AEC = \angle DEB, \quad \angle AED = \angle CEB.$$

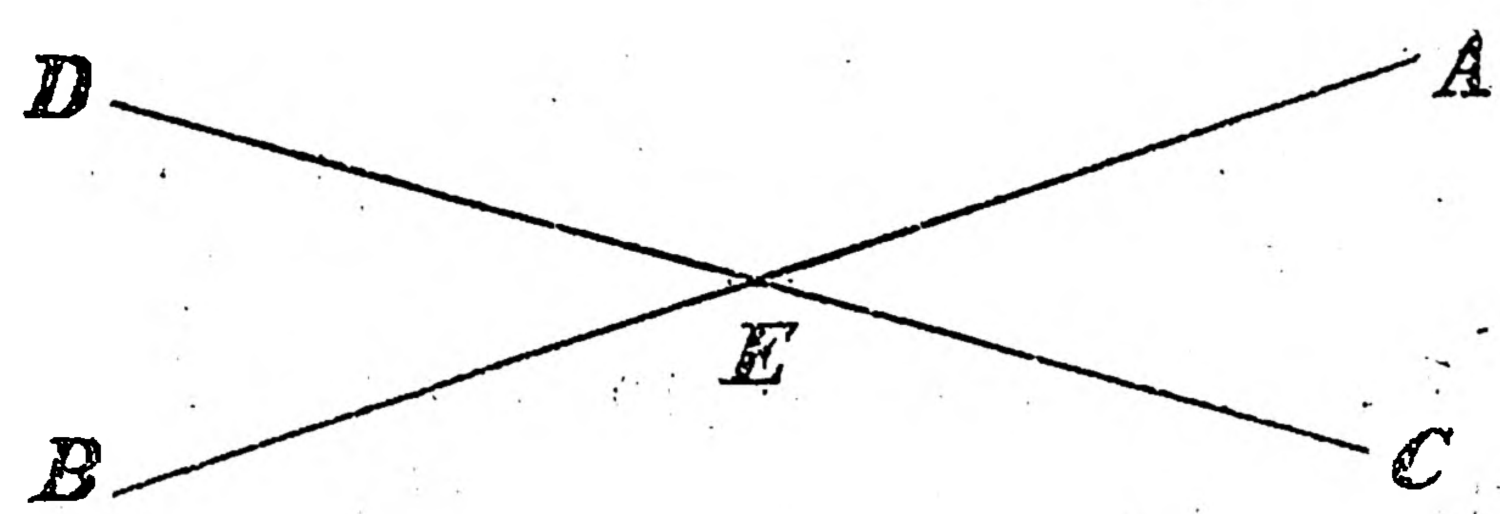
Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (пред. 13):

$$\angle AEC + \angle AED = 2d$$

и

$$\angle AED + \angle DEB = 2d$$

Фиг. 63.



Слѣдовательно (акс. 1 и 10):

$$\angle AEC + \angle AED = \angle AED + \angle DEB$$

отнимая отъ обѣихъ частей по углу AED (акс. 3), найдемъ:

$$\angle AEC = \angle DEB$$

Точно также можно доказать, что:

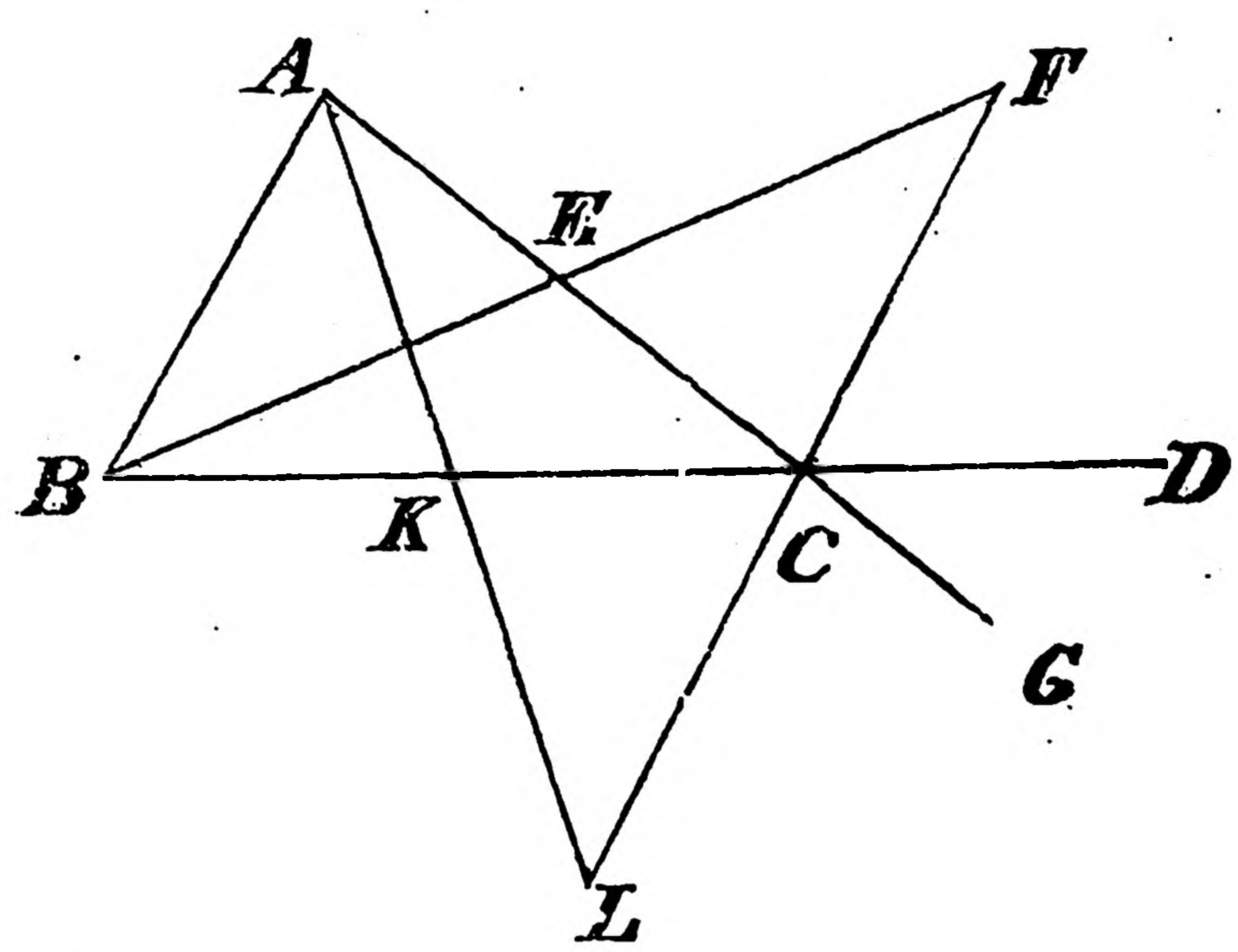
$$\angle CEB = AED.$$

Примѣч. 17. Это предложеніе должно быть помѣщено въ началѣ, послѣ предложеній 13 и 14, какъ мы показали въ примѣч. 5.

Предложеніе 16. Если въ треугольникѣ ABC продолжимъ какую нибудь изъ сторонъ, напримѣръ BC, то внѣшній уголъ ACD будетъ больше каждаго изъ внутреннихъ угловъ треугольника съ нимъ не смежныхъ CBA и BAC (фиг. 64).

Доказат. Раздѣлимъ сторону AC въ точкѣ E пополамъ (пред. 10), соединимъ B съ E и продолжимъ прямую BE такъ, чтобы $BE=EF$ (пред. 3). Соединимъ F съ C прямою FC.

Фиг. 64.



Такъ какъ $AE=EC$, $BE=EF$ и $\angle AEB=\angle FEC$ (пред. 15), то имѣемъ (пред. 4) $\angle BAE=\angle ECF$.

Но (акс. 9) $\angle ACD>\angle ECF$, слѣдовательно:

$$\angle ACD>\angle BAC.$$

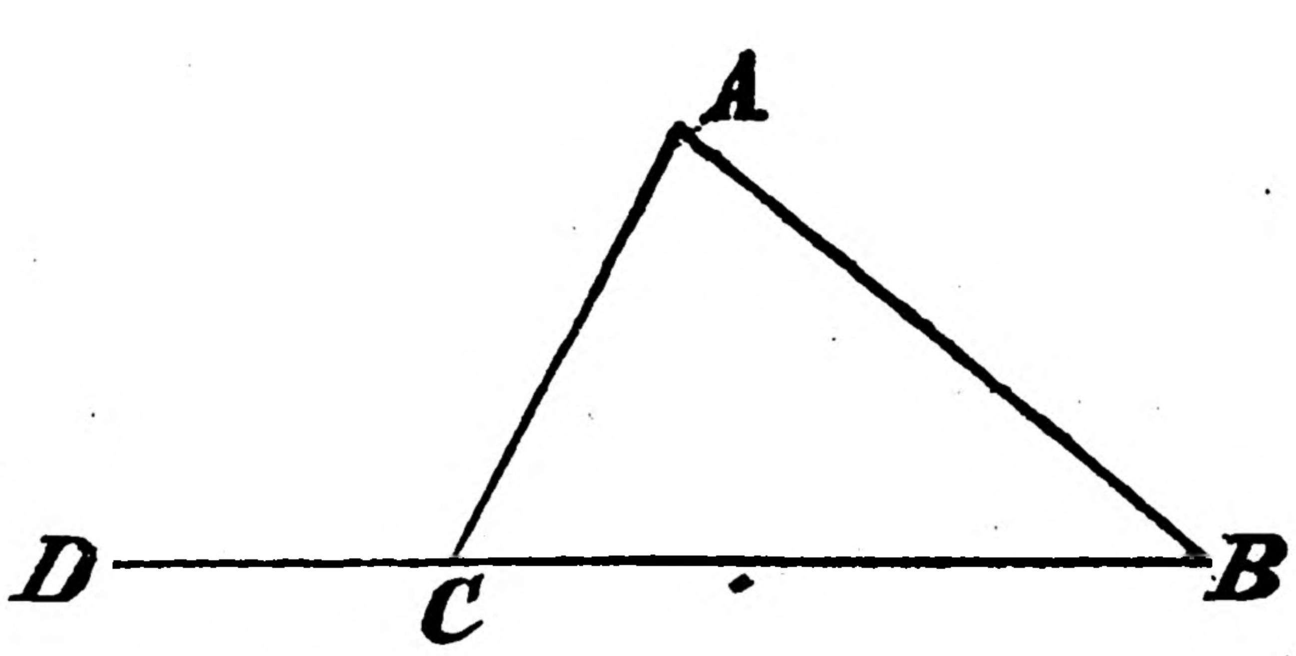
Раздѣляя сторону BC пополамъ и продолжая AC, мы, точно также, можемъ показать что $\angle BCG=\angle ACD>\angle ABC$.

Примѣч. 18. На основаніи 17 предложенія легко показать, 1) что перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки на прямую, короче всякой другой прямой, соединяющей эту точку съ точками прямой, 2) что тѣ изъ этихъ прямыхъ, которыя встрѣчаютъ прямую дальше отъ основанія перпендикуляра больше тѣхъ которыя встрѣчаютъ ее ближе.

Предложеніе 17. Во всякомъ треугольникѣ ABC сумма двухъ, какихъ нибудь, внутреннихъ угловъ ABC и ACB меньше двухъ прямыхъ угловъ (фиг. 65).

Доказат. Продолжимъ сторону BC къ точкѣ D.

Фиг. 65.



Мы имѣемъ (пред. 16):

$$\angle ABC < \angle ACD.$$

Слѣдовательно (акс. 4):

$$\angle ABC + \angle ACB < \angle ACD + \angle ACB.$$

Но мы имѣемъ (пред. 13):

$$\angle ACD + \angle ACB = 2d$$

слѣдовательно:

$$\angle ABC + \angle ACB < 2d.$$

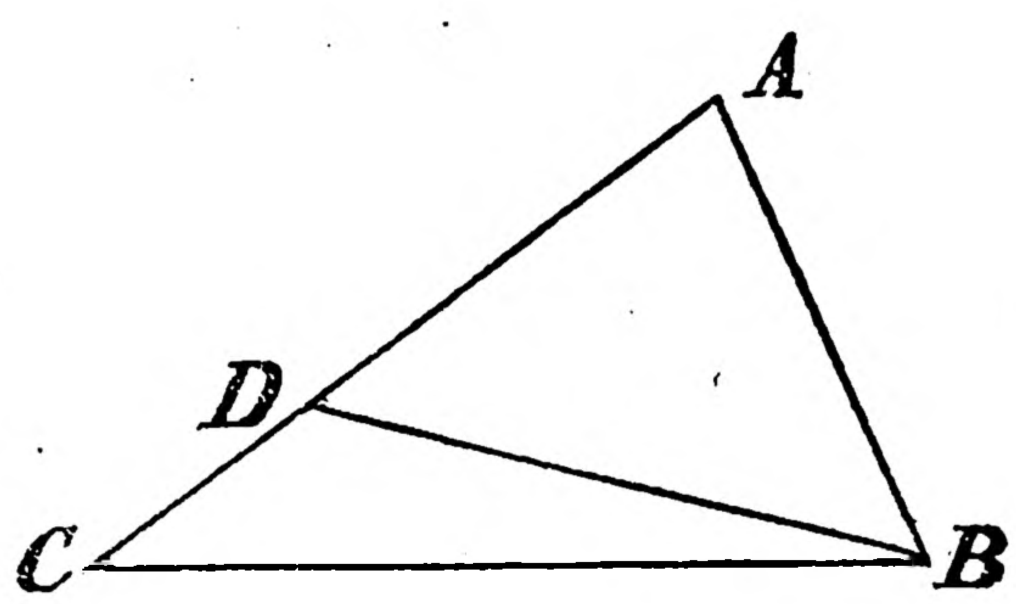
Точно также можно доказать, что:

$$\angle BCA + \angle CAB < 2d \quad \text{и} \quad \angle CAB + \angle ABC < 2d.$$

Предложеніе 18. Если въ треугольникѣ ABC двѣ стороны AC и AB неравны, то противъ большей стороны лежитъ и большій уголъ (фиг. 66).

Доказат. Пусть сторона $AC > AB$.

Фиг. 66.



Возьмемъ на AC, $AD = AB$ (пред. 3) и соединимъ точки B и D, то будемъ имѣть (пред. 16):

$$\angle ADB > \angle ACB.$$

Но уголъ $ADB = ABD$, слѣдовательно тѣмъ болѣе:

$$\angle ABC > \angle ACB.$$

Предложеніе 19. Если въ треугольникѣ ABC углы неравны, то большему углу ABC противолежитъ и большая сторона AC.

Доказат. Если бы AC не была больше AB, то она была бы равна, или меньше.

Если $AC = AB$, то (пред. 5) $\angle ABC = \angle ACB$.

Если $AC < AB$, то (пред. 18) $\angle ABC < \angle ACB$.

Эти два заключенія противорѣчатъ предположенію $\angle ABC > \angle ACB$, слѣдовательно:

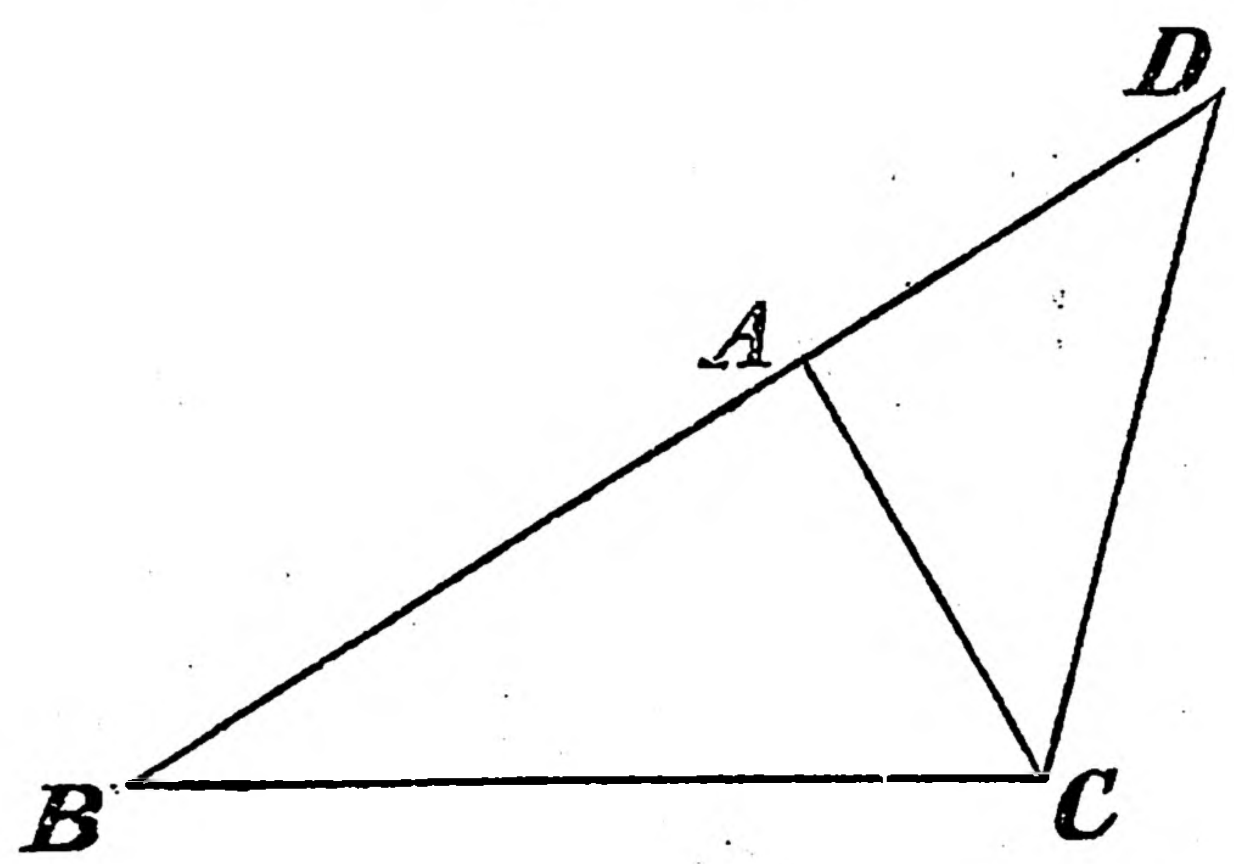
$$AC > AB.$$

Примѣч. 19. Предложенія 18 и 19 суть обратныя одно другому. 18 доказано прямо, а 19 приведено къ несообразности.

Предложеніе 20. Во всякомъ треугольникѣ ABC, сумма двухъ какихъ нибудь сторонъ AB и AC болѣе третьей стороны BC (фиг. 67).

Доказат. Продолжимъ сторону AB и отложимъ $AD = AC$ (пред. 3), соединимъ C съ D.

Фиг. 67.



Такъ какъ $AD = AC$, то уголъ $ACD = ADC$ (пред. 5). Но мы имѣемъ (акс. 9) $\angle BCD > \angle ACD$, слѣдовательно $\angle BCD > \angle ADC$. Откуда (пред. 19) $BD > BC$, т. е.:

$$BA + AC > BC.$$

Точно также можно доказать, что:

$$AB + BC > AC \text{ и } BC + AC > AB.$$

Примѣч. 20. Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что разность двухъ сторонъ всегда меньше третьей стороны.

Предложеніе 21. Если въ треугольникѣ ABC концы основанія BC соединимъ съ точкою D, лежащею внутри треугольника, прямыми BD и CD, то 1) сумма этихъ двухъ прямыхъ менѣе суммы сторонъ AB и AC, и 2) уголъ BDC, заключающійся между BD и CD, больше угла BAC, противолежащаго основанію BC (фиг. 68).

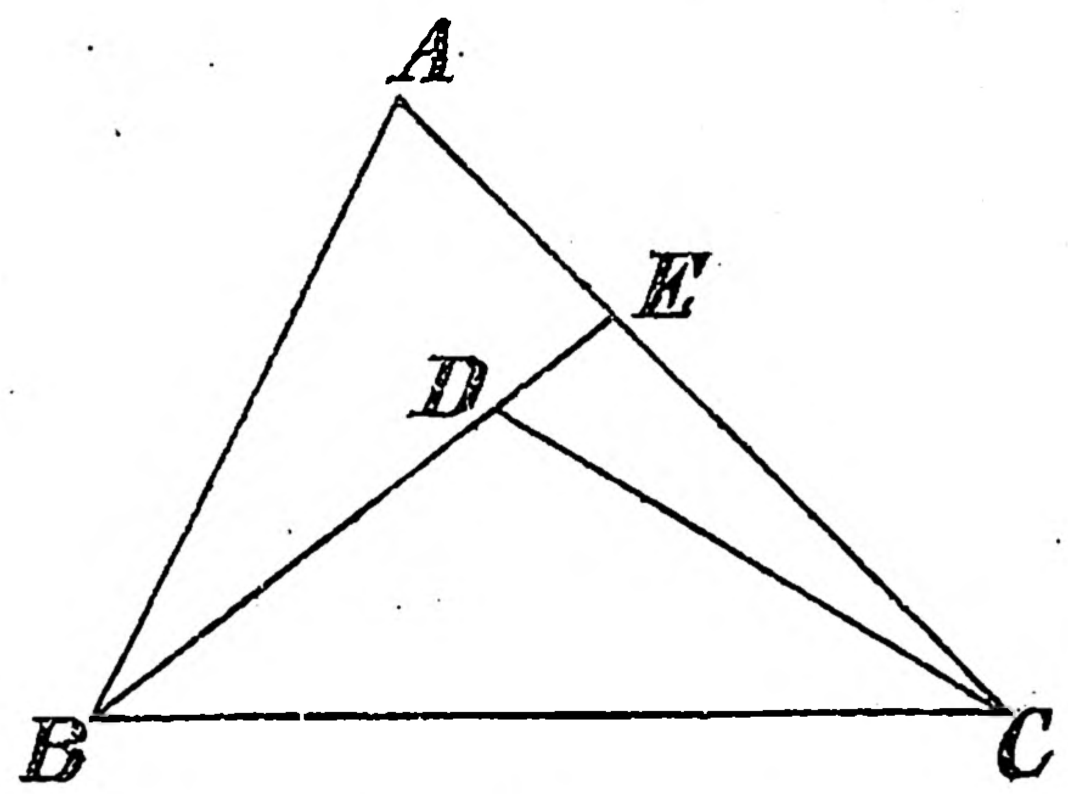
Доказат. 1) Продолжимъ BD до встрѣчи съ AC въ точкѣ E. Въ треугольникѣ ABE, мы имѣемъ (пред. 20):

$$BA + AE > BE$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого неравенства по CE (акс. 4), найдемъ:

$$BA+AC>BE+EC. \qquad (1)$$

Фиг. 68.



Въ треугольникѣ CDE (пред. 20), имѣемъ:

$$DE+EC>DC$$

прибавляя по BD, къ обѣимъ частямъ, найдемъ:

$$BE+EC>DC+BD. \qquad (2)$$

Сравнивая неравенства (1) и (2), получимъ:

$$BA+AC>BD+DC.$$

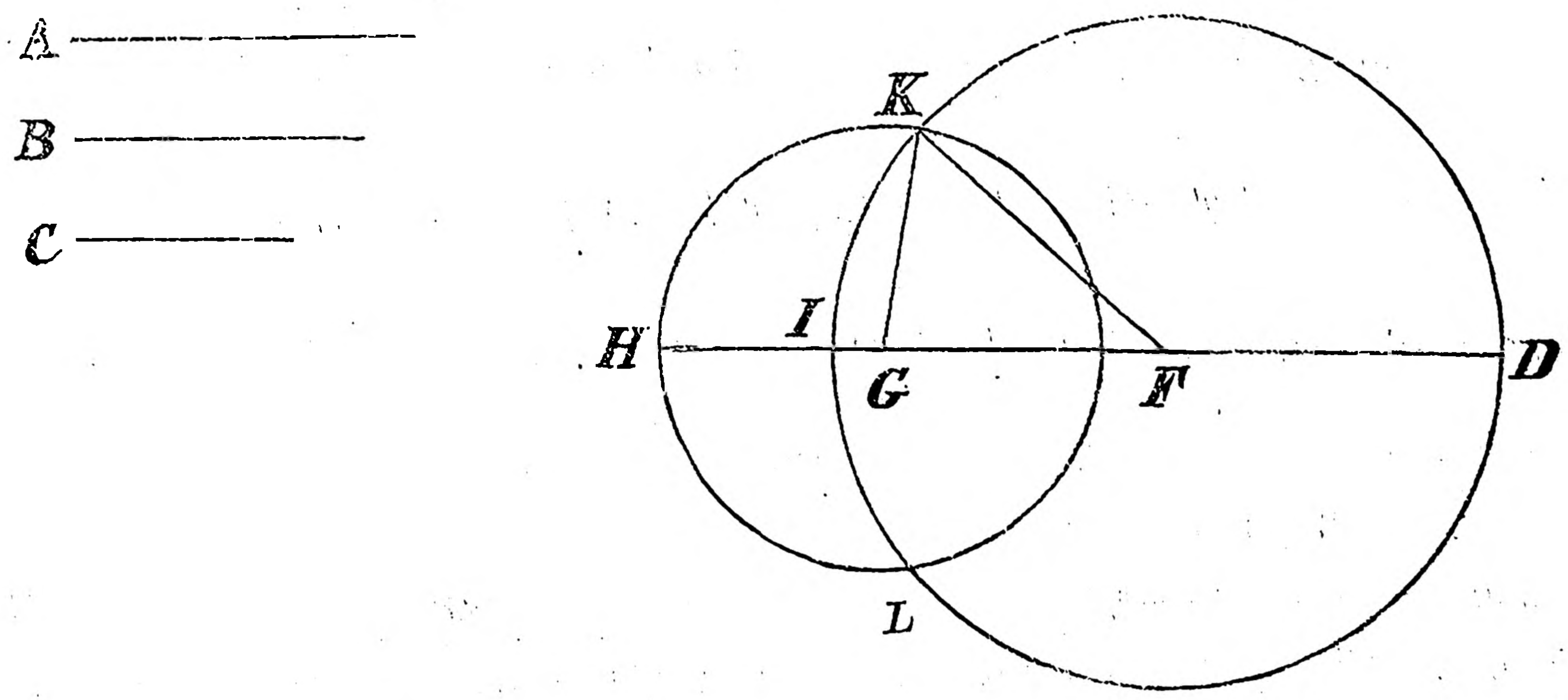
2) Въ треугольникѣ DCE внѣшній уголъ $BDC>BEC$ (пред. 16), а въ треугольникѣ EAB внѣшній уголъ $BEC>BAC$, слѣдовательно уголъ;

$$BDC>BAC.$$

Предложеніе 22. Построить треугольникъ, коего стороны были бы равны тремъ даннымъ прямымъ A, B и C, такъ взятыхъ, что сумма двухъ какихъ нибудь изъ нихъ больше третьей (фиг. 69)?

Рѣшеніе. Проведемъ прямую DH, которая начинается въ D и продолжается неопредѣленно въ сторону точки H.

Фиг. 69.



Возьмемъ $DF=A$, $FG=B$, $GH=C$ (пред. 3). Изъ точки F какъ изъ центра радіусомъ равнымъ DF опишемъ кругъ DKI. Изъ точки G, какъ изъ центра радіусомъ равнымъ GH, опишемъ кругъ KLH, который пересѣчетъ кругъ DKI въ точкѣ K. Соединимъ K съ F и K съ G, полученный треугольникъ KFG будетъ искомый. Въ самомъ дѣлѣ, $FD=FK$ (опр. 15); но $FD=A$, слѣдовательно и $FK=A$. Точно также $GK=GH$, но $GH=C$, слѣдовательно $GK=C$. Кромѣ этого мы имѣемъ $FG=B$, слѣдовательно стороны треугольника FGK суть данныя прямыя A, B, C.

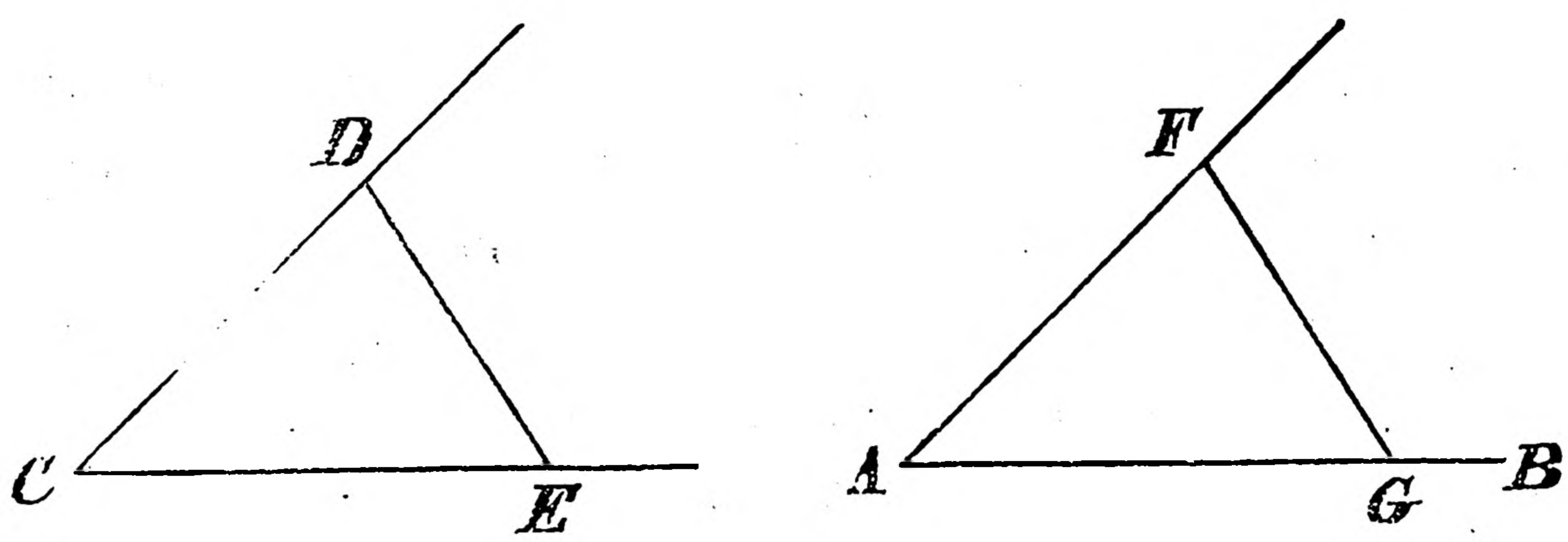
Примѣч. 21. У Евклида въ этомъ предложеніи пропущено условіе: что сумма двухъ, какихъ нибудь, изъ данныхъ прямыхъ, больше третьей. Гуель (Hoüel) поэтому говоритъ, что Евклидъ забылъ это условіе. Я думаю, что Евклидъ, доказавъ предложеніе 20, полагалъ что это условіе само собою подразумѣвается. Кромѣ этого обвиняютъ Евклида въ томъ, что онъ не показалъ, что круги DKL и KLH пересѣкутся. Это легко показать слѣдующимъ образомъ:

Изъ выше упомянутаго условія слѣдуетъ, что $DG>HG$ и что $HG>GI$, GI есть разность между DF и GF. Слѣдовательно, точка D лежитъ внѣ круга HKL, а точка I лежитъ внутри того-же круга, откуда слѣдуетъ, что кругъ DKL, имѣя точки внѣ и внутри круга HKL, пересѣчетъ этотъ кругъ въ двухъ точкахъ.

Предложеніе 23. Въ точкѣ A на данной прямой AB построить плоскій уголъ равный данному углу DCE (фиг. 70)?

Рѣшеніе. На сторонахъ даннаго угла DCE возьмемъ двѣ произвольныя точки D и E и соединимъ ихъ прямою DE.

Фиг. 70.



Построимъ затѣмъ треугольникъ AFG, такой, чтобы:

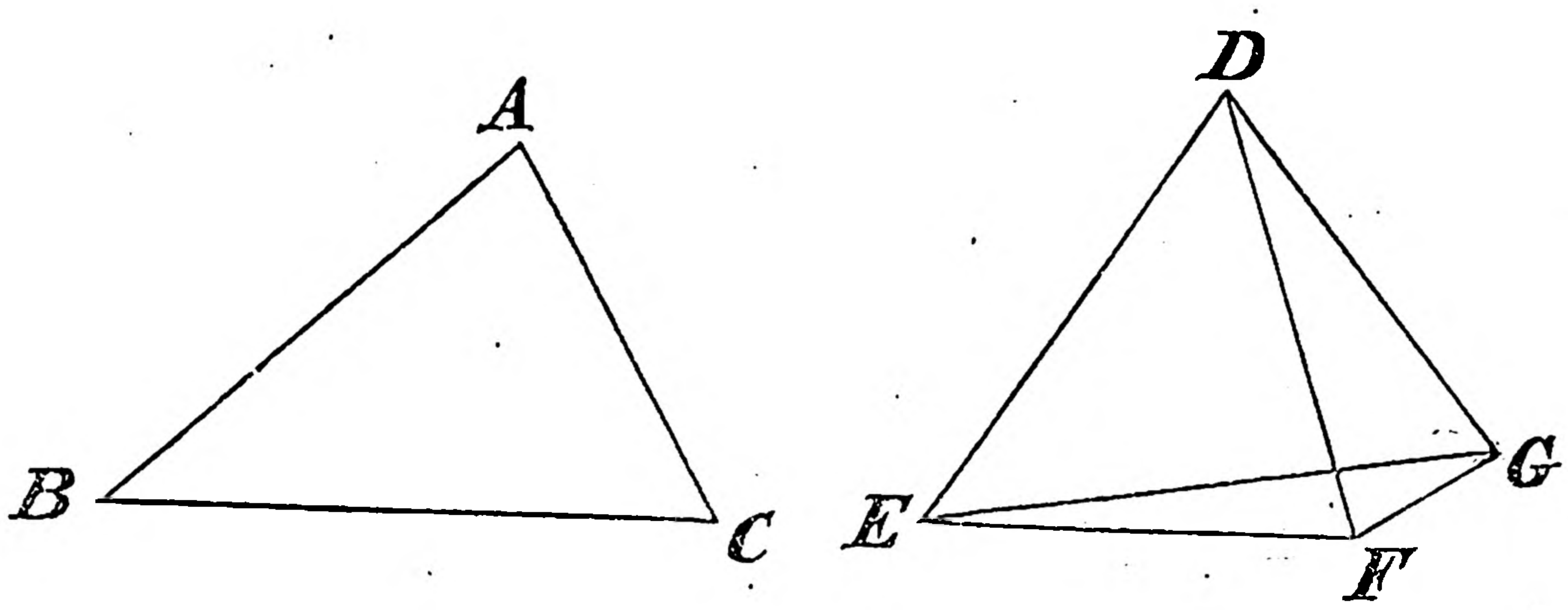
$$AF=CD,\ AG=CE,\ FG=DE \text{ (пред. 22)}$$

то будемъ имѣть уголъ $FAG=DCE$ (пред. 8).

Предложеніе 24. Если два треугольника ABC и DEF (фиг. 71) имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой, $AB=DE$, $AC=DF$, а углы заключенные между этими сторонами не равны, уголъ $BAC>EDF$, то сторона BC, противолежащая большему углу, будетъ больше стороны EF, противолежащей меньшему углу (фиг. 71).

Доказат. Построимъ на сторонѣ DE треугольника DEF, въ точкѣ D уголъ $EDG=BAC$ (пред. 23), отложимъ $DG=AC=DF$ и соединимъ точку G съ точками E и F.

Фиг. 71.

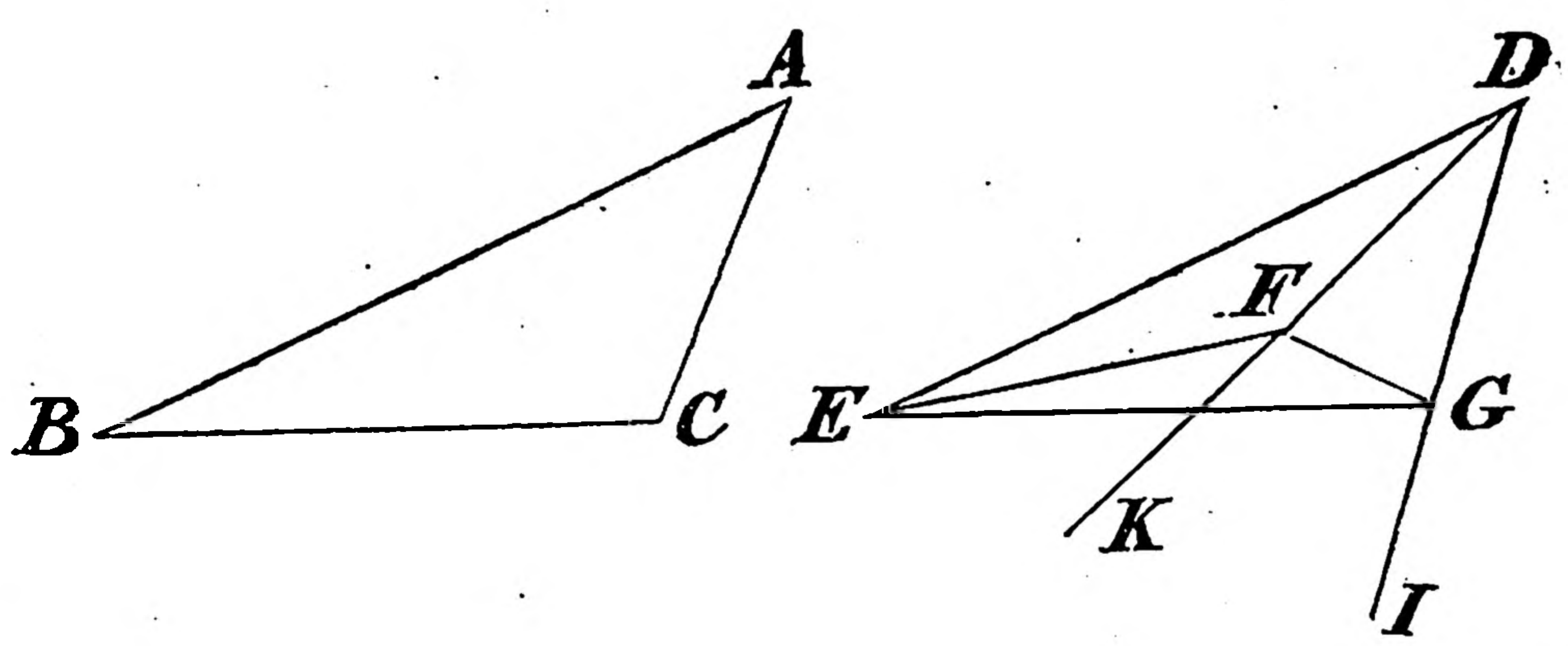


Такъ какъ $AB=DE$, $AC=DG$ и $\angle BAC=\angle EDG$, то слѣдуетъ (пред. 4), что $BC=EG$.

Но въ треугольникѣ FDG мы имѣемъ $DG=DF$, откуда (пред. 3), $\angle DFG=\angle DGF$, слѣдовательно $\angle EFG>\angle FGD$, и какъ $\angle FGD>\angle FGE$, то тѣмъ болѣе $\angle EFG>\angle FGE$. Слѣдовательно (пред. 19) $EG=BC>EF$.

Примѣч. 22. У Евклида разсмотрѣнъ только тотъ случай, въ которомъ, какъ выше, сторона BC упала внутри угла DEF, но можетъ случиться, что эта сторона упадетъ внѣ угла DEF (фиг. 72). Въ этомъ случаѣ, въ равнобедренномъ треугольникѣ DFG углы ниже основанія KFG и IGF равны, (пред. 5), но $\angle EFG>\angle KFG$, слѣдовательно $\angle EFG>\angle IGF$, а тѣмъ болѣе $\angle EFG>\angle EGF$ (акс. 9), откуда сторона $EG=BC>EF$ (пред. 19).

Фиг. 72.



Симсонъ замѣчаетъ, что случай когда EG пойдетъ внѣ угла DEF, можетъ быть всегда сведенъ на первый, если за сторону DE взять меньшую изъ сторонъ DE и DF. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ точки F и G лежатъ на окружности круга, описаннаго изъ точки D, а точка E будетъ лежать внутри этого круга. Изъ этого ясно, что точки D и E будутъ лежать по одну сторону прямой FG. Случай въ которомъ EG пойдетъ по EF очевиденъ.

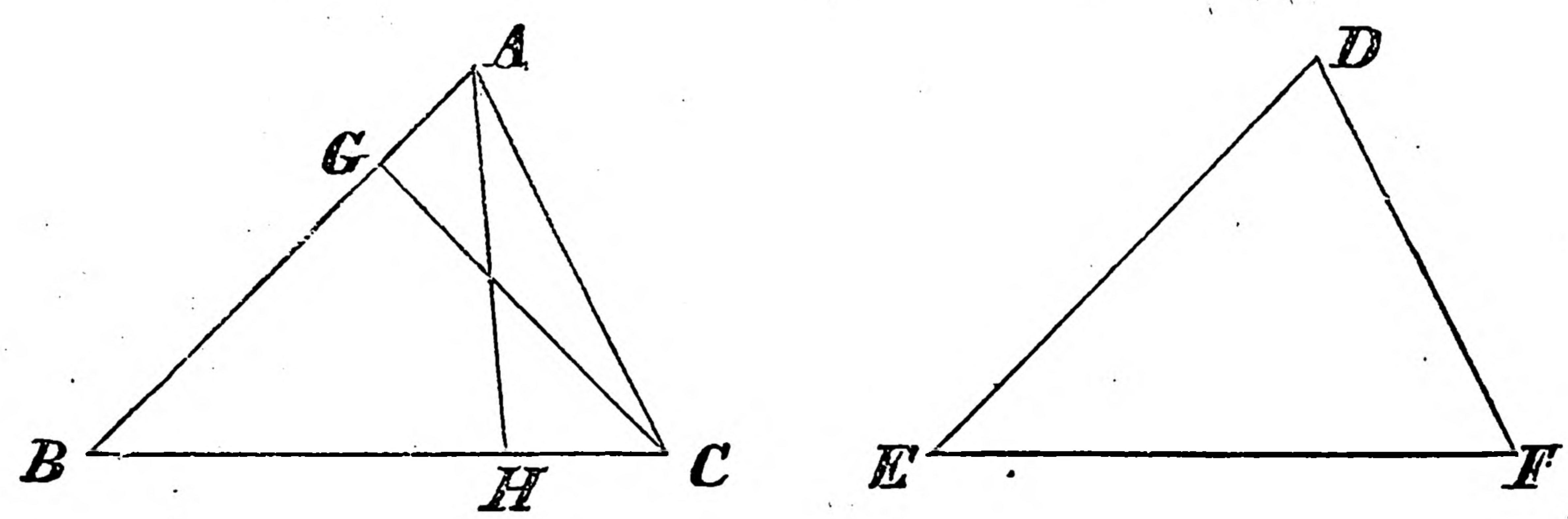
Предложеніе 25. Если два треугольника ABC и DEF имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой, $AB=DE$, $AC=DF$, а третія стороны неравны $BC>EF$, то уголъ BAC, противолежащій большей сторонѣ, будетъ больше угла EDF, противолежащаго меньшей сторонѣ, (фиг. 71).

Доказат. Если бы уголъ BAC не былъ больше угла EDF, то онъ можетъ быть или равенъ, или меньше его. Въ первомъ случаѣ, мы бы имѣли (пред. 4) $BC=EF$; а во второмъ (пред. 24) $BC<EF$. Оба эти случая противорѣчатъ предположенію $BC>EF$, слѣдовательно необходимо $\angle BAC>\angle EDF$.

Предложеніе 26. Если два треугольника ABC и DEF имѣютъ по два равные угла, каждый каждому, $\angle ABC=\angle DEF$, $\angle ACB=\angle DFE$ и по равной сторонѣ, которая или 1) прилежитъ равнымъ угламъ или 2) противолежитъ одному изъ равныхъ угловъ, напримѣръ $AB=DE$, то двѣ остальныя стороны будутъ равны, каждая каждой и третій уголъ BAC будетъ равенъ третьему углу EDF (фиг. 73).

Доказат. 1). Сторона $BC=EF$. Если бы сторона AB небыла равна сторонѣ DE, то была-бы, напримѣръ, больше, $AB>DE$. На сторонѣ AB возьмемъ $BG=ED$ и соединимъ C съ G.

Фиг. 73.



Такъ какъ $BG=ED$, $BC=EF$, $\angle ABC=\angle DEF$, то (пред. 4) $\angle BCG=\angle EFD=\angle BCA$, что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно AB не можетъ быть больше DE. Точно также AB не можетъ быть меньше DE. Слѣдовательно $AB=DE$. Но какъ $AB=DE$, $BC=EF$ и $\angle ABC=\angle DEF$, то (пред. 4) $AC=DF$ и $\angle BAC=\angle EDF$.

2). Если стороны, противолежащія одному изъ равныхъ угловъ, равны $AB=DE$.

Если бы стороны BC и EF не были равны, то BC была бы напримѣръ больше EF. На сторонѣ BC возьмемъ $BH=EF$ и соединимъ H съ A.

Такъ какъ мы имѣемъ теперь:

$$BH=EF,\ AB=DE,\ \angle ABC=\angle DEF$$

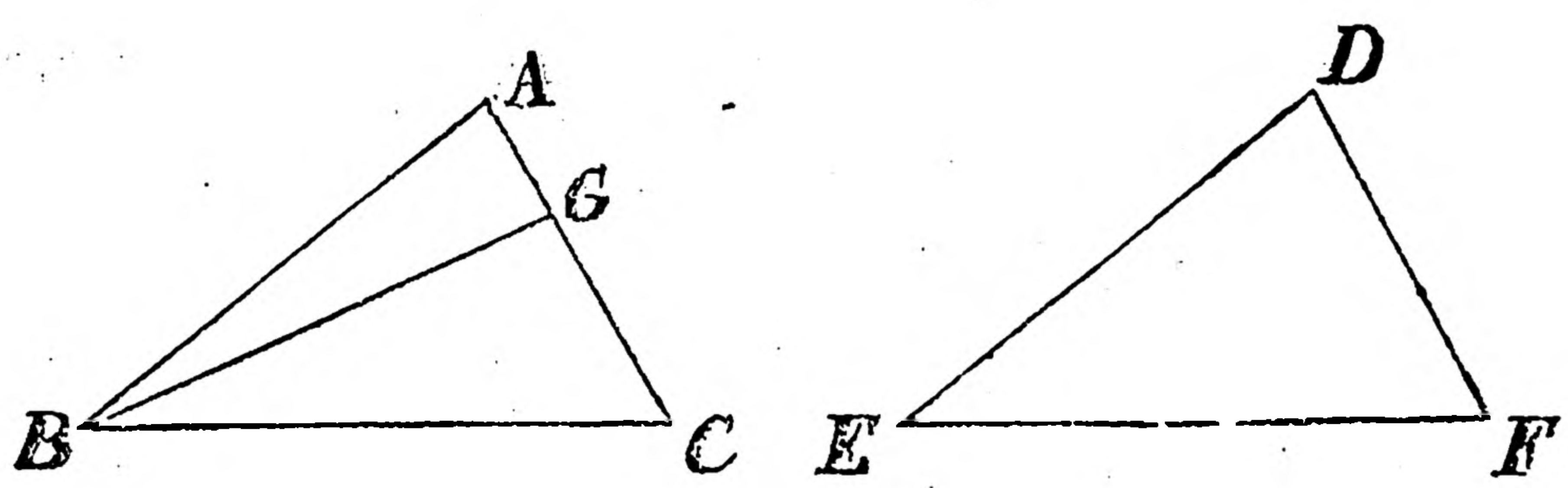
то (пред. 4) $\angle BHA=\angle EFD=\angle BCA$, что невозможно (пред. 14). Слѣдовательно BC не можетъ быть больше EF, точно также BC не можетъ быть и меньше EF, слѣдовательно $BC=EF$. $BC=EF$, $AB=DE$, $\angle ABC=\angle DEF$, слѣдовательно (пред. 4):

$$AC = DF, \ \angle BAC = \angle EDF.$$

Примѣч. 23. Кромѣ случаевъ равенства треугольниковъ данныхъ Евклидомъ (пред. 4, 26) есть еще слѣдующій: если два треугольника ABC и DEF имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой, $AB=DE$, $BC=EF$ и уголъ ACB, противолежащій большей изъ равныхъ сторонъ $AB>BC$, будетъ равенъ углу DFE, противолежащему сторонѣ $DE>EF$, то и остальныя части треугольника будутъ равны (фиг. 74).

Доказат. Мы имѣемъ $AB>BC$, $AB=DE$, $BC=EF$ и $\angle ACB = \angle DFE$. Если бы сторона $AC=DF$, то и остальныя части треугольниковъ ABC и DEF были бы равны.

Фиг. 74.



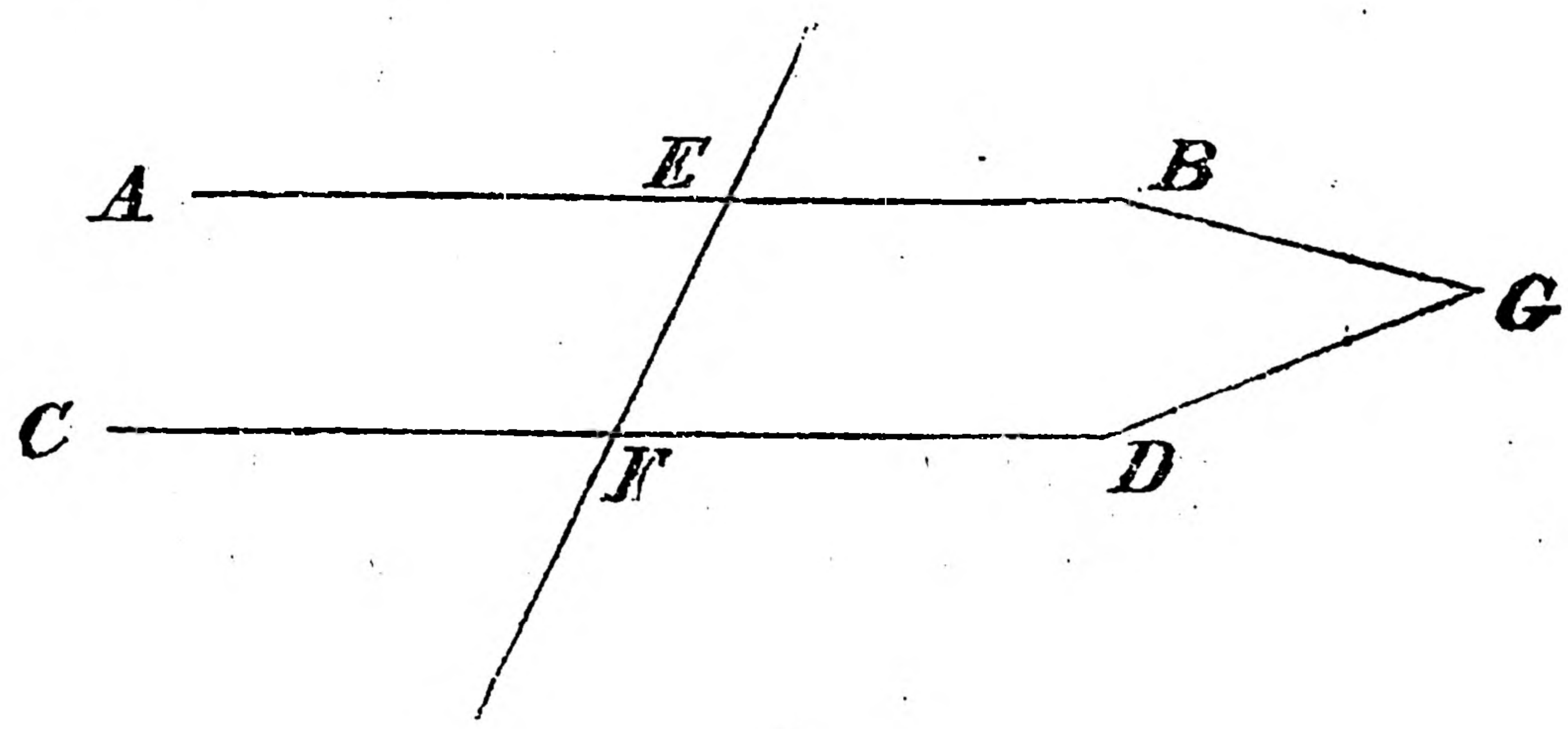
Положимъ, что $AC>DF$, отложимъ на сторонѣ AC, $CG=DF$, то $\triangle GBC = \triangle DEF$ (пред. 4), откуда $DE=BG=BA$, слѣдовательно (пред. 5), $\angle BAC = \angle BGA$. Но уголъ $BGA > \angle BCG$ (пред. 16), слѣдовательно $\angle BAC > \angle BCA$, откуда слѣдуетъ (пред. 19) $AB<BC$, что противорѣчитъ предположенію. Точно также можно показать что не можетъ быть $AC<DF$. Симсонъ формулируетъ иначе этотъ случай равенства треугольниковъ. Если два треугольника ABC и DEF имѣютъ по двѣ стороны равныя, каждая каждой, $AB=DE$, $BC=EF$ и уголъ ACB, противолежащій сторонѣ AB, равенъ углу DFE противолежащему сторонѣ DE, то треугольники будутъ равны и въ остальныхъ частяхъ, если углы BAC и EDF, противолежащіе равнымъ сторонамъ BC и EF, будутъ или оба острые, или прямые, или тупые. Предложеніе, такимъ образомъ выраженное легко, доказать предъидущимъ пріемомъ.

Замѣтимъ, что треугольники, имѣющіе по двѣ стороны равныя и по углу противолежащему одной изъ равныхъ сторонъ, не будутъ равны, если не добавить условія, что равные углы противолежатъ большей изъ равныхъ сторонъ, или что другіе углы, противолежащіе равнымъ сторонамъ, оба острые, или прямые, или тупые. Это видно на фигурѣ 66, если точку F соединимъ съ B. Здѣсь мы будемъ имѣть два треугольника ABC и DCB, которые имѣютъ по двѣ равныя стороны $AB=DB$, CB общая, и уголъ ACB также общій, при этихъ условіяхъ, треугольникъ CDB есть часть треугольника ABC.

Предложеніе 27. Если двѣ прямыя AB и CD пересѣчены третьей EF, составляютъ съ EF равные внутренніе перекрестные углы AEF и EFD, то прямыя AB и CD не встрѣтятся (фиг. 75).

Доказат. Положимъ, что прямыя AB и CD по нѣкоторомъ продолженіи встрѣтятся въ точкѣ G. Въ треугольникѣ GEF внѣшній уголъ

Фиг. 75.



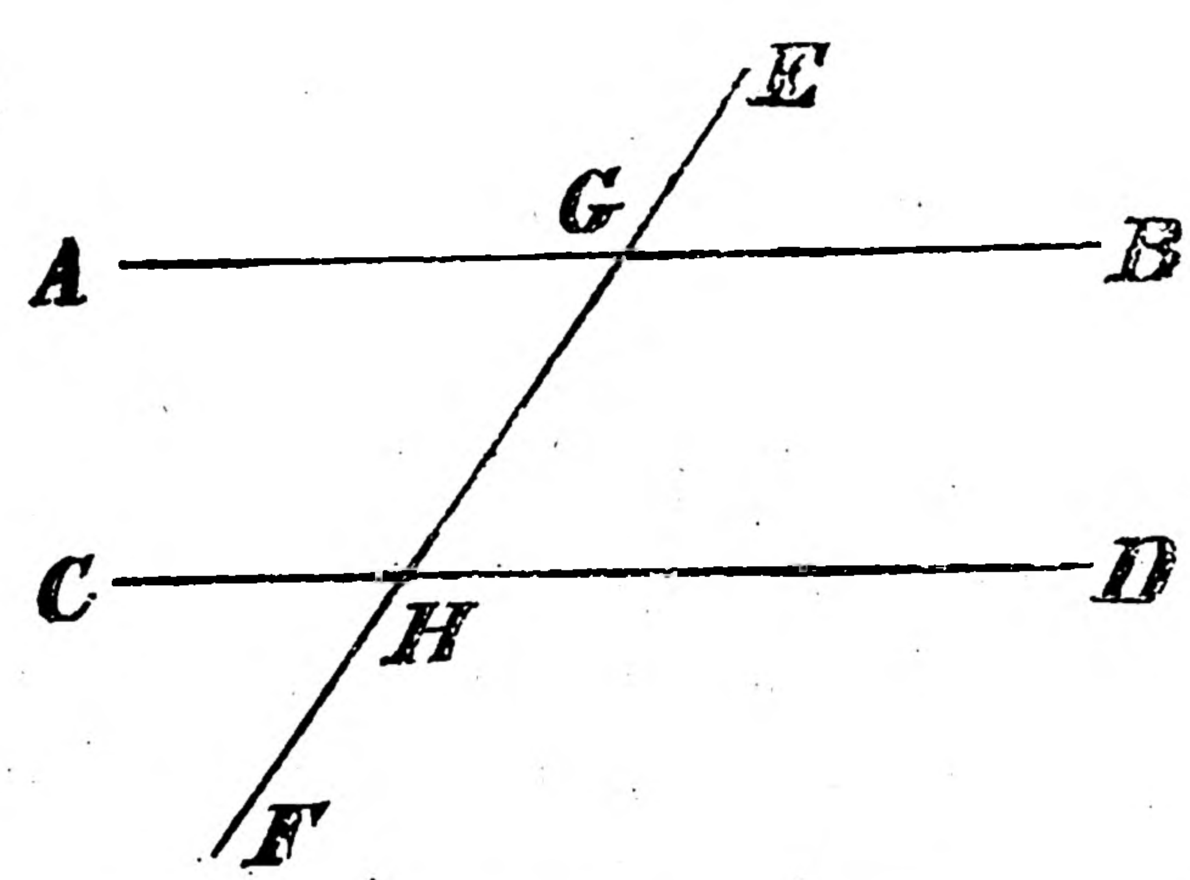
AEF долженъ быть больше внутренняго угла EFG (пред. 16), что противорѣчитъ предположенію $\angle AEF = \angle EFD$. Слѣдовательно AB и CD не могутъ встрѣтиться. По той же причинѣ онѣ не могутъ встрѣтиться и по другую сторону прямой EF.

Предложеніе 28. Если двѣ прямыя AB и CD, пересѣченныя третьей EF, составляютъ съ EF: 1) равные внутренно-внѣшніе односторонніе углы EGB и GHD, или 2) если сумма внутреннихъ угловъ BGH и GHD, лежащихъ по одну сторону прямой EF, равна двумъ прямымъ, то прямыя AB и CD не встрѣтятся (фиг. 76).

Доказат. 1) Такъ какъ $\angle EGB = \angle GHD$, а $\angle EGB = \angle AGH$ (пред. 15), то $\angle AGH = \angle GHD$. Слѣдовательно (пред. 27) прямыя AB и CD не встрѣтятся.

2) Такъ какъ $\angle BGH + \angle GHD = 2d$, а $\angle AGH + \angle BGH = 2d$, то

Фиг. 76.



слѣдуетъ $\angle AGH + \angle BGH = \angle BGH + \angle GHD$ (акс. 1, 10). Вычитая по $\angle BGH$, найдемъ (акс. 3), что $\angle AGH = \angle GHD$. Слѣдовательно, (пред. 27) прямыя AB и CD не встрѣтятся.

Примѣч. 24. Всѣ двадцать восемь предъидущихъ предложеній, къ которымъ слѣдуетъ прибавить еще предложеніе: что сумма внутреннихъ угловъ во всякомъ треугольникѣ на плоскости не можетъ быть болѣе двухъ прямыхъ (см. введ. пред. 2), доказаны только на основаніи 8-й и 12-й аксіомъ. Затѣмъ для дальнѣйшаго развитія системы необходимо еще одно свойство плоскости, которое Евклидъ и далъ въ видѣ 11-й аксіомы. Нѣкоторые геометры, вмѣсто одиннадцатой аксіомы Евклида, берутъ другое ея видоизмѣненіе: двѣ пересѣкающіяся прямыя не могутъ быть обѣ параллельны третьей прямой. Остроградскій вмѣсто одиннадцатой аксіомы принялъ слѣдующую: двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны между собою. Такъ какъ это предложеніе имѣетъ мѣсто и на плоскости и на псевдо-сферѣ, то оно не отдѣляетъ одну поверхность отъ другой, а слѣдовательно за аксіому принято быть не можетъ. И въ самомъ дѣлѣ, Остроградскій сейчасъ же сводитъ свою аксіому на евклидовскую, выраженную въ формѣ выше написанной: двѣ пересѣкающіяся прямыя не могутъ быть обѣ параллельны третьей (См. Руководство начальной геометріи, курсъ II-го общаго класса, стр. 26 и 27). Евклидъ, какъ видно, хотѣлъ строго отдѣлить предложенія, которыя доказаны только на основаніи 8-й и 12-й аксіомъ, отъ остальныхъ. Такой порядокъ вполнѣ согласенъ съ новѣйшими изслѣдованіями.

Предложеніе 29. Если двѣ параллельныя прямыя AB и CD, пересѣчены третьею прямою EF, то онѣ составятъ съ EF: 1) равные внутренніе перекрестные углы AGH и GHD, 2) равные внутренно-внѣшніе односторонніе углы EGB и GHD и 3) внутренніе односторонніе углы BGH и GHD, коихъ сумма равна двумъ прямымъ (фиг. 76).

Доказат. 1) Если бы углы AGH и GHD были бы не равны, напримѣръ, если бы $\angle AGH > \angle GHD$, то прибавляя къ обѣимъ частямъ неравенства уголъ BGH (акс. 4), будемъ имѣть:

$$\angle AGH + \angle BGH > \angle BGH + \angle GHD.$$

Но мы имѣемъ $\angle AGH + \angle BGH = 2d$ (пред. 13), слѣдовательно, $\angle BGH + \angle GHD < 2d$.

Изъ этого послѣдняго неравенства слѣдуетъ (акс. 11), что прямыя AB и CD встрѣтятся, что противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно углы AGH и GHD не могутъ быть неравными.

2) Такъ какъ $\angle AGH = \angle GHD$ и $\angle AGH = \angle EGB$ (пред. 15), то слѣдуетъ, что $\angle EGB = \angle GHD$.

3) Такъ какъ $\angle EGB = \angle GHD$, то прибавляя къ обѣимъ частямъ по углу BGH (акс. 2), мы будемъ имѣть:

$$\angle EGB + \angle BGH = \angle BGH + \angle GHD$$

но

$$\angle EGB + \angle BGH = 2d \text{ (пред. 13)}$$

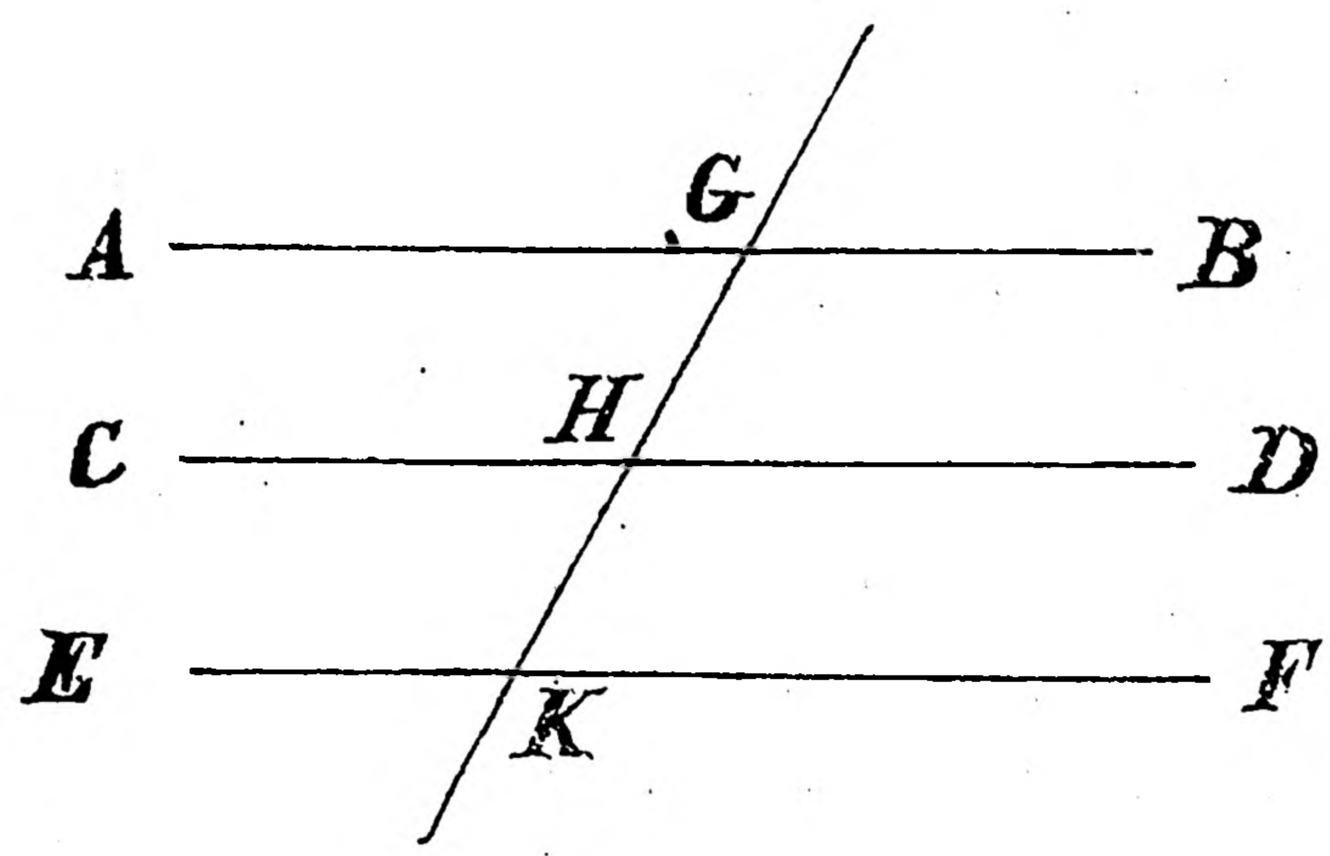
слѣдовательно:

$$\angle BGH + \angle GHD = 2d$$

Примѣч. 25. Было бы проще, изъ этого послѣдняго свойства, которое есть ничто иное какъ одиннадцатая аксіома, вывести свойства: 1 и 2.

Предложеніе 30. Двѣ прямыя AB и EF, параллельныя третьей CD, параллельны между собою (фиг. 77).

Фиг. 77.

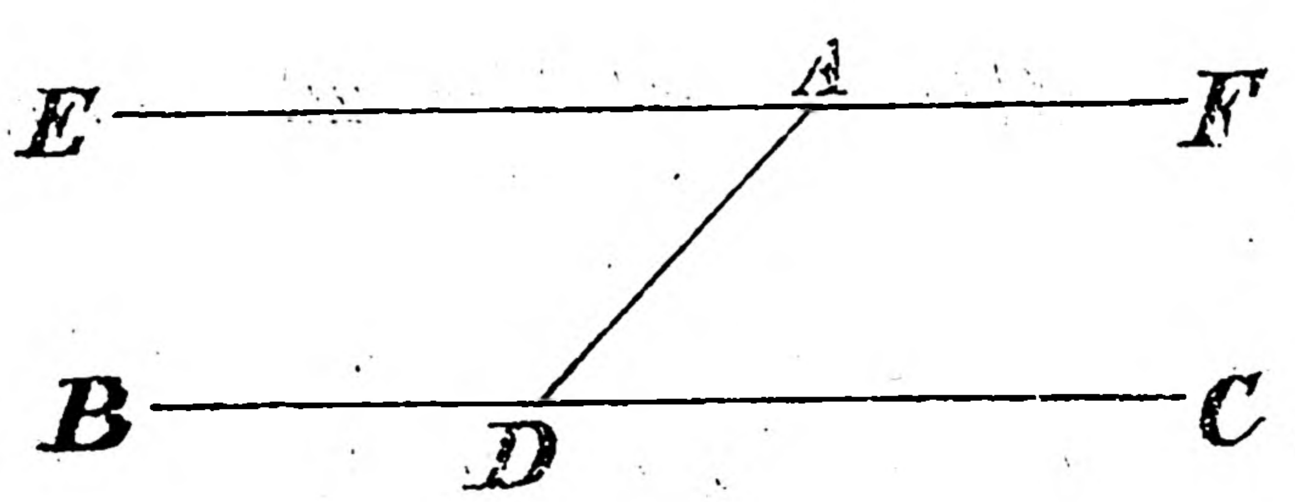


Доказат. Пересѣчемъ эти три прямыя прямою GK. Такъ какъ $AB \parallel CD$, то мы имѣемъ $\angle AGH = \angle GHD$ (пред. 29). Точно также, такъ какъ $CD \parallel EF$, то $\angle GHD = \angle HKF$, откуда $\angle AGH = \angle HKF$, слѣдовательно, AB и EF параллельны (пред. 27).

Примѣч. 26. Если прямая EF лежитъ между прямыми AB и CD, то очевидно AB и CD не могутъ встрѣтиться, не встрѣтивъ прямой EF. Если же AB и CD лежатъ по одну сторону прямой EF, то онѣ не могутъ встрѣтиться, потому что въ такомъ случаѣ, чрезъ точку ихъ встрѣчи, было бы проведено двѣ параллельныя прямыя прямой EF.

Предложеніе 31. Чрезъ данную точку A внѣ данной прямой BC провести прямую параллельную BC (фиг. 78)?

Фиг. 78.



Рѣшеніе. На прямой BC возьмемъ какую нибудь точку D и соединимъ A съ D. Построимъ уголъ $DAE = ADC$ (пред. 23) и продолжимъ EA до F. Прямая EF и будетъ параллельна BC (пред. 27).

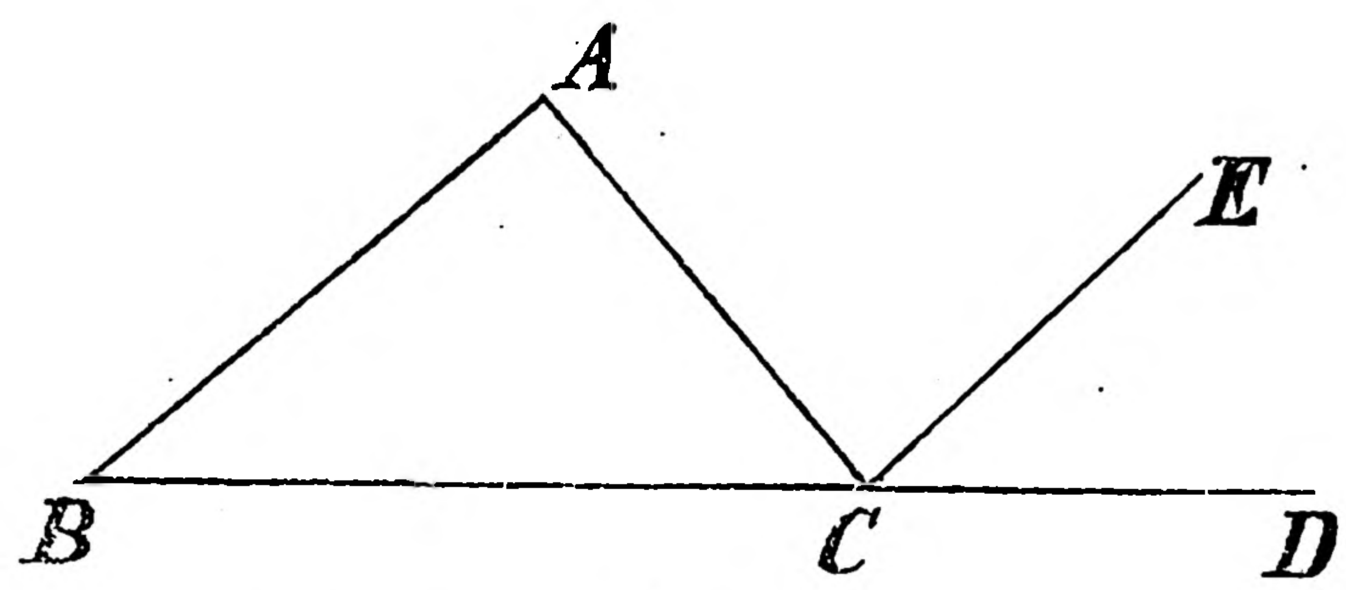
Предложеніе 32. Если въ треугольникѣ ABC продолжимъ сторону BC, то 1) внѣшній уголъ ACD будетъ равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ съ нимъ не смежныхъ BAC и ABC, 2) сумма всѣхъ трехъ внутреннихъ угловъ BAC, ABC и ACB равна двумъ прямымъ угламъ (фиг. 79).

Доказат. 1) Чрезъ точку C проведемъ прямую $CE \parallel AB$ (пред. 31). Такъ какъ параллельныя AB и CE пересѣчены прямою AC, то $\angle BAC = \angle ACE$. Тѣже параллельныя пересѣчены прямою BD, то $\angle ABC = \angle ECD$, слѣдовательно:

$$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD.$$

2) Такъ какъ $\angle BAC+\angle ABC=\angle ACD$, то прибавляя къ обѣимъ частямъ по углу ACB (акс. 2), получимъ:

Фиг. 79.



$$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=\angle ACD+\angle ACB$$

но

$$\angle ACD+\angle ACB=2d \text{ (пред. 13)}$$

откуда:

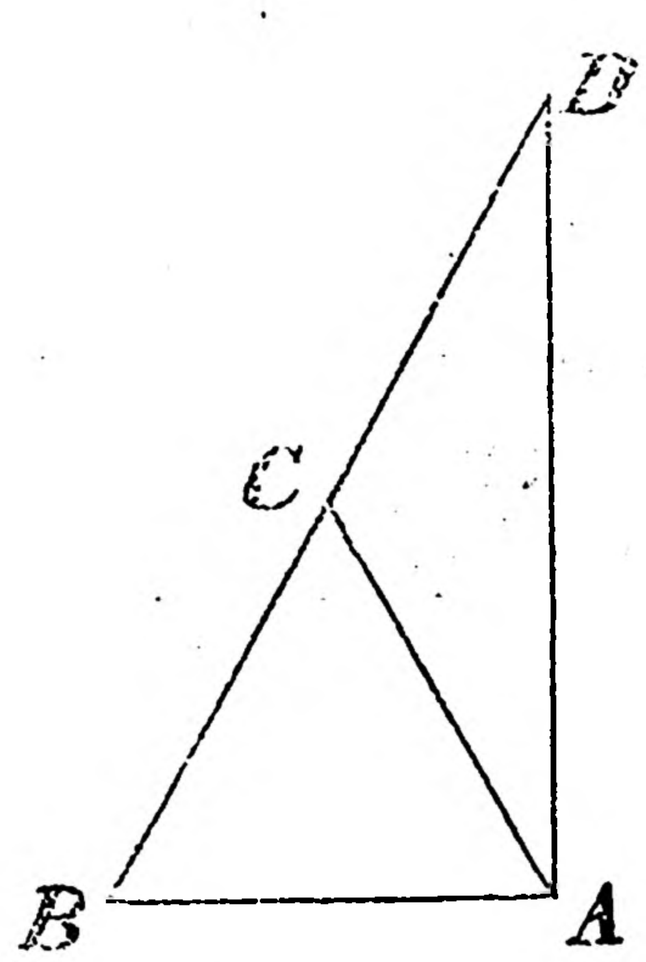
$$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=2d.$$

Примѣч. 27. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если два треугольника имѣютъ по два равныхъ угла, каждый каждому, то и третій уголъ, одного треугольника, будетъ равенъ третьему углу другаго треугольника. Треугольники могутъ имѣть только одинъ уголъ прямой или тупой. На основаніи пред. 32 можно рѣшить слѣдующую задачу.

Предложеніе. Изъ конца A данной прямой AB, не продолжая ее, возставить къ ней перпендикуляръ (фиг. 80)?

Рѣшеніе. На прямой AB построимъ равносторонній треугольникъ ABC, продолжимъ сторону BC, такъ чтобы $CB=CD$. Соединимъ D съ A, AD и будетъ искомый перпендикуляръ.

Фиг. 80.



Въ самомъ дѣлѣ, уголъ $CAD=CDA$, и уголъ $CAB=CBA$ (пред. 5). Откуда уголъ $BAD=ABD+BDA$ (акс. 2). Слѣдовательно, уголъ BAD прямой (пред. 32).

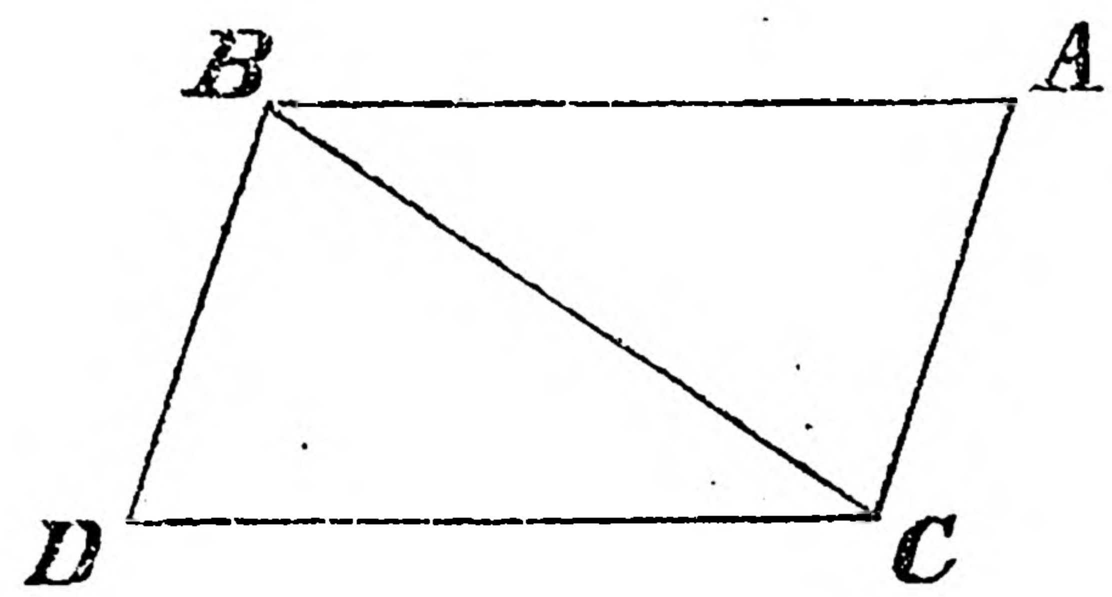
Замѣчу еще, что послѣ пред. 32, второй случай равенства треугольниковъ въ пред. 26, сводится непосредственно на первый.

Всѣ случаи равенства прямоугольныхъ треугольниковъ, которые у насъ излагаются отдѣльно, заключаются въ предложеніяхъ Евклида.

Предложеніе 33. Если концы, направленныхъ въ одну сторону, равныхъ и параллельныхъ прямыхъ AB и CD, соединимъ прямыми AC и BD, то AC и BD будутъ равны и параллельны (фиг. 81).

Доказат. Соединимъ B съ C прямою BC. Такъ какъ $AB \parallel CD$, то уголъ $ABC = BCD$ (пред. 29), но $AB = CD$, а сторона BC общая треугольникамъ ABC и DBC, слѣдовательно, и $AC = BD$ (пред. 4). Такъ какъ уголъ $ACB = CBD$, то $AC \parallel BD$ (пред. 27).

Фиг. 81.



Предложенiе 34. Во всякомъ параллелограмѣ $ABCD$, какъ противоположныя стороны, такъ и противоположные углы равны, и параллелограмъ дiагональю BC дѣлится пополамъ (фиг. 81).

Доказат. 1) Такъ какъ $AB \parallel CD$, то уголъ $ABC = BCD$ и уголъ $ACB = CBD$. Въ треугольникахъ ABC и BDC, сторона BC общая, слѣдовательно, $AB = CD$, $AC = BD$ и $\angle BAC = \angle BDC$ (пред. 26). Мы имѣемъ также $\angle ABC = \angle BCD$ и $\angle CBD = \angle ACB$, складывая эти равенства получимъ (акс. 2):

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle BCD + \angle ACB$$

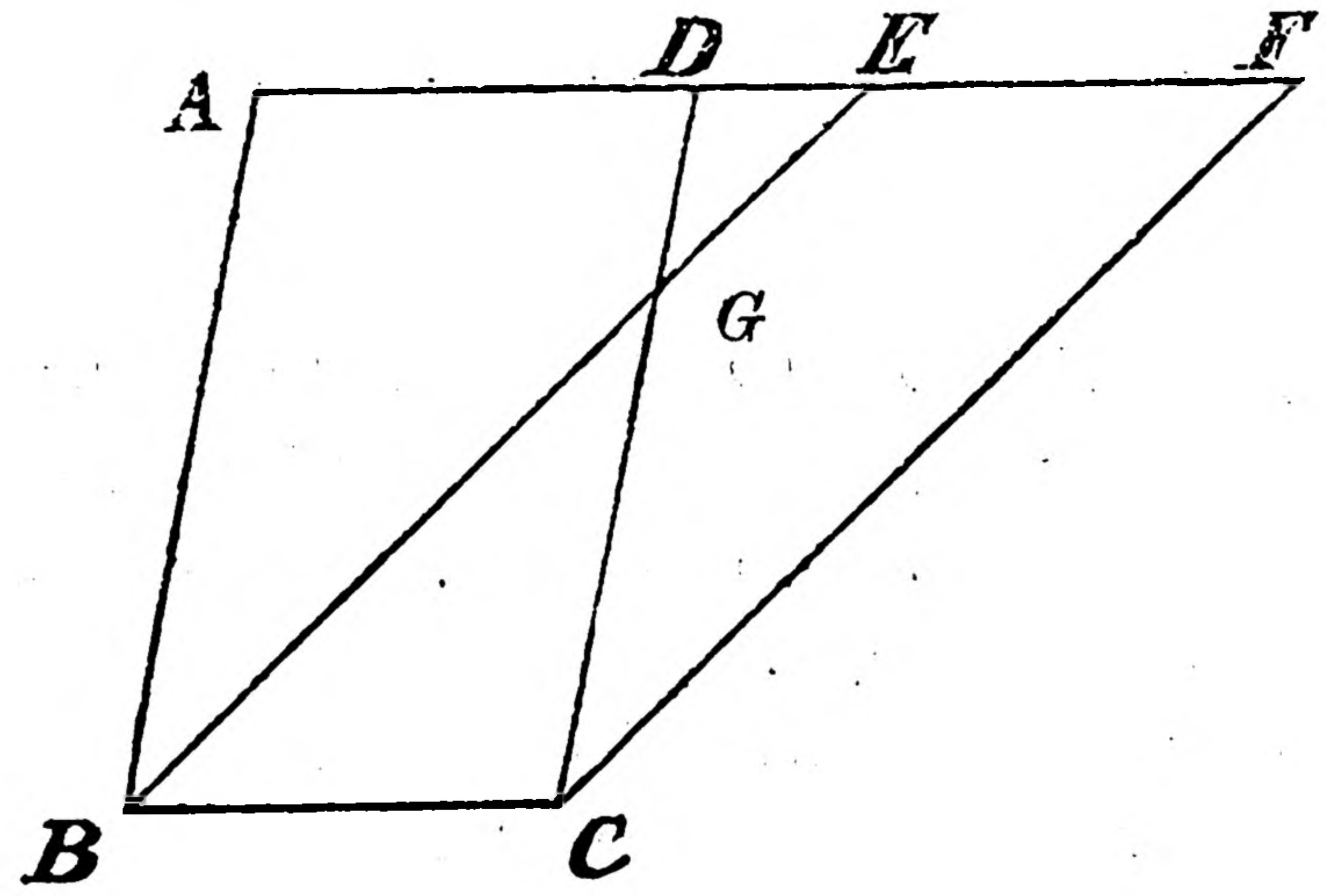
или

$$\angle ABD = \angle ACD.$$

2) Такъ какъ $AB = CD$ и BC есть общая, $\angle ABC = \angle BCD$, то $\triangle ABC = \triangle CBD$ (пред. 4).

Предложенiе 35. Два параллелограма $ABCD$ и $EBCF$, построенные на одномъ основанiи BC и лежащiе между параллельными прямыми AF и BC, равны между собою (фиг. 82).

Фиг. 82.



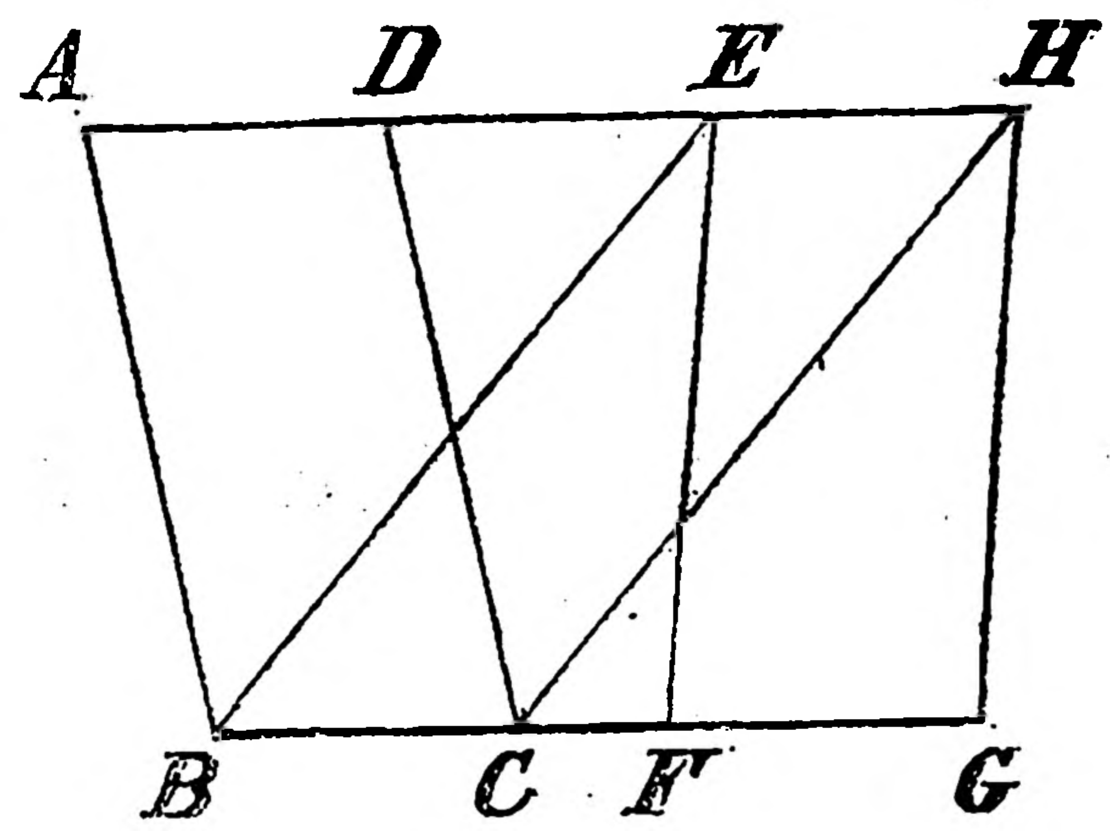
Доказат. Такъ какъ $BC = AD$ и $BC = EF$ (пред. 34), то $AD = EF$ (акс. 1). Прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого равенства по DE, то получимъ $AE = DF$ (акс. 2). Но $AB = DC$ (пред. 34) и

$\angle FAB = \angle FDC$ (пред. 29), слѣдовательно $\triangle ABE = \triangle CDF$, отнимая отъ обѣихъ частей по $\triangle EDG$ (акс. 3), найдемъ, что трапеція $ABGD = EGCF$, прибавляя по $\triangle GCB$, найдемъ наконецъ, что параллелограммы $ABCD = EBCF$ равны.

Примѣч. 28. Надобно замѣтить, что здѣсь слово *равны* употребляется Евклидомъ въ смыслѣ слова *равномѣрны.*

Предложеніе 36. Два параллелограма $ABCD$ и $EFGH$, построенные на равныхъ основаніяхъ BC и FG и лежащіе между параллельными прямими AH и BG, равны между собою (фиг. 83).

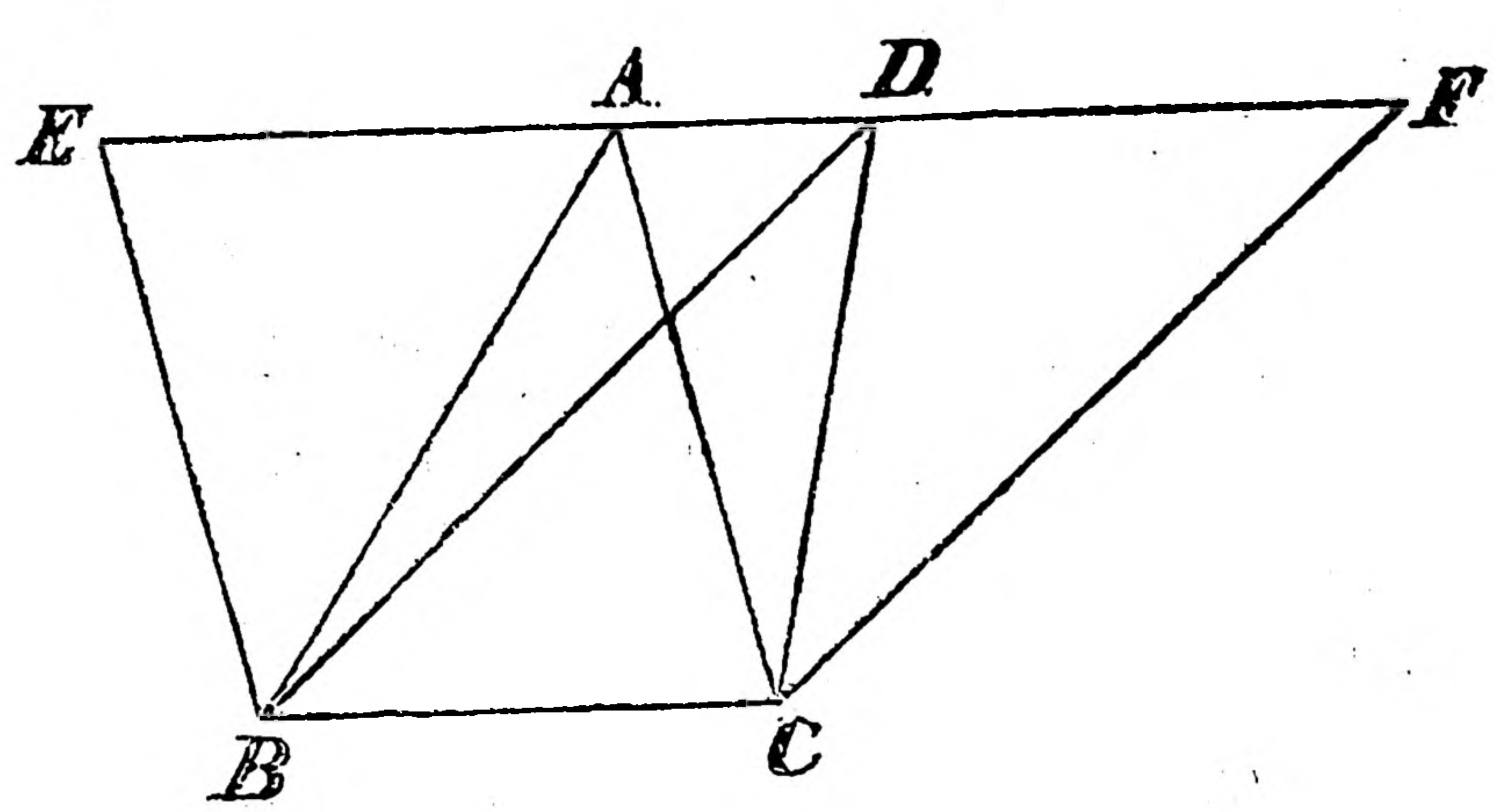
Фиг. 83.



Доказат. Соединимъ B съ E и C съ H. Такъ какъ $BC = FG$ и $FG = EH$ (пред. 34), то $BC = EH$ (акс. 1). Но $BC \parallel EH$, слѣдовательно, $EB = CH$ (пред. 33) и $EB \parallel CH$. Откуда $EBCH$ есть параллелограмъ, который равенъ параллелограму $ABCD$ и параллелограму $EFGH$ (пред. 35), слѣдовательно, параллелограмъ $ABCD = EFGH$.

Предложеніе 37. Два треугольника ABC и DBC, построенные на одномъ основаніи BC и лежащіе между параллельными AD и BC, равны между собою (фиг. 84).

Фиг. 84.

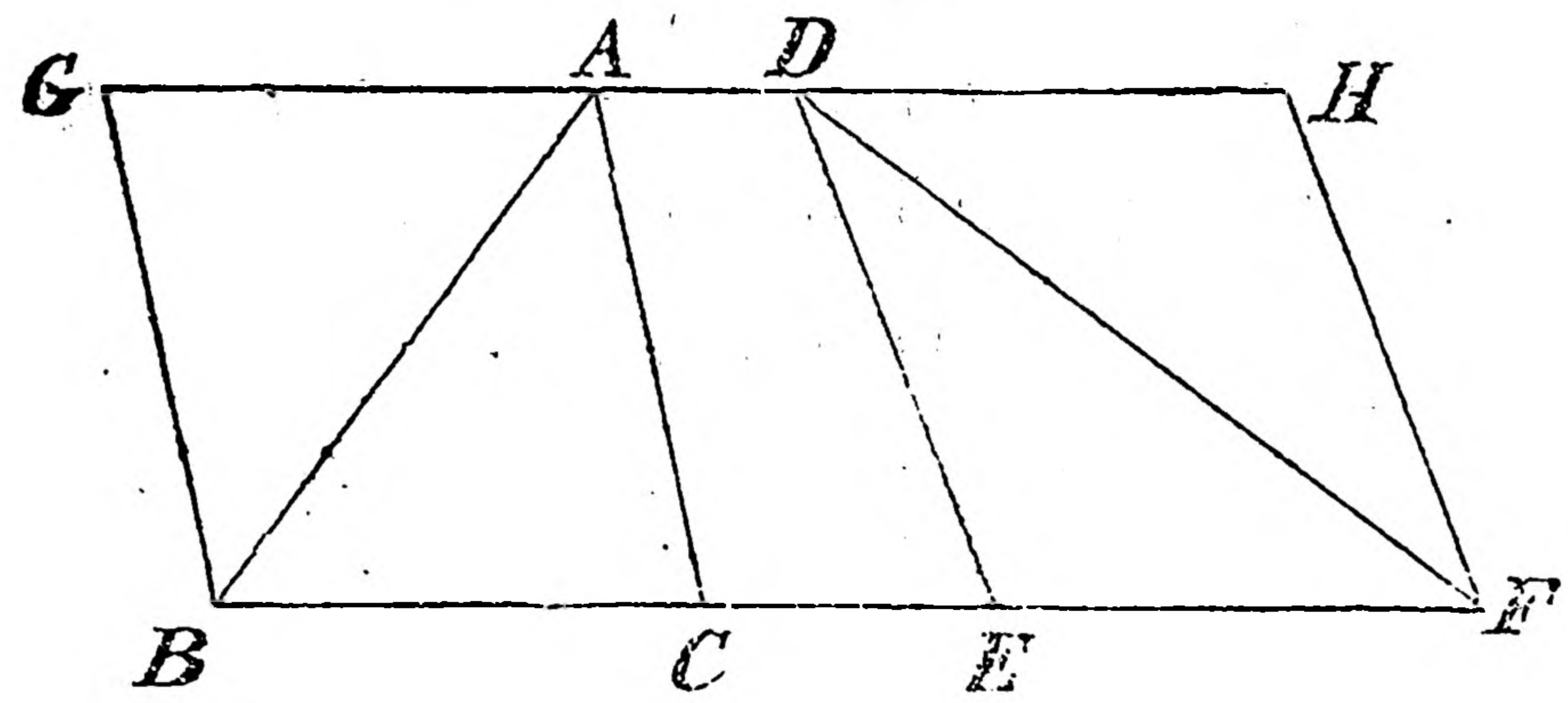


Доказат. Продолжимъ AD въ обѣ стороны и чрезъ точки B и C проведемъ $BE \parallel AC$ и $CF \parallel BD$ (пред. 31), то получимъ равные параллелограмы

EBCA и *DBCF* (пред. 35). Но какъ треугольники *ABC* и *DBC* составляютъ половины этихъ параллелограмовъ, то они равны (пред. 34).

Предложеніе 38. Треугольники *ABC* и *DEF*, построенные на равныхъ основаніяхъ *BC* и *EF* и лежащіе между параллельными линіями *AD* и *BF*, равны между собою (фиг. 85).

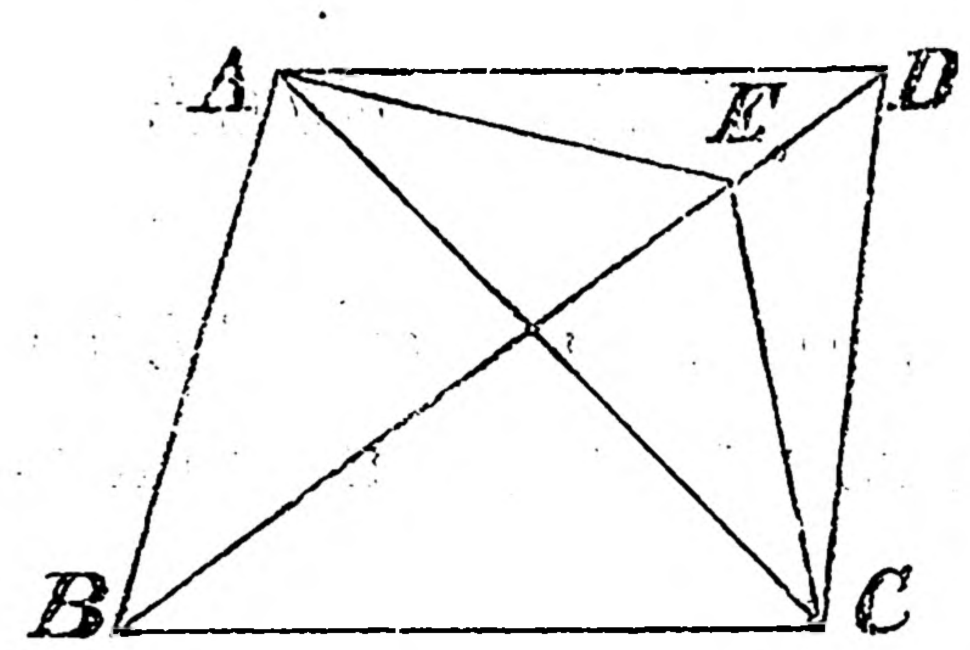
Фиг. 85.



Доказат. Продолжимъ *AD* въ обѣ стороны и чрезъ точки *B* и *F* проведемъ *BG* || *AC* и *FH* || *ED* (пред. 31), то получимъ равные параллелограмы *GBCA* и *DEFH* (пред. 36). Но треугольники *ABC* и *DEF*, составляютъ половины этихъ параллелограмовъ (пред. 34), слѣдовательно они равны.

Предложеніе 39. Если два равные треугольника *ABC* и *DBC* лежатъ на одномъ основаніи *BC*, то ихъ вершины лежатъ на одной прямой *AD*, параллельной основанію *BC* (фиг. 86).

Фиг. 86.

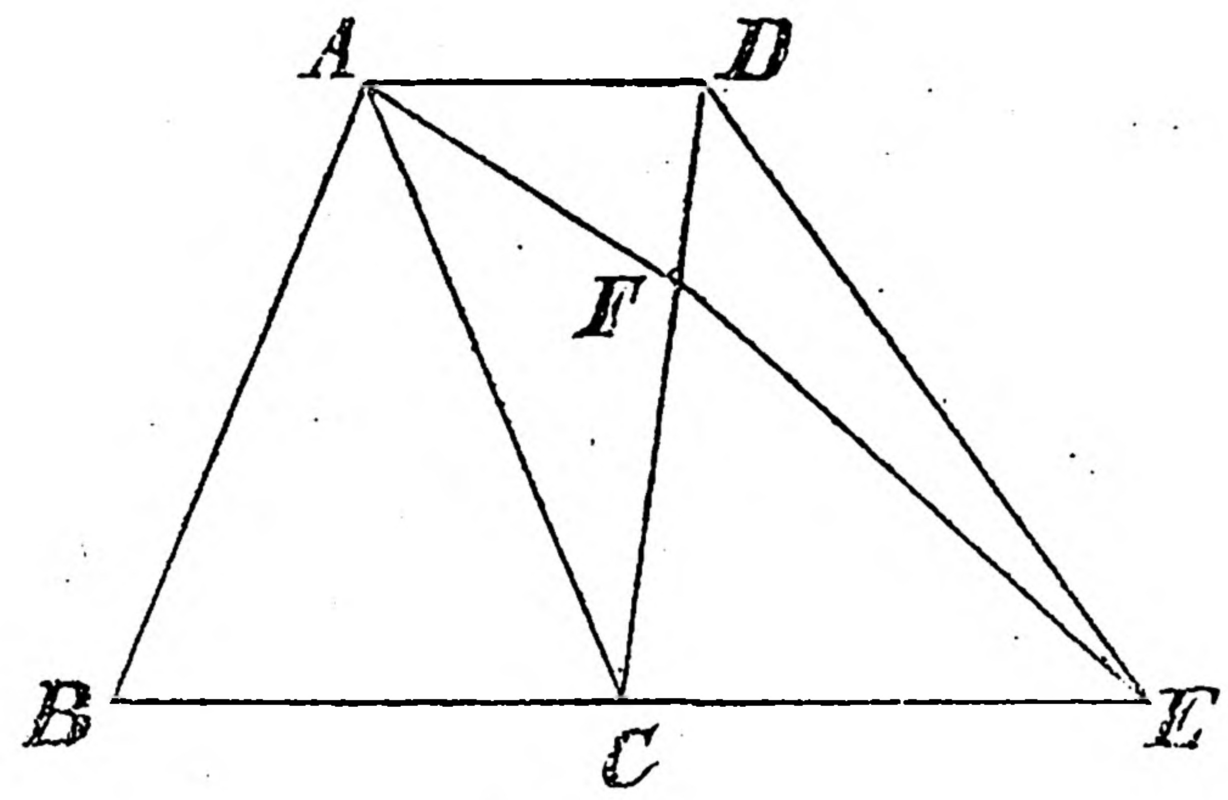


Доказат. **Если прямая** ***AD***, **проведенная чрезъ вершины** ***A*** **и** ***D*** **треугольниковъ** ***ABC*** **и** ***DBC***, **не параллельна основанію** ***BC***, то есть другая прямая *AE* || *BC*. Соединимъ *E* съ *C*, то $\triangle ABC = \triangle EBC$ (пред. 38). Но $\triangle ABC = \triangle DBC$, слѣдовательно $\triangle DBC = \triangle EBC$, что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно *AE* не есть прямая, параллельная *BC*, и на томъ же основаніи никакая другая, исключая *AD*, не будетъ параллельна *BC*. Слѣдовательно *AD* || *BC*.

Предложеніе 40. Если два равные треугольника *ABC* и *DCE* имѣютъ равныя основанія *BC* и *CE*, лежащія на одной прямой *BE*, то вершины этихъ треугольниковъ лежатъ на одной прямой *AD*, параллельной основанію *BE* (фиг. 87).

Доказат. Если бы прямая AD, соединяющая вершины треугольниковъ, не была параллельна основанію BE, то есть другая прямая $AF \parallel BE$.

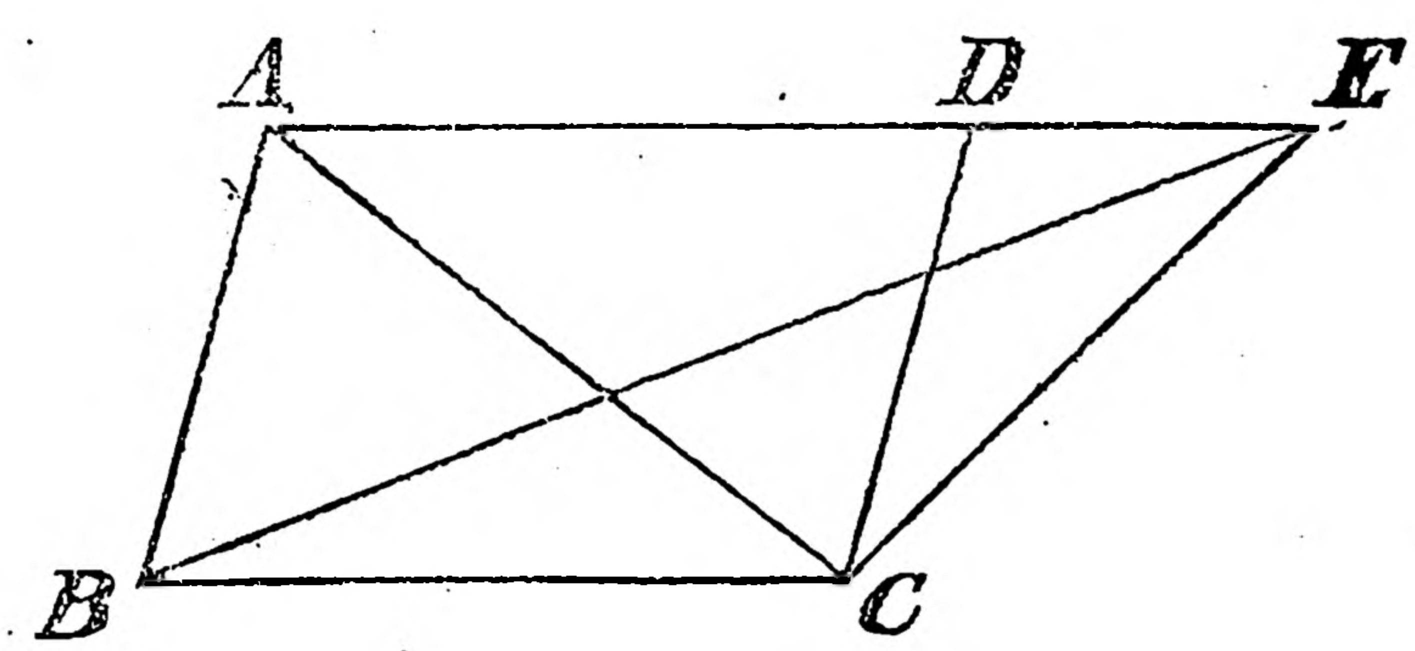
Фиг. 87.



Соединимъ точки F и E, то $\triangle ABC = \triangle FCE$ (пред. 38). Но $\triangle ABC = \triangle DCE$, слѣдовательно $\triangle DCE = \triangle FCE$, что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно AF не есть прямая, параллельная BE, и по той же причинѣ, кромѣ AD, никакая другая прямая не можетъ быть параллельна BE.

Предложеніе 41. Если параллелограмъ $ABCD$ и треугольникъ EBC построены на одномъ основаніи BC, а вершина E треугольника EBC лежитъ на прямой AD, то треугольникъ составляетъ половину параллелограма (фиг. 88).

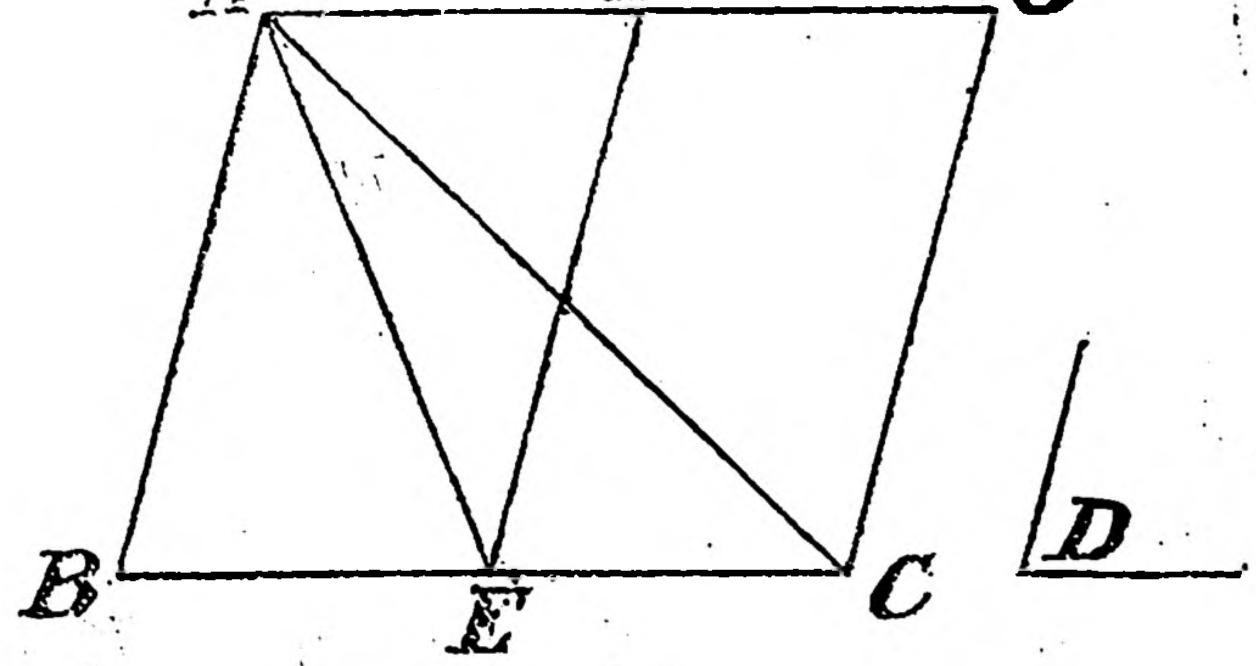
Фиг. 88.



Доказат. Соединимъ A съ C, то $\triangle ABC = \triangle EBC$ (пред. 37), но $\triangle ABC = \frac{1}{2}\, ABCD$ (пред. 34), слѣдовательно и $\triangle EBC = \frac{1}{2}\, ABCD$.

Предложеніе 42. Построить параллелограмъ, равный данному треугольнику ABC, котораго бы стороны были наклонены подъ даннымъ угломъ D (фиг. 89)?

Фиг. 89.

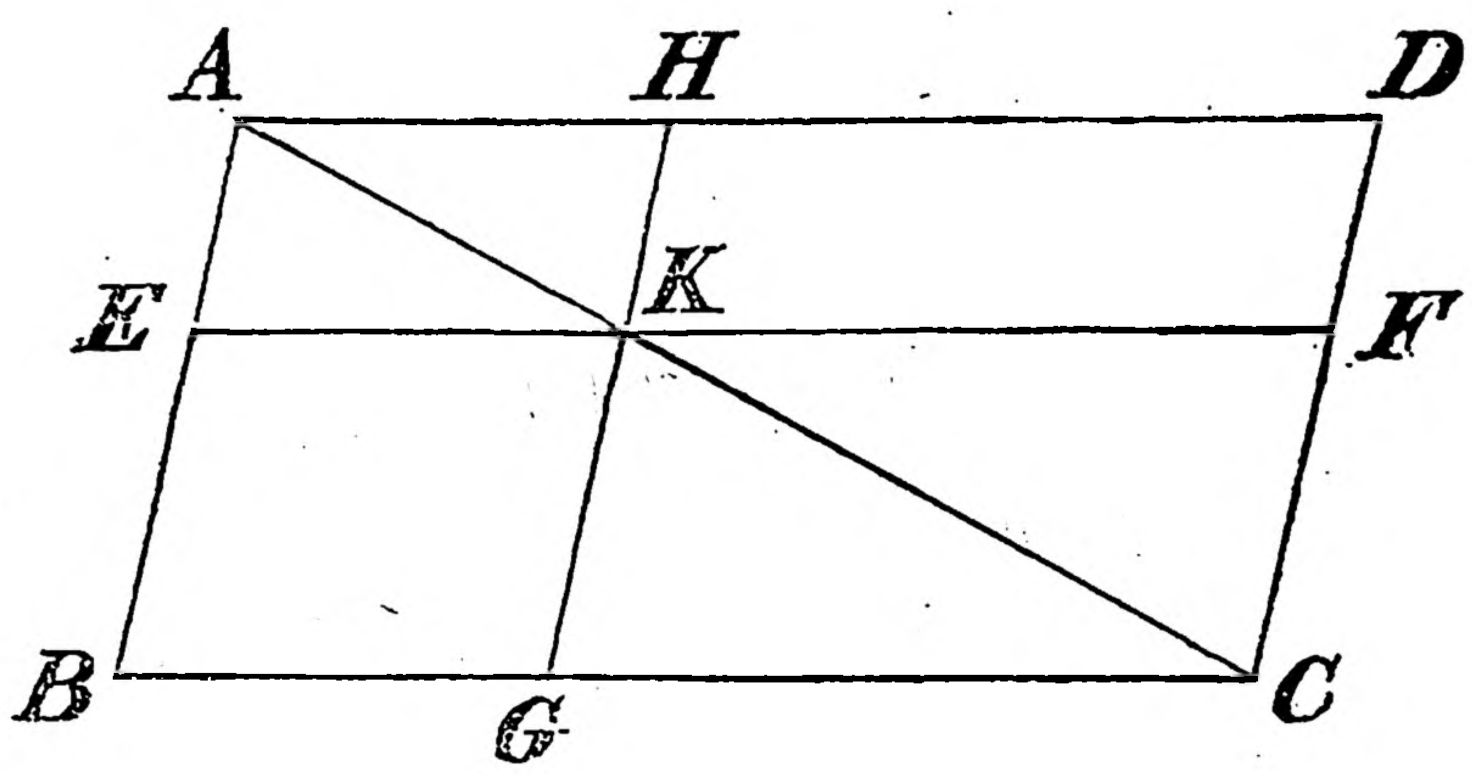


Рѣшеніе. Раздѣлимъ основаніе BC пополамъ въ точкѣ E (пред. 10).

Въ точкѣ E на прямой EC построимъ $\angle CEF = \angle D$ (пред. 23). Чрезъ точку C проведемъ $CG \parallel EF$ (пред. 31) и продолжимъ прямыя EF и CG до встрѣчи съ прямою $AG \parallel BC$. Параллелограмъ $FECG = 2\triangle AEC = \triangle ABC$ (пред. 41, 37).

Предложеніе 43. Во всякомъ параллелограмѣ $ABCD$ дополненія BK и KD параллелограмовъ $AEKH$ и $KGCF$, построенныхъ на діагонали AC, равны (фиг. 90).

Фиг. 90.

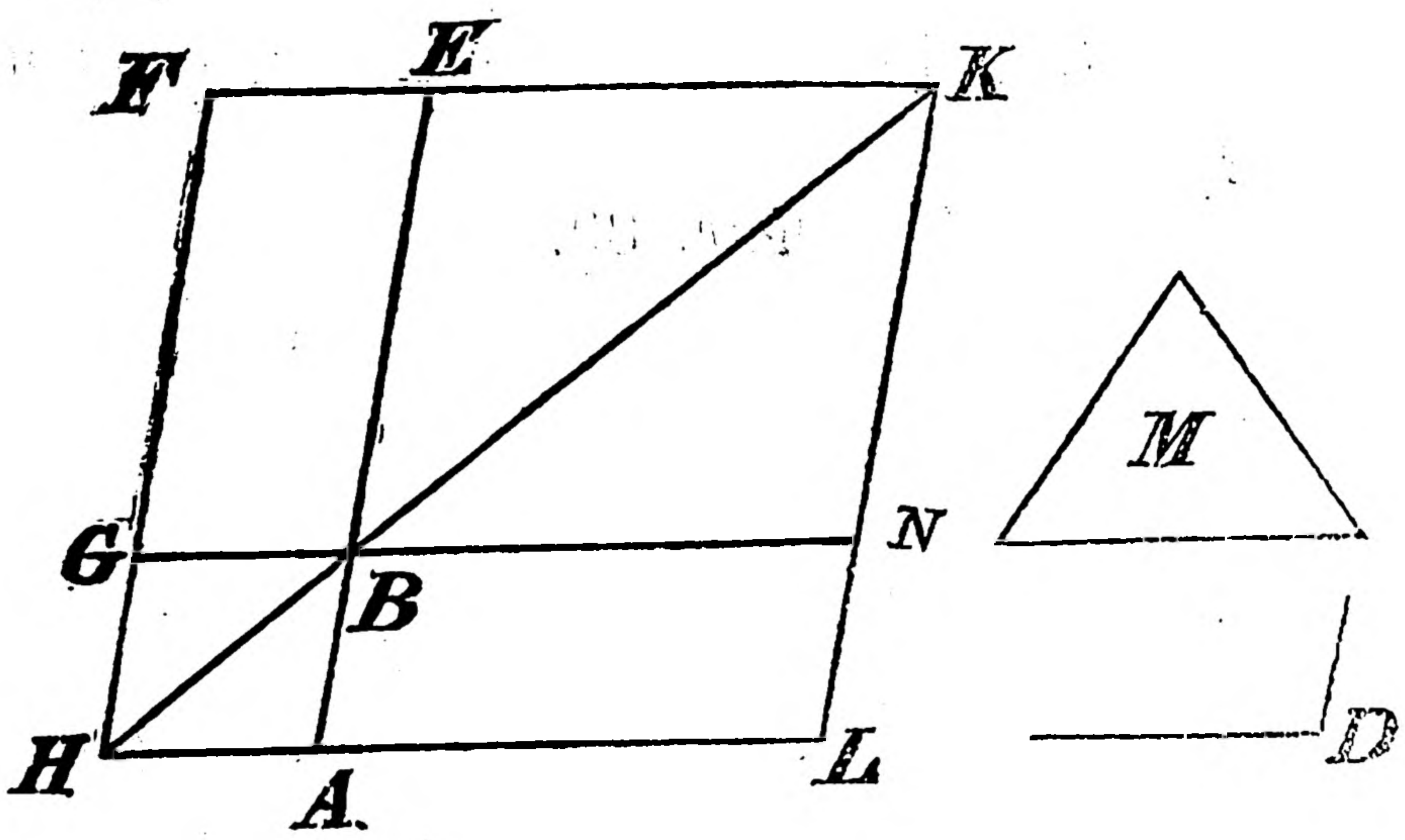


Доказат. Такъ какъ $\triangle ABC = \triangle CAD$ и $\triangle AEK = \triangle AHK$ (пред. 34), то $EKCB = KHDC$ (акс. 3). Точно также $\triangle KGC = \triangle KCF$ (пред. 34), слѣдовательно (акс. 3) $BEKG = KHDF$.

Предложеніе 44. На данной прямой AB построить параллелограмъ, равный данному треугольнику M и который бы имѣлъ уголъ, равный данному углу D (фиг. 91)?

Рѣшеніе. Построимъ параллелограмъ $BEFG$, равный данному треугольнику M и имѣющій $\angle EBG = \angle D$; расположимъ этотъ параллелограмъ такимъ образомъ, чтобы его основаніе BE и прямая AB составляла одну прямую AE. Чрезъ точку A проведемъ $AH \parallel EF$, продолжимъ FG до H и проведемъ HB. Такъ какъ $\angle AHF + \angle EFH = 2d$ (пред. 29), то $\angle BHF + EFH < 2d$, слѣдовательно, HB и FE встрѣтятся (акс. 11), по-

Фиг. 91.

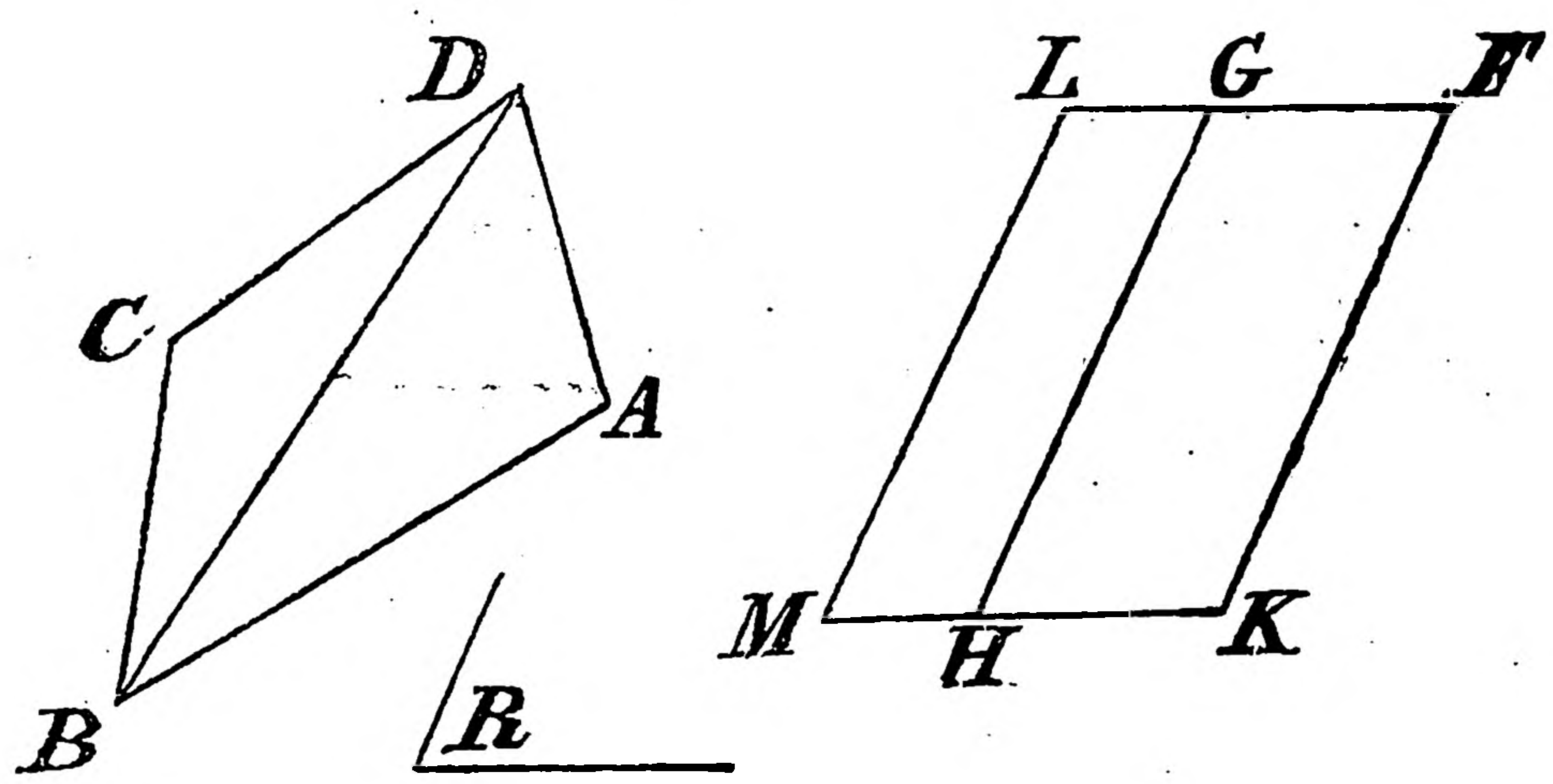


ложимъ, въ точкѣ K. Чрезъ точку K проведемъ $KL \parallel FH$ и продолжимъ HA и GB до встрѣчи съ KL въ точкахъ L и N. $ABNL$ будетъ требуемый параллелограмъ. Въ самомъ дѣлѣ, $HLKF$ есть параллелограмъ, коего діагональ есть HK, слѣдовательно параллелограмъ $BL = BF$ (пред. 43). Но $BF = \triangle M$ и $\angle GBE = \angle D$, слѣдовательно $LB = \triangle M$ и $\angle ABN = \angle GBE = \angle D$.

Предложеніе 45. Построить параллелограмъ, равный данной прямолинейной фигурѣ $ABCD$ и имѣющій уголъ, равный данному углу R (фиг. 92)?

Рѣшеніе. Соединимъ прямою точки D и B. Построимъ параллелограмъ $FH = \triangle ABD$ и имѣющій уголъ $\angle FKH = \angle R$ (пред. 42). На GH построимъ параллелограмъ $GM = \triangle DBC$ и имѣющій уголъ $GHM = R$; $KFLM$ и будетъ искомый параллелограмъ.

Фиг. 92.



Въ самомъ дѣлѣ, $\angle GHM = \angle R = \angle FKH$, прибавляя по углу GHK получимъ:

$$\angle GHM + \angle GHK = \angle FKH + \angle GHK = 2d \text{ (пред. 29).}$$

Слѣдовательно прямыя HK и HM лежатъ на одной прямой (пред. 14). $FG \parallel KH$, слѣдовательно $\angle FGH = \angle GHM$, откуда:

$$\angle FGH + \angle LGH = \angle GHM + \angle LGH = 2d \text{ (пред. 29).}$$

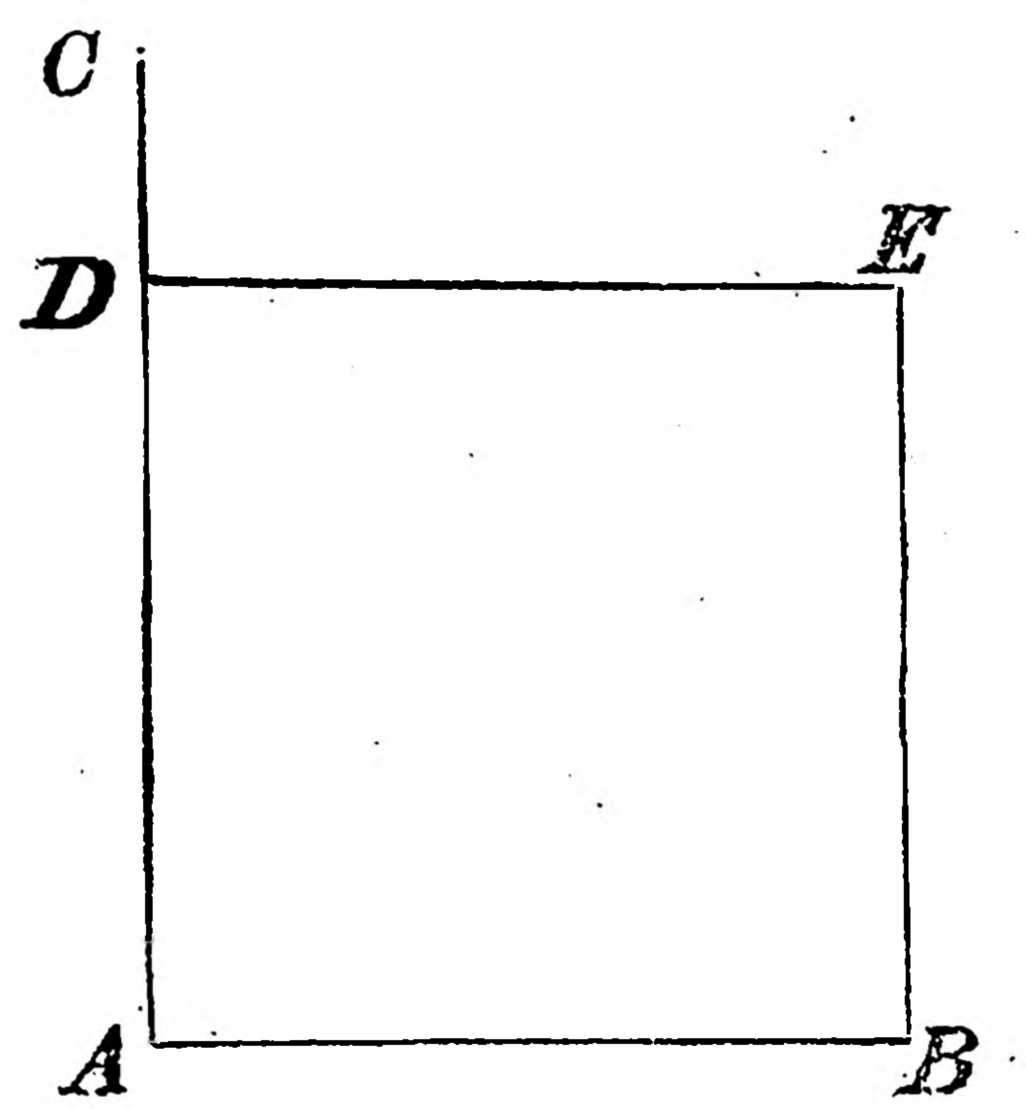
Слѣдовательно FG и GL лежатъ также на одной прямой (пред. 14). Такъ какъ $FK \parallel GH$ и $GH \parallel LM$, то $FK \parallel LM$. Такъ какъ $FK = GH$, $GH = LM$, то $FK = LM$ (пред. 34). Откуда $FL = KM$ и $FL \parallel KM$. Слѣдовательно фигура $KFLM$ есть параллелограмъ, коего уголъ $\angle FKM = \angle R$. Но $FH = \triangle ABD$ и $GM = \triangle DBC$, слѣдовательно, $KFLM = ABCD$.

Предложеніе 46. На данной прямой AB построить квадратъ (фиг. 93)?

Рѣшеніе. Изъ точки A возставимъ перпендикуляръ AC къ AB (пред. 11). Отложимъ на немъ $AD = AB$. Чрезъ точку D проведемъ $DE \parallel AB$, а чрезъ точку B проведемъ $BE \parallel AD$. Полученная фигура $ADEB$ будетъ искомый квадратъ.

Въ самомъ дѣлѣ, $ADEB$ есть параллелограмъ, слѣдовательно противоположныя стороны равны (пред. 34). Но $AB=AD$, слѣдовательно построенный параллелограмъ $ADEB$ равносторонній.

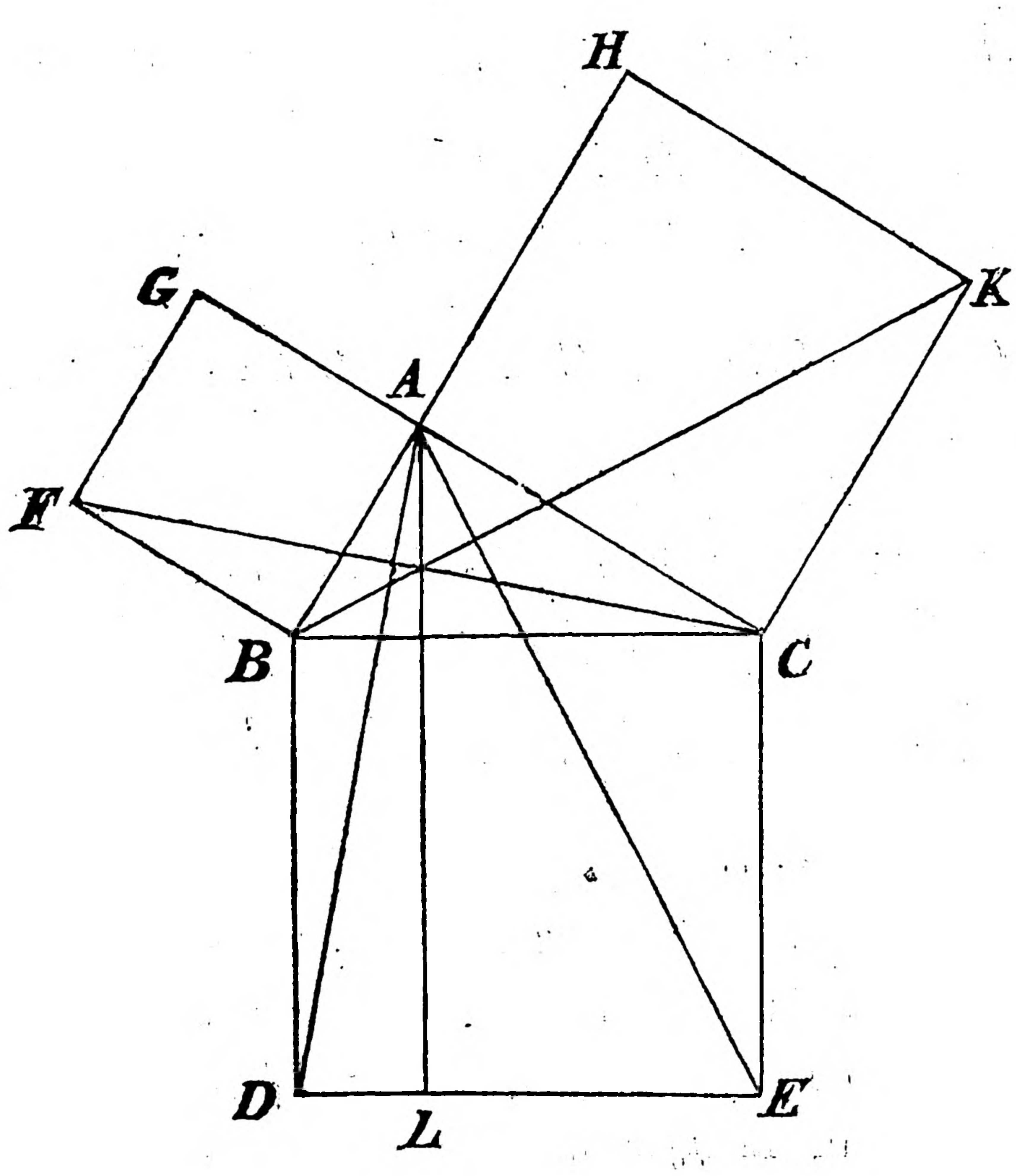
Фиг. 93.



Такъ какъ $AB \parallel DE$, то $\angle A + \angle D = 2d$ (пред. 29), но $\angle A = d$, слѣдовательно и $\angle D = d$. Въ параллелограмѣ противоположные углы равны, слѣдовательно, параллелограмъ $ADEB$ прямоугольный; но онъ и равносторонній, слѣдовательно $ADEB$ есть квадратъ (опред. 30).

Предложеніе 47. Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей прямому углу (на гипотенузѣ), равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ, заключающихъ прямой уголъ (на катетахъ) (фиг. 94).

Фиг. 94.



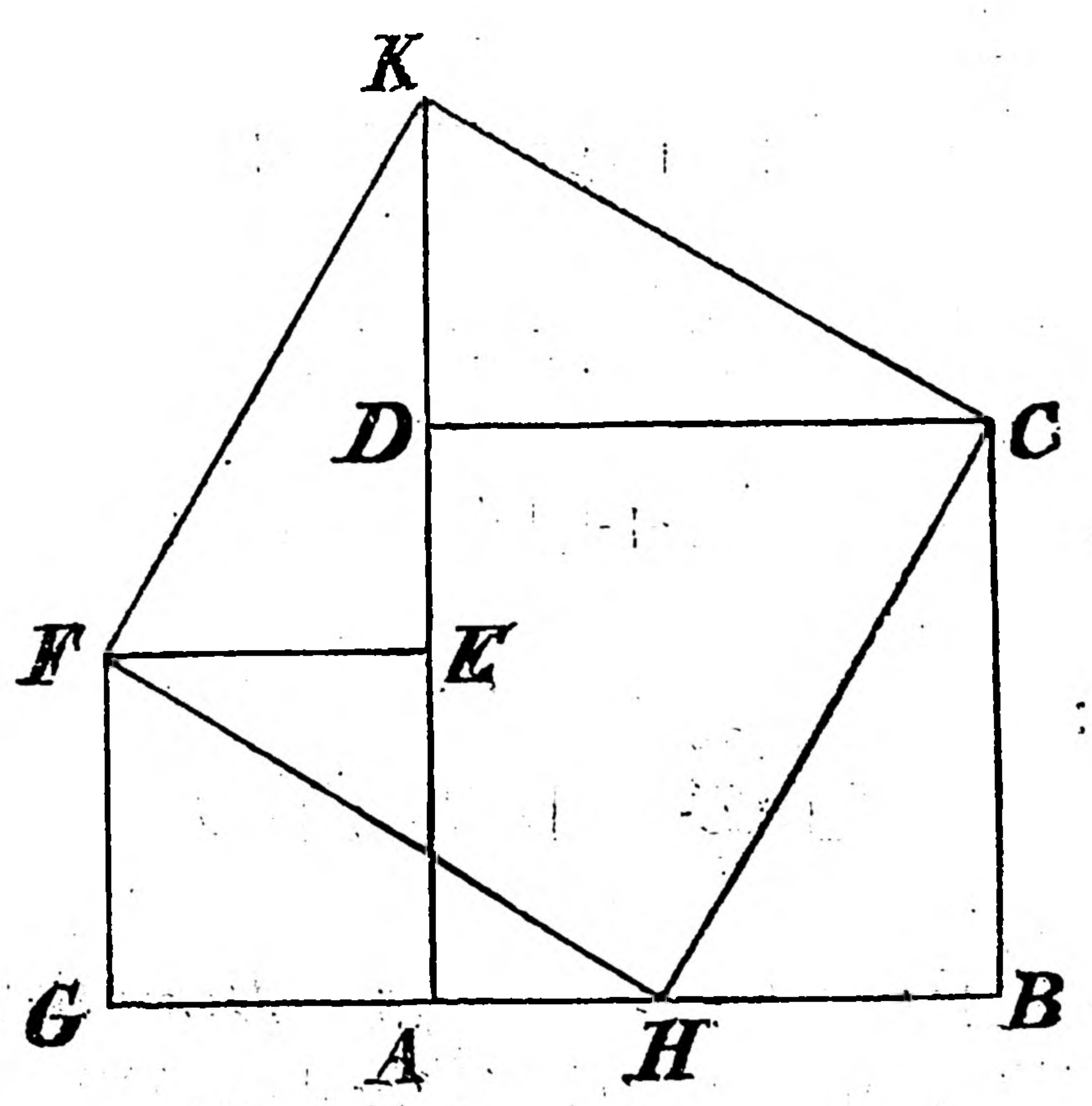
Доказат. Пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ уголъ A прямой. На сторонахъ BC, AB и AC построимъ квадраты BE, BG и AK (пред. 46). Углы BAC, BAG, HAC прямые, слѣдовательно, прямыя AC и AG, BA и AH находятся первыя двѣ на одной прямой CG, а вторыя на прямой BH (пред. 14). Соединимъ A съ D и F съ C и чрезъ точку A проведемъ прямую $AL \parallel BD$ (пред. 31). Такъ какъ $\angle DBC = \angle FBA$ (акс. 10), то прибавляя къ обѣимъ частямъ по $\angle CBA$, получимъ $\angle DBA = \angle FBC$ (акс. 2). Но $AB = BF$, $BC = BD$, слѣдовательно, $\triangle ABD = \triangle FBC$ (пред. 4). Замѣтивъ теперь, что $BD \parallel AL$, $BF \parallel GC$, мы имѣемъ: $BL = 2\triangle ABD$ и $GB = 2\triangle FBC$ (пред. 41). Но $\triangle ABD = \triangle FBC$, слѣдовательно, четыреугольникъ BL равенъ квадрату BG (акс. 6). Точно также можно показать, что четыреугольникъ LC равенъ квадрату CH. Откуда (акс. 2):

$$\square BC = \square AB + \square AC.$$

Примѣч. 29. Преданіе приписываетъ открытіе этой важной теоремы Пиѳагору. Этому знаменитому предложенію было дано много доказательствъ, изъ которыхъ самое интересное есть слѣдующее:

Пусть $ABCD$ и $AEFG$ будутъ два какіе нибудь квадрата, такъ расположенные, чтобы ихъ основанія AB и AG лежали на одной прямой линіи BG (фиг. 95).

Фиг. 95.



Возьмемъ отрѣзки GH и EK, оба равные AB, и соединимъ H съ C, C съ K, K съ F и F съ H.

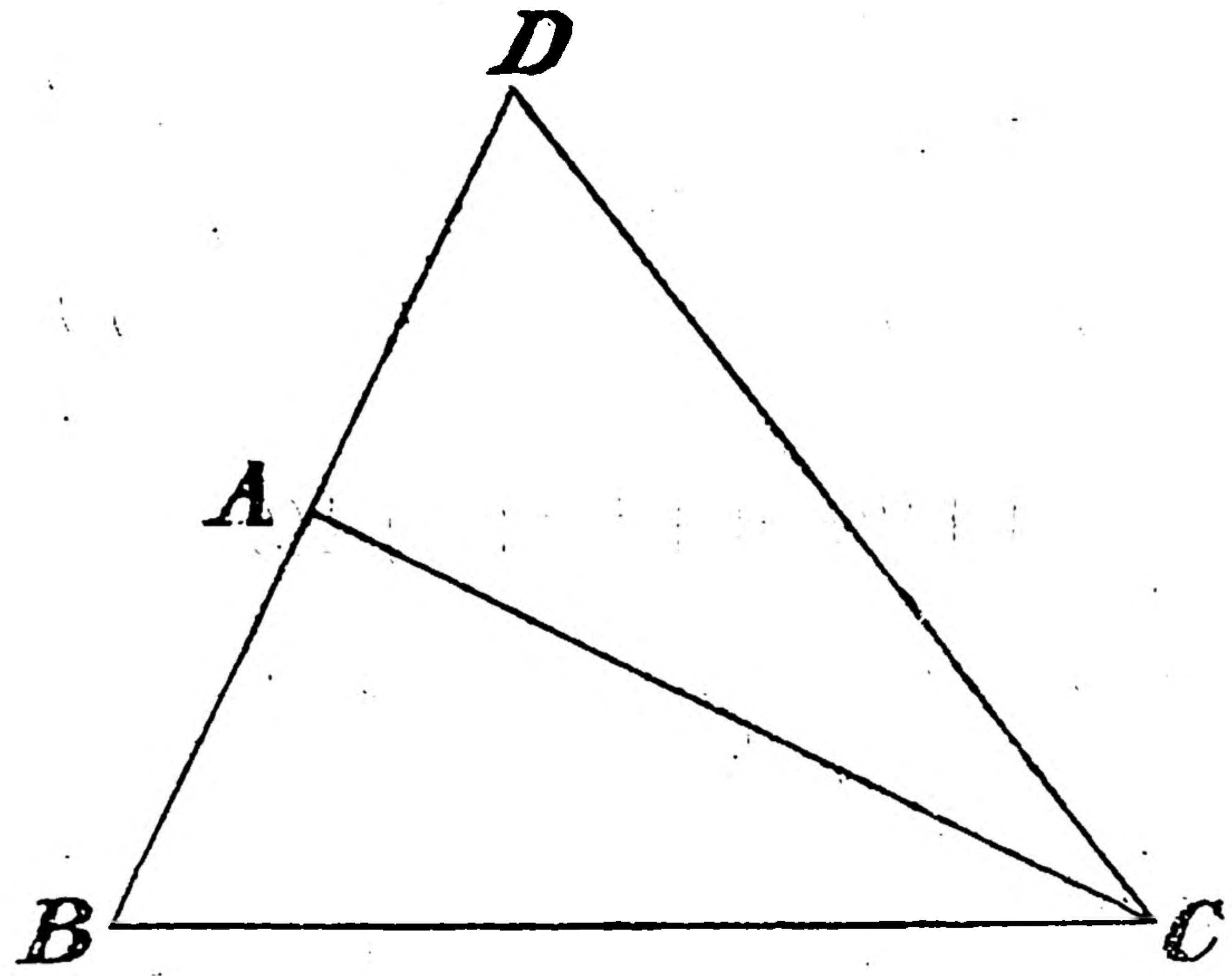
Легко доказать, что $\triangle HBC = \triangle FEK$ и $\triangle KDC = \triangle FGH$. Слѣдовательно, два данные квадрата равны фигурѣ $CKFH$. Легко также показать, что фигура $CKFH$ есть квадратъ (пред. 32). Сторона CH этого квадрата есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, коего другія стороны (катеты) BC и BH равны сторонамъ двухъ данныхъ квадратовъ. Это доказательство не требуетъ предложеній Евклида, слѣдующихъ за 32-мъ. Изъ него можно еще видѣть, какъ можно разрѣзать два квадрата, чтобы изъ полученныхъ частей составить одинъ третій квадратъ.

Большое число доказательствъ предложенія Пиѳагора собралъ Гоффманъ въ сочиненіи: Der Pythagorische Lehrsatz . . . . . Mainz, 1821.

Предложеніе 48. Если въ какомъ нибудь треугольникѣ ABC, квадратъ одной изъ его сторонъ BC равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ его сторонъ AB и AC, то уголъ BAC треугольника, заключающійся между этими послѣдними сторонами, есть прямой (фиг. 96).

Доказат. Изъ точки A возставимъ перпендикуляръ AD къ AC, сдѣлаемъ $AD=AB$ и соединимъ D съ C.

Фиг. 96.



Квадратъ, построенный на AB, равенъ квадрату, построенному на AD, т. е. $\square AB=\square AD$. Если къ обѣимъ частямъ прибавимъ по $\square AC$, то получимъ:

$$\square AB+\square AC=\square AD+\square AC.$$

Но треугольникъ DAC прямоугольный, слѣдовательно (пред. 47):

$$\square AD+\square AC=\square DC.$$

Но по условію:

$$\square AB+\square AC=\square BC$$

Слѣдовательно $\square DC=\square BC$, откуда $DC=BC$. Разсматривая треугольники ABC и ADC, мы имѣемъ $AB=AD$, $BC=DC$, AC есть сторона общая, слѣдовательно (пред. 8) треугольники равны и въ остальныхъ частяхъ, т. е. $\angle DAC=\angle BAC$, но уголъ DAC прямой, слѣдовательно и уголъ BAC также прямой.

КНИГА II.

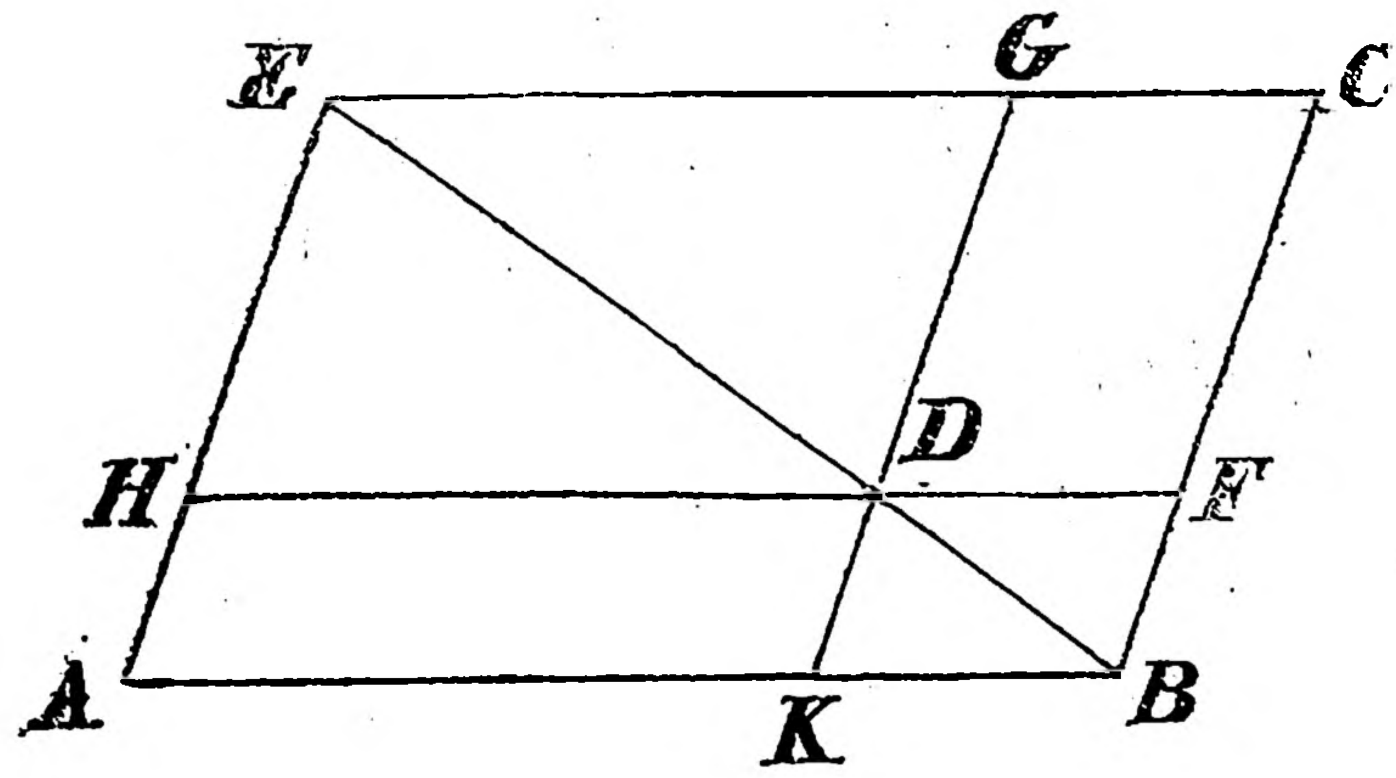
Опредѣленія.

1. О всякомъ прямоугольномъ параллелограмѣ говорятъ, что онъ заключенъ между двумя его сторонами, составляющими прямой уголъ.

Примѣч. 1. Прямоугольный параллелограмъ мы будемъ называть просто *прямоугольникомъ*. Какъ только извѣстны стороны параллелограма, составляющія прямой уголъ, то прямоугольникъ вполнѣ опредѣляется и можетъ быть построенъ. Для сокращенія мы будемъ прямоугольникъ, заключенный между какими нибудь прямыми AB и CD, изображать символомъ $AB \,.\, CD$.

2. Гномономъ или Екеромъ называется фигура $ABCGDH$ (фиг. 97), составленная изъ параллелограма DB, построеннаго на діагонали BD, и двухъ дополненій AD и DC.

Фиг. 97.

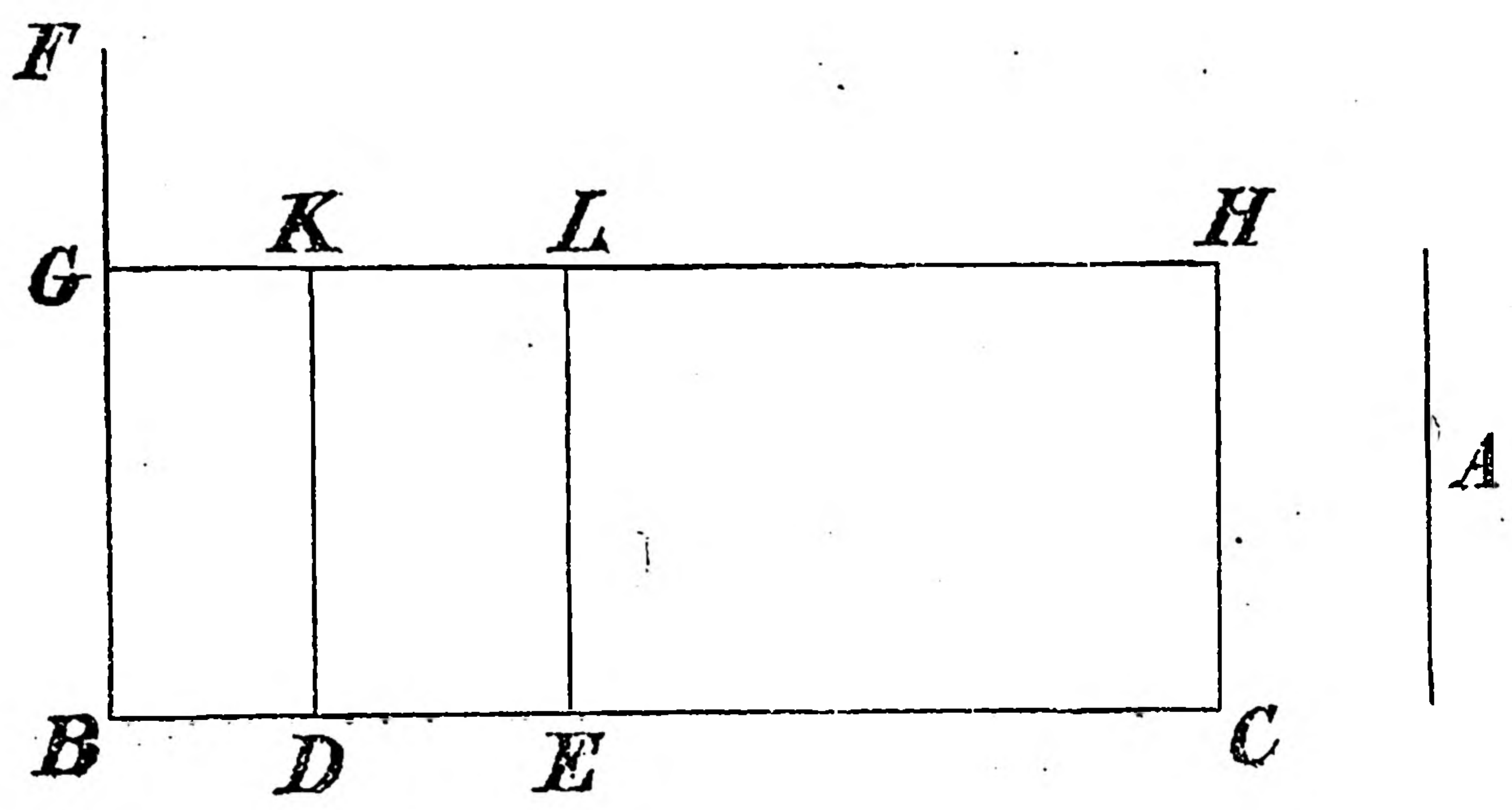


Предложенія.

Предложеніе 1. Если изъ двухъ прямыхъ линій A и BC одна, напримѣръ BC, раздѣлена на нѣсколько произвольныхъ частей BD, DE, EC, то прямоугольникъ, заключенный между этими прямыми A и BC, равенъ суммѣ прямоугольниковъ заключенныхъ между прямою A и каждой частью BD, DE, EC (фиг. 98).

Доказат. Изъ точки B прямой BC возставимъ къ ней перпендикуляръ (кн. 1, пред. 11) BF, сдѣлаемъ $BG=A$, чрезъ точку G проведемъ $GH \parallel BC$ (кн 1, пред. 31), чрезъ точки D, E, C проведемъ $DK \parallel BG$, $EL \parallel BG$, $CH \parallel BG$.

Фиг. 98.



Изъ предъидущаго построенія слѣдуетъ, что:

$$\text{прям.}BH=\text{прям.}BK+\text{прям.}DL+\text{прям.}EH.$$

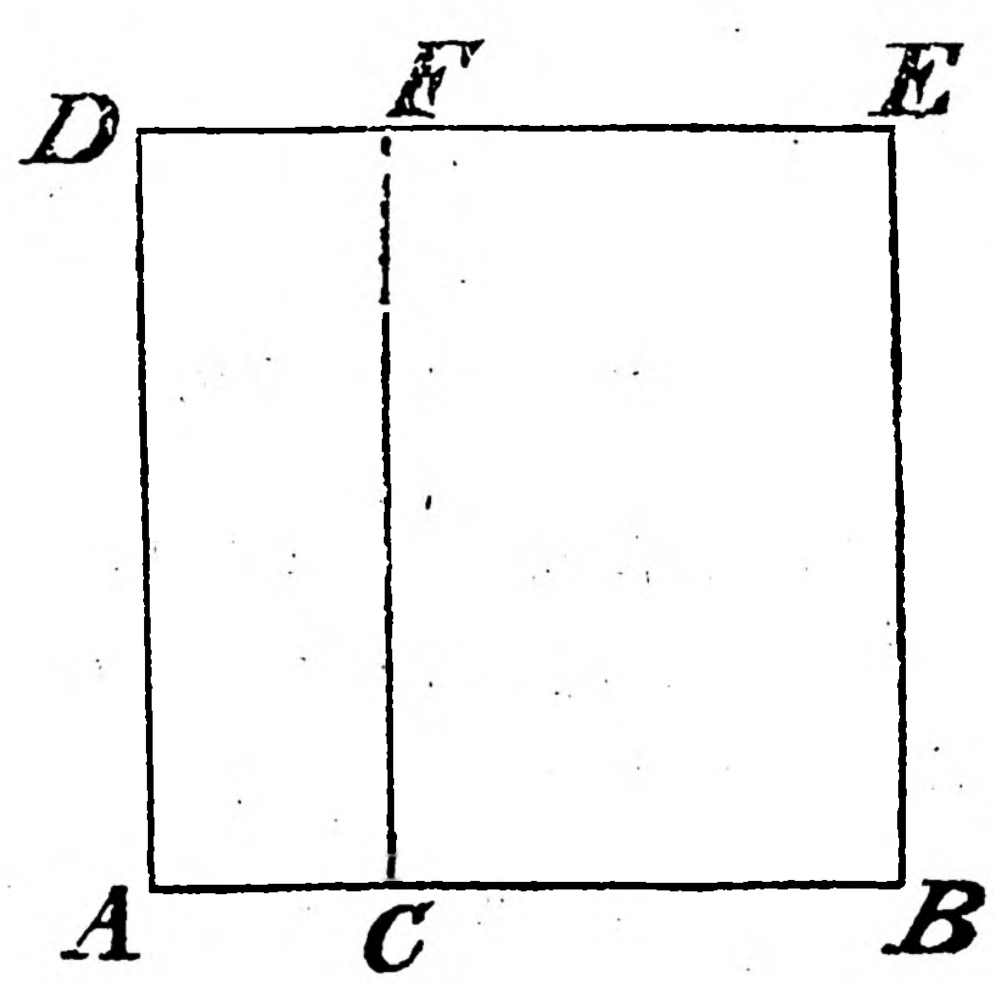
Но прямоугольникъ $BH=BC.BG=BC.A$. Точно также прямоугольники BK, DL, EH равны, прям.$BK=BD.BG=BD.A$, прям.$DL=DE.DK=DE.A$, прям.$EH=EC.EL=EC.A$, слѣдовательно:

$$BC.A=BD.A+DL.A+EC.A.$$

Предложеніе 2. Если прямую линію AB въ точкѣ C раздѣлимъ, на какія нибудь, двѣ части AC и CB, то квадратъ построенный на цѣлой линіи AB будетъ равенъ суммѣ прямоугольниковъ, заключенныхъ между прямою AB и ея отрѣзками AC и CB (фиг. 99).

Доказат. Построимъ на AB квадратъ (кн. 1, пред. 46) $ADEB$ и проведемъ чрезъ точку C, $CF \parallel AD$.

Фиг. 99.



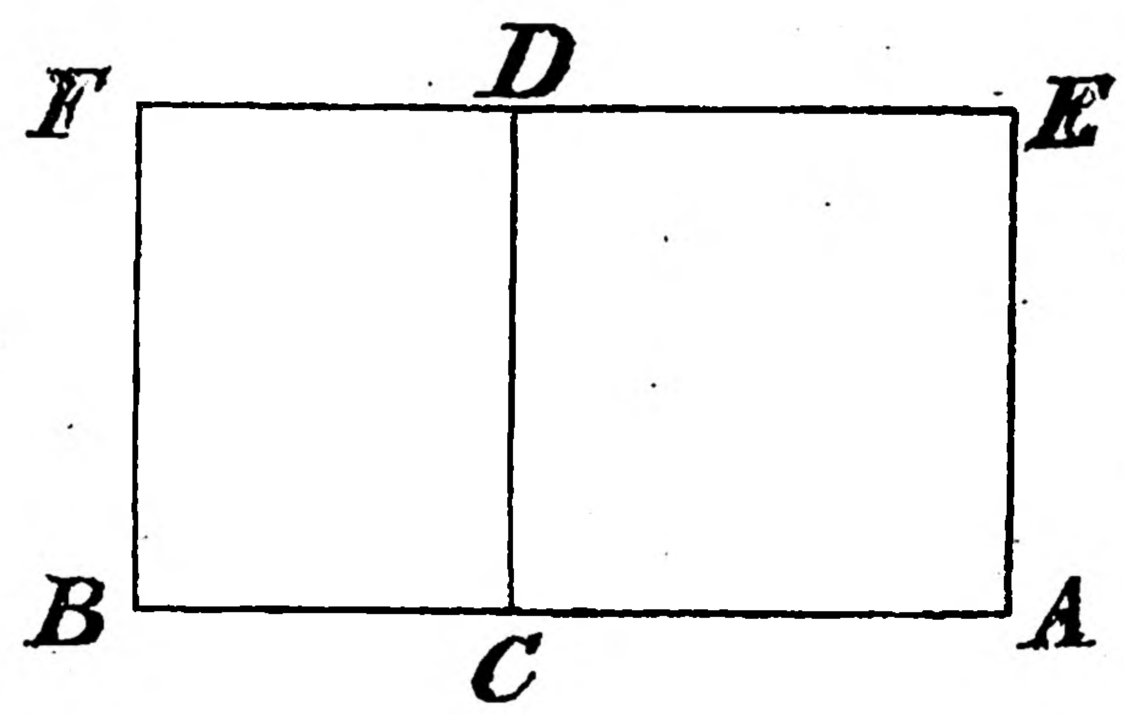
Изъ этого построенія видимъ, что $\square AE=\text{прям.}AF+\text{прям.}CE$, но прям.$AF=AC.AD=AC.AB$, прям.$CE=CB.CF=CB.AB$, слѣдовательно:

$$\square AB = AC \cdot AB + CB \cdot AB.$$

Предложеніе 3. Если прямую AB въ точкѣ C раздѣлимъ на какія нибудь двѣ части AC и CB, то прямоугольникъ, заключенный между цѣлою линіею AB и однимъ изъ отрѣзковъ, напримѣръ CA, будетъ равенъ суммѣ квадрата, построеннаго на CA и прямоугольника, заключеннаго между отрѣзками BC и AC (фиг. 100).

Доказат. Построимъ на CA квадратъ CE (кн. 1, пред. 46), продолжимъ ED такъ, чтобы она встрѣтилась въ точкѣ F съ прямою BF, проведенною параллельно AE. Изъ этого построенія видимъ, что:

Фиг. 100.



прям. AF = прям. $BD + \square CA$, но прям. $BD = BC \cdot BF = AC \cdot BC$,

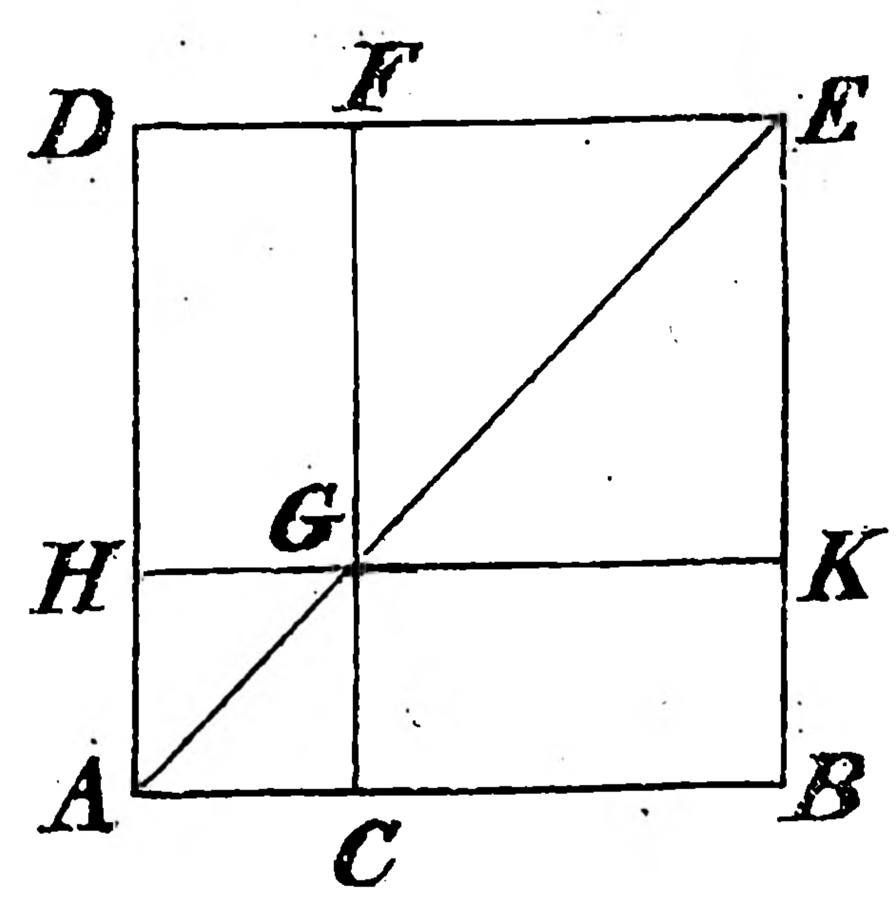
слѣдовательно:

$$AB \cdot CA = \square CA + BC \cdot AC.$$

Предложеніе 4. Если прямую AB въ точкѣ C раздѣлимъ на какія нибудь двѣ части AC и CB, то квадратъ построенный на AB равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ AC и CB съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, заключеннымъ между отрѣзками AC и CB (фиг. 101).

Доказат. Построимъ на AB квадратъ $ABED$ (кн. 1, пред. 46) и проведемъ діагональ AE. Чрезъ точку C проведемъ $CGF \parallel AD$, и чрезъ точку G проведемъ $HGK \parallel AB$.

Фиг. 101.



Такъ какъ $CF \parallel BE$, то $\angle AGC = \angle AEB$ (кн. 1, пред. 29). Но

$AB=BE$ (кн. 1, пред. 5), слѣдовательно $\angle AEB=\angle EAB=\angle AGC$, откуда (кн. 1, пред. 6) $AC=CG$. Кромѣ того, AC и CG равны противолежащимъ сторонамъ GH и AH (кн. 1, пред. 34), слѣдовательно CH есть равносторонній четыреугольникъ.

Такъ какъ $CF \parallel HA$, то (кн. 1, пред. 29) $\angle HAC+\angle GCA=2d$. Но уголъ HAC прямой, слѣдовательно и уголъ GCA также прямой, оба эти угла равны противолежащимъ угламъ HGC и AHG (кн. 1, пред. 34). Изъ этого видимъ, что CH есть равносторонній прямоугольникъ, слѣдовательно квадратъ.

Точно такимъ-же образомъ легко показать, что FK есть квадратъ, коего сторона $KG=BC$.

Прямоугольникъ $BG=BC.CG=AC.BC$, точно также прям.$GD=AC.BC$, но прям.BG=прям.GD (кн. 1, пред. 43), слѣдовательно прям.BG+прям.$GD=$ $=2AC.BC$.

Откуда:

$$ABED=\square AB=\square AC+\square BC+2AC.BC.$$

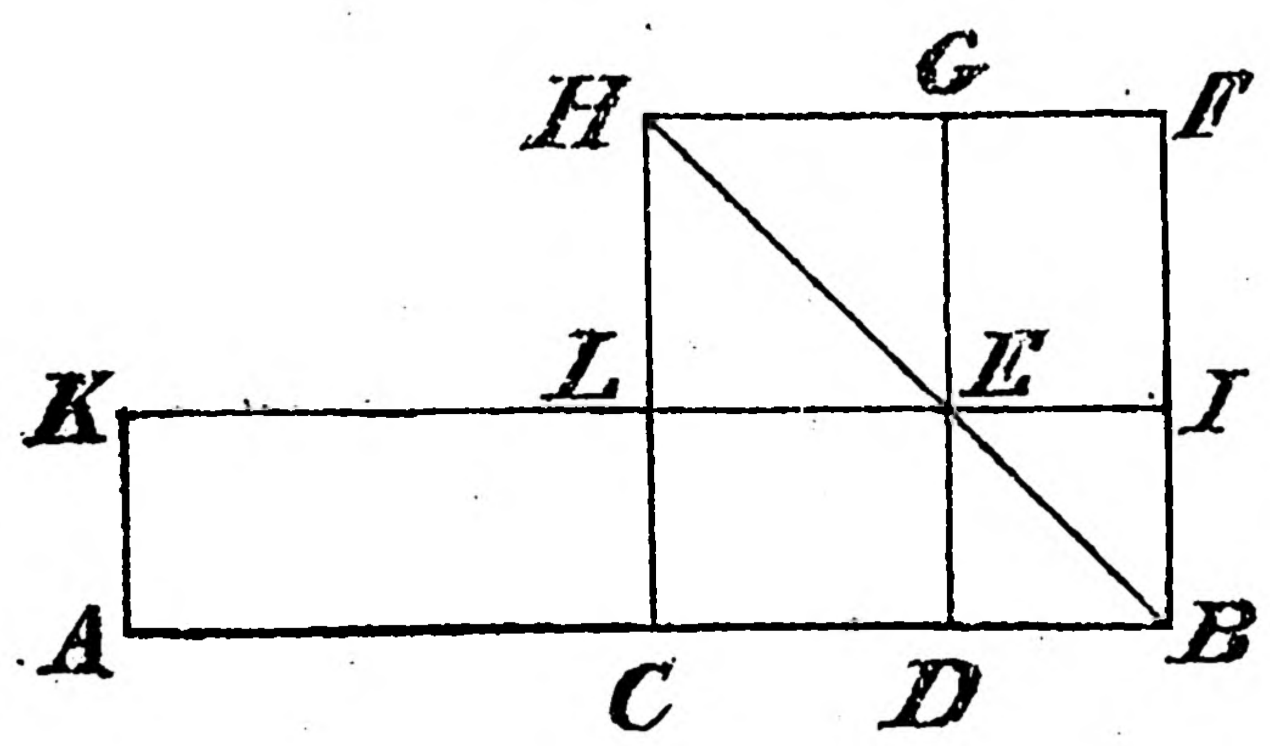
Примѣч. 2. Если прямая AB въ точкѣ C раздѣлена пополамъ, то $AC=CB$, слѣдовательно:

$$\square AB=4\,\square AC.$$

Изъ предъидущаго также видно, что въ квадратѣ параллелограмы, построенные на діагонали, суть также квадраты. Квадратъ, построенный на суммѣ двухъ прямыхъ AC и CB равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на каждой изъ нихъ съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, заключеннымъ между прямыми AC и CB.

Предложеніе 5. Если прямая линія AB въ точкѣ C раздѣлена на двѣ равныя части AC и CB, а въ точкѣ D на двѣ неравныя части AD и DB, то прямоугольникъ, заключенный между неравными частями AD и DB вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на CD, равны квадрату, построенному на половинѣ AC или CB прямой AB (фиг. 102).

Фиг. 102.



Доказат. Построимъ (кн. 1, пред. 46) на CB квадратъ $CBFH$, коего діагональ BH. Чрезъ точку D проведемъ $DEG \parallel CH$. Чрезъ точку встрѣчи E діагонали BH съ DG проведемъ прямую $IL \parallel BC$ и продолжимъ ее до встрѣчи съ прямою AK, проведенною параллельно CH.

Такъ какъ прям.CE=прям.EF (кн. 1, пред. 43), то прибавляя по $\square BE$, найдемъ, что прям.DF=прям.BL. Но какъ $AC=CB$, то (кн. 1, пред. 36) прям.AL=прям.DF. Слѣдовательно прям.AE=прям.CE+прям.DF, т. е.:

$$AD \,.\, BD = CD \,.\, BD + AC \,.\, BD.$$

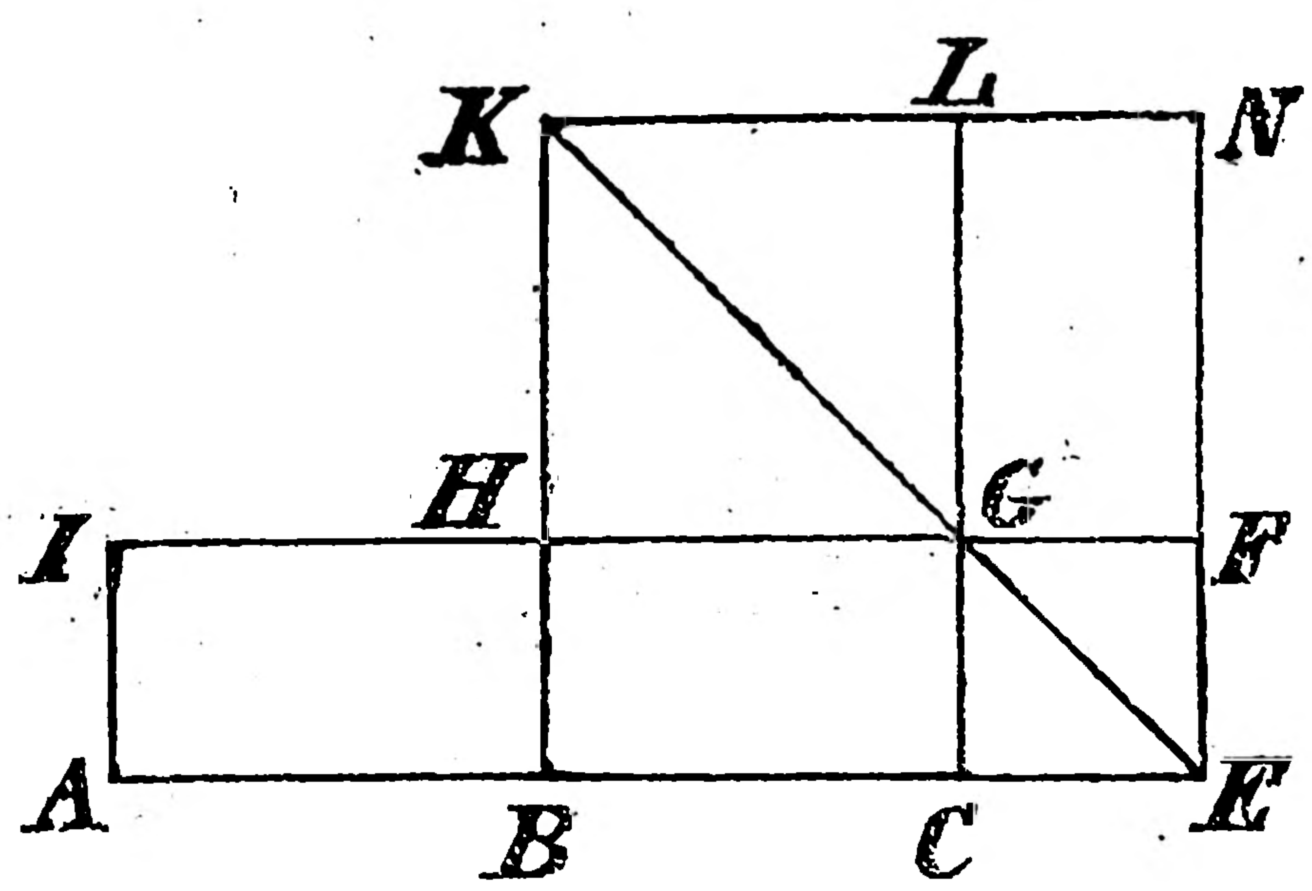
Откуда:

$$\square BC = \square DC + AD \,.\, BD.$$

Предложеніе 6. Если прямую AC въ точкѣ B раздѣлимъ пополамъ и прибавимъ къ ней какой нибудь отрѣзокъ CE, то прямоугольникъ, заключенный между цѣлою прямою AE и прибавленнымъ отрѣзкомъ CE, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на половинѣ AC, равенъ квадрату, построенному на прямой BE, составленной изъ половины AC и прибавленнаго отрѣзка CE (фиг. 103).

Доказат. Построимъ на BE квадратъ $BENK$ и проведемъ діагональ EK. Чрезъ точку C проведемъ $CL \parallel BK$. Чрезъ точку G встрѣчи діагонали EK съ CL проведемъ $FH \parallel BE$ и продолжимъ ее до встрѣчи съ прямою AI, проведенною чрезъ точку A, параллельно прямой BK.

Фиг. 103.



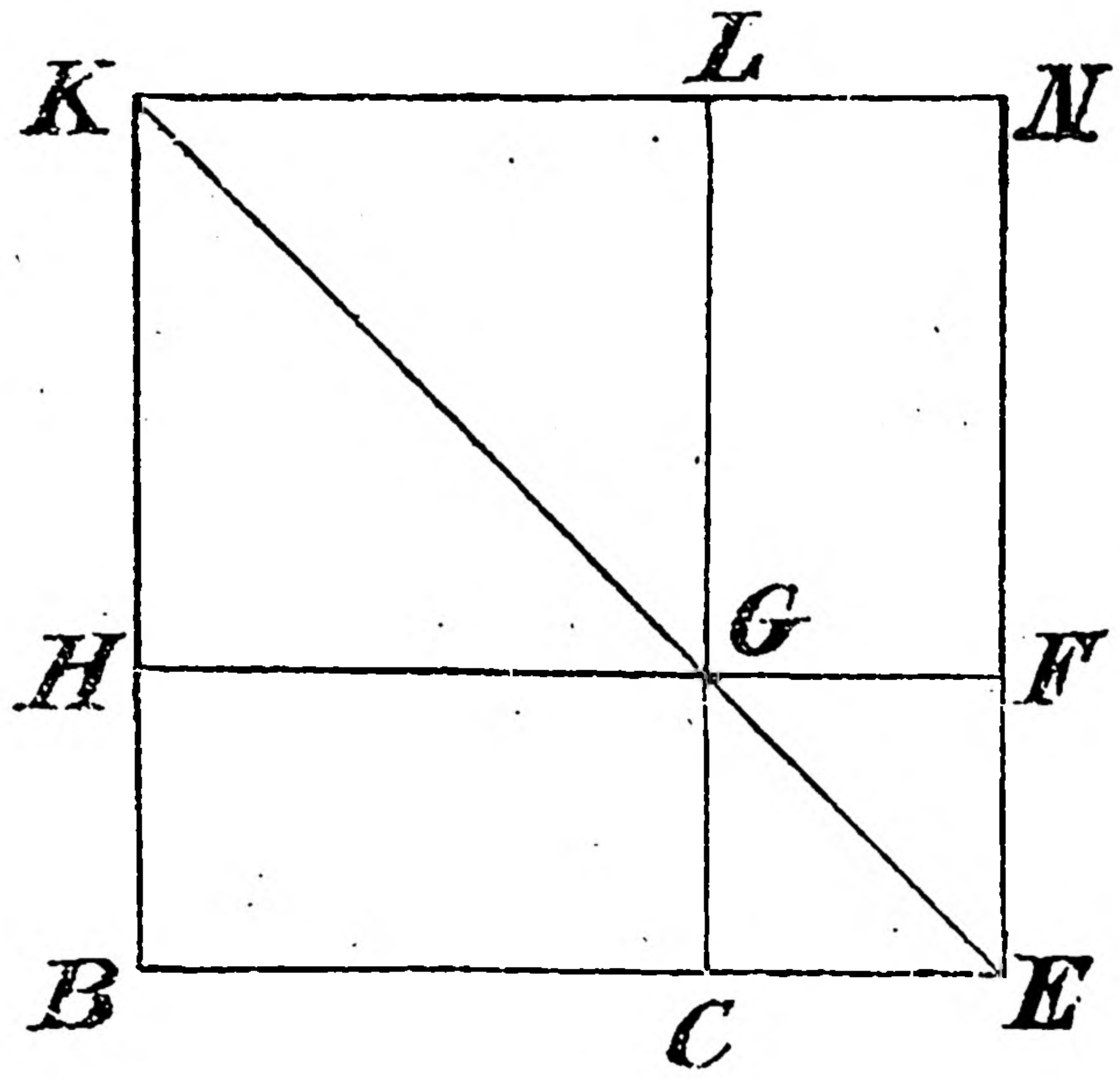
Легко видѣть, что $\square BE = \square BC$+прям.BF+прям.GN. Но такъ какъ прям.BG=прям.GN=прям.AH (кн. 1, 43), то прям.BF+прям.GN= =прям.$AF = AE \,.\, CE$. Слѣдовательно:

$$\square BE = \square BC + AE \,.\, CE.$$

Предложеніе 7. Если прямую BE раздѣлимъ въ точкѣ C на двѣ какія нибудь части BC и CE, то квадратъ, построенный на BE, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на одной изъ частей, напримѣръ CE, равенъ удвоенному прямоугольнику, заключенному между цѣлою прямою BE и взятою частью CE вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на другой части BC (фиг. 104).

Доказат. Построимъ на BE квадратъ $BENK$ и проведемъ діагональ EK. Чрезъ точку C проведемъ прямую $CL \parallel BK$. Чрезъ точку G встрѣчи діагонали EK съ прямою CL проведемъ прямую $FH \parallel BE$.

Фиг. 104.



Изъ этого построенія видимъ, что:

$$\square BE + \square CE = \square BC + BE \,.\, CE + BC \,.\, CE + \square CE.$$

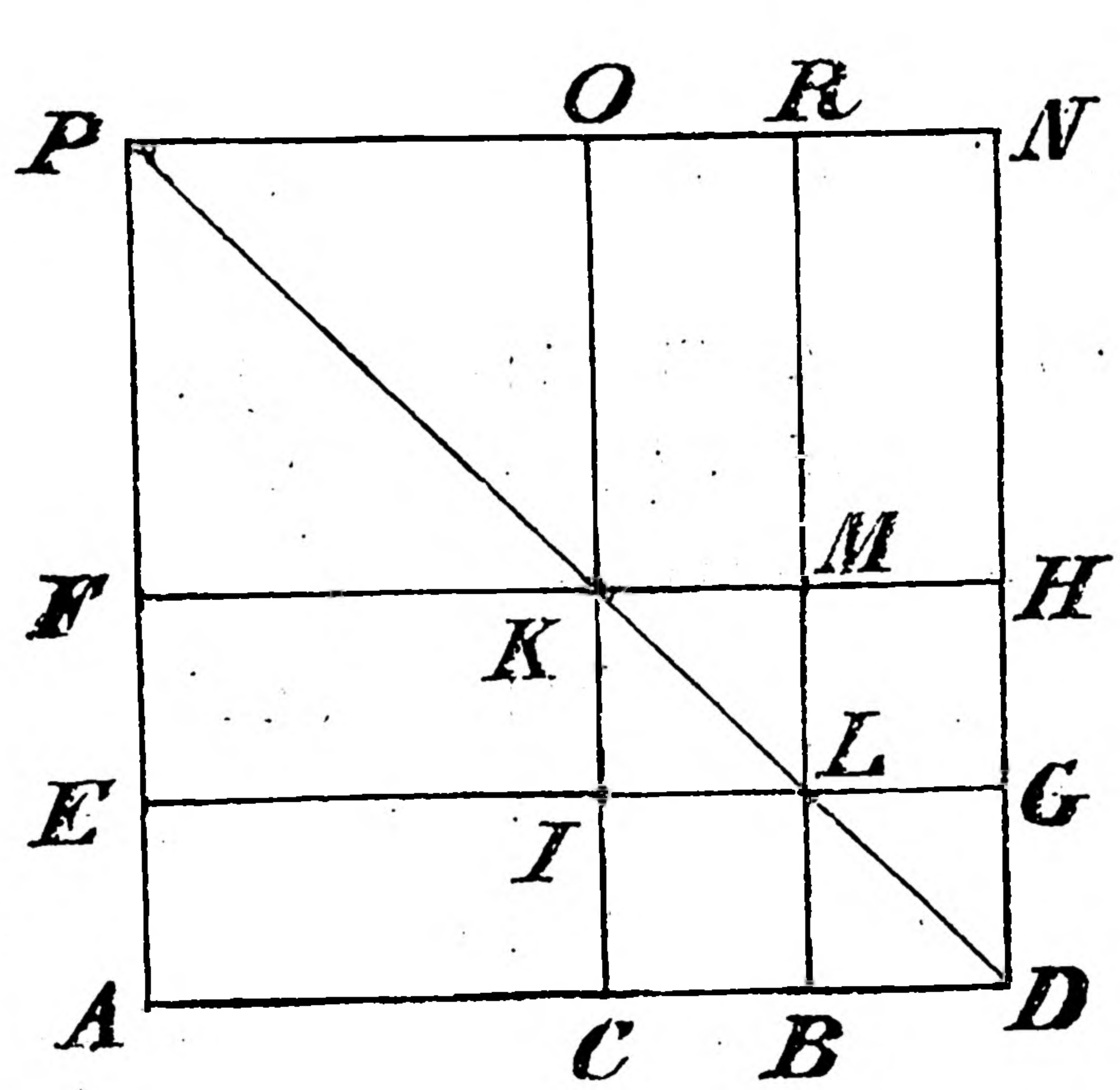
Но $BC \,.\, CE + \square CE = BE \,.\, CE$, слѣдовательно:

$$\square BE + \square CE = \square BC + 2BE \,.\, CE.$$

Примѣч. 3. Изъ этого послѣдняго выраженія, разсматривая BC какъ разность двухъ прямыхъ BE и EC, получимъ, что квадратъ, построенный на разности двухъ прямыхъ, равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на каждой изъ нихъ безъ удвоеннаго прямоугольника, заключеннаго между этими прямыми.

Предложеніе 8. Если прямую AB раздѣлимъ въ точкѣ C на какія нибудь двѣ части AC и CB, то квадратъ, построенный на прямой AD, составленной изъ прямыхъ AB и CB, равенъ четырежды взятому прямо-

Фиг. 105.



угольнику, заключенному между цѣлою AB и ея частью CB, вмѣстѣ съ квадратомъ, построенымъ на другой части AC прямой AB (фиг. 105).

Доказат. Продолжимъ данную прямую AB такъ, чтобы продолженіе BD было равно CB и на прямой AD построимъ квадратъ $ADNP$. Проведемъ діагональ DP. Изъ точекъ C и B проведемъ параллельныя CO, BR сторонѣ квадрата AP. Чрезъ точки L и K встрѣчи діагонали DP съ прямыми BR и CO проведемъ параллельныя GE и HF прямой AD.

Изъ этого построенія видно, что:

$$\square AD = \text{прям.} AL + \text{прям.} LN + \text{прям.} EM + \text{прям.} KR + \square BD + \square AC.$$

Но прям.AL=прям.LN=прям.EM=$AB.CB$:

$$\text{прям.} KR + \square BD = AB.CB.$$

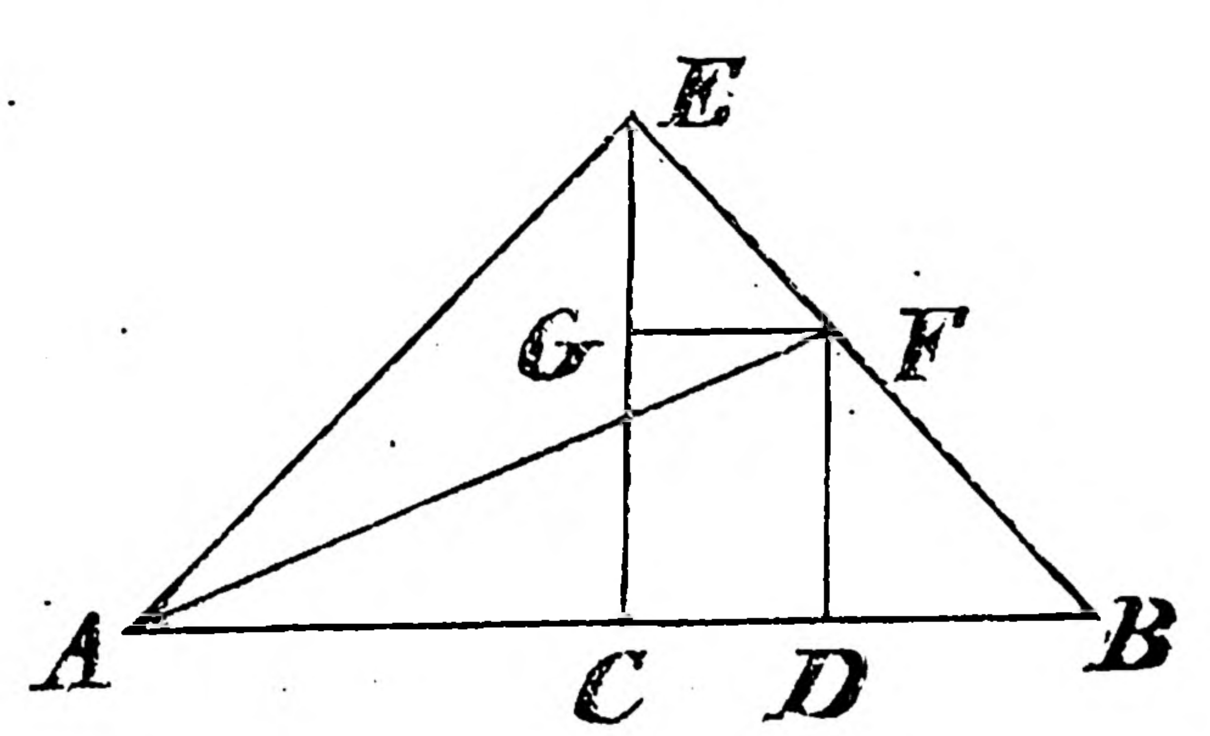
Слѣдовательно:

$$\square AD = 4AB.CB + \square AC.$$

Предложеніе 9. Если прямая AB раздѣлена въ точкѣ C на двѣ равныя части AC и CB, и въ точкѣ D на двѣ не равныя части AD и DB, то сумма квадратовъ, построенныхъ на неравныхъ частяхъ AD и DB, равна суммѣ удвоенныхъ квадратовъ, построенныхъ на AC и CD (фиг. 106).

Доказат. Изъ средины C прямой AB возставимъ къ ней перпендикуляръ CE и сдѣлаемъ $CE=AC=CB$. Соединимъ точки A и B съ E. Чрезъ точку D проведемъ параллельную DF прямой CE, до встрѣчи съ BE въ точкѣ F, чрезъ точку F проведемъ параллельную FG прямой AB. Наконецъ соединимъ A съ F прямою AF.

Фиг. 106.



Такъ какъ $CE=AC=CB$, и при точкѣ C углы прямые, то $\angle CEA = \angle CAE = \angle CEB = \angle CBE = \frac{1}{2}d$ (кн. 1, пред. 32).

Такъ какъ $DF \parallel CE$, $FG \parallel CD$, то (кн. 1, пред. 29) $\angle FDB$ и $\angle EGF$ каждый равенъ прямому углу; $\angle DFB = \angle CEB = \frac{1}{2}d$ и $\angle GFE = \angle DBF = \frac{1}{2}d$, слѣдовательно, (кн. 1, пред. 6) $DF = DB$, $EG=GF=CD$.

Такъ какъ $\angle AEC = \angle BEC = \frac{1}{2} d$, то $\angle AEB = d$. Откуда (кн. 1, пред. 47).

$$\square AF = \square AE + \square EF.$$

Замѣчая еще, что углы D, C и E прямые, мы будемъ имѣть:

$$\square AF = \square AD + \square DF = \square AD + \square BD$$

$$\square AE = \square AC + \square CE = 2\square AC$$

$$\square EF = \square EG + \square GF = 2\square CD, \ldots$$

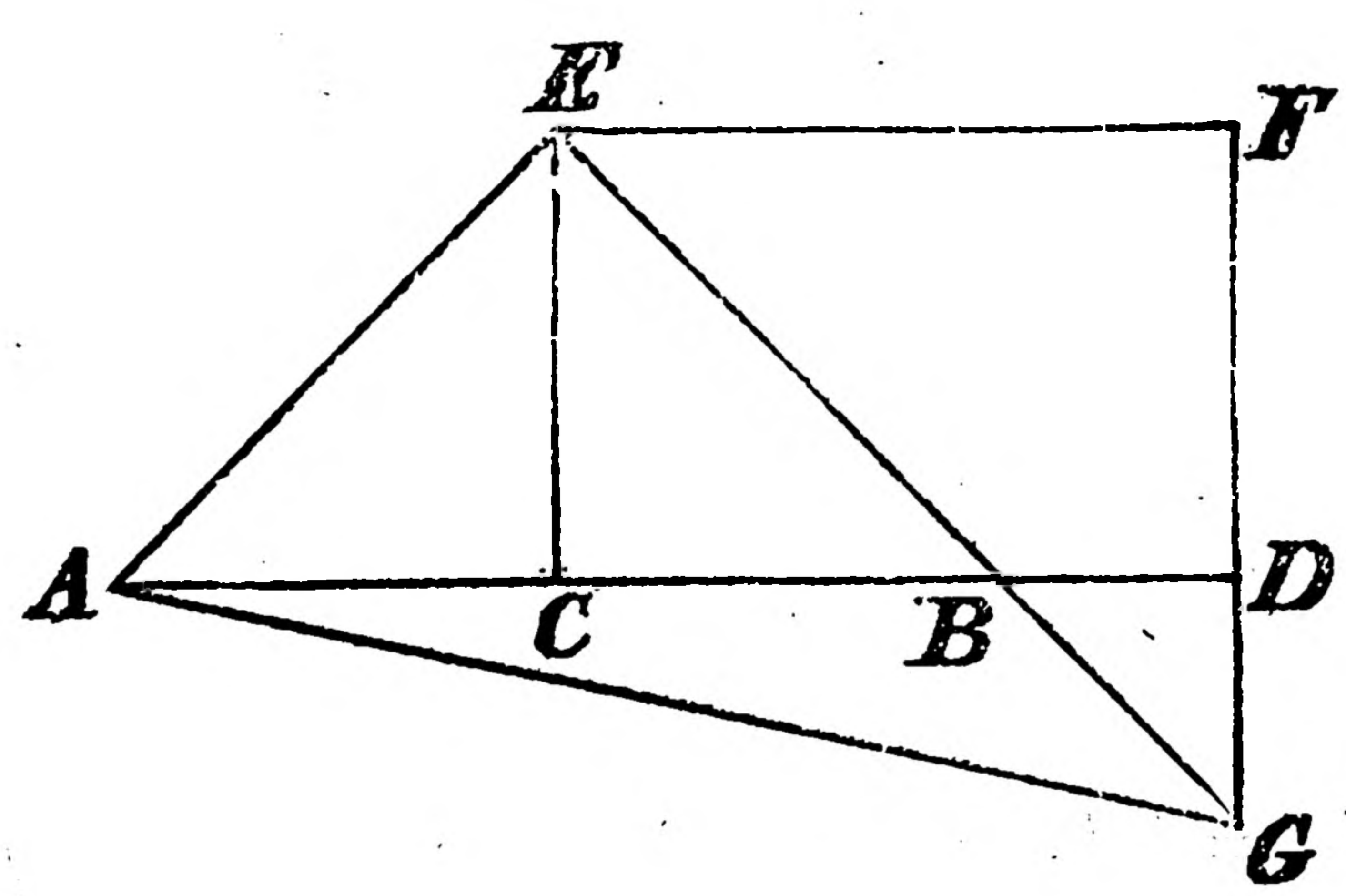
складывая два послѣднія выраженія и сравнивая съ двумя предъидущими, найдемъ:

$$\square AD + \square BD = 2\square AC + 2\square CD.$$

Предложеніе 10. Если прямую AB въ точкѣ C раздѣлимъ на двѣ равныя части AC и CB и если къ AB прибавимъ какую нибудь прямую BD, то квадратъ, построенный на цѣлой прямой AD, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на прибавленной прямой BD, равны удвоенной суммѣ квадратовъ, построенныхъ на AC и CD (фиг. 107).

Доказат. Изъ точки C прямой AB возставимъ перпендикуляръ $CE = AC = BC$ (кн. 1, пред. 2). Проведемъ чрезъ точку E прямую $EF \parallel AB$. Чрезъ точку D проведемъ прямую $DF \parallel CE$, то (кн. 1, пред. 29) $\angle CEF + \angle EFD = 2d$, и $\angle BEF + \angle EFD < 2d$, слѣдовательно, (кн. 1, акс. 11) прямыя EB и FD, по нѣкоторомъ продолженіи, встрѣтятся, положимъ въ точкѣ G.

Фиг. 107.



Такъ какъ $CE = AC = CB$, а при точкѣ C углы прямые, то $\angle CAE = \angle CEA$, $\angle CBE = \angle CEB$, и каждый изъ этихъ угловъ равенъ $\frac{1}{2} d$.

Прямая $EF \parallel AD$, а $FG \parallel CE$, то (кн. 1, пред. 29) $\angle D = \angle F = \angle C = d$; $\angle DGB = \angle BEC = \frac{1}{2} d$; $\angle FEB = \angle DBG = \angle EBC = \frac{1}{2} d$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 6), $DB = DG$ и $FG = FE = CD$.

Такъ какъ уголъ $AEG=d$, то мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AG=\square AE+\square EG.$$

Замѣчая, что углы D, C, F прямые, мы имѣемъ еще:

$$\square AG=\square AD+\square DG=\square AD+\square BD$$

$$\square AE=\square AC+\square EC=2\square AC$$

$$\square EG=\square FG+\square EF=2\square CD.$$

Откуда наконецъ, складывая два послѣднія выраженія и сравнивая съ двумя предъидущими, найдемъ:

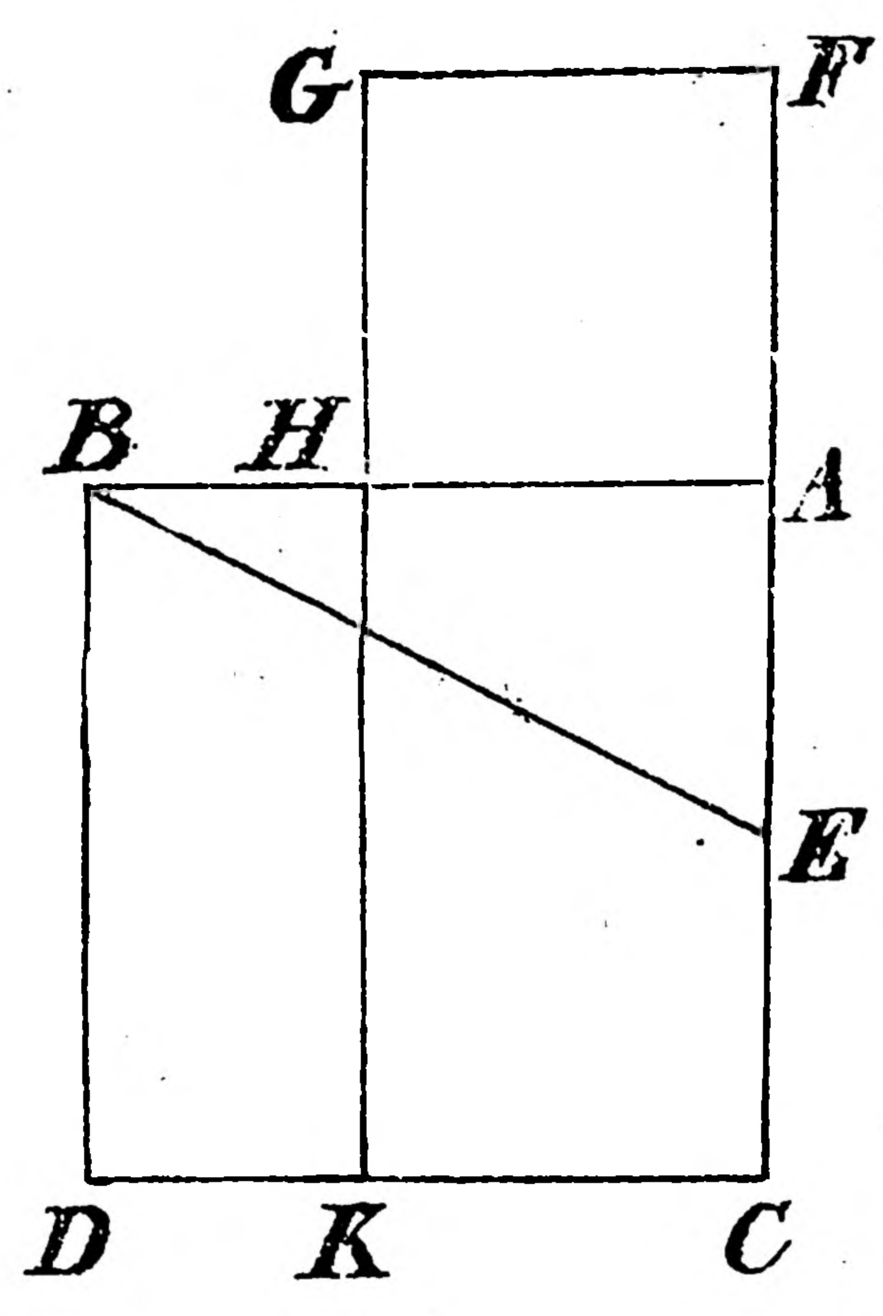
$$\square AD+\square BD=2\square AC+2\square CD.$$

Предложеніе 11. Раздѣлить прямую AB въ точкѣ H на такія двѣ части, чтобы прямоугольникъ, заключенный между цѣлою прямою AB и одною изъ ея частей, былъ равенъ квадрату, построенному на другой ея части (фиг. 108)?

Рѣшеніе. Построимъ на прямой AB квадратъ $ABDC$, раздѣлимъ сторону AC въ точкѣ E пополамъ и проведемъ прямую BE. Продолжимъ AC до точки F, такъ, чтобы $EF=EB$. Построимъ на AF квадратъ $AFGH$ и продолжимъ сторону GH до встрѣчи съ DC въ точкѣ K. Прямая AB и будетъ раздѣлена такъ что:

$$\square AH=AB.BH.$$

Фиг. 108.



Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ AC въ точкѣ E раздѣлена пополамъ, то (кн. 2, пред. 6) мы имѣемъ:

$$\square EF=\square EB=CF.AF+\square AE.$$

Уголъ $BAE=d$, слѣдовательно мы еще имѣемъ:

$$\square EB=\square AB+\square AE$$

откуда:

$$CF.AF+\square AE=\square AB+\square AE$$

отнимая по $\square AE$ (кн. 1, акс. 3) получимъ:

$$\square AB=CF.AF=CF.FG$$

Слѣдовательно прямоугольникъ $KF=\square AB$.

Если отъ обѣихъ частей этого равенства отымемъ по прямоугольнику AK, то получимъ:

$$\square AH=\text{прямоугольнику } DH=BD.BH,$$

но $BD=AB$, слѣдовательно:

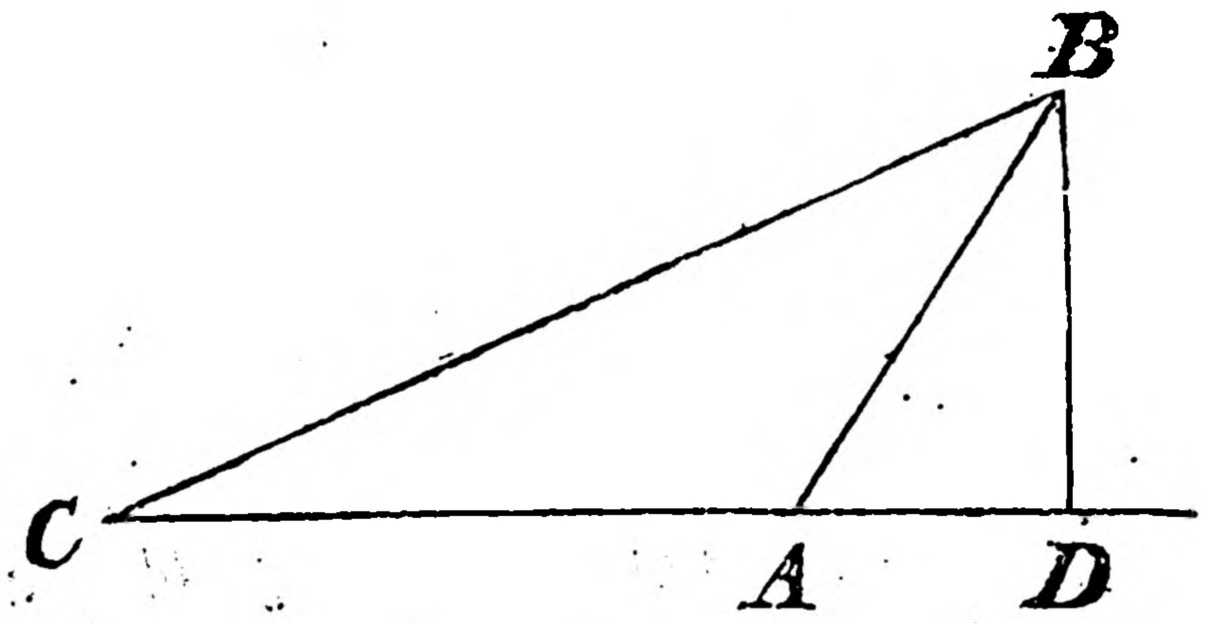
$$AB.BH=\square AH.$$

Предложеніе 12. Во всякомъ тупоугольномъ треугольникѣ CBA квадратъ, построенный на сторонѣ BC, противолежащей тупому углу CAB, больше суммы квадратовъ, построенныхъ на другихъ сторонахъ AB и AC, на удвоенный прямоугольникъ, заключенный между одною изъ сторонъ, заключающихъ тупой уголъ, напримѣръ AC, и продолженіемъ AD той же стороны AC до встрѣчи съ перпендикуляромъ BD, опущеннымъ изъ точки B на сторону AC (фиг. 109).

Доказат. Такъ какъ прямая CD въ точкѣ A раздѣлена на двѣ, вообще неравныя, части, то (кн. 2, пред. 4) будемъ имѣть:

$$\square CD=\square CA+\square AD+2AC.AD.$$

Фиг. 109.



Прибавляя по $\square DB$ къ обѣимъ частямъ предъидущаго равенства (кн. 1, акс. 2), найдемъ:

$$\square CD+\square DB=\square AC+\square AD+\square DB+2AC\,.\,AD$$

но

$$\square CD+\square DB=\square CB \text{ (кн. 1, пред. 47)}$$

и

$$\square AD+\square DB=\square AB$$

слѣдовательно:

$$\square CB=\square AC+\square AB+2AC\,.\,AD.$$

Предложенiе 13. Во всякомъ треугольникѣ CBA квадратъ, построенный на сторонѣ AB, противолежащей острому углу C, меньше суммы квадратовъ, построенныхъ на остальныхъ сторонахъ CB и CA, на удвоенный прямоугольникъ, заключенный между одной изъ сторонъ, заключающихъ острый уголъ C, напримѣръ AC и частью CD этой стороны, лежащей между вершиною угла C и основанiемъ перпендикуляра опущеннаго изъ точки B на сторону AC.

Доказат. Случай 1. Перпендикуляръ BD падаетъ внутри треугольника ABC (фиг. 110).

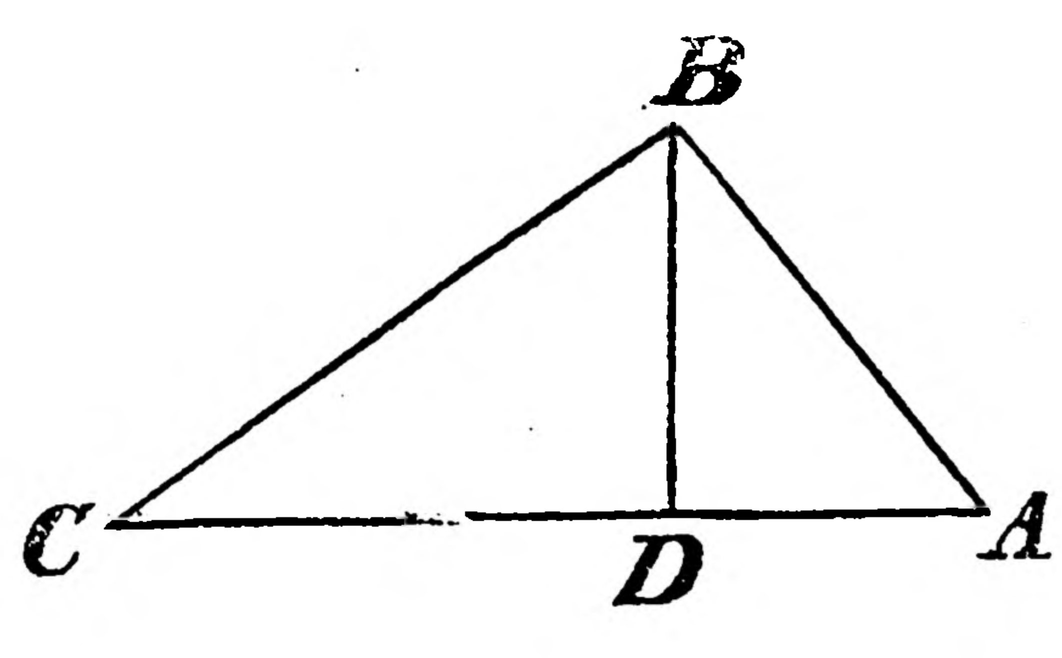
Сторона AC въ точкѣ D раздѣлена вообще на двѣ неравныя части, слѣдовательно, мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AC+\square CD=\square AD+2AC.CD.$$

Если прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого равенства по $\square BD$, то найдемъ:

$$\square AC+\square CD+\square BD=\square AD+\square BD+2AC\,.\,CD.$$

Фиг. 110.



Но мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square CD+\square BD=\square BC,\quad \square AD+\square BD=\square AB$$

слѣдовательно:

$$\square AC+\square BC=\square AB+2AC\,.\,CD$$

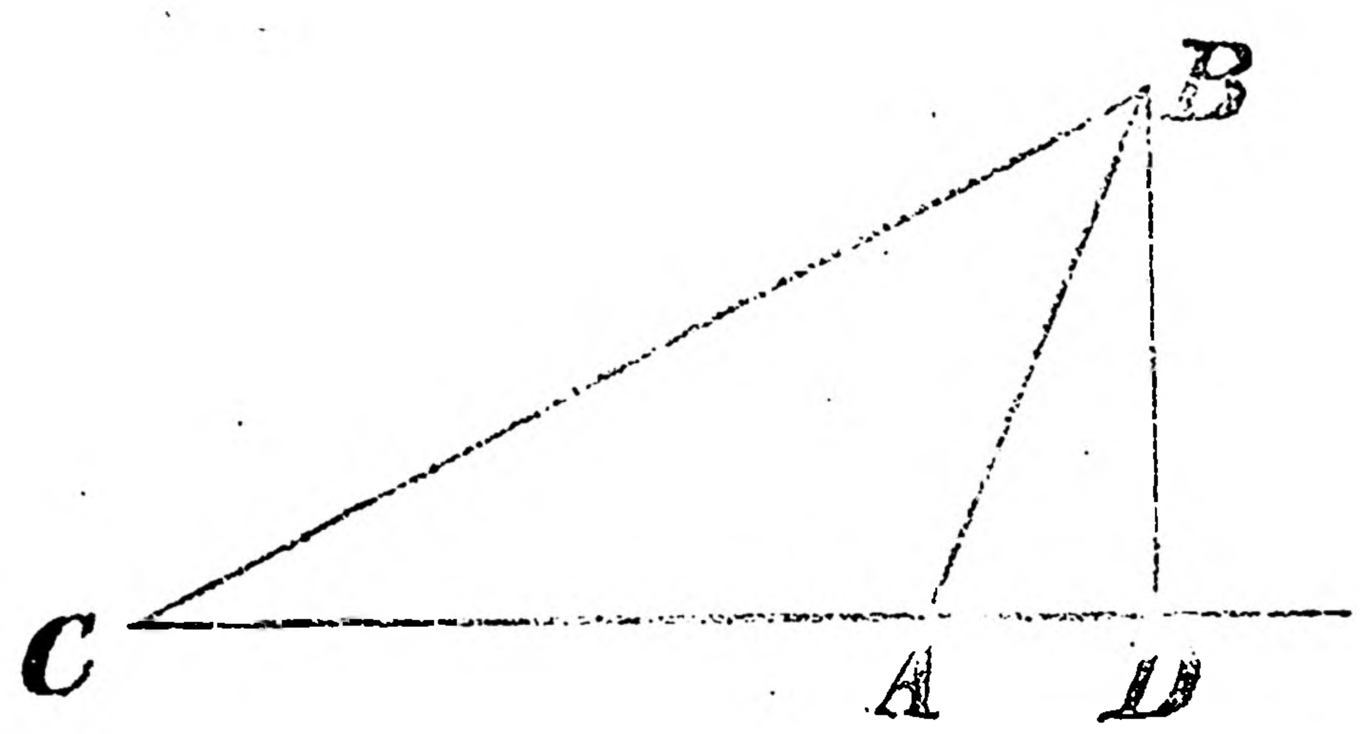
откуда видимъ что:

$$\square AB<\square AC+\square BC$$

на $2AC\,.\,CD$.

Случай 2. Перпендикуляръ BD падаетъ внѣ треугольника CBA (фиг. 111).

Фиг. 111.



Прямая CD въ точкѣ A раздѣлена, вообще, на двѣ неравныя части, слѣдовательно мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square CD + \square AC = \square AD + 2CD \,.\, AC$$

придадимъ къ обѣимъ частямъ, по $\square BD$, то получимъ:

$$\square CD + \square BD + \square AC = \square AD + \square BD + 2CD \,.\, AC$$

но (кн. 1, пред. 47):

$$\square CD + \square BD = \square CB, \quad \square AD + \square BD = \square AB$$

слѣдовательно:

$$\square CB + \square AC = \square AB + 2CD \,.\, AC$$

откуда видимъ, что:

$$\square AB < \square CB + \square AC \quad \text{на } 2CD \,.\, AC.$$

Примѣч 4. Теоремы, обратныя двумъ предъидущимъ, имѣютъ мѣсто.

Если квадратъ, построенный на одной изъ сторонъ треугольника, будетъ больше суммы квадратовъ, построенныхъ на остальныхъ его сторонахъ, то уголъ, противолежащій первой сторонѣ, будетъ тупой.

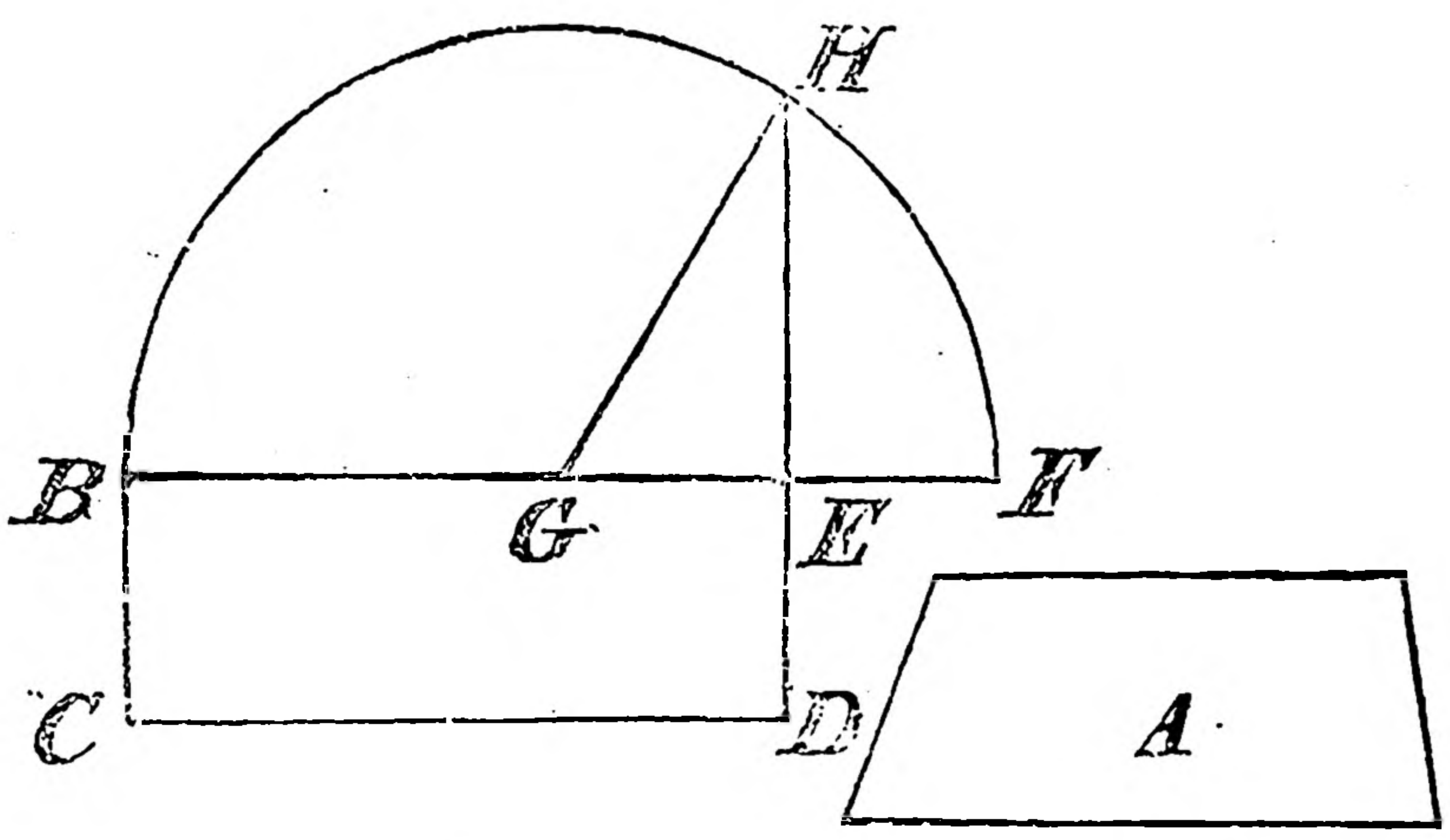
Въ самомъ дѣлѣ, если бы онъ былъ прямой, то квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей этому углу, былъ бы равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на остальныхъ сторонахъ (кн. 1, пред. 47 пред). Если бы онъ былъ острый, то квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей острому углу, былъ бы меньше суммы квадратовъ остальныхъ сторонъ (кн. 2, пред. 13). Слѣдовательно этотъ уголъ долженъ быть тупой. Точно также легко доказать и теорему обратную теоремѣ 13.

Предложеніе 14. Построить квадратъ, равный данной прямолинейной фигурѣ A (фиг. 112)?

Рѣшеніе. Построимъ прямоугольникъ BD, равный данной фигурѣ A (кн. 1, пред. 45):

Продолжимъ BE до точки F такъ, чтобы $EF=ED$, раздѣлимъ прямую BF въ точкѣ G пополамъ и изъ точки G, какъ изъ центра, радіу-

Фиг. 112.



сомъ GB опишемъ кругъ BHF. Продолжимъ DE до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ H, то $\square HE$ будетъ требуемый.

Въ самомъ дѣлѣ, въ точкѣ G прямая BF раздѣлена пополамъ, а въ точкѣ E она раздѣлена на двѣ неравныя части, то (кн. 2, пред. 5) мы имѣемъ:

$$\square GF=\square EG+BE\,.\,EF=\square GH \text{ (кн. 1, опред. 15).}$$

Но E есть уголъ прямой, слѣдовательно:

$$\square GH=\square EG+\square EH$$

откуда:

$$\square EG+BE\,.\,EF=\square EG+\square EH$$

отнимая по $\square EG$, найдемъ:

$$\square EH=BE\,.\,EF=BE\,.\,ED.$$

Примѣч. 5. Теоремы этой книги суть ничто иное какъ слѣдующія алгебраическія тождества:

Предложеніе 1. Если $a=a_1+a_2+\ .\ .\ +a_n$, то:

$$ab=a_1b+a_2b+\ .\ .\ +a_n\,b.$$

Предложеніе 2. Если $a=b+c$, то:

$$a^2=ab+ac,$$

Предложеніе 3. Если $a=b+c$, то:

$$ad=bd+cd.$$

Предложеніе 4.

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Предложеніе 5.

$$(a-b)\,b+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}\,.$$

Предложеніе 6.

$$(a+b)^2=a^2+(2a+b)\,b$$

Предложеніе 7.

$$(a+b)^2+b^2=a^2+2(a+b)\,b,$$

или, полагая $a+b=c$:

$$a^2=b^2+c^2-2bc.$$

Предложеніе 8.

$$(a+2b)^2=a^2+4(a+b)\,b.$$

Предложеніе 9.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

Предложеніе 10.

$$(a+b)^2+b^2=2\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\left(\frac{a}{2}+b\right)^2.$$

Для насъ имѣютъ значеніе только предложенія 4, 7, 11, 12, 13 и 14 этой книги, всѣ остальныя суть только алгебраическія преобразованія.

КНИГА III.

Опредѣленія.

1. Равные круги суть тѣ, у которыхъ діаметры равны, или у которыхъ прямыя, проведенныя изъ центра къ окружности, равны.

Прим. 1. Это не опредѣленіе, а теорема, справедливость которой очевидна; въ самомъ дѣлѣ, если совмѣстить круги такъ, чтобы ихъ центры совпали, то окружности также совпадутъ, такъ какъ прямыя, проведенныя изъ центра къ окружностямъ, равны.

2. Говорятъ, что прямая линія *касается* круга, если она его встрѣчаетъ, но, будучи продолжена, его не пересѣкаетъ.

3. Говорятъ, что одинъ кругъ *касается* другаго, если они встрѣчаются, но не пересѣкаются.

4. Говорятъ, что прямыя линіи находятся въ равномъ разстояніи отъ центра круга, если перпендикуляры, опущенные изъ центра на эти прямыя, равны.

5. Та прямая линія, на которую падаетъ наибольшій перпендикуляръ, наиболѣе удалена отъ центра.

6. *Сегментъ круга* есть фигура, ограниченная окружностью и прямою линіею, которая ее пересѣкаетъ.

7. *Уголъ сегмента* есть уголъ, заключенный между дугою и прямою.

8. *Уголъ въ сегментѣ* называется уголъ, образуемый прямыми, проведенными изъ какой нибудь точки окружности сегмента къ оконечностямъ прямой, служащей основаніемъ сегмента.

9. Говорятъ, что *уголъ стягивается дугою*, которая заключается между его сторонами.

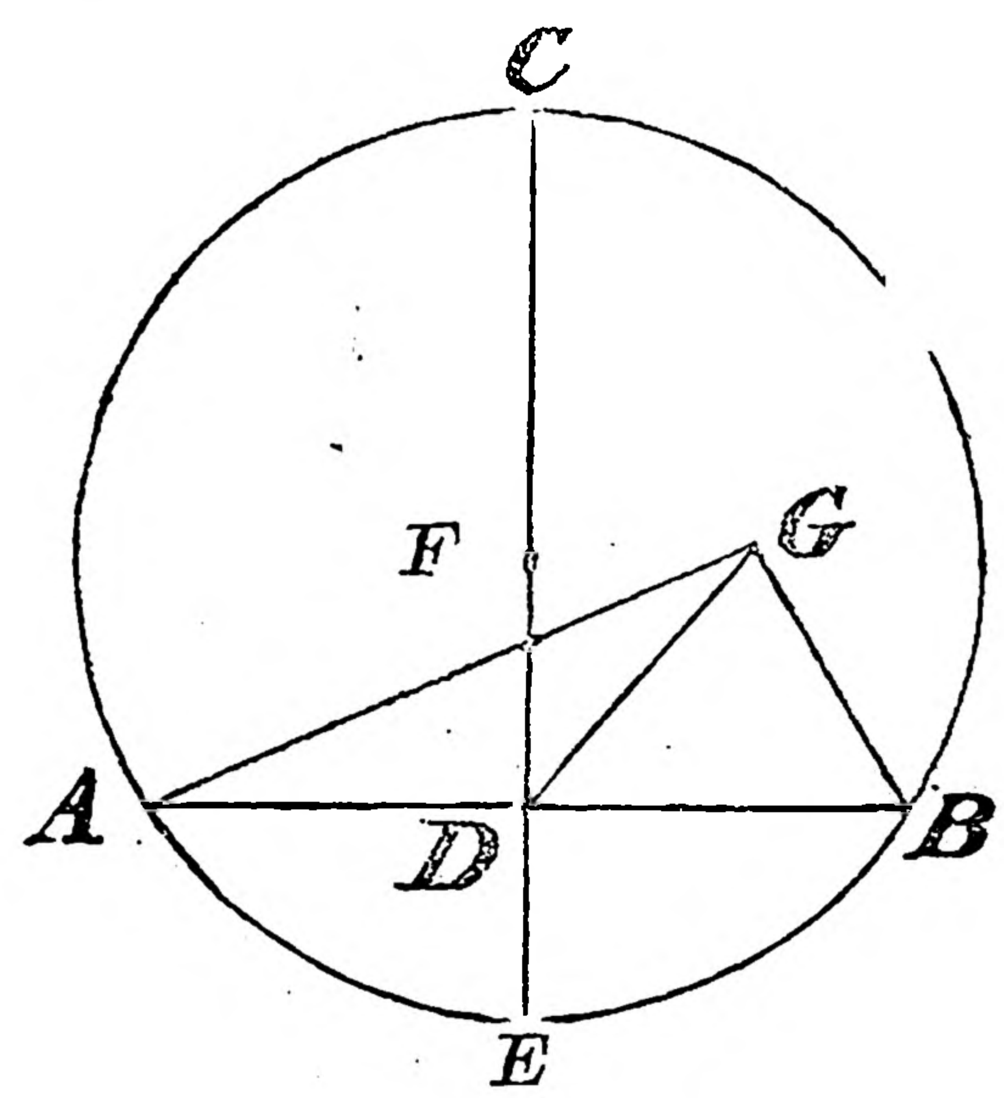
10. *Секторомъ* называется фигура, образуемая двумя радіусами и дугою, заключенною между ними.

11. *Подобные сегменты* суть тѣ, въ которыхъ углы равны или которые содержатъ равные углы.

Предложеніе 1. Найти центръ даннаго круга ABC (фиг. 113)?

Рѣшеніе. Проведемъ въ кругѣ произвольную прямую линію AB и раздѣлимъ ее пополамъ въ точкѣ D (кн.1, пред. 11), изъ этой точки возставимъ къ AB перпендикуляръ DC и продолжимъ его въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ C и E. Раздѣлимъ прямую CE пополамъ въ точкѣ F, то F и будетъ искомый центръ круга.

Фиг. 113.



Положимъ, что точка F не есть центръ круга ABC, а центръ его есть какая-то другая точка G. Проведемъ прямыя GA, GD, GB. Такъ какъ $AD=DB$, $AG=GB$ (кн. 1, опр. 15), GD общая, то $\triangle ADG=\triangle BDG$ (кн. 1, пред. 8), слѣдовательно углы ADG и GDB прямые (кн. 1, акс. 10). Но уголъ CDB также прямой, слѣдовательно $\angle CDB=\angle GDB$, что невозможно (кн. 1, акс. 9).

Итакъ точка G не можетъ быть центромъ, какъ и всякая другая, исключая точки F.

Слѣдствіе. Изъ сказаннаго очевидно, что если въ кругѣ одна прямая линія встрѣчаетъ посрединѣ другую подъ прямымъ угломъ, то на этой послѣдней прямой лежитъ центръ круга.

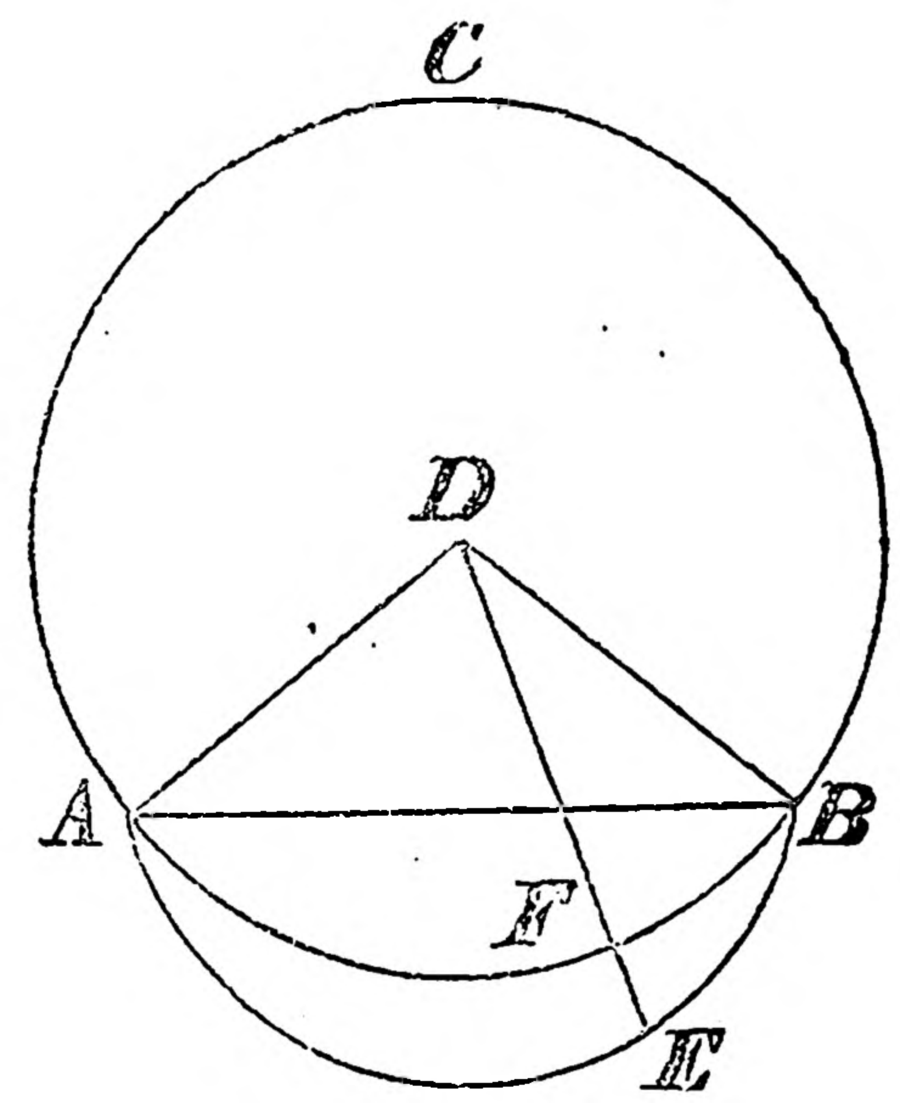
Примѣч. 2. Въ построеніи сказано продолжимъ CD до E: это предполагаетъ, что точка D лежитъ внутри круга, что Евклидъ доказываетъ въ слѣдующей теоремѣ.

Предложеніе 2. Прямая линія, которая соединяетъ двѣ произвольно взятыя точки A и B на окружности круга ABC, лежитъ внутри круга (фиг. 114).

Доказат. Если эта прямая не лежитъ внутри круга, то пусть она лежитъ внѣ, какъ напримѣръ AEB. Найдемъ центръ круга и пусть онъ будетъ D (кн. 3, пред. 1), проведемъ AD и BD. Между точками A и B на окружности круга возьмемъ какую нибудь точку F, соединимъ D съ F прямою DF и продолжимъ ее до точки E.

Такъ какъ $AD=DB$, то $\angle DAE=\angle DBE$ (кн. 1, пред. 5). Но

Фиг. 114.



$\angle DEB>\angle DAE$ (кн. 1, пред. 16), слѣдовательно $\angle DEB>\angle DBE$, откуда $DE<DB=DF$, что невозможно (кн. 1, акс. 9).

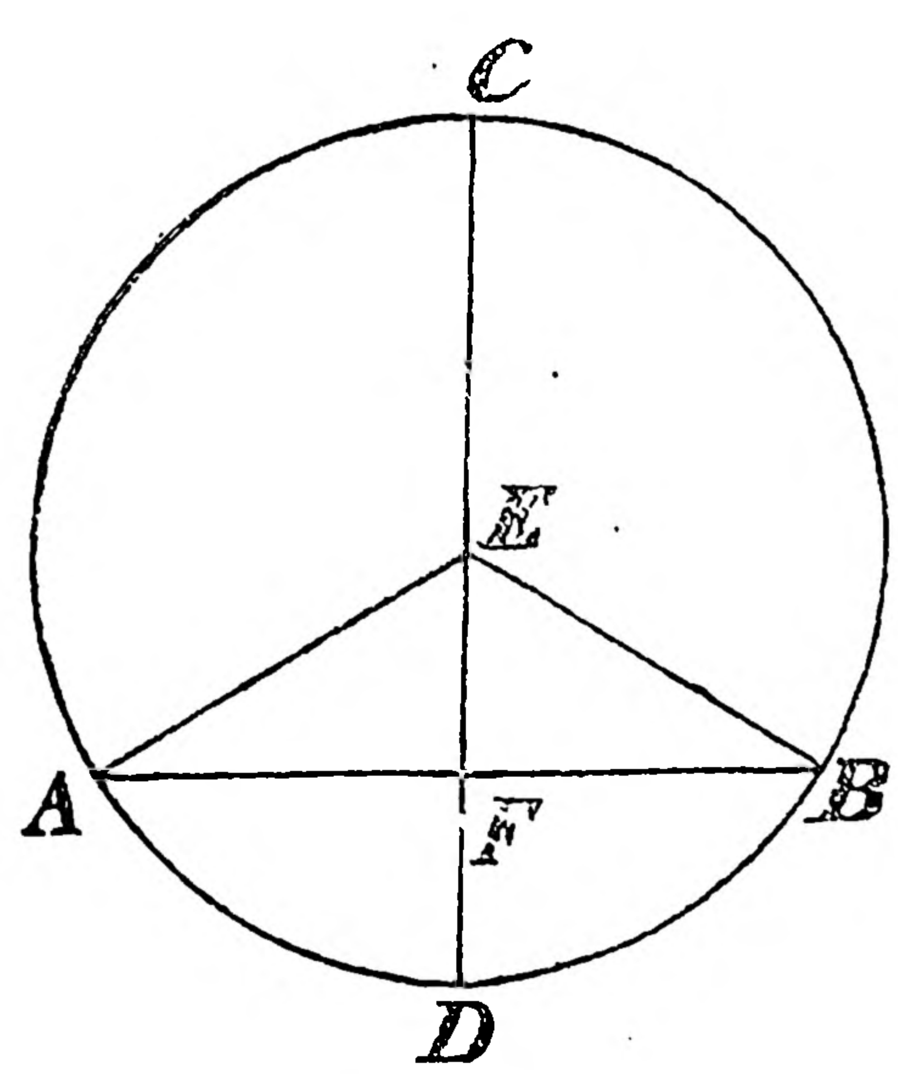
Слѣдовательно прямая линія, соединяющая точки A и B не можетъ лежать внѣ круга, точно также можно показать, что она не можетъ упасть на окружность, а слѣдовательно она лежитъ внутри круга.

Предложеніе 3. Если въ кругѣ ABC прямая CD, проходящая чрезъ центръ, встрѣчаетъ другую прямую AB, не проходящую чрезъ центръ, и дѣлитъ ее пополамъ, то прямая CD перпендикулярна къ AB; или, если прямая CD встрѣчаетъ прямую AB подъ прямымъ угломъ, то CD дѣлитъ AB пополамъ (фиг. 115).

Доказат. Найдемъ центръ E даннаго круга (кн. 3, пред. 1) и соединимъ E съ A и B.

Первая часть теоремы. Если CD въ точкѣ F дѣлитъ AB пополамъ, то $AF=FB$. EF есть сторона общая треугольниковъ AEF и BEF, $AE=EB$, слѣдовательно $\triangle AEF=\triangle BEF$ (кн. 1, пред. 8), откуда $\angle AFE=\angle EFB$, слѣдовательно эти углы прямые.

Фиг. 115.



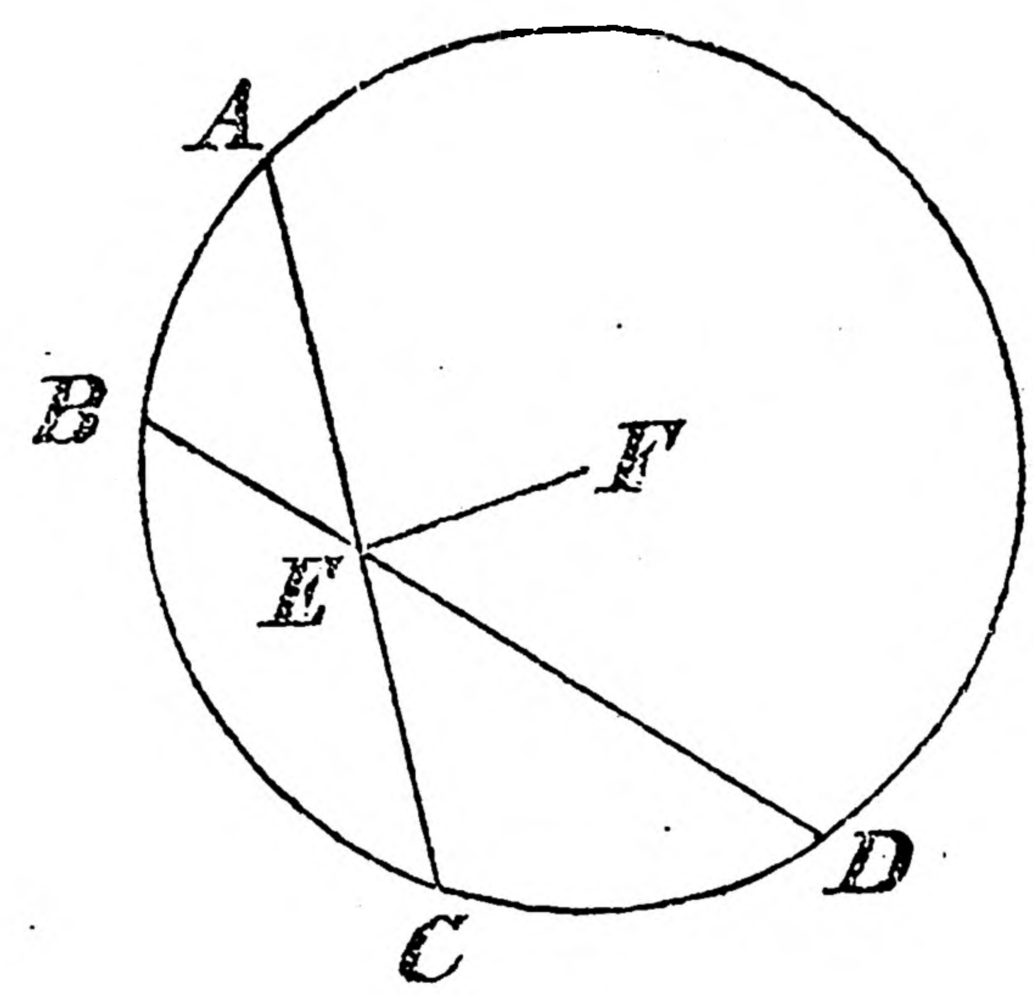
Вторая часть теоремы. Если прямая DC перпендикулярна къ AB, то $\angle AFE = \angle EFB$. Въ треугольникахъ AEF и BEF сторона EF общая, $AE = EB$, слѣдовательно $\triangle AEF = \triangle BEF$ (кн. 1, пред. 26), откуда $AF = FB$.

Примѣч. 3. Обѣ части этой теоремы суть обратныя одна другой, а вся теорема есть обратная слѣдствію предложенія 1-го.

Предложеніе 4. Если въ кругѣ $ABCD$ двѣ прямыя линіи AC и BD, не проходящія чрезъ центръ, встрѣчаются, то каждая изъ нихъ дѣлитъ другую на двѣ неравныя части (фиг. 116).

Доказат. Положимъ что каждая изъ нихъ другую дѣлитъ пополамъ, такъ что $AE = EC$ и $BE = ED$.

Фиг. 116.

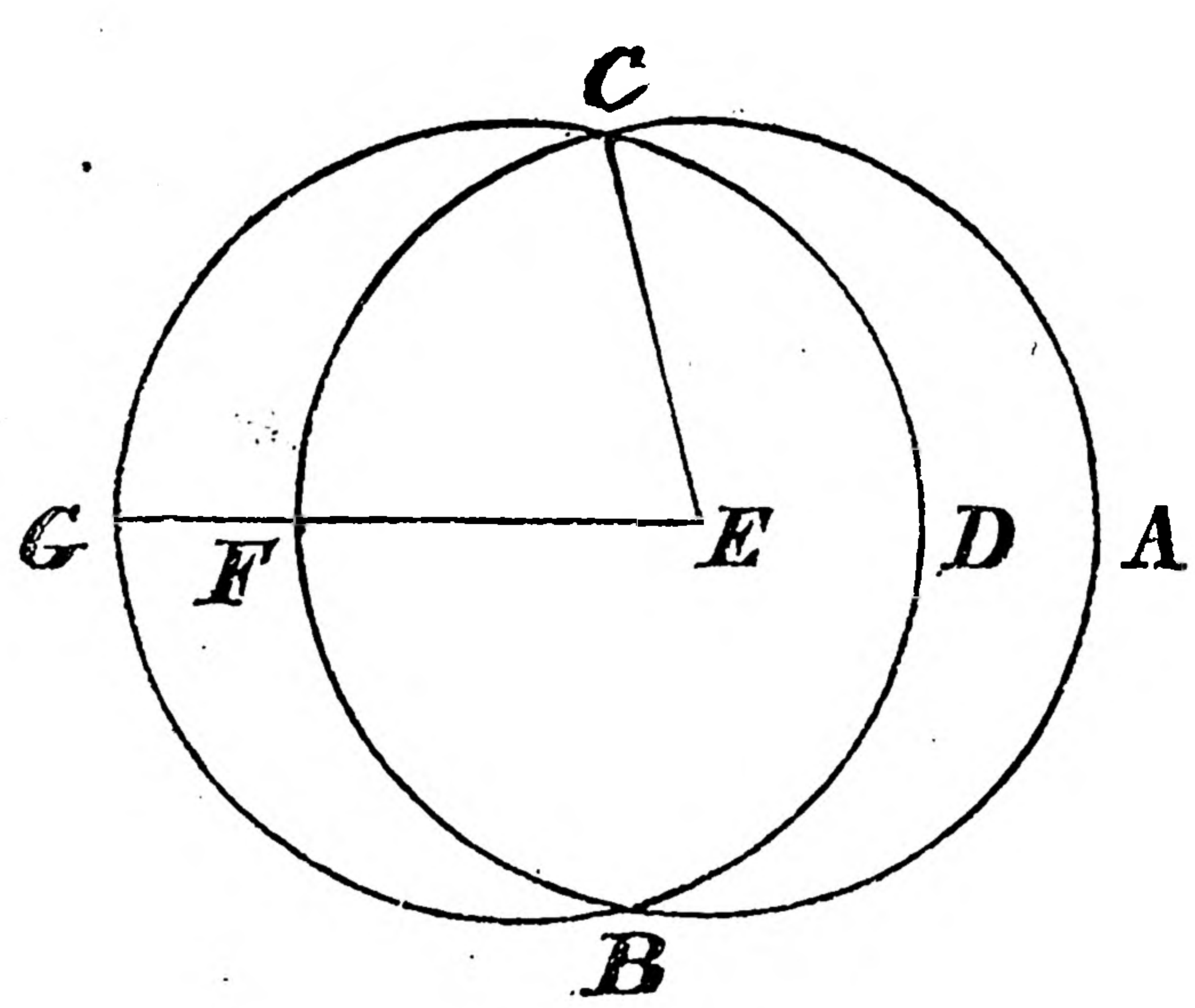


Если F есть центръ круга, то, соединяя E съ F, прямая EF будетъ перпендикулярна, какъ къ AC, такъ и къ BD (кн. 3, пред. 3), слѣдовательно $\angle FEA = \angle FEB$, что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно и то невозможно, чтобы прямыя AC и BD одна другую дѣлили пополамъ.

Предложеніе 5. Два пересѣкающіеся круга ABC и CDG не могутъ имѣть общаго центра (фиг. 117).

Доказат. Положимъ, что эти круги, пересѣкаясь въ точкахъ C и B, имѣютъ общій центръ E. Соединимъ одну изъ точекъ пересѣченія, напримѣръ C, съ центромъ и проведемъ изъ центра E прямую EFG въ произвольномъ направленіи.

Фиг. 117.

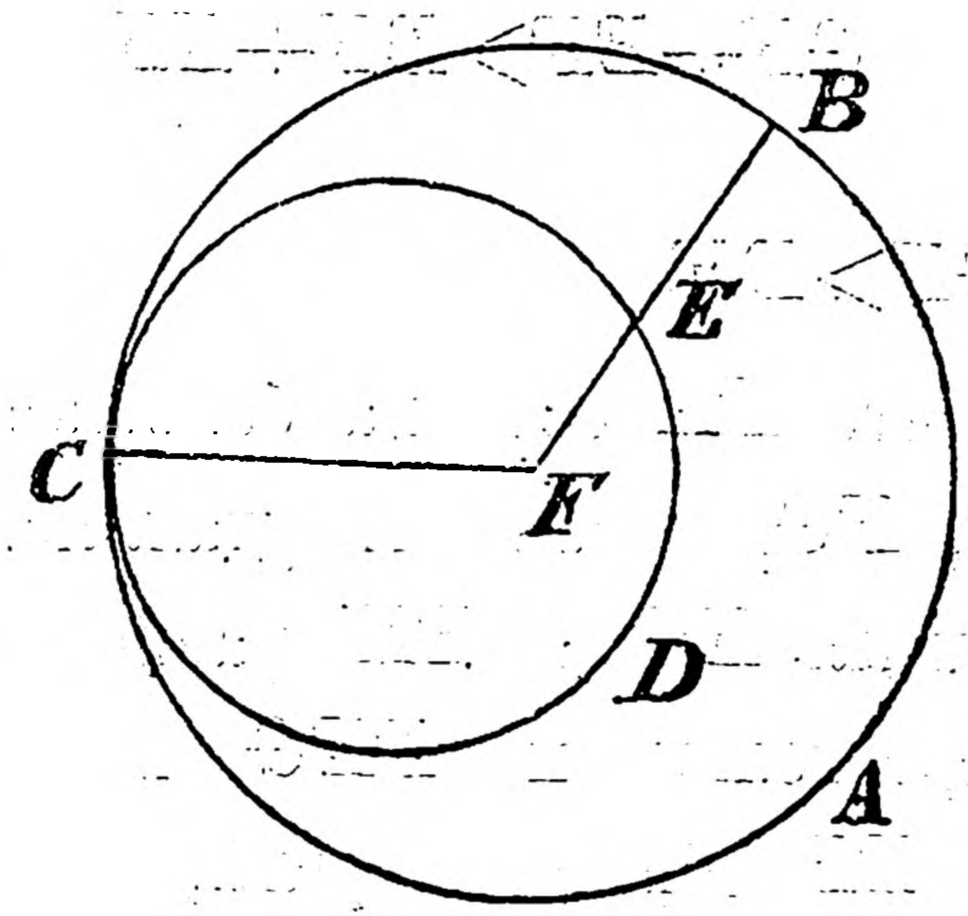


Такъ какъ $EC = EF$ и $EC = EG$ (кн. 1, опред. 15), то слѣдуетъ, что $EF=EG$, что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно два пересѣкающіеся круга не могутъ имѣть общаго центра.

Предложеніе 6. Два круга ABC и CDE, касающіеся внутренно, не могутъ имѣть общаго центра (фиг. 118).

Доказат. Положимъ, что эти круги, касающіеся внутренно въ точкѣ C, имѣютъ общій центръ F.

Фиг. 118.

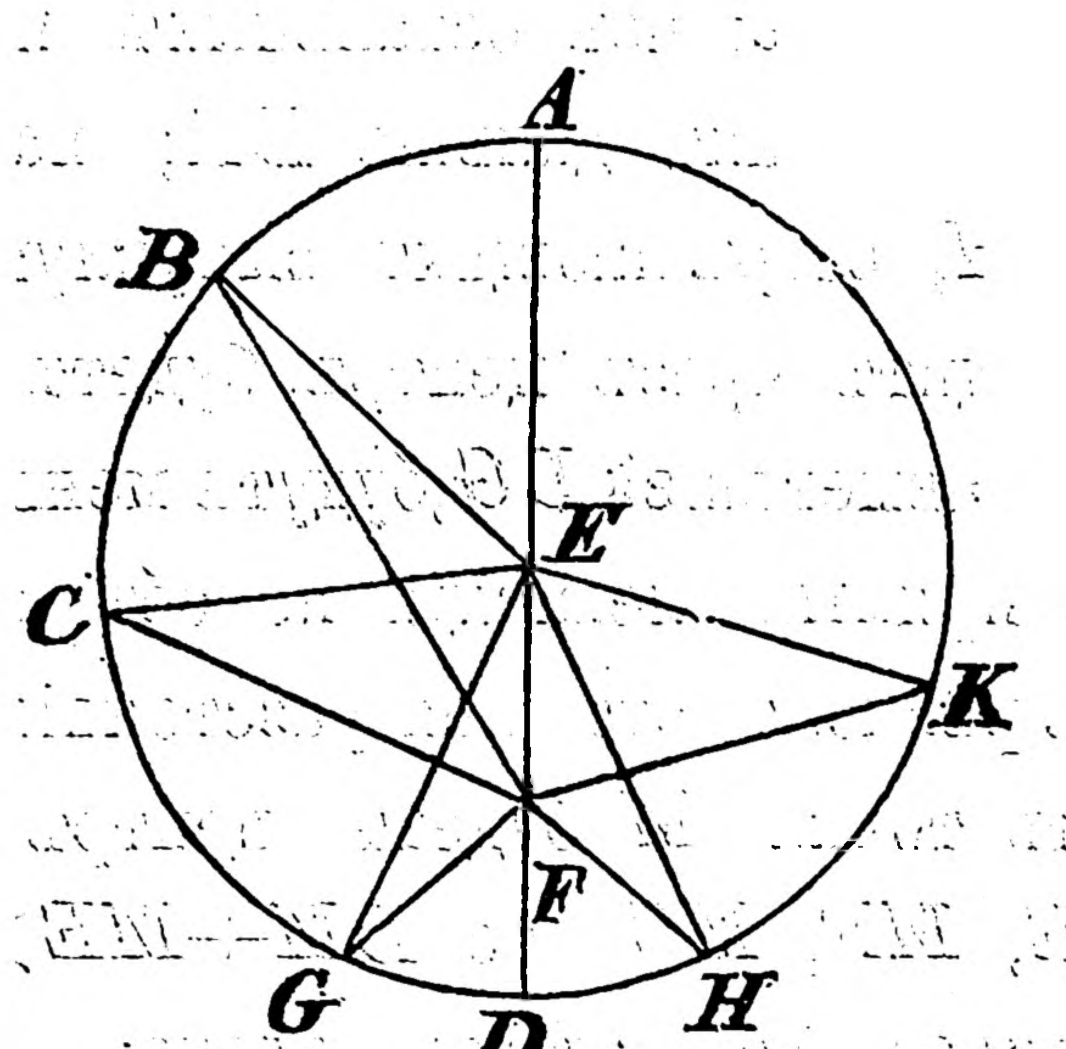


Соединимъ центръ F съ точкою касанія C и изъ центра проведемъ прямую FEB въ произвольномъ направленіи.

Такъ какъ $FC=FE$ и $FC=FB$ (кн. 1, опред. 15), то $FE=FB$, что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно невозможно, чтобы касающіеся внутренно круги имѣли общій центръ.

Предложеніе 7. Если внутри круга $ABCD$ возьмемъ точку F, отличную отъ центра E, и изъ этой точки проведемъ прямыя къ окружности круга, то прямая FEA, проходящая чрезъ центръ, будетъ наибольшая, а ея продолженіе FD будетъ наименьшая; изъ остальныхъ прямыхъ тѣ, которыя ближе къ FA, будутъ больше тѣхъ, которыя дальше отъ FA; изъ этихъ послѣднихъ, тѣ, которыя находятся на одинаковомъ разстояніи по обѣ стороны ED, будутъ равны (фиг. 119).

Фиг. 119.



Доказат. Проведемъ изъ точки F прямыя FB, FC, FG и соединимъ точки B, C, G съ центромъ E, то въ треугольникѣ BEF мы имѣемъ (кн. 1, пред. 20) $BE+EF>FB$, но $BE=AE$ (кн. 1, опред. 15), а $AE+EF=AF$, слѣдовательно $AF>FB$.

Треугольники BEF и CEF имѣютъ по двѣ равныя стороны $BE=CE$ (кн. 1, опред. 15), EF общая, $\angle BEF>\angle CEF$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 24) и $BF>CF$. На томъ же основаніи $FC>FG$.

Въ треугольникѣ EGF $GF+EF>EG$, но $EG=ED=DF+EF$, слѣдовательно:

$$GF+EF>DF+EF$$

откуда (кн. 1, акс. 5) $GF>DF$.

Изъ этого видимъ, что FA есть наибольшая, а FD наименьшая изъ прямыхъ линій FB, FC, FG, и всѣ онѣ удаляясь отъ FA, уменьшаются.

Положимъ, что прямыя EG и EH равно удалены отъ ED, т. е. $\angle FEG=\angle FEH$, то треугольники FEG и FEH имѣютъ по двѣ стороны равныя: $EG=EH$, EF общая и углы, заключенные между этими сторонами, равны, слѣдовательно $FG=FH$ (кн. 1, пред. 4). Предположить, что кромѣ FH есть еще другая прямая, напримѣръ FK, равная FG, невозможно по выше-доказанному.

Это послѣднее предложеніе можно еще доказать такъ: пусть $FK=FG$. Треугольники FEG и FEK будутъ имѣть всѣ стороны равныя: $FK=FG$, по положенію, $EK=EG$ (кн. 1, опред. 15) и EF общая, слѣдовательно $\angle FEK=\angle FEG$, но $\angle FEG=\angle FEH$, слѣдовательно $\angle FEK=\angle FEH$, что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно по эту сторону наименьшей FD есть только одна $FH=FG$.

Предложеніе 8. Если изъ какой нибудь точки D, взятой внѣ круга ABC, проведемъ къ окружности произвольное число прямыхъ линій, изъ коихъ одна DA проходитъ чрезъ центръ, то наибольшая изъ прямыхъ DA, DE, DF, DC, встрѣчающихъ вогнутую часть окружности, будетъ прямая DA, проходящая чрезъ центръ; изъ остальныхъ прямыхъ, лежащія ближе къ DA будутъ больше лежащихъ дальше DA; напротивъ, та изъ прямыхъ DG, DK, DL, DH, встрѣчающихъ выпуклую часть окружности, которой продолженіе проходитъ чрезъ центръ, будетъ наименьшая; изъ остальныхъ, лежащія ближе къ наименьшей DG, будутъ меньше тѣхъ, которыя лежатъ дальше DG. Наконецъ прямыя, лежащія по обѣ стороны прямой, проходящей чрезъ центръ, въ равномъ отъ нея разстояніи, будутъ равны (фиг. 120).

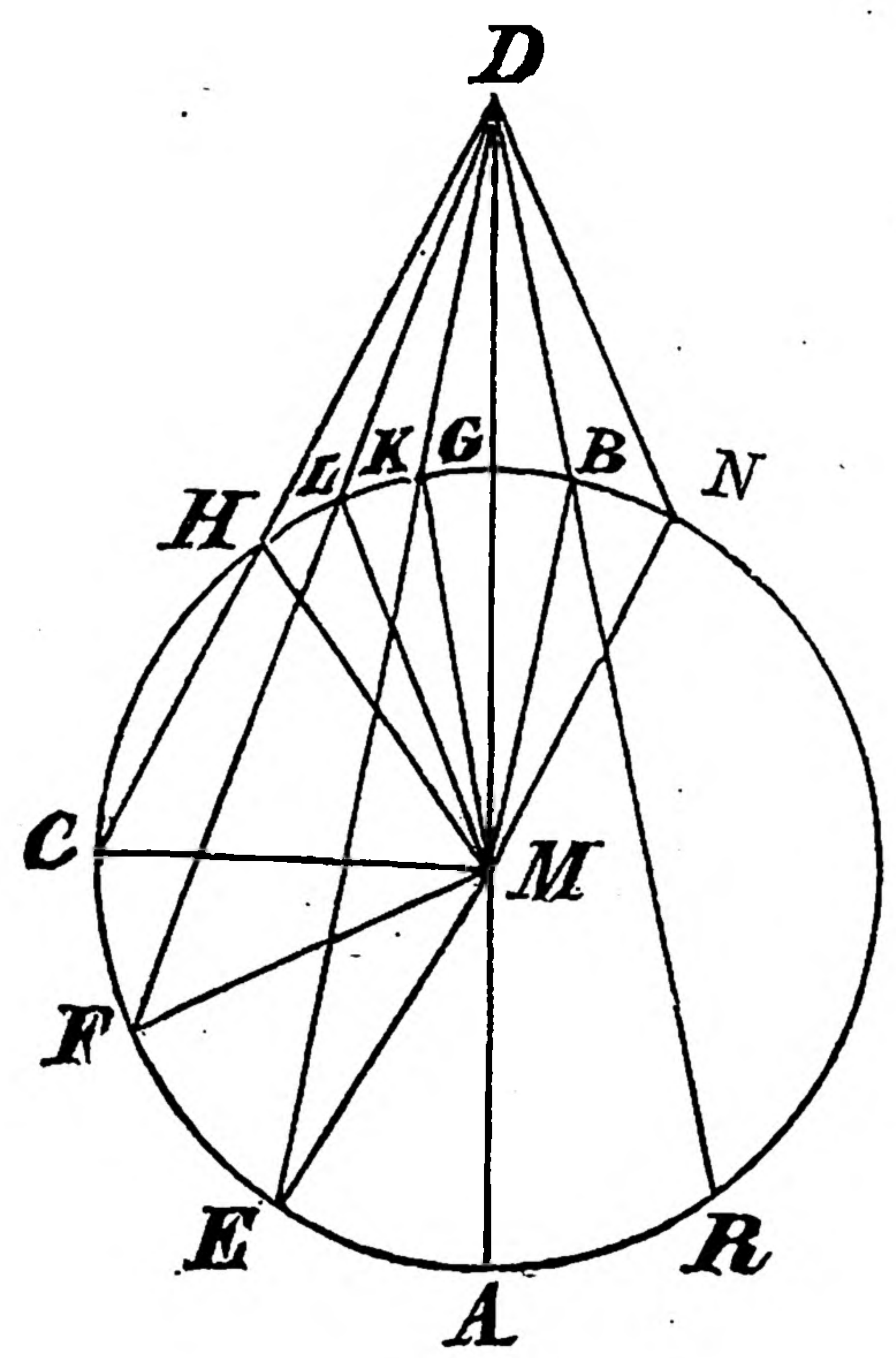
Доказат. а) Пусть точка M будетъ центръ даннаго круга ABC. Проведемъ прямыя ME, MF, MC, то $DM+ME>DE$ (кн. 1, пред. 20), но $ME=MA$ (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно:

$$DM+MA>DE$$

откуда $DA > DE$.

Треугольники DME и DMF имѣютъ по двѣ равныя стороны: $ME = MF$ (кн. 1, опред. 15), DM общая, уголъ $\angle DME > \angle DMF$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 24) $DE > DF$, точно также $DF > DC$.

Фиг. 120.



b) Проведемъ прямыя MH, ML, MK, то $MK + KD > DM$ (кн. 1, пред. 20), т. е. $MK + KD > MG + DG$, но $MK = MG$, (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно (кн. 1, акс. 5) $KD > DG$.

Треугольники DMH и DML имѣютъ по двѣ равныя стороны $MH = ML$ (кн. 1, опред. 15), MD общая, уголъ $\angle DMH > \angle DML$, слѣдовательно $DH > DL$, точно также $DL > DK$.

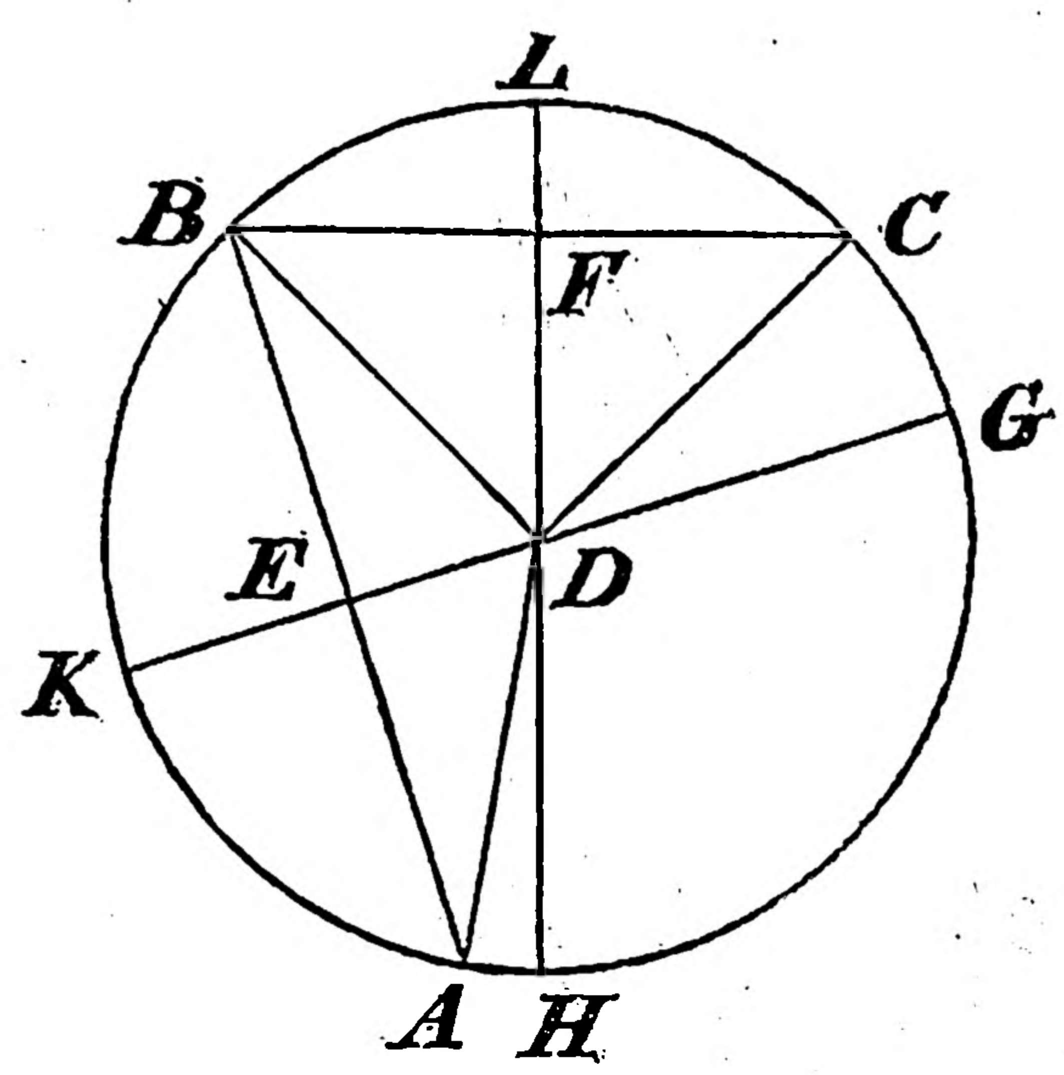
c) Положимъ теперь, что прямыя DK и DB равно удалены, т. е. что $\angle KDM = \angle BDM$. Треугольники MKD и MBD имѣютъ по двѣ равныя стороны $MK = MB$ (кн. 1, опред. 15), MD общая, уголъ $\angle KDM = \angle BDM$, слѣдовательно, (кн. 1, пред. 4) $DK = DB$. Положимъ еще, что кромѣ DB есть еще другая прямая $DN = DK$; если это возможно, то, замѣчая что мы имѣемъ $DK = DB$ и $DK = DN$, мы найдемъ (кн. 1, акс. 1), что $DB = DN$, что невозможно, вслѣдствіе доказаннаго въ b).

Примѣч. 4. Въ предложеніи 7, доказывая что $FC > FG$, было взято, что $\angle BEF > \angle CEF$, а между тѣмъ дано, что $\angle BFD > \angle BFG$. Въ пред. 8 было предположено, что точка K находится внутри треугольника DLM, а точка E внѣ треугольника DMF. Оба эти положенія можно доказать съ помощью предложеній 16 и 21 книги 1.

Предложеніе 9. Если изъ какой нибудь точки D, лежащей внутри круга ABC, можно провести къ окружности больше двухъ прямыхъ линій DA, DB, DC равныхъ между собою, то точка D будетъ центръ круга ABC.

Доказат. 1) Соединимъ точки A и B, B и C прямыми AB и BC и раздѣлимъ AB и BC въ точкахъ E и F пополамъ (кн. 1, пред. 10). Проведемъ DE и DF и продолжимъ ихъ въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ K, G, L, H (фиг. 121).

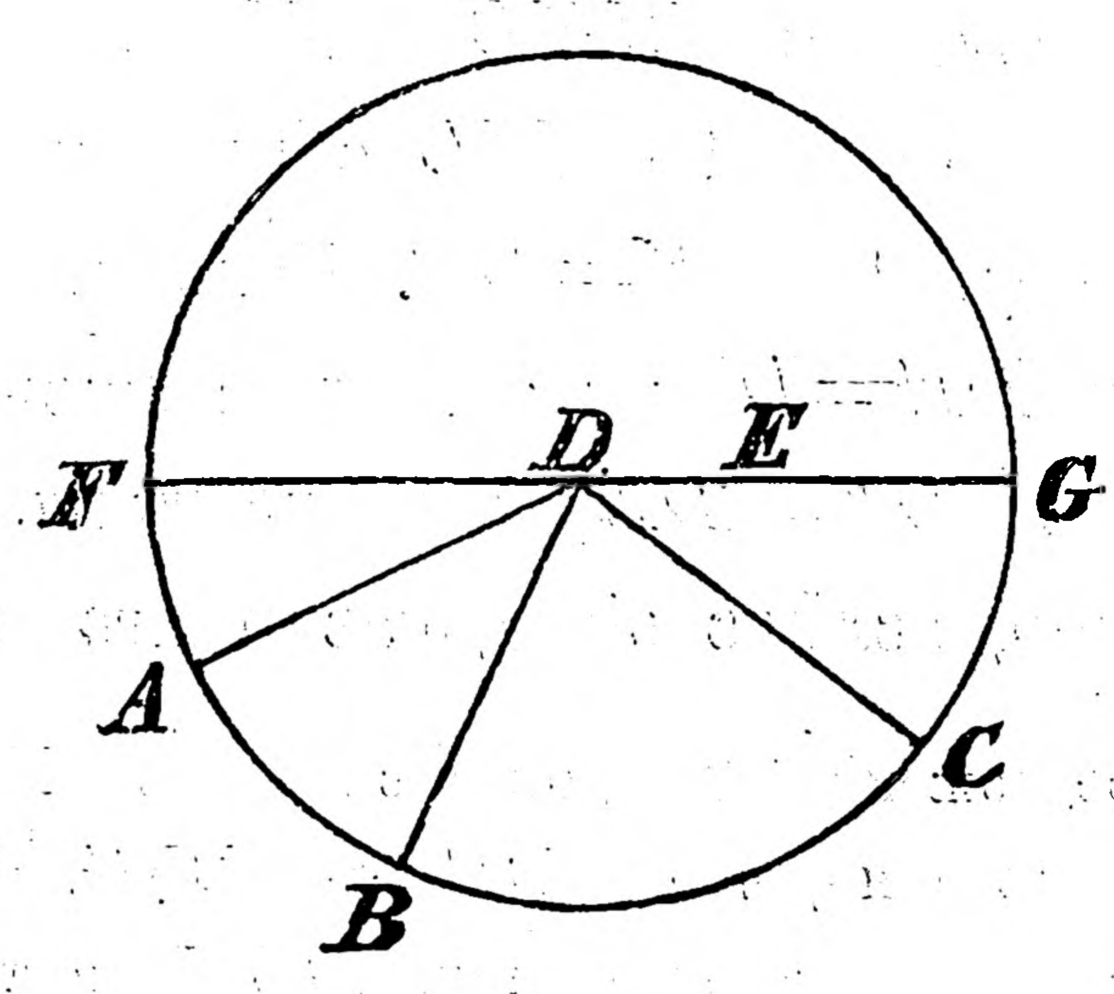
Фиг. 121.



Въ треугольникахъ AED, и BED сторона DE общая, $BE=AE$, $DA=DB$ по условію, слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) и $\angle DEA=\angle DEB$. Такъ какъ эти послѣдніе углы смежны, то каждый изъ нихъ есть прямой (кн. 1, акс. 10). Слѣдовательно прямая GK перпендикулярна къ прямой AB и дѣлитъ ее въ точкѣ E пополамъ, а на такой прямой лежитъ центръ круга (кн. 3, пред. 1). На томъ же основаніи центръ круга ABC лежитъ и на прямой LH, слѣдовательно центръ круга есть точка D, общая прямымъ GK и LH.

Доказат. 2) Пусть точка D не будетъ центръ круга ABC, и пусть центръ круга будетъ точка E (фиг. 122).

Фиг. 122.



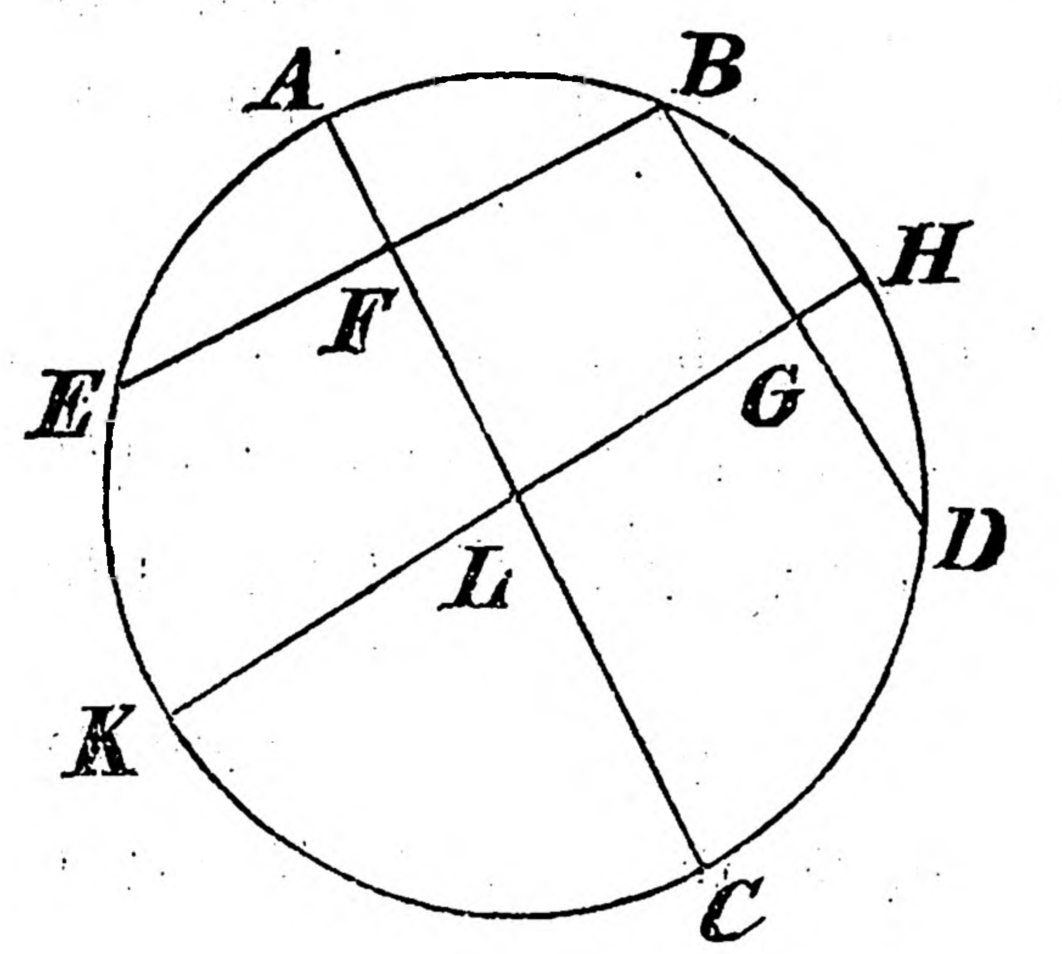
Проведемъ прямую DE и продолжимъ ее въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ F и G. Если точка D не есть центръ круга, то $DC>DB>DA$ (кн. 3, пред. 8), что противорѣчитъ положенію $DC=DB=DA$. Слѣдовательно, исключая точки D, никакая другая точка E не можетъ быть центромъ круга.

Примѣч. 5. Если бы мы взяли точку E внутри угла ADC, то нельзя бы было сказать, что $DC>DB$ и $DB>DA$, но можно сказать, что DC или DA меньше DB, а этого и достаточно для доказательства предложенія.

Предложеніе 10. Два круга, больше чѣмъ въ двухъ точкахъ, пересѣчься не могутъ.

Доказат. 1) Положимъ, что первый кругъ пересѣкаетъ другой кругъ ABC въ трехъ точкахъ D, B, E (фиг. 123).

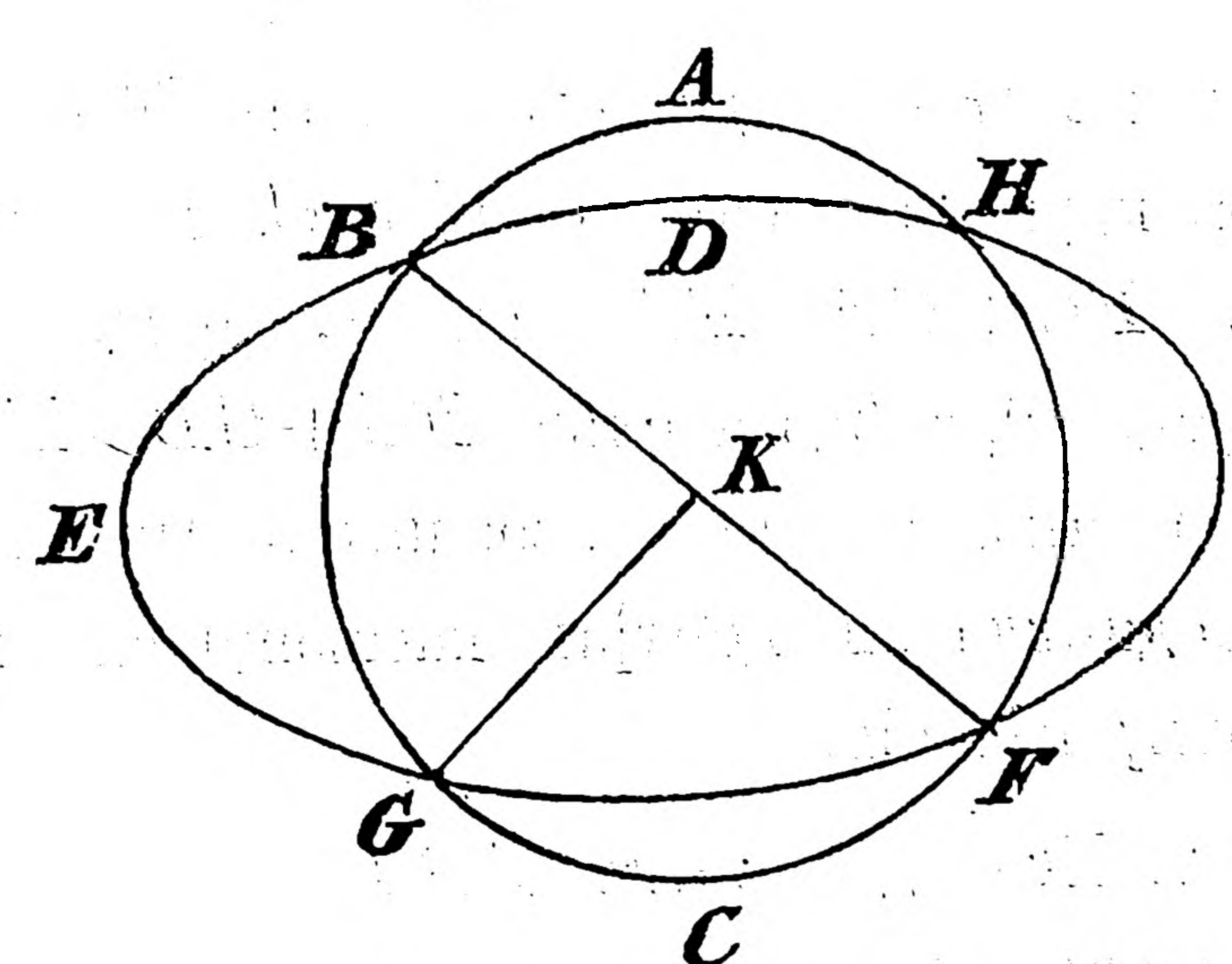
Фиг. 123.



Соединимъ точки E и B, B и D прямыми EB и BD и въ точкахъ F и G раздѣлимъ эти прямыя пополамъ. Изъ точекъ F и G возставимъ перпендикуляры FC и GK къ прямымъ BE и BD и продолжимъ эти перпендикуляры въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ A и C, K и H. Такъ какъ точки D, B, E лежатъ на обоихъ кругахъ, по положенію, то центры этихъ круговъ лежатъ на пересѣченіи прямыхъ KH и AC въ точкѣ L (кн. 3, пред. 1), что невозможно (кн. 3, пред. 5).

Доказат. 2) Пусть два круга ABC и DEF, если возможно, пересѣкутся въ трехъ точкахъ B, G и F (фиг. 124).

Фиг. 124.



Пусть K будетъ центръ круга ABC, соединимъ K съ B, G и F прямыми KB, KG, KF.

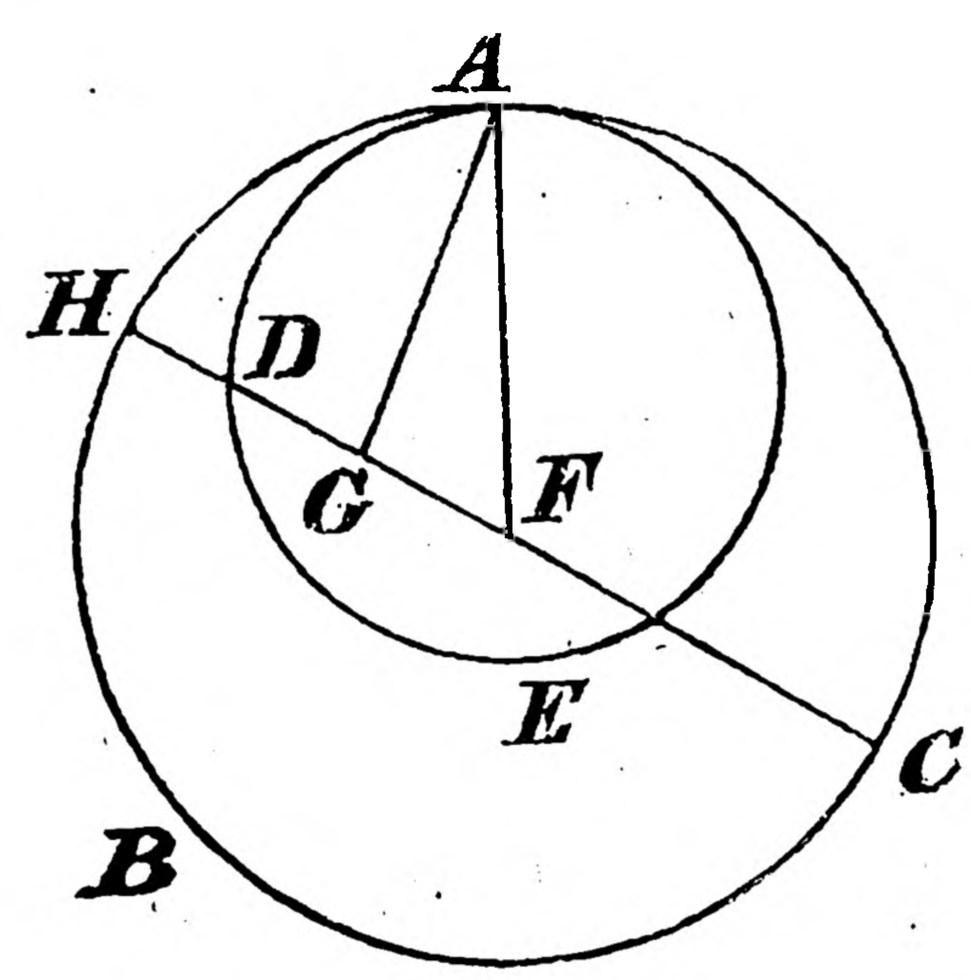
Такъ какъ K есть центръ круга ABC, то $KB=KG=KF$ (кн. 1, опред. 15). Но точка K находится также въ равномъ разстоянiи и отъ трехъ точекъ окружности DEF, слѣдовательно она есть центръ и круга DEF (кн. 3, пред. 9). Слѣдовательно точка K есть центръ двухъ пересѣкающихся круговъ, что невозможно (кн. 3, пред. 5).

Примѣч. 6. Такъ какъ точка K, въ послѣднемъ доказательствѣ, можетъ быть взята: внутри круга DEF, на его окружности и внѣ его, а Евклидъ разсматриваетъ только первое ея положенiе, то это доказательство не полно. Чтобы его пополнить положимъ, что точка K лежитъ внѣ круга DEF, но это будетъ противорѣчiе предложенiю 8 книги 3. Если точка лежитъ на окружности DEF, то мы получимъ такое же противорѣчiе.

Предложенiе 11. Если кругъ ADE касается круга ABC и лежитъ внутри этого послѣдняго, то прямая, соединяющая ихъ центры пройдетъ, будучи продолжена, чрезъ точку касанiя (фиг. 125).

Доказат. Положимъ, что прямая проведенная чрезъ центры F и G круговъ ABC и ADE не проходитъ чрезъ точку ихъ касанiя A.

Фиг. 125.



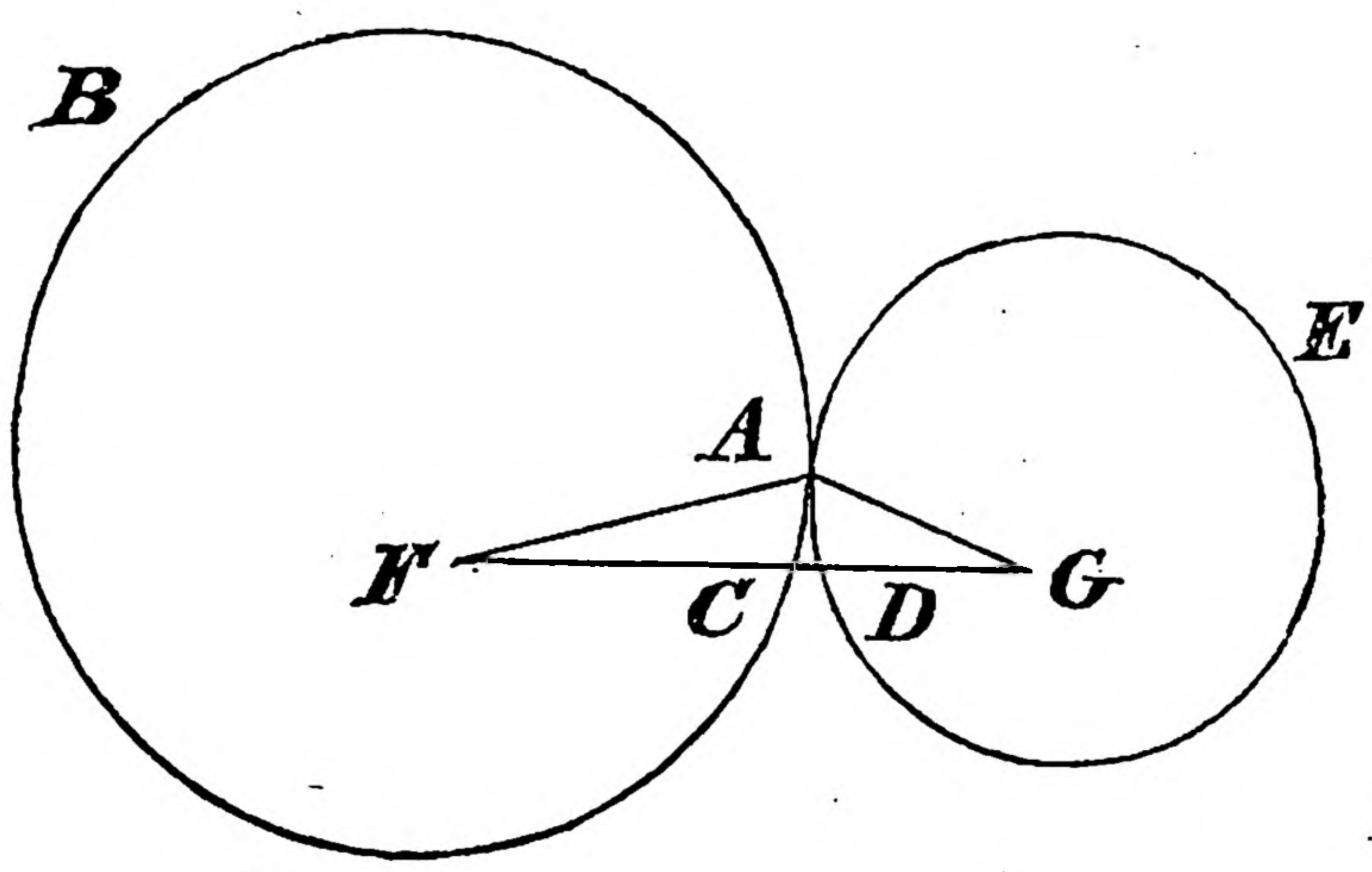
Проведемъ AF и AG и соединимъ центры F и G прямою HC, которая встрѣтитъ оба круги въ точкахъ H и C, D и E. Въ треугольникѣ AFG мы имѣемъ $FG+GA>FA$ (кн. 1, пред. 20), но $GA=GD$, $FA=FH$ (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно $FG+GD>FA=FH=FG+GH$, или $GD>GH$, (кн. 1, акс. 4), что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно прямая, соединяющая центры касающихся внутренно круговъ, проходитъ чрезъ точку касанiя.

Предложенiе 12. Если два круга ABC и ADE касаются внѣшне, то прямая, соединяющая ихъ центры, проходитъ чрезъ точку касанiя A (фиг. 126).

Доказат. Положимъ, что прямая FG, соединяющая центры F и G, не проходитъ чрезъ точку касанiя A.

Соединимъ точку касанія A съ центрами F и G прямыми AF и AG,

Фиг. 126.



то мы имѣемъ $AF=FC$ и $AG=GD$ (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно:

$$AF+AG=FC+GD$$

откуда $AF+AG<FG$, что невозможно, такъ какъ мы имѣемъ $AF+AG>FG$ (кн. 1, пред. 20). Слѣдовательно прямая, соединяющая центры внѣшне касающихся круговъ, должна пройти чрезъ точку касанія.

Примѣч. 7. Въ предъидущихъ двухъ предложеніяхъ говорится о точкѣ касанія, но только въ слѣдующемъ за этими предложеніями показано, что два круга касаются *только въ одной* точкѣ.

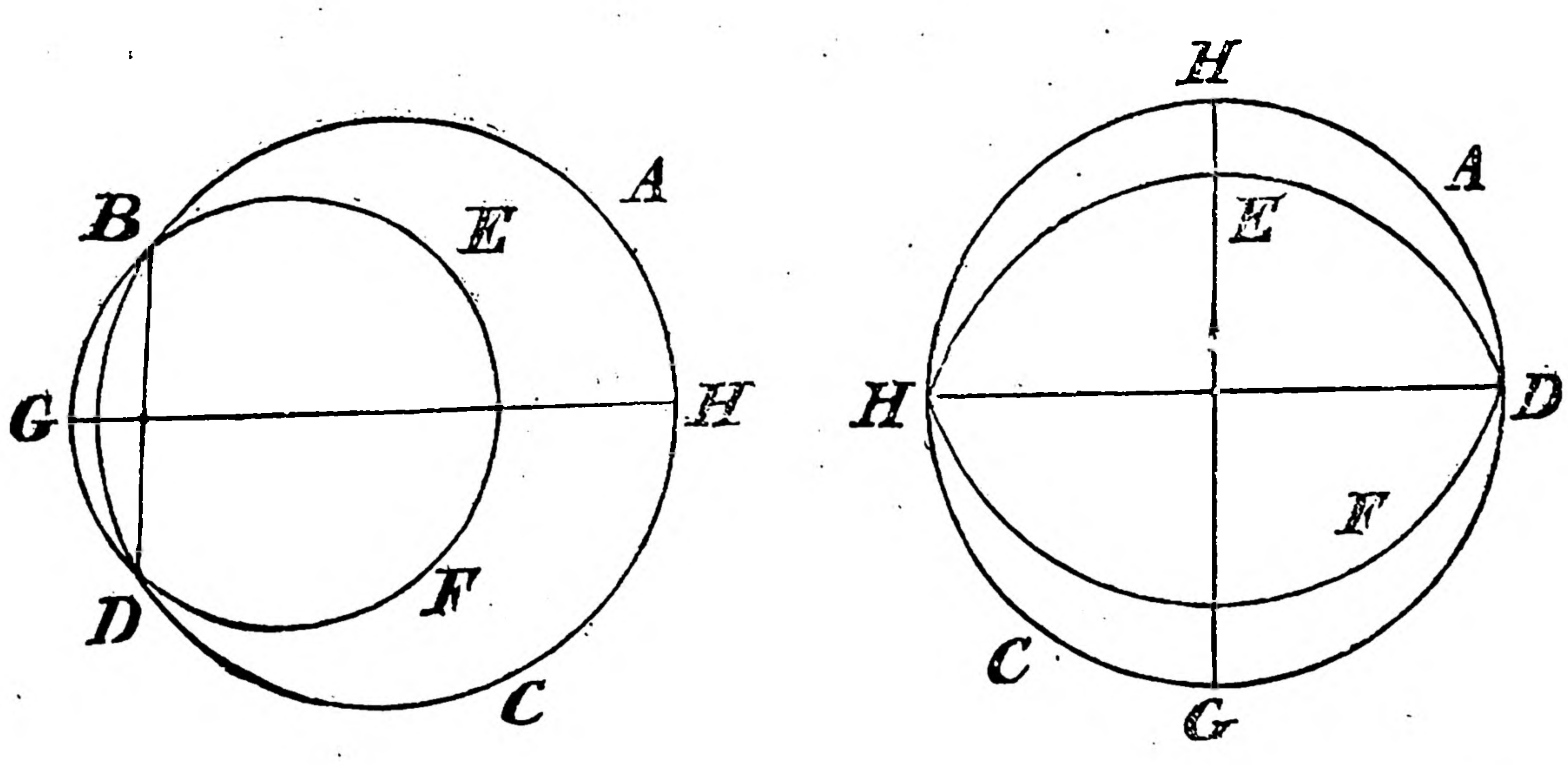
Замѣтимъ, что если въ предложеніи 11 точки D и H, и въ 12 точки C и D предположимъ совпадающими, то доказательства этихъ предложеній останутся годными. Оба эти предложенія можно соединить въ одно:

Если два круга касаются, то ихъ окружности могутъ имѣть общую точку только на прямой, соединяющей ихъ центры.

Предложеніе 13. Два круга касаются внутренно или внѣшне только въ одной точкѣ.

Доказат. 1) Положимъ, что кругъ EBF касается круга ABC внутренно въ двухъ точкахъ B и D (фиг. 127).

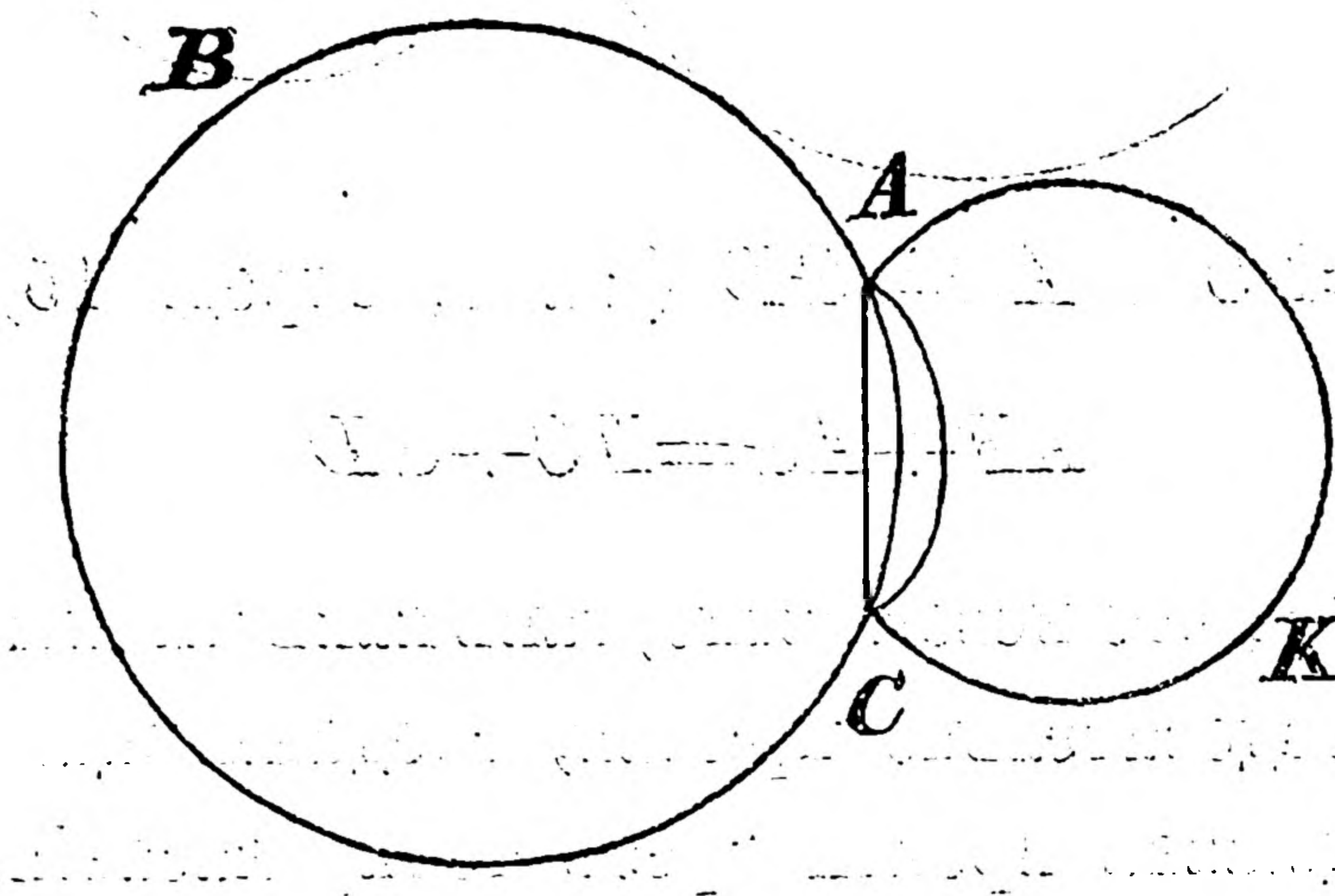
Фиг. 127.



Соединимъ точки B и D, изъ средины BD возставимъ перпендикуляръ (кн. 1, пред. 10 и 11). Такъ какъ точки B и D находятся на обѣихъ окружностяхъ, то прямая BD лежитъ внутри обоихъ круговъ (кн. 3, пред. 2). Слѣдовательно центры этихъ круговъ лежатъ на прямой HG (кн. 3, пред. 1). Но прямая, проходящая чрезъ центры касающихся круговъ, проходитъ и чрезъ точку касанія (кн. 3, пред. 11), что невозможно, такъ какъ точки касанія B и D не лежатъ на прямой GH.

Доказат. 2) Положимъ теперь, что два круга касаются внѣшне въ двухъ точкахъ A и C (фиг. 128).

Фиг. 128.



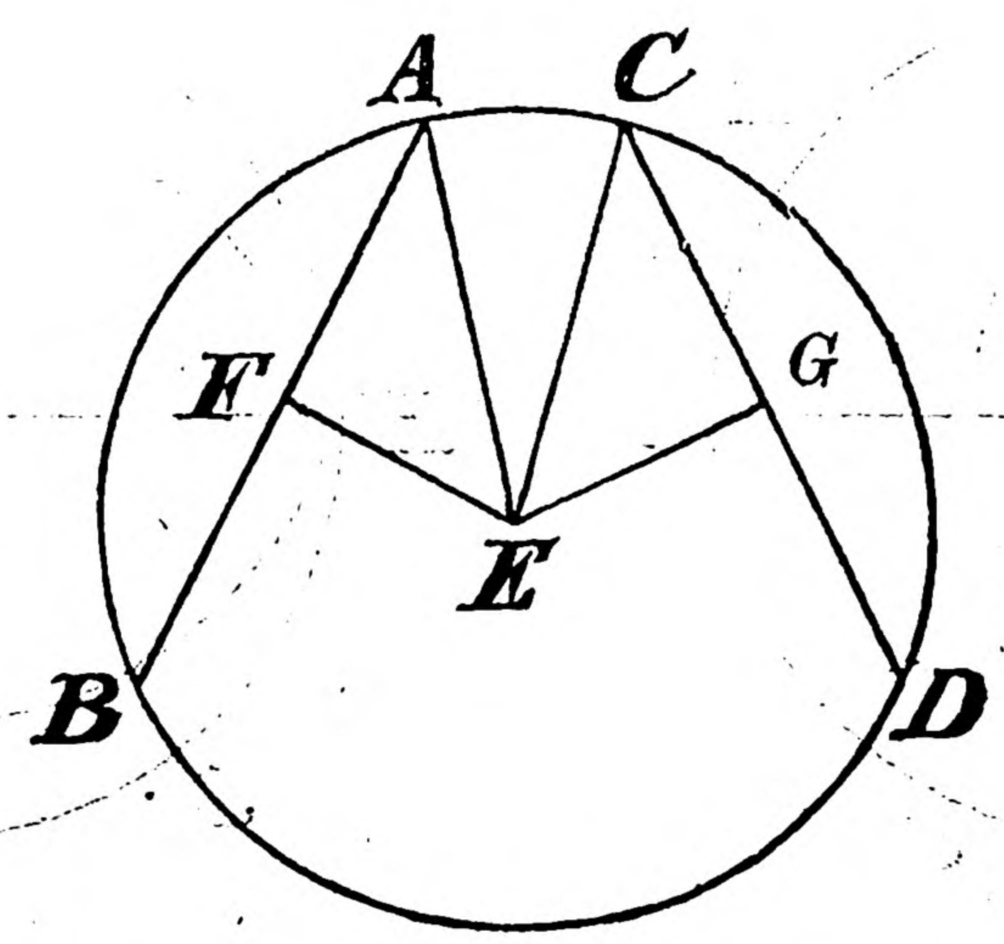
Соединимъ точки A и C прямою AC. Такъ какъ точки A и C лежатъ на окружности круга AKC, то прямая AC лежитъ внутри этого круга (кн. 3, пред. 2), но по положенію кругъ ACK лежитъ внѣ круга ACB, слѣдовательно прямая AC лежитъ внѣ круга ACB, что невозможно, такъ какъ точки A и C лежатъ на окружности ACB (кн. 3, пред. 2).

Слѣдовательно доказано, что два круга могутъ касаться только въ одной точкѣ.

Примѣч. 8. Предложенія 12 и 13 можно легко доказать на основаніи предложеній 7 и 8 этой книги, а слѣдовательно онѣ могутъ быть поставлены выше этихъ предложеній.

Предложеніе 14. Въ кругѣ $ABDC$ равныя прямыя (хорды) AB и CD равно отстоятъ отъ центра E и прямыя AB и CD равноотстоящія отъ центра E, равны (фиг. 129).

Фиг. 129.



Доказат. 1) Пусть $AB=CD$. Изъ центра E опустимъ на эти прямыя перпендикуляры EF и EG и соединимъ точки A и C съ центромъ E.

Такъ какъ прямая EF перпендикулярна къ хордѣ AB, то $AB=2AF$ (кн. 3 пред. 3), точно также $DC=2CG$. Но $AB=DC$, слѣдовательно и $AF=CG$ (кн. 1, акс. 7), а также $\square AF=\square CG$. Но $AE=CE$ (кн. 1, опр. 15), слѣдовательно и $\square AE=\square CE$. Въ треугольникахъ AEF и CEG углы F и G прямые, слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$\square AE=\square AF+\square EF \text{ и } \square EC=\square CG+\square EG.$$

Откуда (кн. 1, акс. 1):

$$\square AF+\square EF=\square CG+\square EG$$

или (кн. 1, акс. 3) $\square EF=\square EG$, слѣдовательно $EF=EG$, т. е. равныя прямыя AB и CD находятся въ равномъ разстояніи отъ центра E.

2) Если $EF=EG$, то $\square EF=\square EG$.

Но мы имѣемъ, какъ выше:

$$\square AF+\square EF=\square CG+\square EG$$

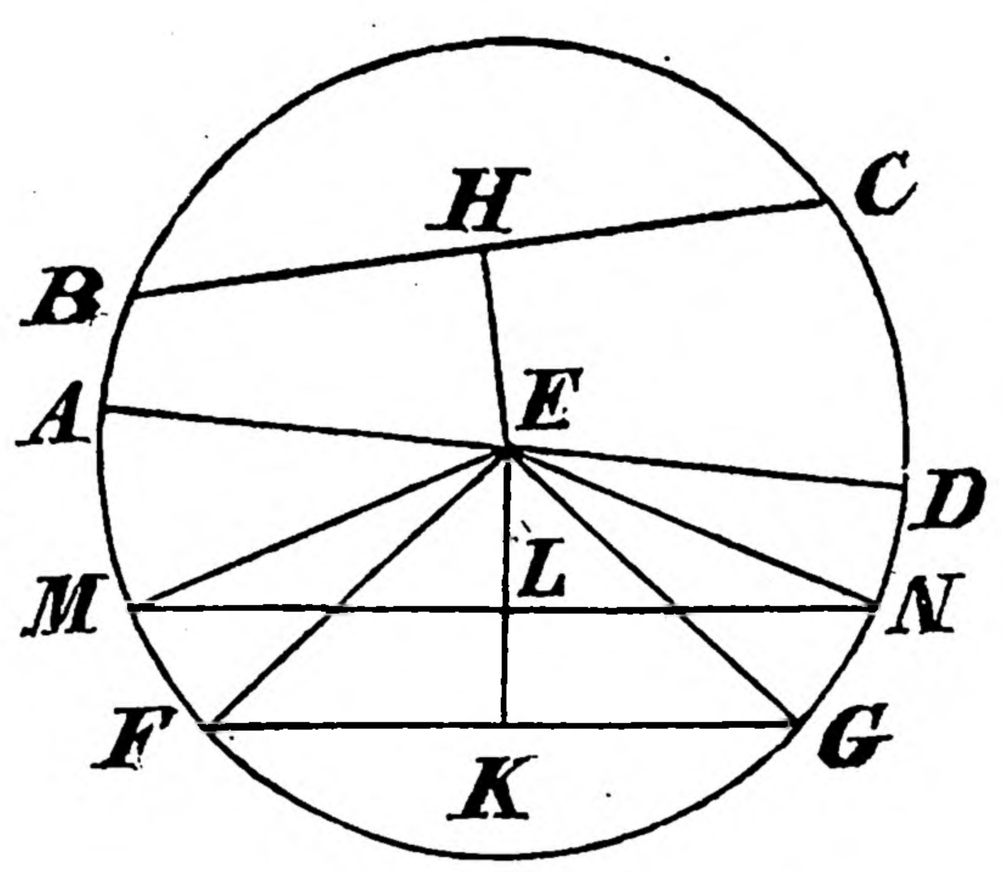
откуда $\square AF=\square CG$ (кн. 1, опред. 3), слѣдовательно $AF=CG$; но $AB=2AF$ и $CD=2CG$, слѣдовательно $AB=CD$ (кн. 1, акс. 6).

Примѣч. 9. Обѣ части этого предложенія можно доказать проще изъ равенства треугольниковъ AEF и CEG.

Предложеніе 15. Діаметръ AD круга $ABCD$ больше каждой изъ хордъ круга и каждая хорда, лежащая ближе къ центру E, больше хорды, лежащей дальше отъ этого центра (фиг. 130).

Доказат. Пусть данныя хорды будутъ BC и FG. Изъ центра E опустимъ на BC и FG перпендикуляры EK и EH, и пусть $EK>EH$, т. е. что хорда BC ближе къ центру чѣмъ хорда FG. На перпендикулярѣ EK отъ точки E отложимъ $EL=EH$ и изъ точки L возставимъ перпендикуляръ къ EK (кн. 1, пред. 11) и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ N и M. Такимъ образомъ получимъ хорду $MN=BC$ (кн. 3, пред. 14). Наконецъ соединимъ точки M, N, F, G съ центромъ E прямыми EM, EN, EF, EG.

Фиг. 130.



Такъ какъ $AE=EM$ и $ED=EN$ (кн. 1, опред. 15), то $AD=EM+EN$.

Но изъ треугольника MEN мы имѣемъ $EM+EN>MN$ (кн. 1, пред. 20) или $AD>MN=BC$.

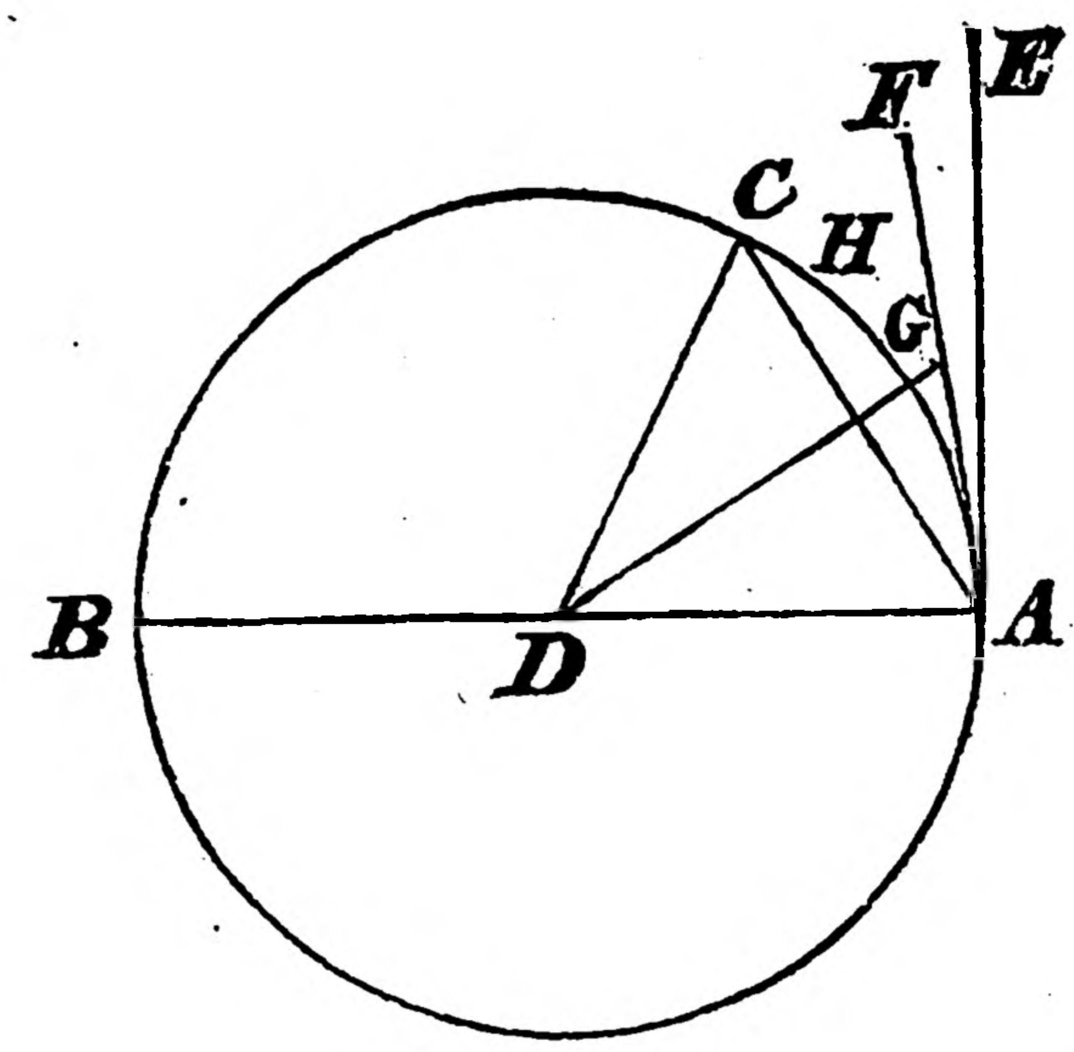
Точно также мы имѣемъ $EM=EF$, $EN=EG$ (кн. 1, опред. 15) и $\angle MEN>\angle FEG$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 24) $MN=BC>FG$.

Итакъ доказано, что діаметръ круга есть наибольшая хорда и что хорда лежащая ближе къ центру больше той, которая лежитъ дальше отъ центра.

Предложеніе 16. Перпендикуляръ AE, возставленный изъ конца A діаметра AB круга ABC, находится внѣ круга, и нельзя провести ни одной прямой, чрезъ точку A, между прямою AE и окружностью, которая бы не пересѣкала окружности (фиг. 131).

Доказат. 1) Положимъ, что перпендикуляръ, возставленный изъ точки A, какъ напримѣръ AC, лежитъ внутри круга.

Фиг. 131.



Соединимъ центръ D круга съ C, то $CD=AD$ (кн. 1, опред. 15), откуда $\angle DCA=\angle DAC$ (кн. 1, пред. 5), но уголъ DAC, по положенію, прямой, слѣдовательно и уголъ DCA также прямой, что невозможно (кн. 1, пред. 17). Изъ этого видимъ, что перпендикуляръ весь лежитъ внѣ круга ABC.

2) Между перпендикуляромъ AE и окружностью нельзя провести чрезъ точку A ни одной прямой, которая бы не встрѣтила окружности.

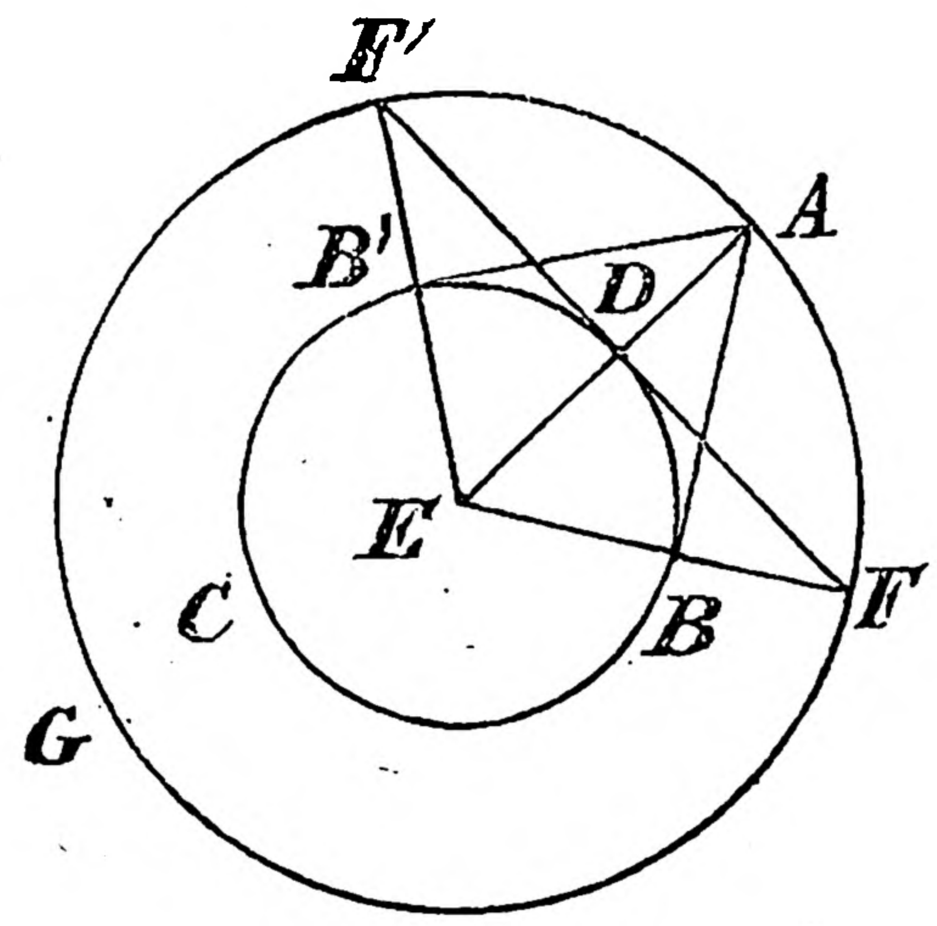
Положимъ, что возможно провести такую прямую и пусть она будетъ AF. Изъ центра D опустимъ на AF перпендикуляръ DG. Въ треугольникѣ DAG уголъ DGA прямой, по построенію, слѣдовательно уголъ GAD меньше прямаго (кн. 1, пред. 17), откуда $DA>DG$ (кн. 1, пред. 19), но $DA=DH$, слѣдовательно $DH>DG$, что невозможно.

Слѣдствіе. Изъ этого видно, что перпендикуляръ, возставленный изъ конца діаметра круга, касается круга (кн. 3, опред. 2) только въ одной точкѣ и что въ одной точкѣ окружности только одна прямая касается ея.

Предложеніе 17. Изъ данной точки A внѣ круга BCD провести касательную къ кругу (фиг. 132)?

Рѣшеніе. Соединимъ центръ E круги BCD съ точкою A прямою AE, эта прямая встрѣтитъ окружность въ точкѣ D. Изъ точки E радіусомъ равнымъ EA опишемъ окружность AGF, изъ точки D возставимъ перпендикуляръ DF къ EA (кн. 1, пред. 11), который встрѣтитъ окружность AGF въ точкѣ F, соединимъ точку F съ центромъ E, прямая FE встрѣтитъ окружность BCD въ точкѣ B, которую соединимъ съ данною точкою A. Прямая AB и будетъ касательная.

Фиг. 132.



Такъ какъ точка E есть центръ круга AGF, то $EA=EF$ (кн. 1, опред. 15). Точка E есть также и центръ круга BCD, слѣдовательно $ED=EB$. Уголъ AEF есть общій треугольникамъ EBA и EDF, слѣдовательно эти треугольники равны (кн. 1, пред. 4). Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ равенство угловъ EDF и EBA, но уголъ EDF прямой по построенію, слѣдовательно и уголъ EBA также прямой (кн. 1, акс. 11). Изъ этого видимъ, что изъ конца B прямой EB, проходящей чрезъ центръ круга BCD, возставленъ перпендикуляръ AB, слѣдовательно AB есть касательная въ точкѣ B къ кругу BCD (кн. 3, пред. 16).

Если бы данная точка A лежала на окружности BCD, напримѣръ въ точкѣ D, то чтобы провести касательную въ точкѣ D къ окружности, надобно только изъ точки D къ радіусу ED возставить перпендикуляръ DF (кн. 3, пред. 16).

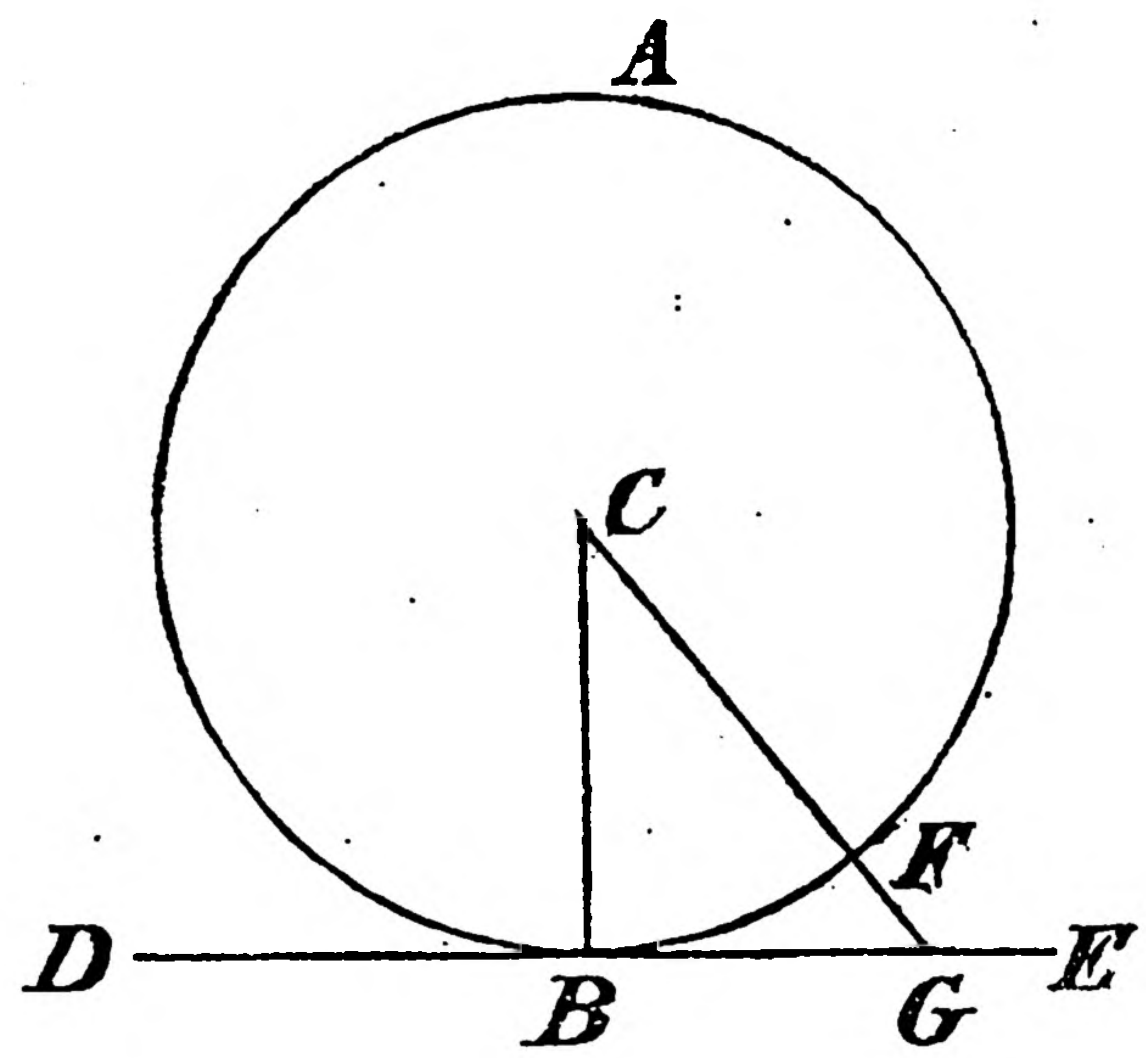
Примѣч. 10. Замѣтимъ еще, что перпендикуляръ DF, будучи продолженъ въ противоположную сторону, встрѣтитъ окружность еще въ другой точкѣ F', которая такимъ же построеніемъ даетъ другую касательную AB', изъ той же точки A, слѣдовательно, изъ данной точки внѣ круга можно провести двѣ касательныя къ окружности, обѣ эти касательныя равны и одинаково наклонены къ прямой AE. Есть еще другое рѣшеніе этой задачи, которое излагается во всѣхъ нашихъ руководствахъ.

Предложеніе 18. Если прямая DE касается круга AFB въ точкѣ

B, то радіусъ *CB*, проведенный изъ центра въ точку касанія *B*, перпендикуляренъ къ касательной *DE* (фиг. 133).

Доказат. Положимъ, что *CB* не есть перпендикуляръ къ *DE*, а что есть другая прямая *CG*, перпендикулярная къ *DE*, слѣдовательно уголъ *CGB* прямой, откуда $\angle CGB > \angle CBG$ (кн. 1, пред. 17), а изъ этого послѣдняго неравенства слѣдуетъ $BC > CG$ (кн. 1, пред. 19), но $BC = CF$ (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно $CF > CG$, что невозможно (кн. 1, акс. 9).

Фиг. 133.



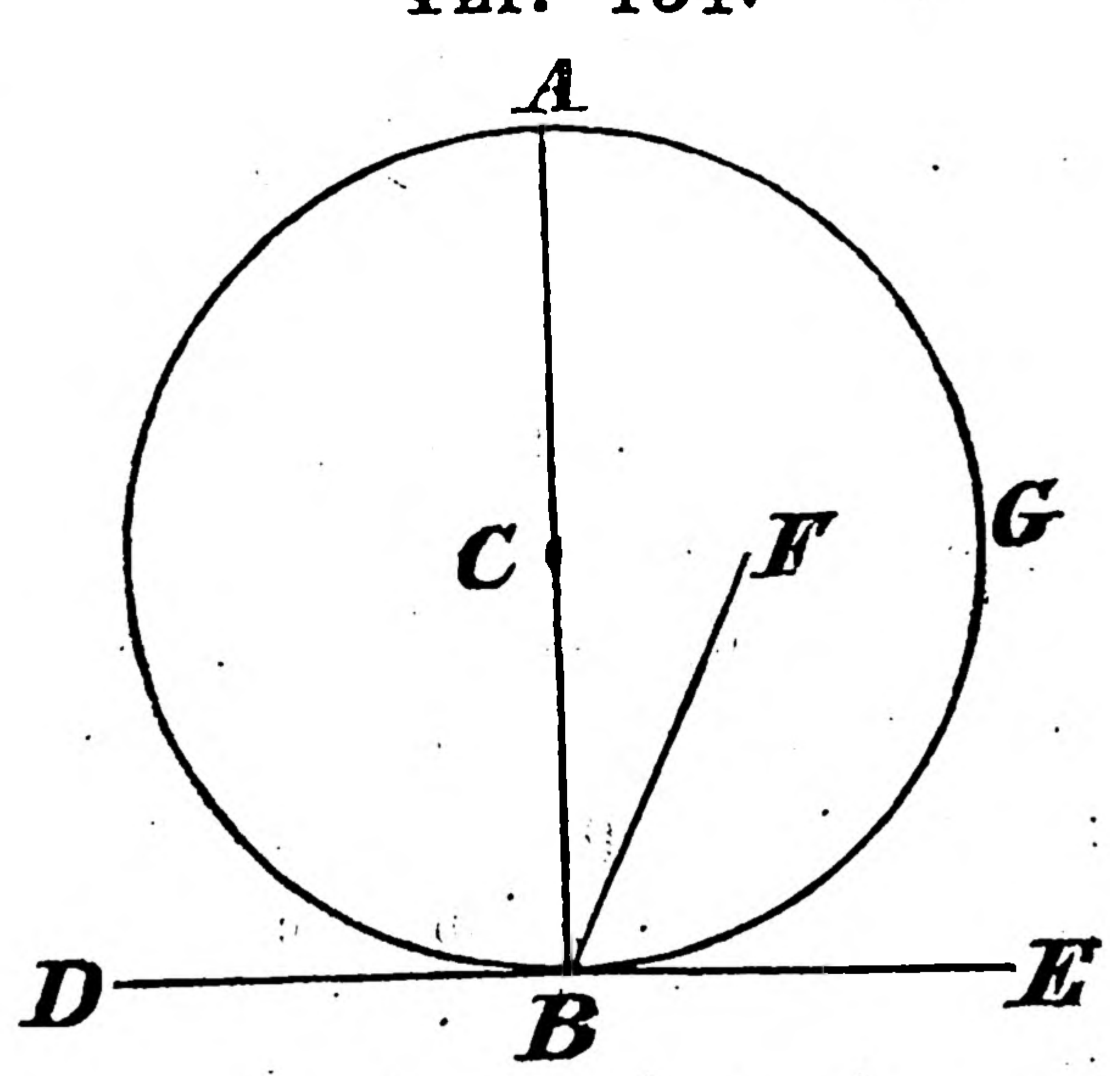
Слѣдовательно, исключая *CB*, никакая другая прямая, не можетъ быть перпендикулярна къ *DE*.

Примѣч. 11. Это предложеніе лишне, такъ какъ оно ничего не прибавляетъ къ предложенію 16 настоящей книги. Въ самомъ дѣлѣ, въ предложеніи 16 показано, что есть только одна прямая, касающаяся круга въ данной точкѣ, и что уголъ между этой прямой и радіусомъ, проведеннымъ въ точку касанія, есть прямой.

Предложеніе 19. Если прямая *DE* касается круга *AGB* въ точкѣ *B*, то перпендикуляръ *BA*, возставленный изъ точки касанія *B* къ касательной *DE*, пройдетъ чрезъ центръ *C* круга (фиг. 134).

Доказат. Положимъ, что центръ даннаго круга не находится на перпендикулярѣ *BA*, слѣдовательно онъ будетъ, гдѣ нибудь, въ точкѣ *F* внѣ этого перпендикуляра.

Фиг. 134.



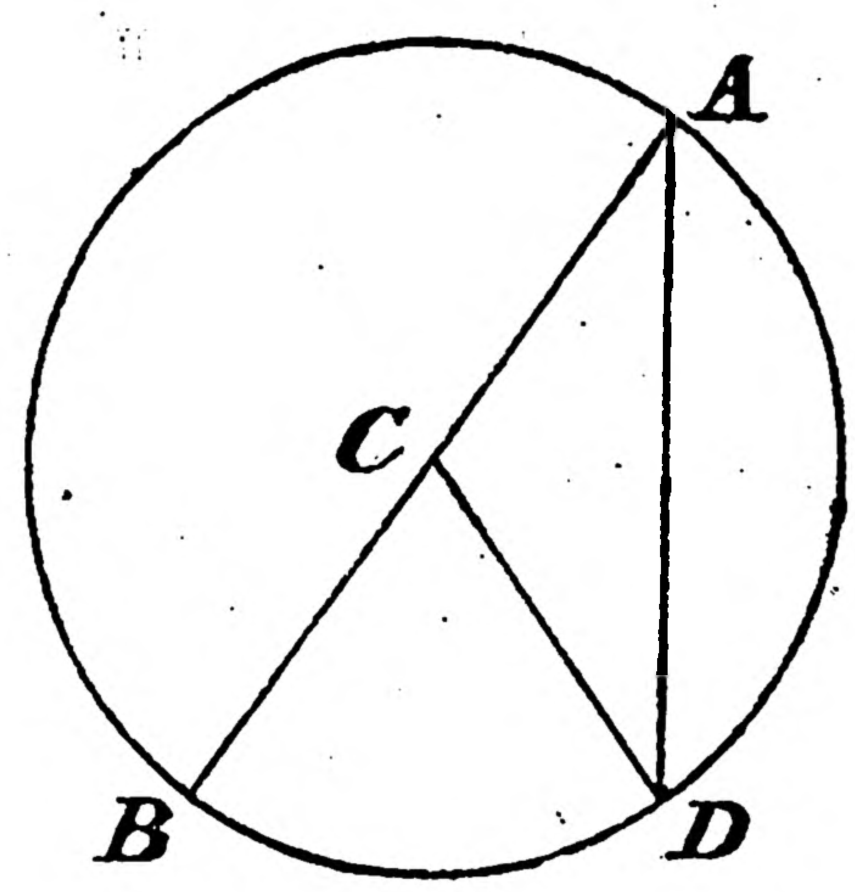
Соединимъ точку *F* съ *B*, то *FB* будетъ перпендикуляръ къ *DE* (кн. 3, пред. 18), слѣдовательно уголъ FBE прямой, а поэтому $\angle CBE = \angle FBE$ (кн. 1, акс. 10), что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно никакая точка, лежащая внѣ прямой BA, не можетъ быть центромъ круга AGB.

Предложеніе 20. Въ кругѣ ABD уголъ BCD, имѣющій вершину въ центрѣ C, равенъ удвоенному углу BAD, имѣющему вершину A на окружности круга, если эти углы упираются сторонами на одну и ту-же дугу BD.

Доказат. Случай 1) Положимъ, что одна изъ сторонъ AB угла BAD проходитъ чрезъ центръ круга (фиг. 135). Соединимъ центръ C съ D, то получимъ треугольникъ ADC, въ которомъ $CA = CD$ (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно и $\angle DAC = \angle CDA$ (кн. 1, пред. 5). Но уголъ $\angle BCD = \angle DAC + \angle CDA$ (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно:

$$\angle BCD = 2\angle DAC.$$

Фиг. 135.



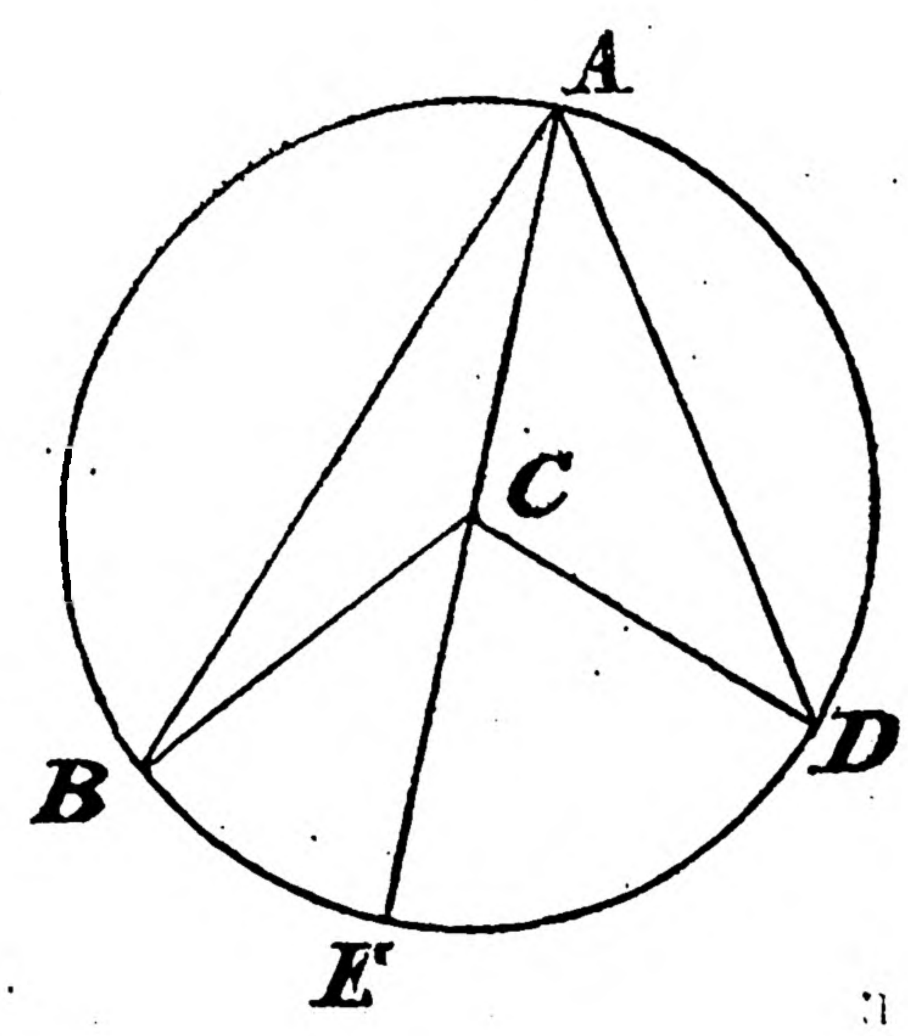
Случай. 2) Центръ круга лежитъ между сторонами угла BAD (фиг. 136). Соединимъ центръ C съ точками B и D, и проведемъ діаметръ AE. На основаніи предъидущаго случая получимъ:

$$\angle BCE = 2\angle BAE, \quad DCE = 2\angle DAE,$$

складывая (кн. 1, акс. 2), получимъ:

$$\angle BCD = 2\angle BAD.$$

Фиг. 136.



Случай. 3) Центръ круга лежитъ внѣ угла BAD (фиг. 137).

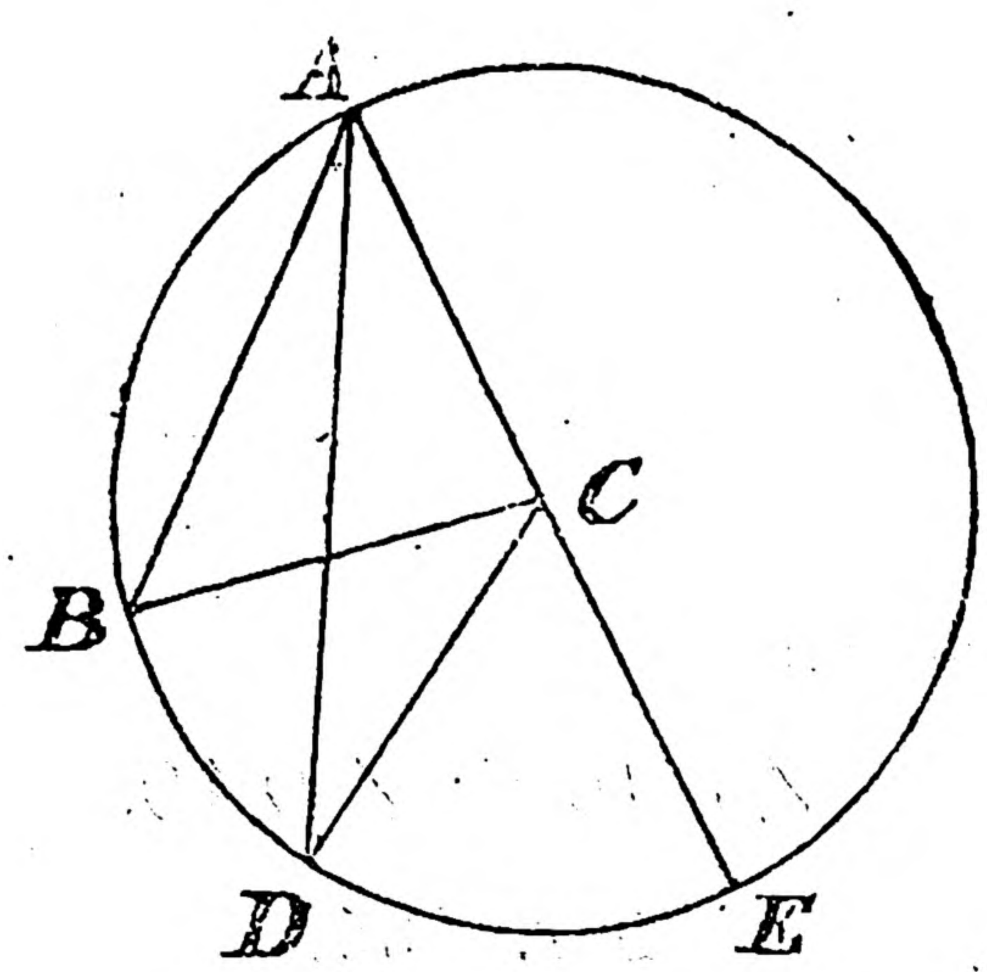
Соединимъ съ центромъ C точки B и D и проведемъ діаметръ AE, то изъ 1) получимъ:

$$\angle BCE = 2\angle BAE, \quad \angle DCE = 2\angle DAE,$$

вычитая, найдемъ (кн. 1, акс. 3):

$$\angle BCD = 2\angle BAD.$$

Фиг. 137.



Примѣч. 12. Въ первой книгѣ въ 5 примѣчаніи мы опредѣлили выпуклый уголъ, назвавъ *выпуклымъ* угломъ тотъ, который больше *выпрямленнаго,* или что тоже, который больше двухъ прямыхъ угловъ. Изъ этого видимъ, что если въ фиг. 136 соединимъ точки B и D съ E, то получимъ на основаніи 1):

$$\angle BCA = 2\angle BEA, \quad \angle DCA = 2\angle DEA$$

складывая найдемъ (кн. 1, акс. 2), что выпуклый уголъ $BCD = 2\angle BED$.

Предложеніе 21. Въ кругѣ $BADH$, всѣ углы BAD, BED, BFD....., помѣщенные въ одномъ и томъ же сегментѣ $BAEFD$, равны между собою (фиг. 138).

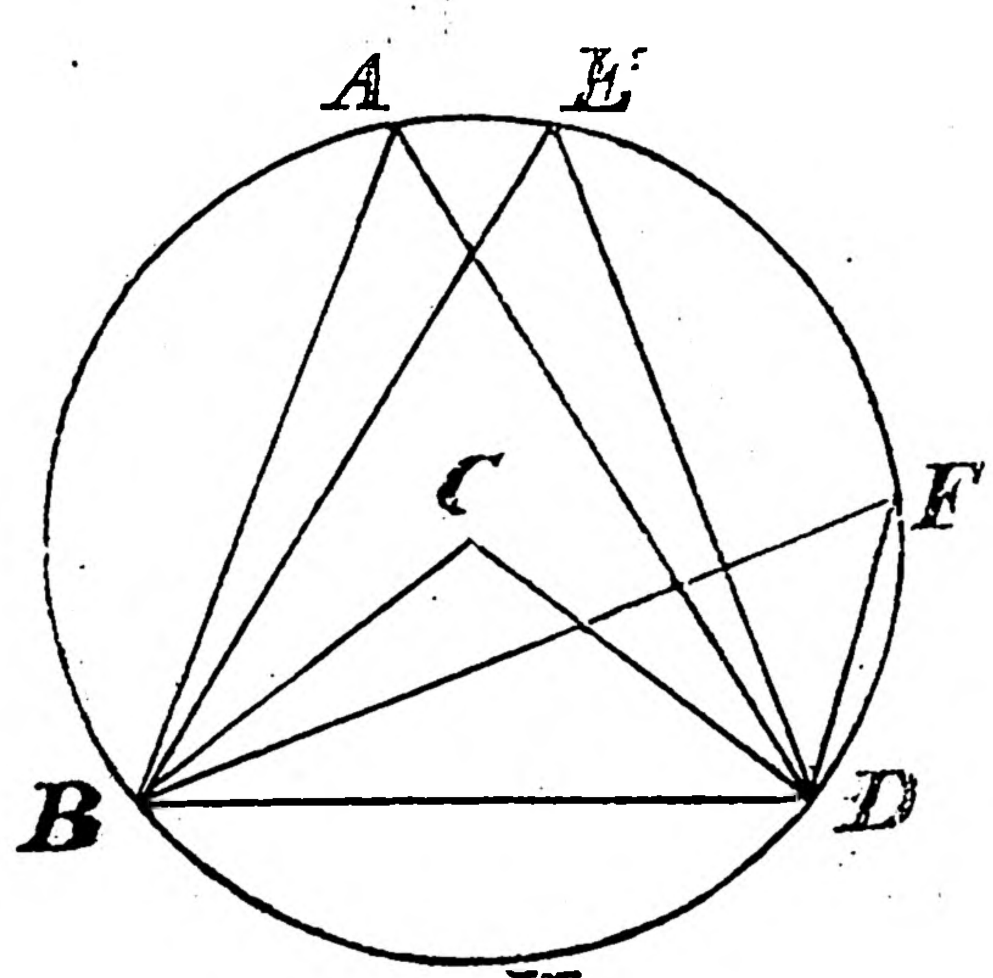
Доказат. Если C будетъ центръ даннаго круга, то, соединяя C съ B и D, получимъ (кн. 3, пред. 20):

$$\angle BCD = 2\angle BAD, \quad \angle BCD = 2\angle BED, \quad \angle BCD = 2\angle BFD$$

и т. д., слѣдовательно (кн. 1, акс. 1) мы имѣемъ:

$$\angle BAD = \angle BED = \angle BFD = \ldots.$$

Фиг. 138.

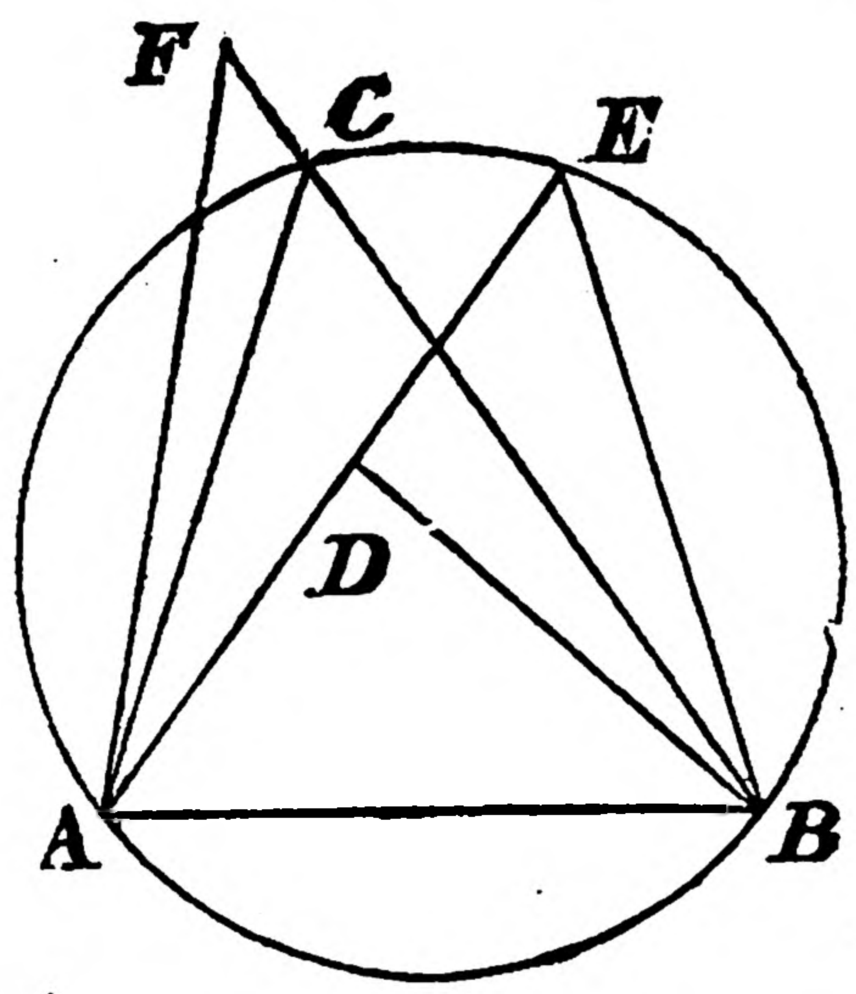


Примѣч. 13. Евклидъ доказалъ только этотъ случай, но не доказалъ случая, когда

углы помѣщены въ сегментѣ BHD. Этотъ случай прибавили Симсонъ и другіе. Доказательство его непосредственно слѣдуетъ изъ примѣч. 12 этой книги. Въ самомъ дѣлѣ всѣ углы, помѣщенные въ сегментѣ BHD, равны половинѣ выпуклаго угла BCD.

Всѣ углы, построенные на AB, коихъ вершины лежатъ внутри сегмента ACB, будутъ больше угловъ, помѣщенныхъ въ сегментѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть вершина D угла ADB лежитъ внутри сегмента ACB (фиг. 139).

Фиг. 139.



Продолжимъ сторону AD до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ E и соединимъ E съ B, то $\angle ADB > \angle AEB$ (кн. 1, пред. 16).

Всѣ углы, коихъ вершины лежатъ внѣ сегмента ACB, съ той стороны прямой AB, съ которой лежитъ сегментъ ACB, будутъ меньше угловъ, помѣщенныхъ въ сегментѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть вершина F угла AFB лежитъ внѣ сегмента ACB. Одна изъ сторонъ, напримѣръ FB, пересѣкаетъ окружность въ точкѣ C, соединимъ эту точку съ точкою A, то изъ треугольника FAC получимъ:

$$\angle AFB < \angle ACB.$$

Теперь легко доказать одно изъ весьма важныхъ свойствъ треугольниковъ, построенныхъ на общемъ основаніи AB съ одной его стороны и имѣющихъ равные углы, противолежащіе основанію. Это свойство состоитъ въ томъ, что *вершины, такимъ образомъ построенныхъ треугольниковъ, всѣ лежатъ на окружности одного и того-же сегмента круга.* Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ точки A, B и вершину C, одного изъ треугольниковъ, проведемъ окружность ACB, то всѣ углы, вписанные въ сегментъ $ACEB$, будутъ равны углу ACB. Но мы выше доказали, что углы, коихъ вершины лежатъ внѣ или внутри сегмента будутъ меньше или больше угла ACB, слѣдовательно вершины построенныхъ треугольниковъ не могутъ лежать внѣ окружности сегмента ACB. Задача: описать кругъ около треугольника, на которой мы основали предъидущее доказательство, рѣшена Евклидомъ только въ IV книгѣ въ 5 предложеніи.

Предложеніе 22. Во всякомъ четыреугольникѣ $ABCD$, вписанномъ въ кругѣ, сумма противолежащихъ угловъ BAD и BCD равна двумъ прямымъ угламъ (фиг. 140).

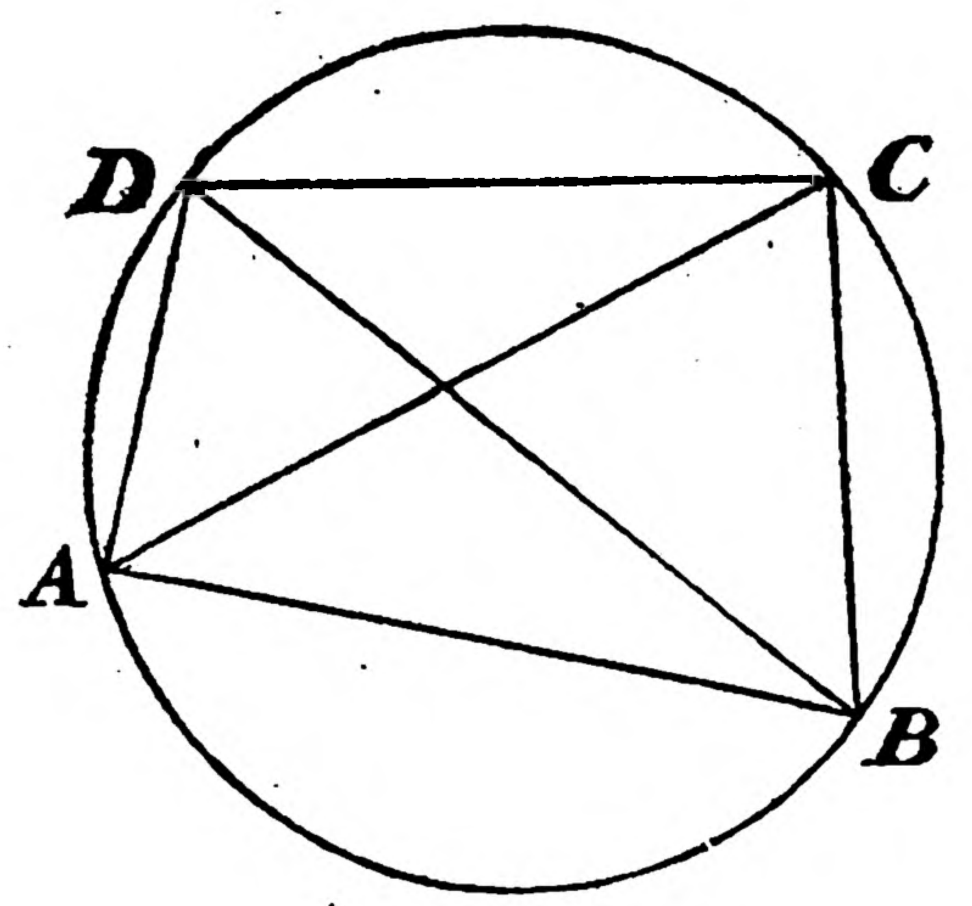
Доказат. Соединимъ A съ C и B съ D, то мы имѣемъ $\angle CDB = \angle BAC$ $\angle BDA = \angle ACB$ (кн. 3, пред. 21). Складывая, получимъ (кн. 1, акс. 2):

$$\angle ADC = \angle BAC + \angle ACB.$$

Придадимъ къ обѣимъ частямъ по углу ABC (кн. 1, акс. 2), то найдемъ:

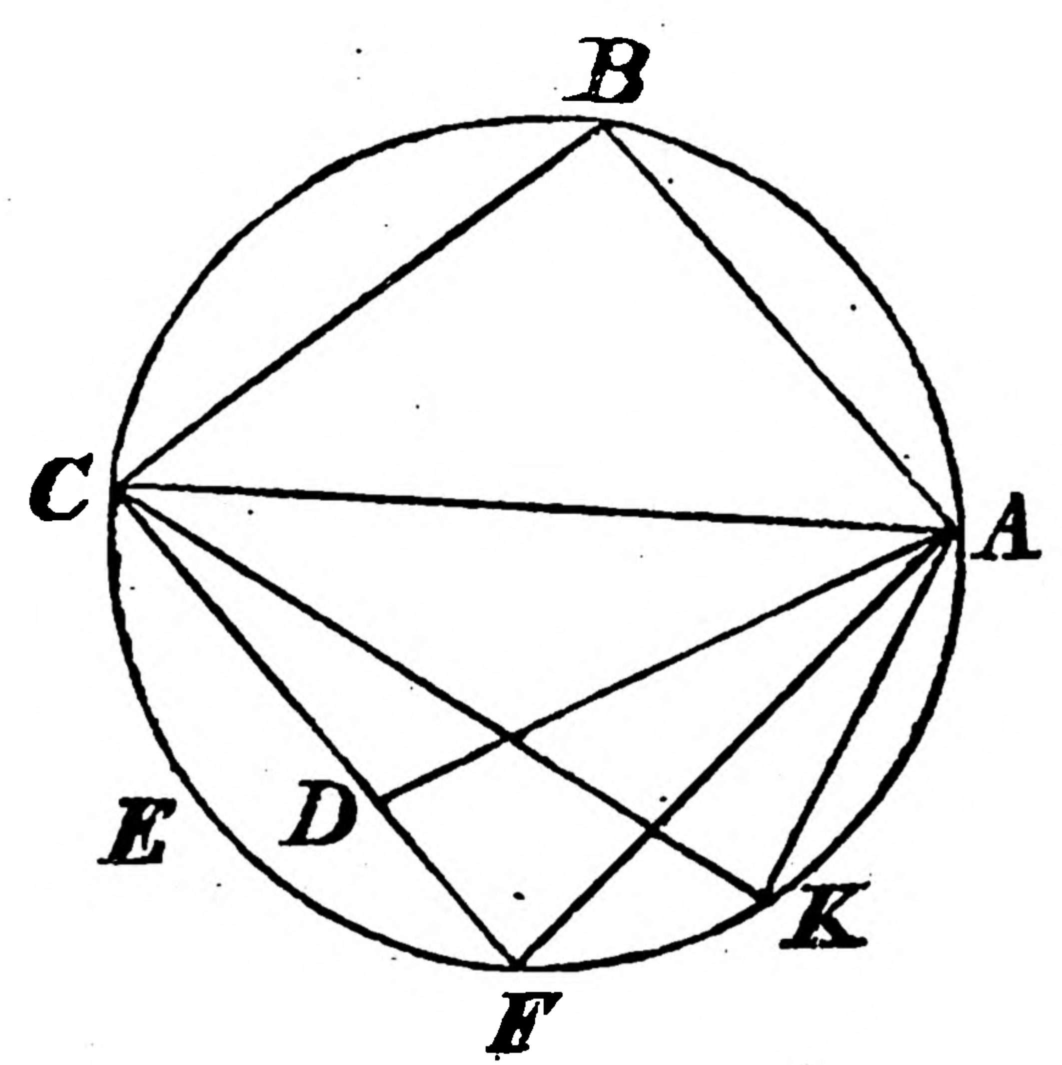
$$\angle ABC + \angle ADC = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 2d$$ (кн. 1, пред. 32).

Фиг. 140.



Примѣч. 14. Весьма важное обратное предложеніе также имѣетъ мѣсто: *если сумма противоположныхъ угловъ, въ какомъ нибудь четыреугольникѣ, равна двумъ прямымъ угламъ, то около четыреугольника можно описать кругъ.* Пусть $ABCD$ будетъ такой четыреугольникъ (фиг. 141). Опишемъ кругъ около треугольника ABC (кн. 4, пред. 5).

Фиг. 141.



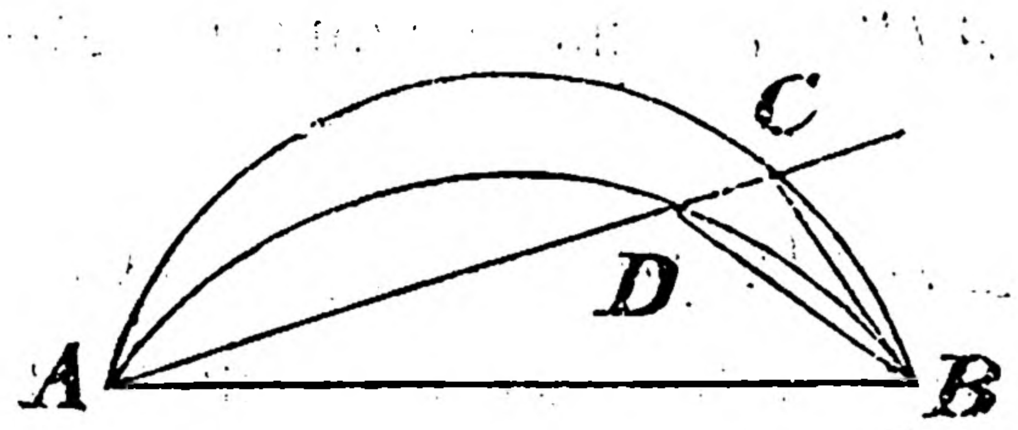
Если окружность этого круга не пройдетъ чрезъ точку D, то точка D будетъ лежать или внѣ, или внутри, сегмента $AKEC$. Продолжимъ сторону CD до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ F и соединимъ ее съ A. Сумма угловъ B и F равна двумъ прямымъ угламъ (кн. 3, пред. 22). Но, по положенію, сумма угловъ B и D также равна двумъ прямымъ угламъ, слѣдовательно уголъ CFA равенъ углу CDA, что невозможно (кн. 1, пред. 16).

Предложеніе 23. На одной и той же прямой линіи AB и съ одной ея стороны невозможно описать два подобные и неравные сегмента (фиг. 142).

Доказат. Положимъ что возможно на прямой AB описать два подобные и неравные сегмента ACB и ADB.

Чрезъ точку A проведемъ прямую, встрѣчающую оба сегмента

Фиг. 142.

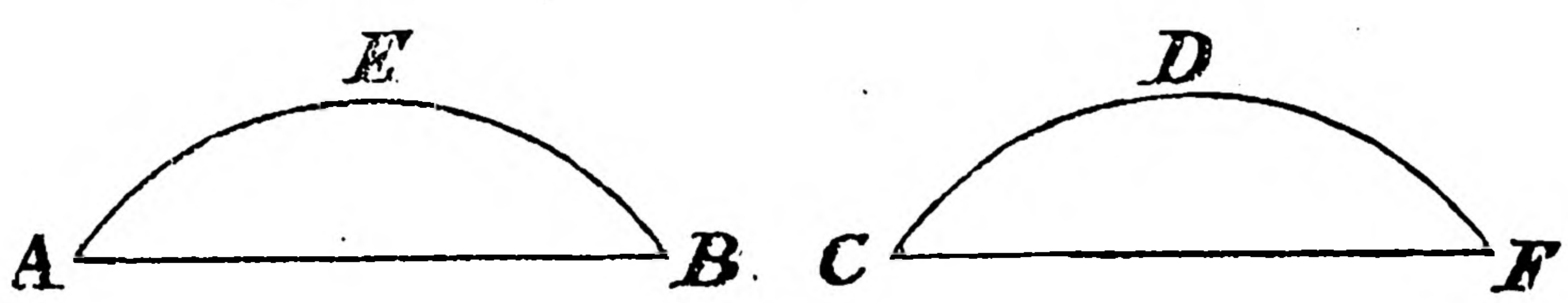


въ точкахъ D и C, соединимъ эти точки съ точкою B, то мы будемъ имѣть $\angle ADB = \angle ACB$ (кн. 3, опред. 11), что невозможно (кн. 1, пред. 16).

Предложеніе 24. Подобные сегменты AEB и CDF, построенные на равныхъ прямыхъ $AB=CF$, равны между собою (фиг. 143).

Доказат. Нанесемъ сегментъ AEB на сегментъ CDF, такъ чтобы основаніе AB совпало съ основаніемъ CF. Если бы дуги AEB и CDF не совпали, то или одна дуга будетъ вся внѣ другой, или онѣ пересѣкутся еще въ третьей точкѣ. Первое предположеніе невозможно вслѣдствіе (кн. 3, пред. 23), а второе невозможно вслѣдствіе (кн. 3, пред. 10). Слѣдовательно дуги AEB и CDF совпадутъ, а слѣдовательно и сегменты совмѣстятся.

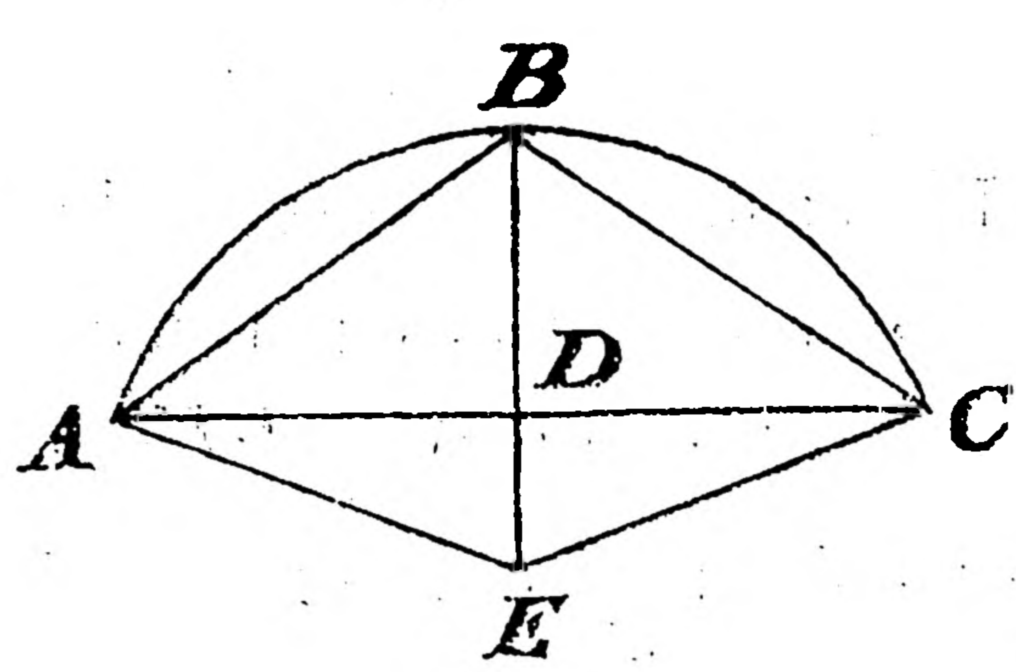
Фиг. 143.



Предложеніе 25. Данный сегментъ ABC дополнить до круга?

Рѣшеніе. Раздѣлимъ AC въ точкѣ D пополамъ (кн. 1, пред. 10). Изъ точки D возставимъ перпендикуляръ DB. Соединимъ A съ B, то уголъ ABD можетъ быть больше, равенъ, или меньше угла BAD (фиг. 144).

Фиг. 144.

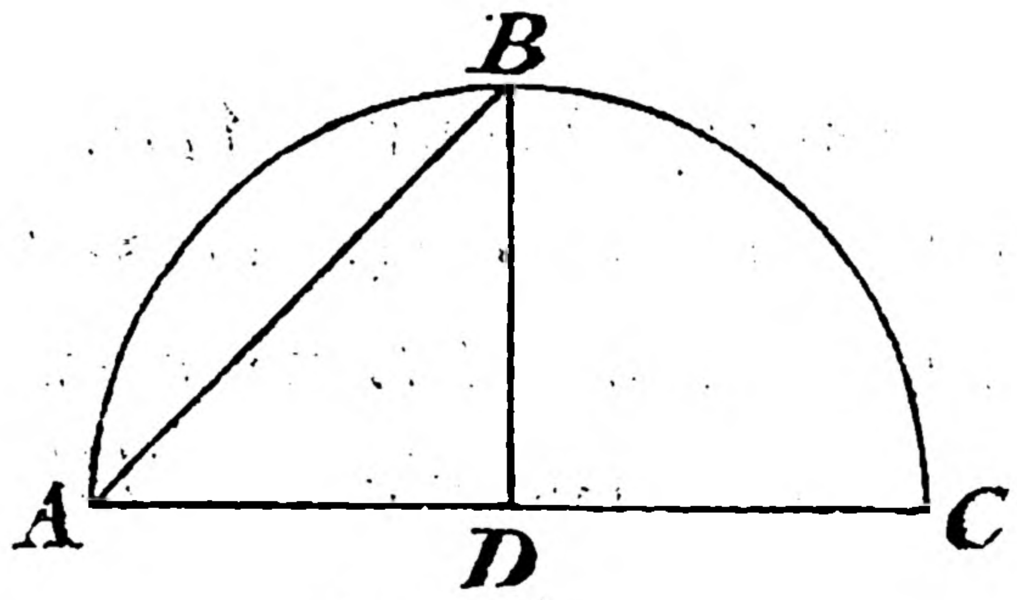


1) Уголъ $ABD > \angle BAD$. На прямой AB построимъ $\angle BAE = \angle ABD$, продолжимъ BD до встрѣчи съ AE въ точкѣ E и соединимъ E съ C. Мы имѣемъ $BE=AE$ (кн. 1, пред. 6). Въ треугольникахъ ADE и CDE, сторона DE общая, $AD=DC$, по построенію, углы при D равны, слѣдо-

вательно и $EA=EC$ (кн. 1, пред. 4). Откуда видимъ, что точка E есть центръ искомаго круга (кн. 3, пред. 9). Изъ этого ясно видно, что въ этомъ случаѣ сегментъ ABC меньше половины круга, такъ какъ центръ лежитъ внѣ сегмента.

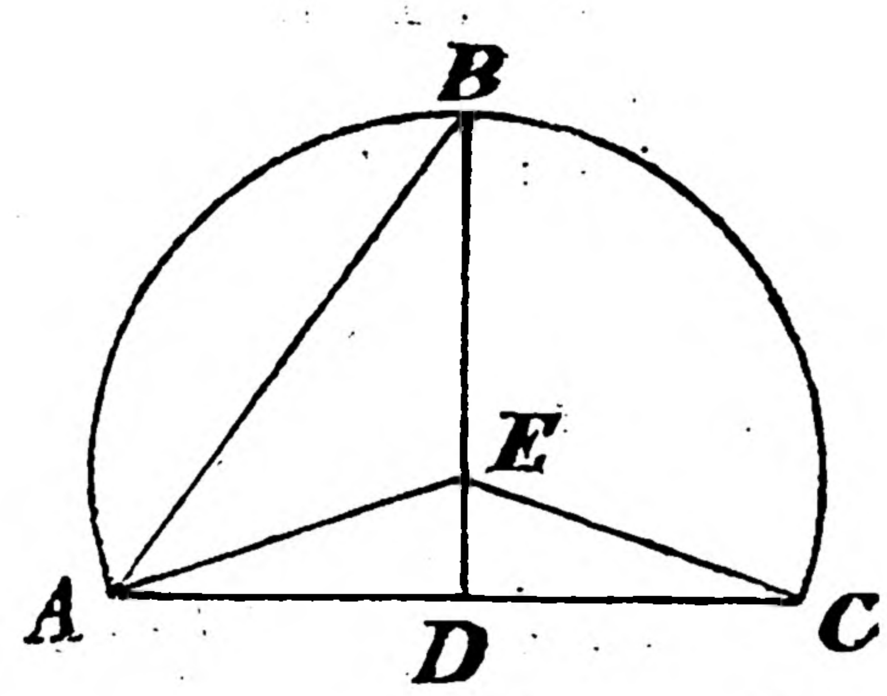
2) Уголъ $ABD=\angle BAD$. Въ этомъ случаѣ, $AD=BD$ (кн. 1, пред. 6), но $AD=DC$, слѣдовательно точка D есть центръ искомаго круга (кн. 3, пред. 9). Въ этомъ случаѣ сегментъ равенъ половинѣ круга (фиг. 145).

Фиг. 145.



3) Уголъ $ABD < \angle BAD$. На прямой AB построимъ уголъ $BAE=\angle ABD$, соединимъ E съ C (фиг. 146).

Фиг. 146.

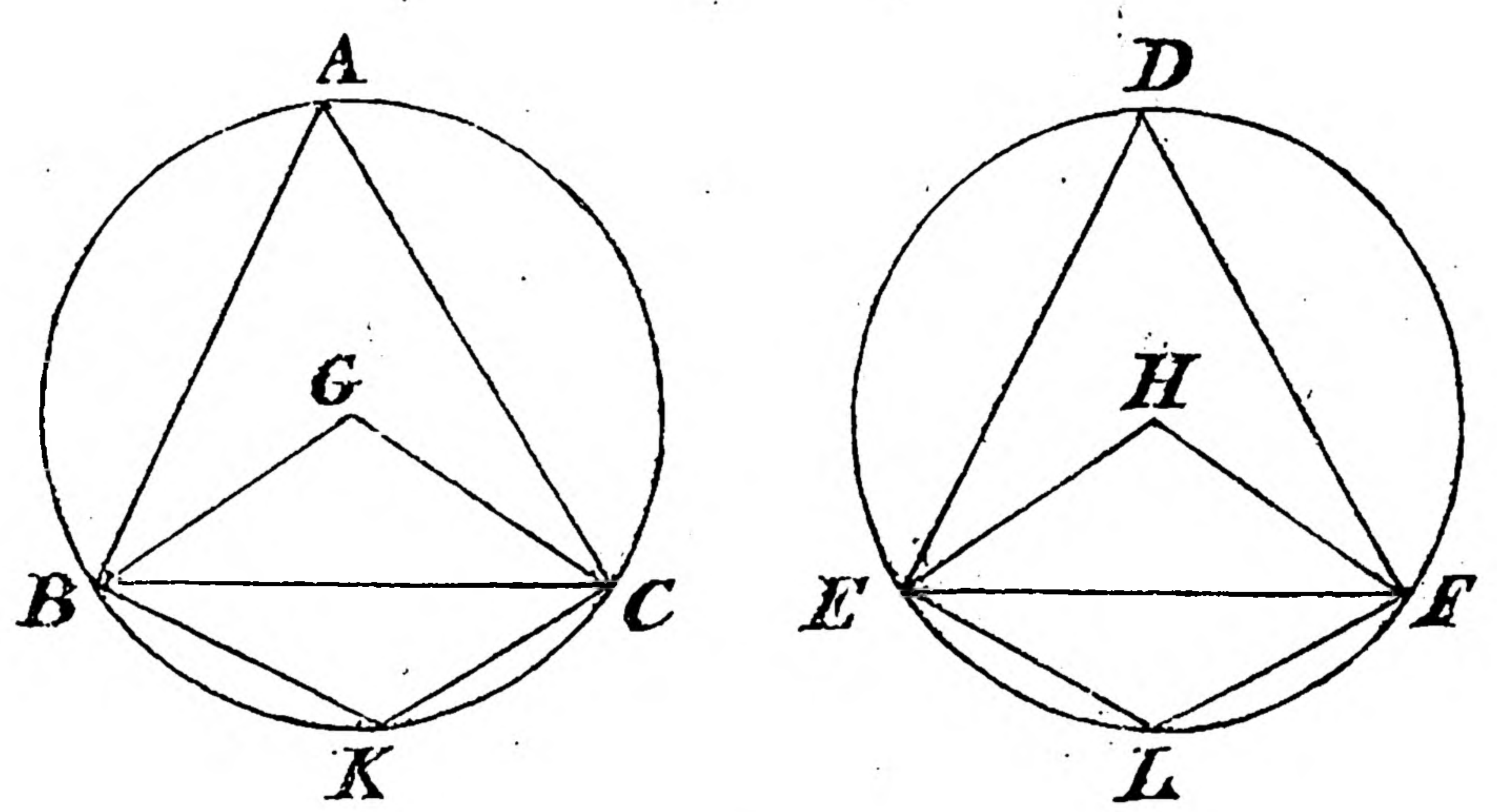


Въ этомъ случаѣ можетъ быть доказано, какъ и въ первомъ, что $AE=EB=EC$, слѣдовательно E есть центръ искомаго круга (кн. 3, пред. 9). Такъ какъ центръ E лежитъ внутри сегмента ABC, то онъ больше полукруга.

Предложенiе 26. Въ равныхъ кругахъ ABC и DEF, какъ равные углы BGC и EHF при центрахъ, такъ и равные углы BAC и EDF на окружностяхъ, упираются на равныя дуги BKC и ELF (фиг. 147).

Доказат. Соединимъ B съ C и E съ F. Въ треугольникахъ BGC и EHF, $BG=EH$, $CG=FH$, какъ радiусы равныхъ круговъ, $\angle BGC=\angle EHF$, по положенiю, слѣдовательно и $BC=EF$ (кн. 1, пред. 4). Но по положенiю углы A и D равны, слѣдовательно, въ четыреугольникахъ $BACK$ и $EDFL$ углы K и L также равны (кн. 3, пред. 22), а слѣдовательно сегменты BKC и ELF подобны (кн. 3, опред. 11), а если они подобны, то и равны (кн. 3, пред. 24), откуда и дуги BKC и ELF также равны.

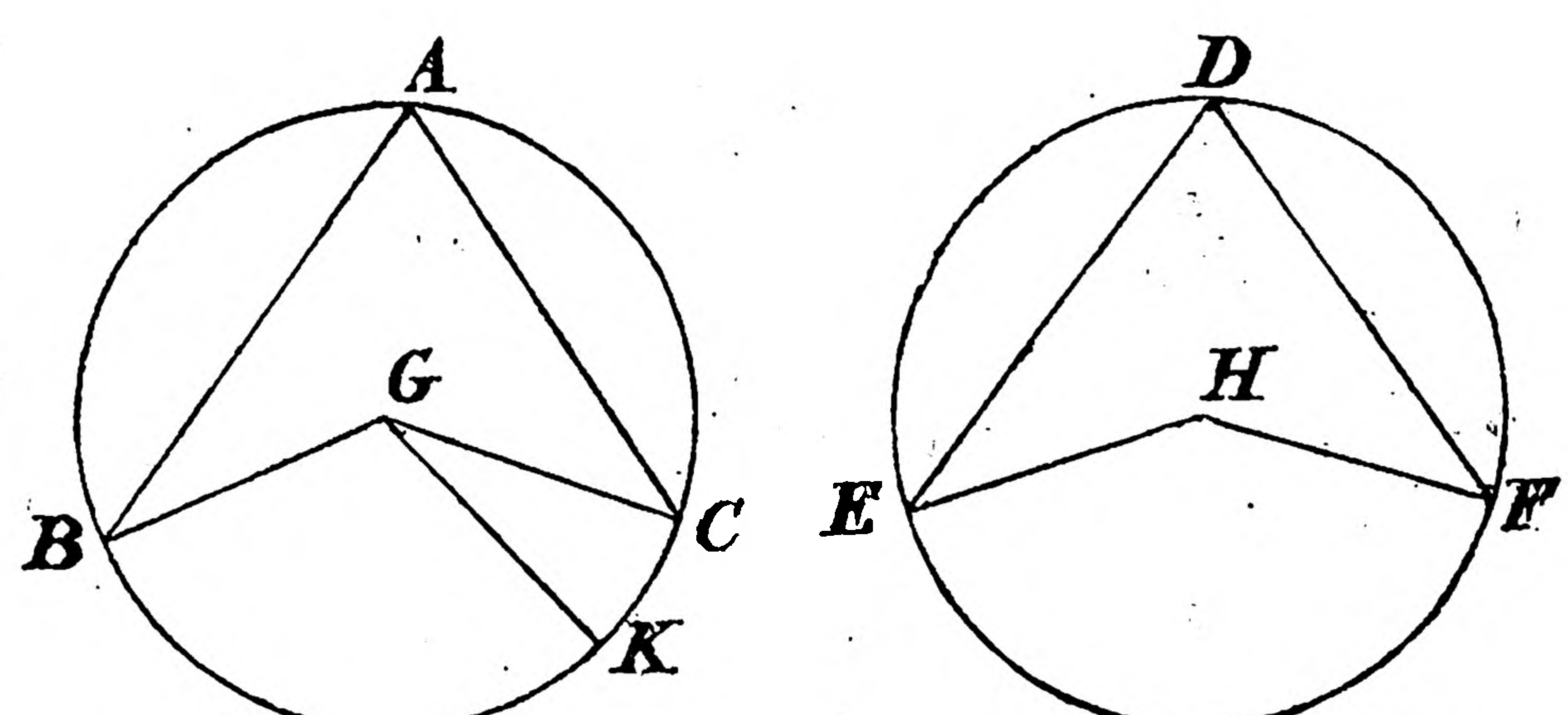
Фиг. 147.



Предложеніе 27. Въ равныхъ кругахъ ABC и DEF углы BGC и EHF, BAC и EDF, упирающіеся на равныя дуги BC и EF и имѣющіе вершины, первые два въ центрахъ круговъ, а вторые на окружностяхъ, будутъ равны (фиг. 148).

Доказат. Положимъ, что углы BGC и EHF неравны, слѣдовательно одинъ изъ нихъ будетъ больше, напримѣръ BGC. Построимъ $\angle BGK = \angle EHF$, то дуги $BK = EF$ (кн. 3, пред. 26). Но по условію дуга $BC = EF$, слѣдовательно дуга $BK = BC$, что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно углы BGC и EHF не могутъ быть неравными, а если они равны, то и $\angle BAC = \angle EDF$ (кн. 3, пред. 20).

Фиг. 148.

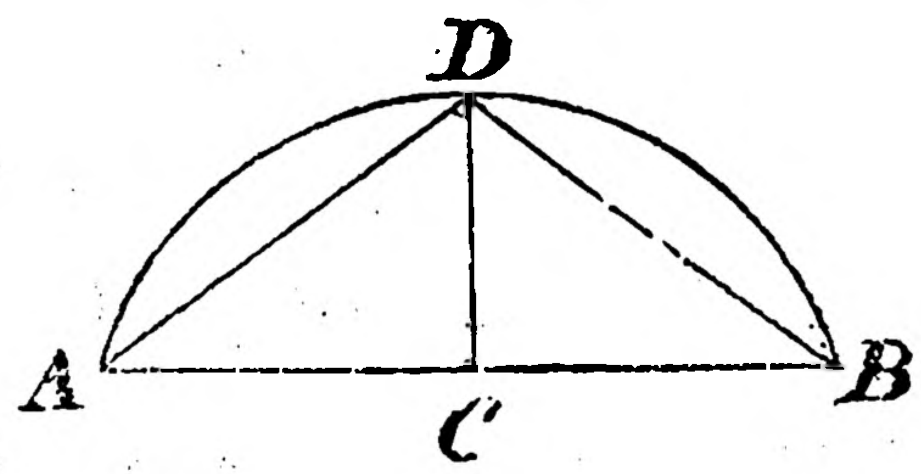


Предложеніе 28. Въ равныхъ кругахъ ABC и DEF равныя хорды BC и EF стягиваютъ равныя дуги BGC и EHF (фиг. 149).

Доказат. Пусть центры данныхъ круговъ будутъ K и L. Соединимъ центръ K съ точками B и C и центръ L съ точками E и F.

угольники ADC и BDC равны, такъ какъ $AC=BC$, DC сторона общая, углы при C прямые, слѣдовательно и $AD=BD$, откуда и дуга $AD=$дугѣDB (кн. 3, пред. 28).

Фиг. 151.



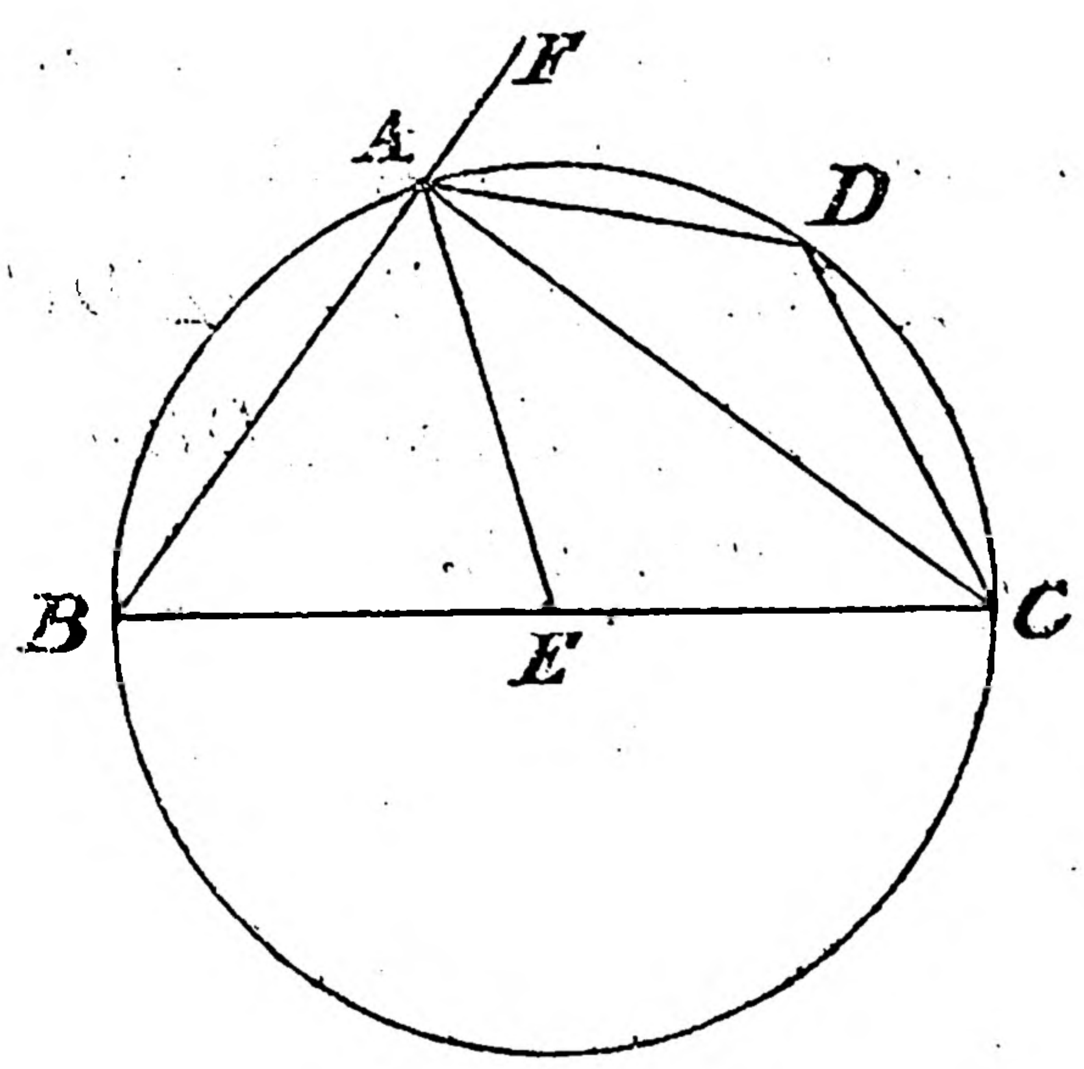
Предложенiе 31. Уголъ, вписанный въ полуокружность BAC, есть прямой, вписанный въ сегментъ больпiй полуокружности меньше прямаго угла и вписанный въ сегментъ меньшiй полуокружности больше прямаго угла (фиг. 152).

Доказат. Пусть $ABCD$ будетъ кругъ, коего дiаметръ есть BC, а центръ E.

Проведемъ хорду AC, раздѣляющую кругъ на два сегмента ABC и ADC, изъ конхъ первый больше полукруга, а второй меньше. Уголъ вписанный въ полукругъ $BADC$ будетъ прямой, вписанный въ сегментъ ABC будетъ меньше прямаго и вписанный въ сегментъ ADC будетъ больше прямаго.

Соединимъ A съ B, A съ D и D съ C. Соединимъ еще A съ центромъ E и продолжимъ BA до точки F (фиг. 152).

Фиг. 152.



1) Такъ какъ въ треугольникахъ ABE и AEC углы $\angle ABE=\angle BAE$ и $\angle EAC=\angle ACE$ (кн. 1, пред. 5), то, складывая, получимъ (кн. 1, акс. 2):

$$\angle BAC=\angle ABC+\angle ACB.$$

Но внѣшнiй уголъ $FAC=\angle ABC+\angle ACB$ (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно $\angle FAC=\angle BAC$, откуда (кн. 1, опред. 10) уголъ $BAC=d$.

2) Въ треугольникѣ ABC уголъ $BAC=d$, слѣдовательно $\angle ABC + \angle ACB = d$ (кн. 1, пред. 32), откуда уголъ $ABC<d$, т. е. уголъ, вписанный въ сегментъ большій полуокружности, меньше прямаго угла.

3) Четыреугольникъ $ABCD$ вписанъ въ кругъ, слѣдовательно сумма противолежащихъ угловъ ABC и ADC равна двумъ прямымъ угламъ (кн. 3, пред 22), т. е.:

$$\angle ABC + \angle ADC = 2d$$

но $\angle ABC<d$, какъ мы выше показали, слѣдовательно $\angle ADC>d$ (кн. 1, акс. 5), т. е. уголъ вписанный въ сегментъ меньшій полуокружности больше прямаго угла.

Примѣч. 15. Изъ того, что въ треугольникѣ ABC уголъ $BAC=\angle ABC+\angle ACB$ можно прямо заключить, что уголъ $BAC=d$, безъ пособія смежнаго ему угла FAC. Въ самомъ дѣлѣ, $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=2d$ или $2\angle BAC=2d$, откуда $\angle BAC=d$.

Предложеніе 32. Если прямая линія EF касается круга $ADCB$ въ точкѣ B и если изъ точки касанія проведемъ, какую нибудь, прямую BD, то углы DBF и DBE, образуемые ею съ касательною EF, будутъ равны угламъ вписаннымъ, первый въ сегментъ BAD, а второй въ сегментъ BCD (фиг. 153).

Доказат. Изъ точки B возставимъ перпендикуляръ BA къ касательной EF (кн. 1, пред. 11). На дугѣ BD возьмемъ, какую нибудь точку C и соединимъ A съ D, D съ C и C съ B.

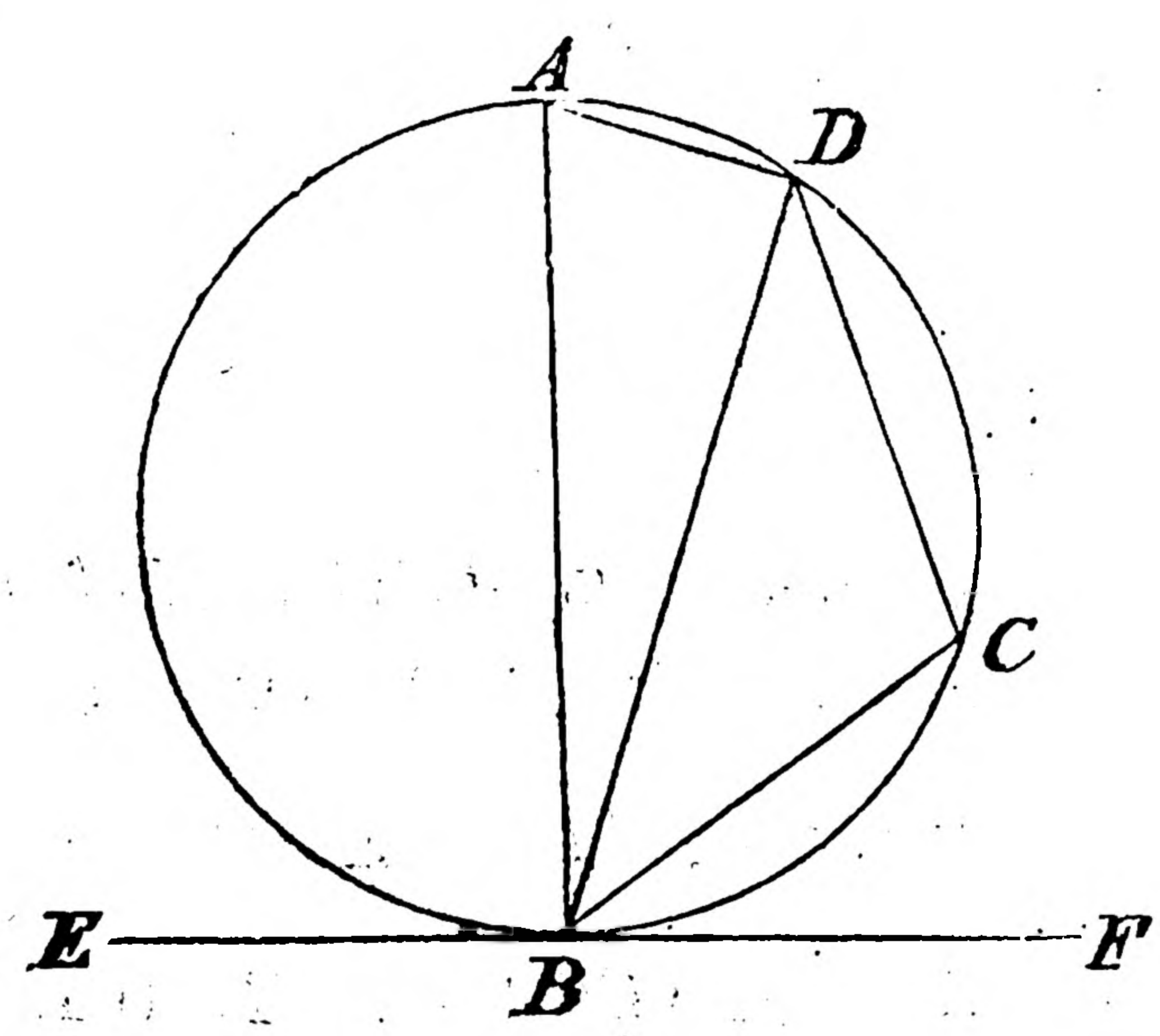
1) Такъ какъ BA есть діаметръ (кн. 3, пред. 19), то уголъ ADB есть прямой (кн. 3, пред. 31).

Если уголъ ADB есть прямой, то $\angle DAB+\angle ABD=d$, но $\angle ABD+\angle DBF=d$, слѣдовательно (кн. 1, акс. 1):

$$\angle DAB+\angle ABD=\angle ABD+\angle DBF,$$

откуда, отнимая по углу ABD, найдемъ что $\angle DBF=\angle DAB$ (кн. 1, акс. 3).

Фиг. 153.



2) Въ четыреугольникѣ $BADC$, вписанномъ въ кругъ, мы имѣемъ (кн. 3, пред. 22):

$$\angle BAD + \angle DCB = 2d,$$

но

$$\angle FBD + \angle DBE = 2d,$$

Слѣдовательно (кн. 1, акс. 1):

$$\angle BAD + \angle DCB = \angle FBD + \angle DBE,$$

откуда, замѣчая, что $\angle FBD = \angle BAD$, найдемъ (кн. 1, акс. 3) $\angle DBE = \angle DCB$.

Примѣч. 16. Предложеніе, обратное предъидущему: Если чрезъ точку пересѣченія, какой нибудь прямой съ кругомъ, проведена прямая, пересѣкающая кругъ и составляющая съ первой прямой уголъ, равный углу, вписанному въ одинъ изъ сегментовъ круга, на которые его дѣлитъ первая прямая, то вторая прямая будетъ касательная къ кругу.

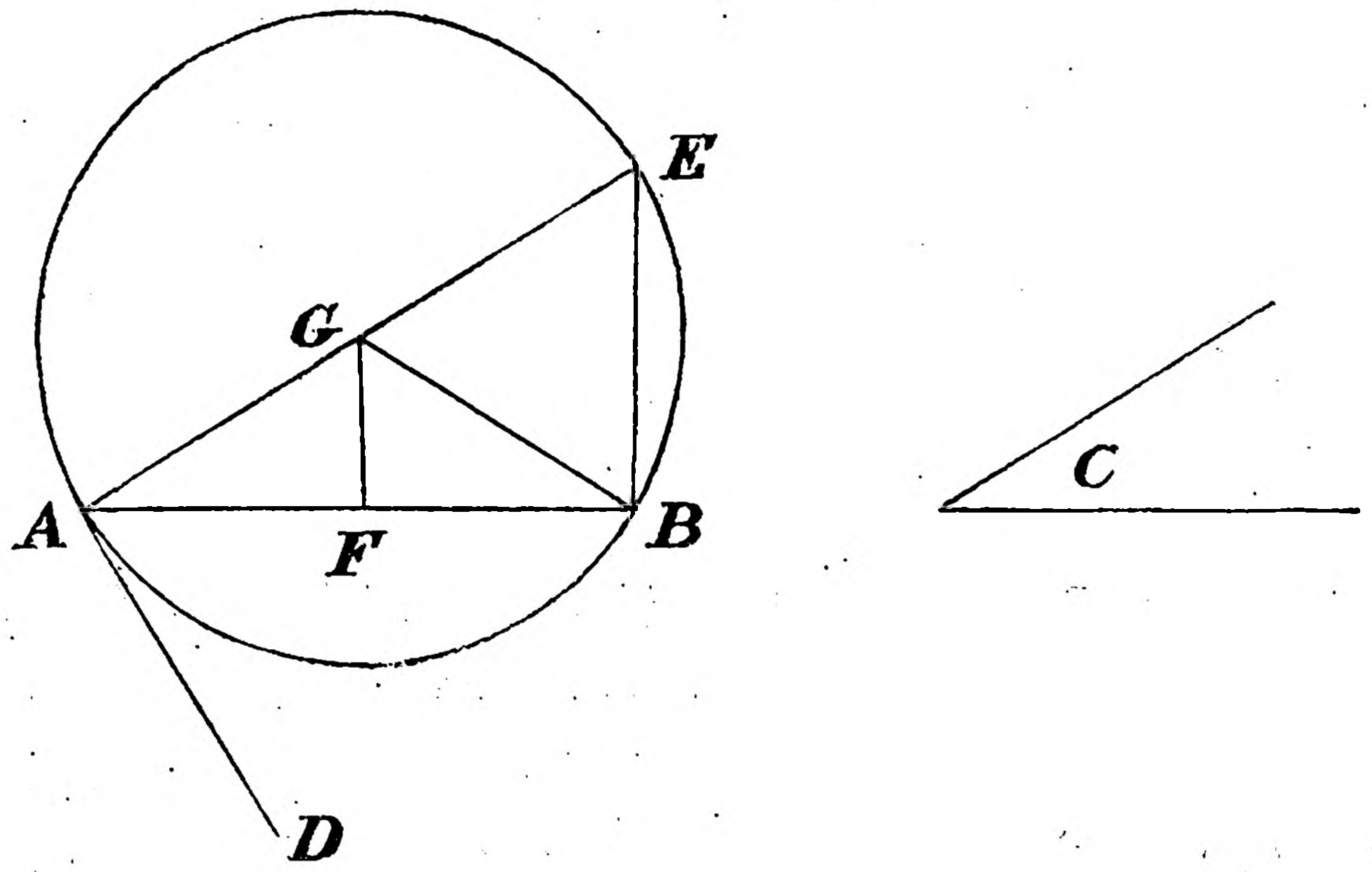
Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что проведенная прямая пересѣкаетъ кругъ, но не касается его. Проведемъ чрезъ точку пересѣченія касательную къ кругу, то по пред. 32, кн. 3 и по гипотезѣ будетъ слѣдовать, что двѣ различныя прямыя, проходящія чрезъ точку пересѣченія, составляютъ съ третьею прямою одинъ и тотъ-же уголъ, что невозможно.

Предложеніе 33. На данной прямой AB построить сегментъ, углы вписанные въ который были бы равны данному углу C?

Рѣшеніе. Данный уголъ C можетъ быть острый, прямой или тупой.

1) Пусть уголъ C будетъ острый. Построимъ на данной прямой AB уголъ $BAD = \angle C$ (кн. 1, пред. 23). Изъ точки A возставимъ перпендикуляръ AE къ AD (кн. 1, пред. 11) и раздѣлимъ AB въ точкѣ F пополамъ (кн. 1, пред. 10) (фиг. 154).

Фиг. 154.

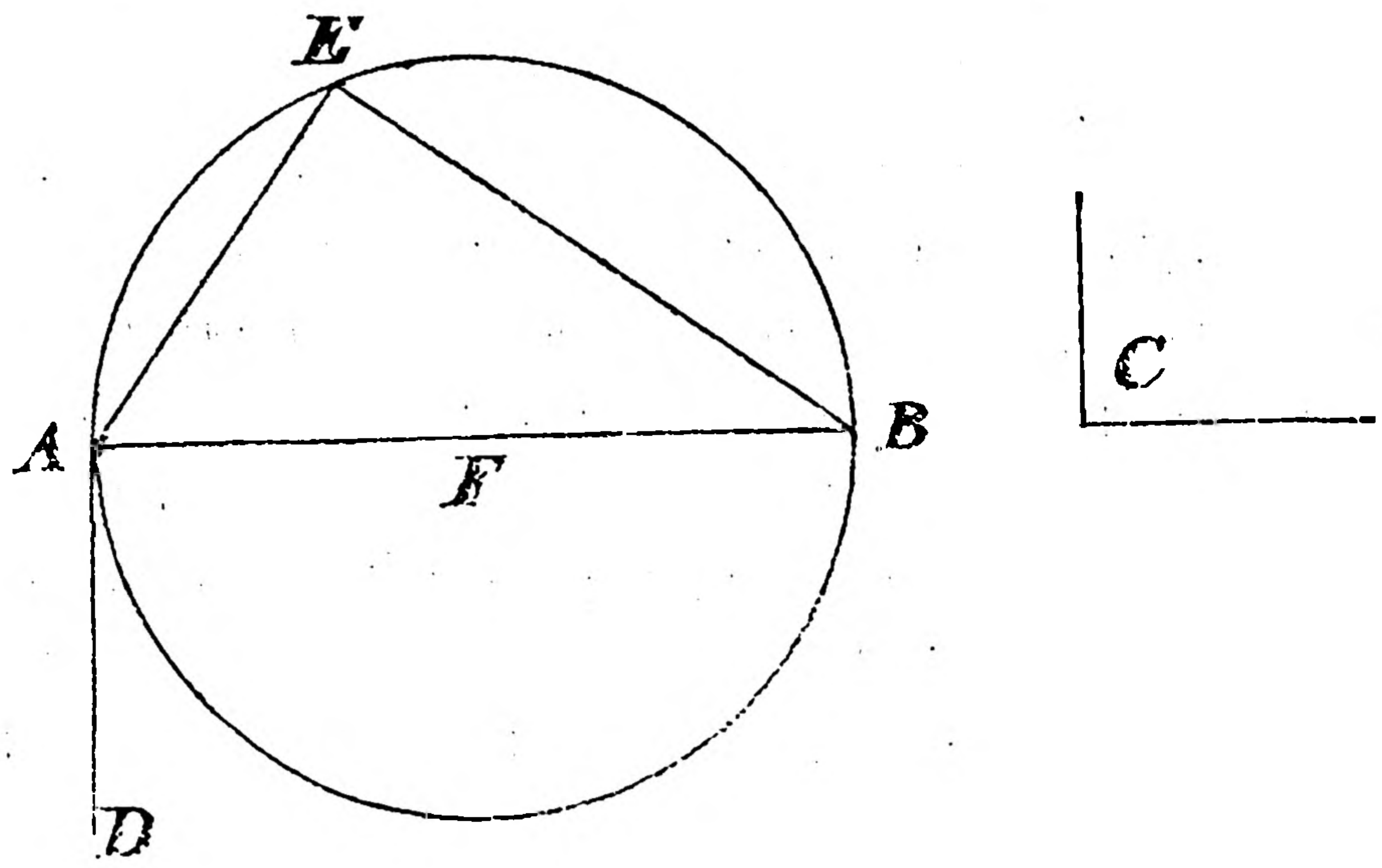


Изъ точки F возставимъ перпендикуляръ FG и точку G встрѣчи его, съ прямою AE, соединимъ съ точкою B, то изъ треугольниковъ AGF и BGF найдемъ $AG = BG$ (кн. 4, пред. 4).

Изъ точки G, какъ изъ центра, радіусомъ AG опишемъ кругъ ABE и соединимъ B съ E. Сегментъ AEB и будетъ искомый. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $AE \perp AD$ и AE есть діаметръ круга AEB, то $\angle AEB = \angle BAD = \angle C$ (кн. 3, пред. 32)

2) Пусть уголъ $C = d$. Построимъ на данной прямой AB уголъ $BAD = d$. Раздѣлимъ прямую AB, въ точкѣ F пополамъ и радіусомъ AF опишемъ кругъ AEB (фиг. 155).

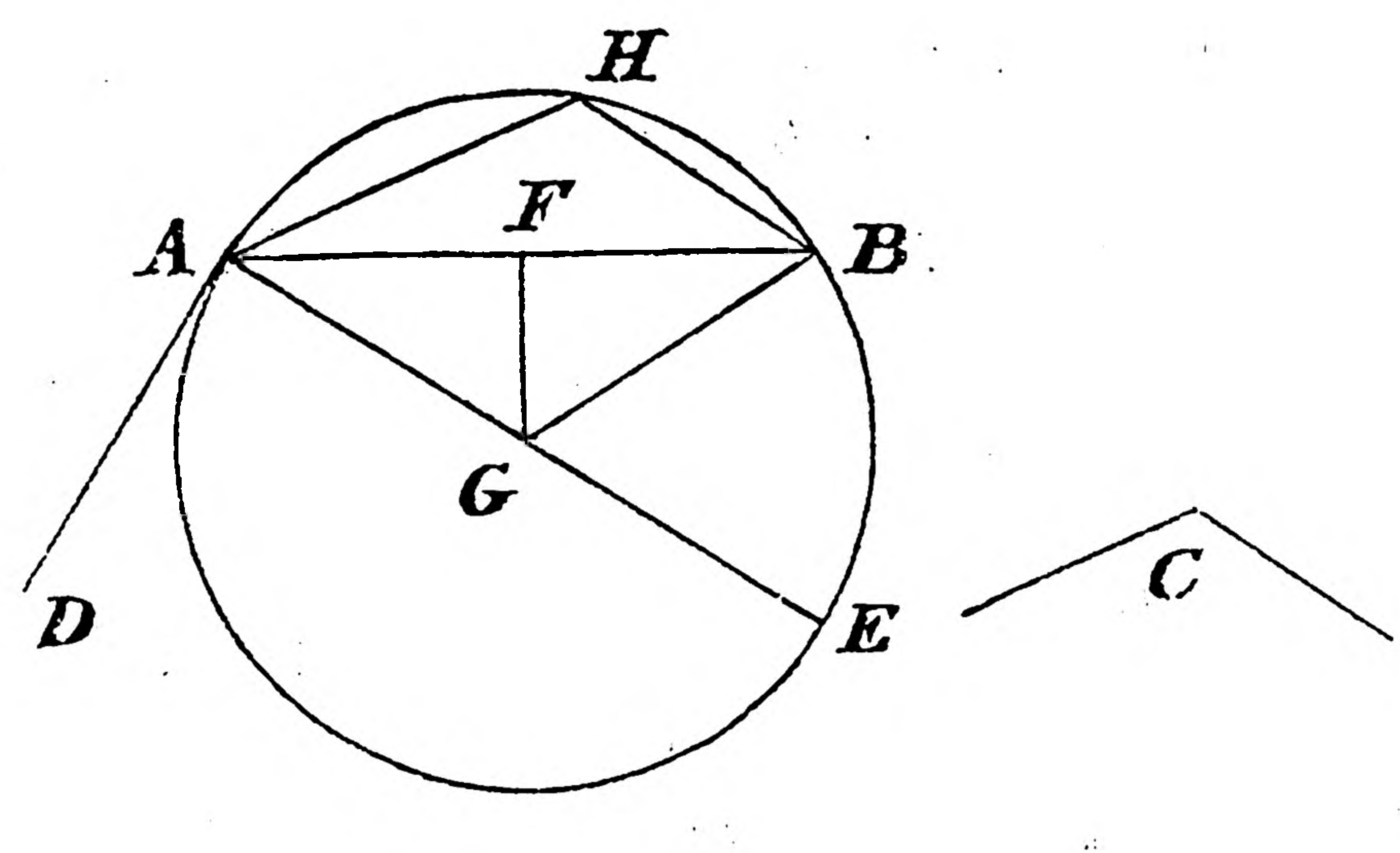
Фиг. 155.



AEB и будетъ требуемый сегментъ. Въ самомъ дѣлѣ, если произвольно взятую точку E на полуокружности AEB соединимъ съ точками A и B, то уголъ AEB будетъ прямой (кн. 3, пред. 31).

3) Наконецъ пусть уголъ C будетъ тупой (фиг. 156).

Фиг. 156.

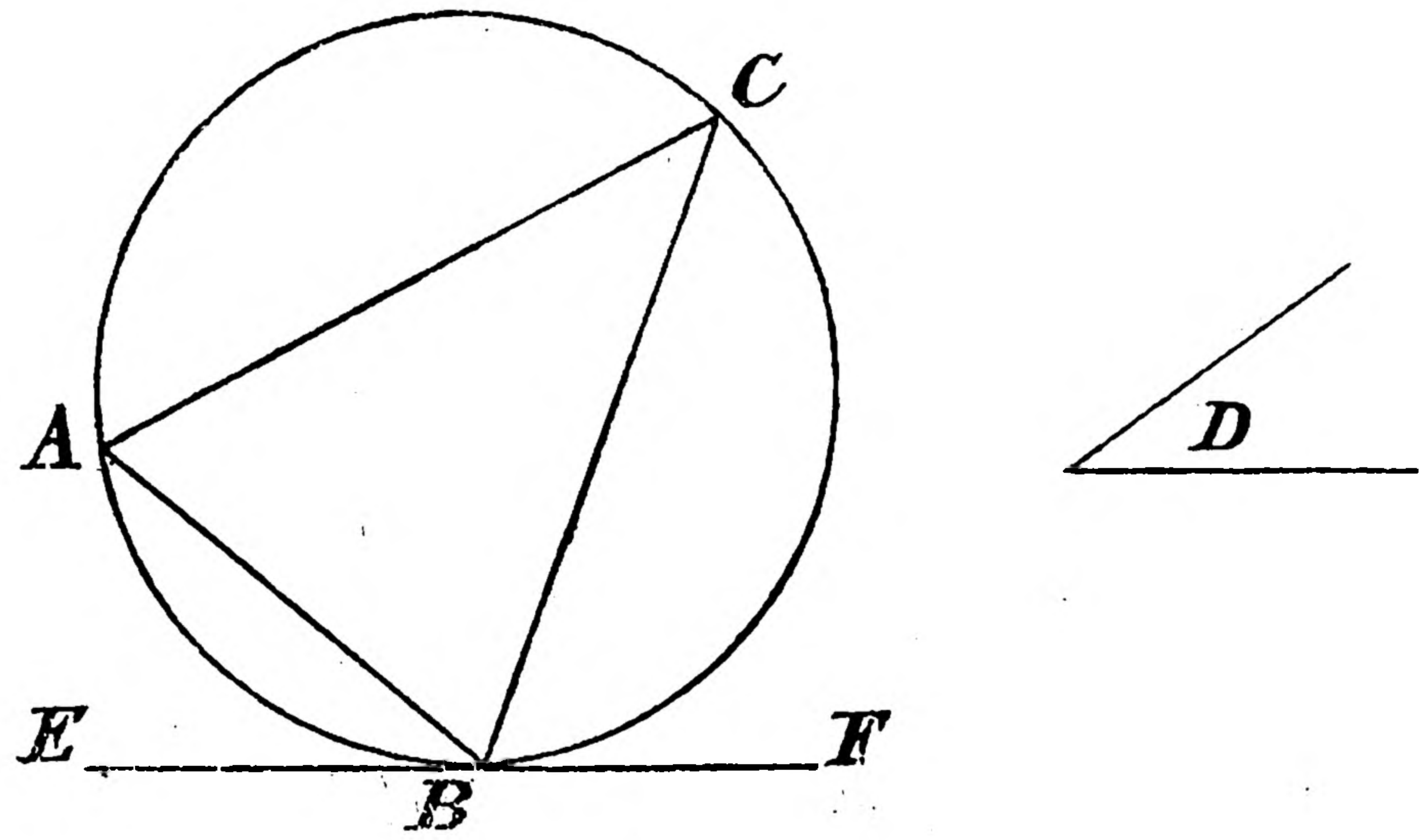


Построимъ на данной прямой AB уголъ $BAD = \angle C$ (кн. 1, пред. 23). Изъ точки A къ прямой AD возставимъ перпендикуляръ AE (кн. 1, пред. 11) и раздѣливъ прямую AB въ точкѣ F пополамъ, возставимъ изъ этой точки къ AB перпендикуляръ FG. Точку G соединимъ съ A и B. Радіусомъ $GA = GB$ (кн. 1, пред. 4) опишемъ кругъ AEB. Сегментъ AHB и будетъ требуемый. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ AHB, вписанный въ этотъ сегментъ, будетъ равенъ углу $BAD = \angle C$ (кн. 3, пред. 32).

Предложеніе 34. Отъ даннаго круга ABC отдѣлить сегментъ, вмѣщающій данный уголъ D (фиг. 157)?

Рѣшеніе. Въ точкѣ B, взятой на окружности ABC, проведемъ касательную EF (кн. 3, пред. 17).

Фиг. 157.

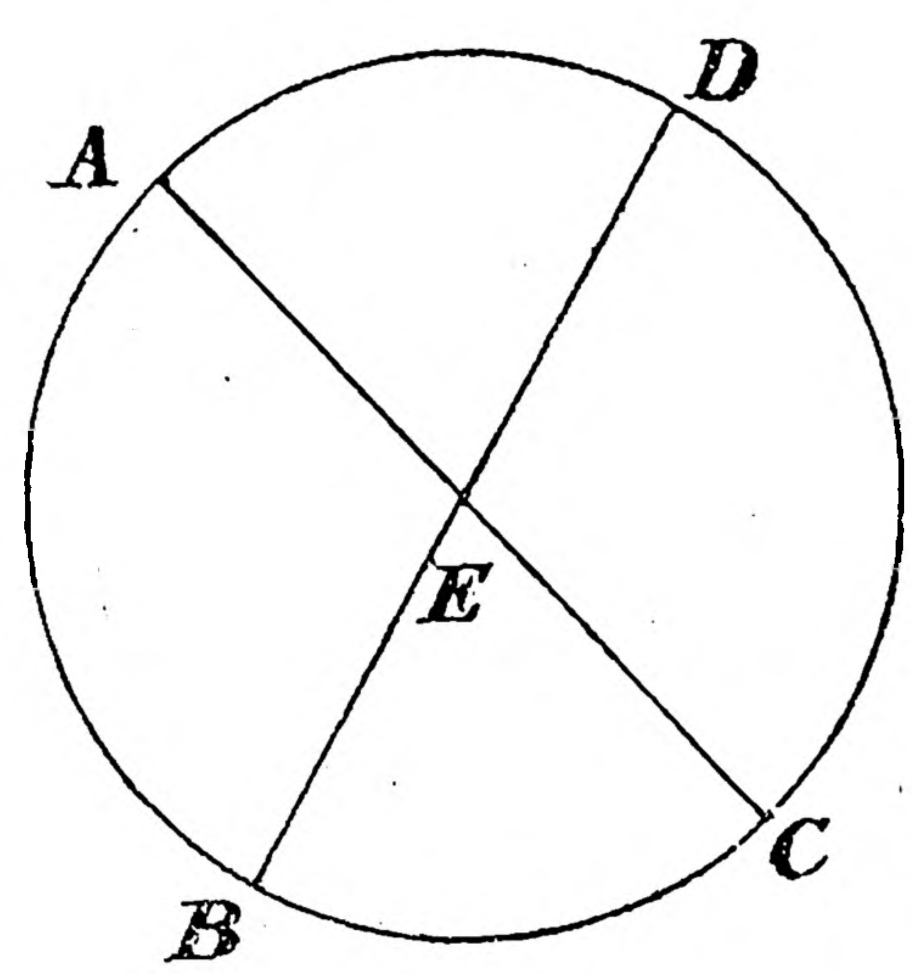


Въ точкѣ B на прямой EF построимъ уголъ $CBF = \angle D$, то искомый сегментъ будетъ BAC, такъ какъ $\angle BAC = \angle CBF = \angle D$ (кн. 3, пред. 32).

Предложеніе 35. Если двѣ хорды AC и BD пересѣкаются внутри круга $ABCD$, въ точкѣ E, то прям.$AE \cdot EC$=прям.$BE \cdot ED$.

Доказат. 1) Если точка пересѣченія двухъ хордъ есть центръ круга, то, очевидно, части AE и CE, BE и DE всѣ равны и мы имѣемъ прям.$AE \cdot EC$=прям.$BE \cdot ED$ (фиг. 158).

Фиг. 158.



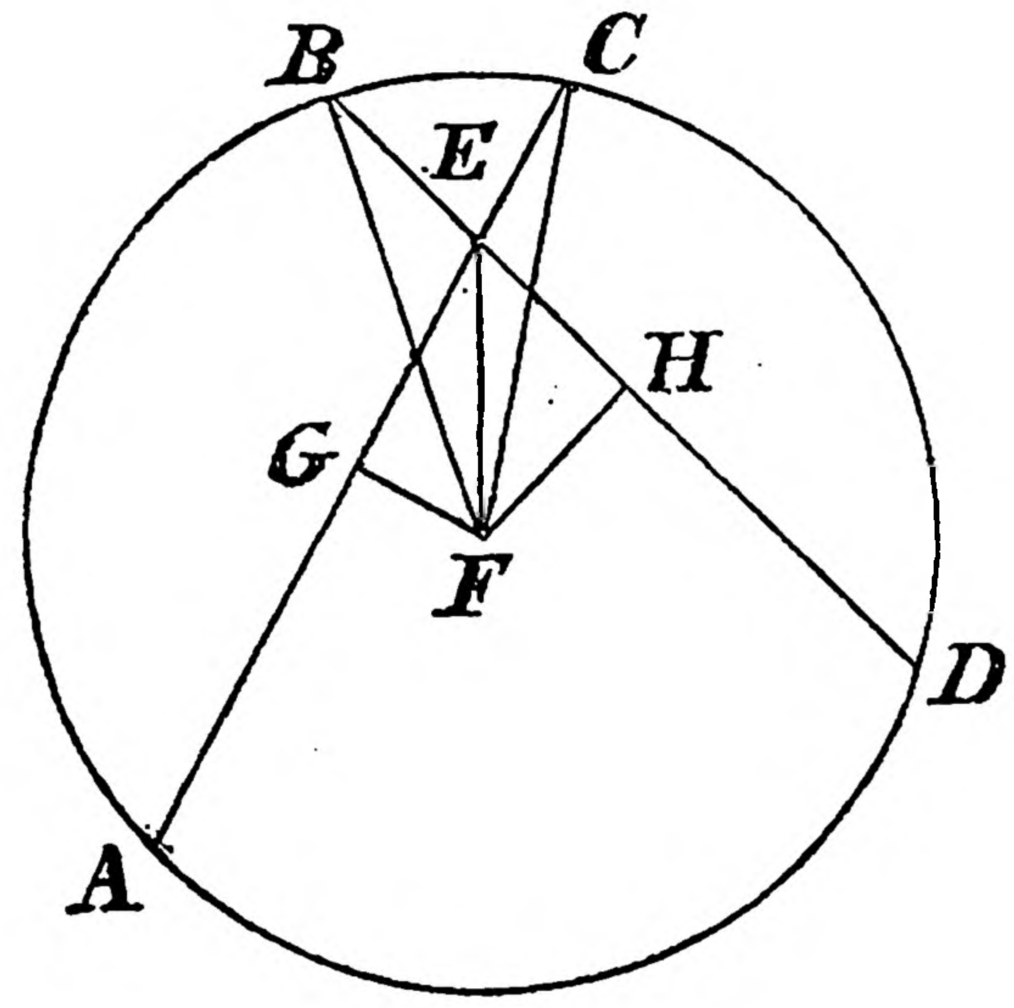
2) Положимъ, что хорды AC и BD пересѣкаются не въ центрѣ круга, напримѣръ въ точкѣ E. Изъ центра F опустимъ перпендикуляры FG и FH на AC и BD и соединимъ центръ F съ точками B, C и E (фиг. 159).

Такъ какъ $AG = CG$ (кн. 3, пред. 3), то мы имѣемъ (кн. 2, пред. 5):

$$AE \cdot EC + \square GE = \square GC$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по $\square GF$ (кн. 1, акс. 2), получимъ:

Фиг. 159.



$$AE.EC+\square GE+\square GF=\square GC+\square GF.$$

Но уголъ FGC прямой, слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$\square GC+\square GF=\square FC \quad \text{и} \quad \square GF+\square GE=\square FE,$$

откуда:

$$AE.EC+\square FE=\square FC=\square FB.$$

Точно также мы найдемъ, что:

$$DE.EB+\square FE=\square FB$$

слѣдовательно (кн. 1, акс. 1):

$$AE.EC+\square FE=DE.EB+\square FE$$

откуда наконецъ (кн. 1, акс. 3):

$$\text{прям.}AE.EC=\text{прям.}DE.EB.$$

Предложенiе 36. Если изъ точки D, лежащей внѣ круга ABC, проведены двѣ прямыя DA и DB, изъ коихъ первая пересѣкаетъ кругъ въ точкахъ C и A, а вторая касается его въ точкѣ B, то квадратъ, построенный на касательной DB, равенъ прямоугольнику, построенному на DA и DC.

Доказат. 1) Положимъ, что сѣкущая DA проходитъ чрезъ центръ E круга ABC (фиг. 160). Соединимъ точку касанiя B съ центромъ E, то уголъ DBE будетъ прямой (кн. 3, пред. 18), слѣдовательно, $\square DE=\square DB+\square BE$ (кн. 1, пред. 47). Но какъ $CE=AE$, то $AD.DC+\square CE=\square ED$ (кн. 2, пред. 6) или, замѣчая что $CE=BE$, найдемъ:

$$AD \,.\, DC + \square BE = \square ED$$

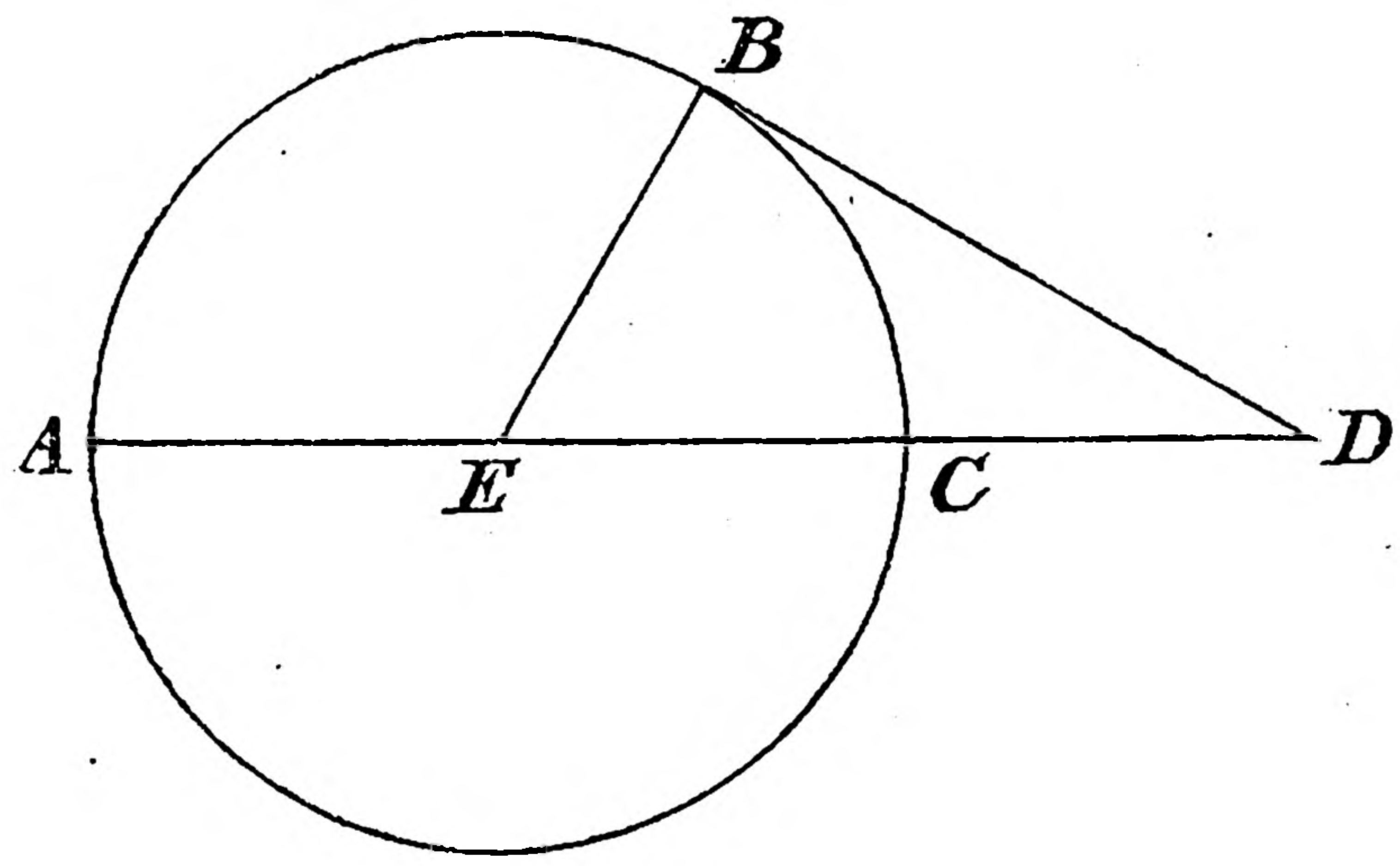
откуда:

$$AD \,.\, DC + \square BE = \square DB + \square BE,$$

отнимая по $\square BE$ (кн. 1, акс. 3), получимъ:

$$AD \,.\, DC = \square DB.$$

Фиг. 160.



2) Пусть сѣкущая DA не проходитъ чрезъ центръ E (фиг. 161). Изъ центра E опустимъ перпендикуляръ EF на сѣкущую DA (кн. 1, пред. 12), и соединимъ центръ E съ B, C и D. Такъ какъ хорда AC въ точкѣ F дѣлится пополамъ (кн. 3, пред. 3), то $AD \,.\, DC + \square FC = \square FD$ (кн. 2, пред. 6), если къ обѣимъ частямъ этого равенства прибавимъ по $\square FE$ (кн. 1, акс. 2), то получимъ:

$$AD \,.\, DC + \square FC + \square FE = \square FD + \square FE.$$

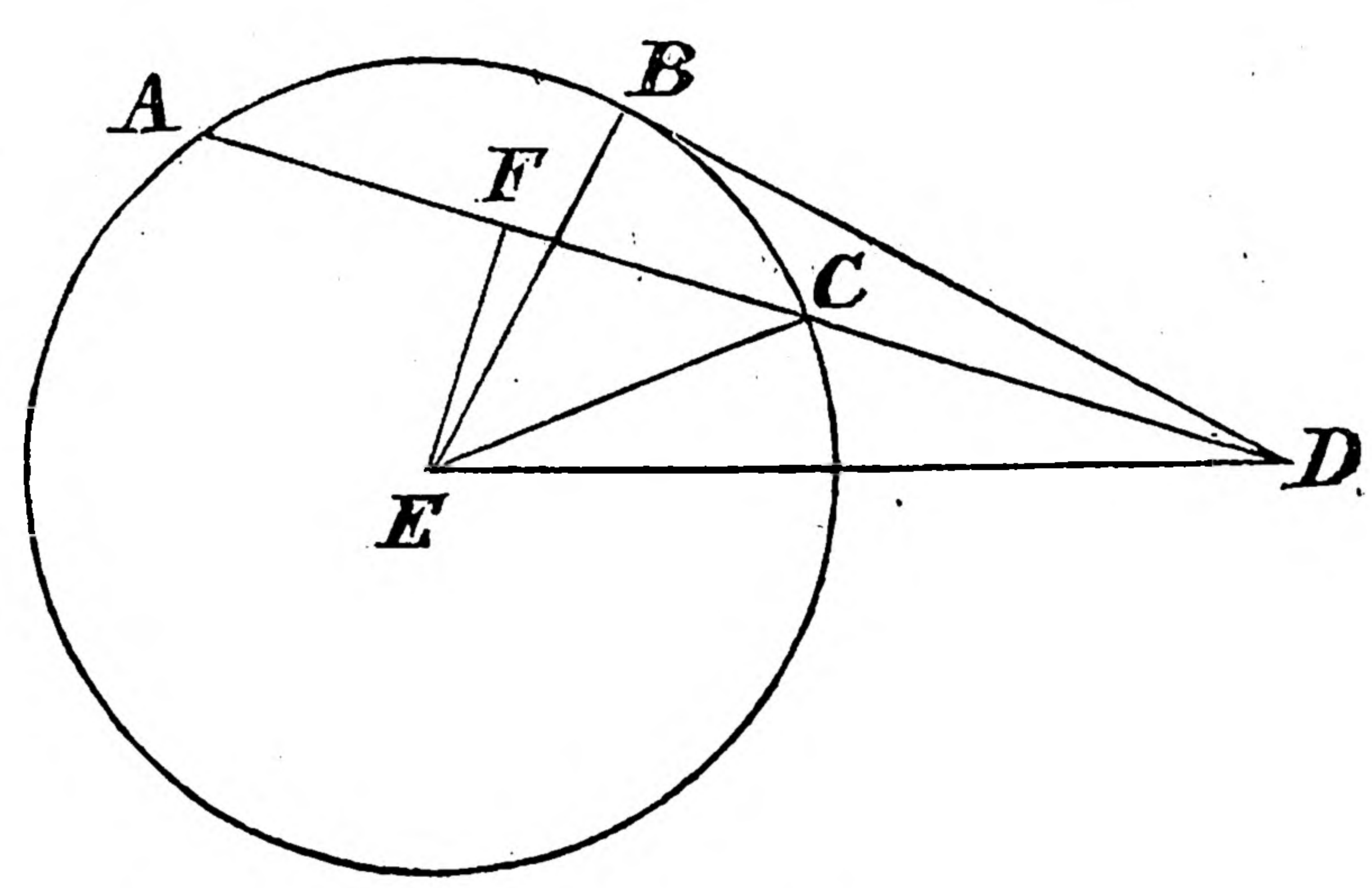
Но уголъ DFE прямой, слѣдовательно мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square FC + \square FE = \square EC, \quad \square FD + \square FE = \square DE,$$

откуда:

$$AD \,.\, DC + \square EC = \square DE$$

Фиг. 161.



или, замѣчая что $EC = BE$ и что:

$$\square DE = \square BD + \square BE$$

найдемъ:

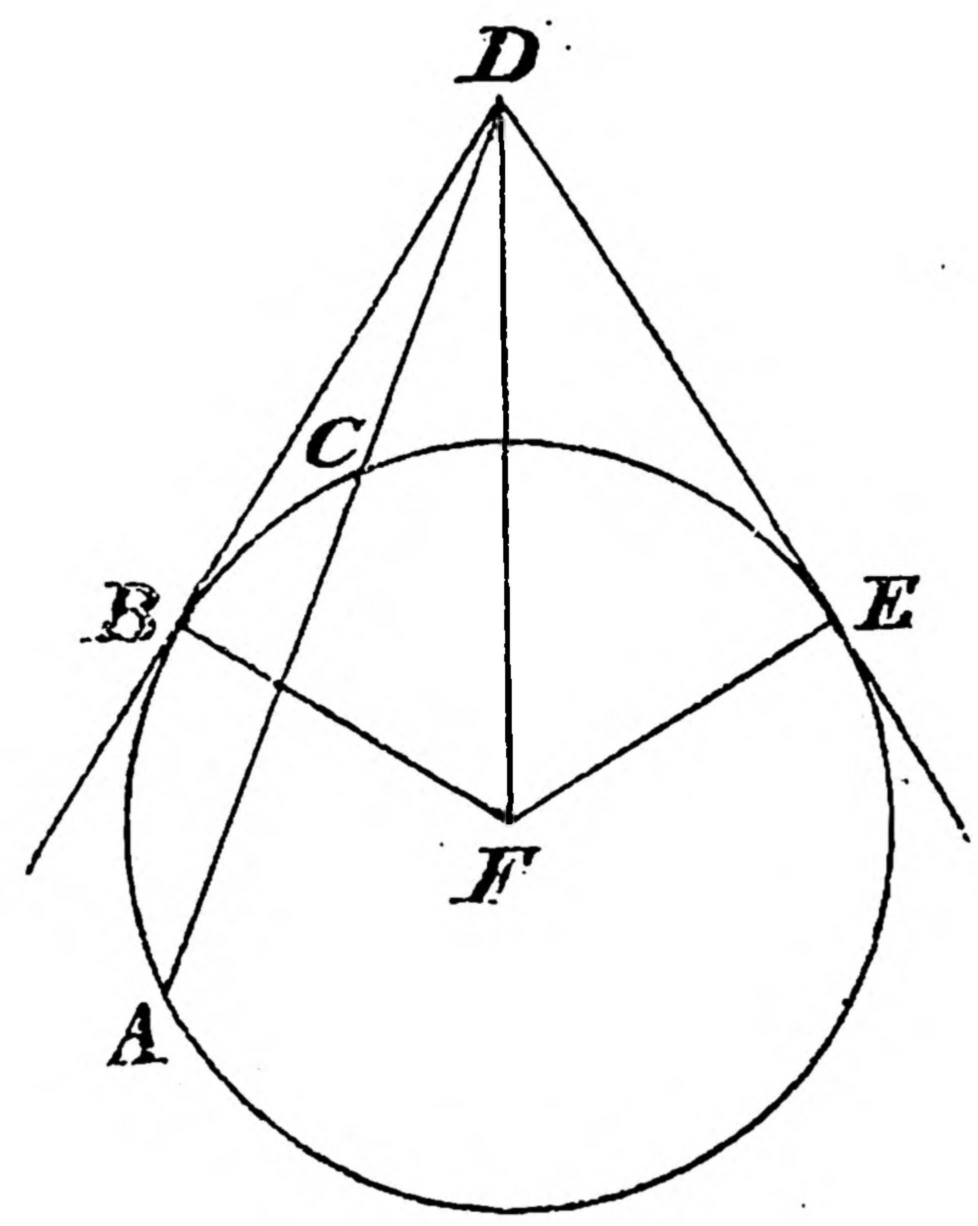
$$AD \,.\, DC + \square BE = \square BD + \square BE,$$

отнимая по $\square BE$ (кн. 1, акс. 3) найдемъ наконецъ:

$$AD \,.\, DC = \square BD.$$

Предложеніе 37. Если изъ точки D, лежащей внѣ окружности ABC, проведена сѣкущая AD и другая прямая DB, оканчивающаяся на окружности въ точкѣ B, и если прямоугольникъ $AD \,.\, DC$ равенъ квадрату $\square DB$, то прямая DB будетъ касательная къ кругу (фиг. 162).

Фиг. 162.



Доказат. Изъ точки D проведемъ касательную DE (кн. 3, пред. 17). Соединимъ центръ F круга ABC съ точками B, D и E. Такъ какъ DE есть касательная, а DA сѣкущая, то (кн. 3, пред. 36):

$$AD \,.\, DC = \square DE$$

но по условію:

$$AD \,.\, DC = \square DB,$$

слѣдовательно $\square DB = \square DE$ (кн. 1, акс. 1), откуда $DB = DE$. Разсматривая треугольники DBF и DEF мы имѣемъ $DB = DE$, $FE = FB$ (кн. 1, опред. 15) и DF сторона общая, слѣдовательно $\angle DEF = \angle DBF$, но уголъ $DEF = d$, слѣдовательно и $\angle DBF = d$. Откуда видимъ, что DB есть касательная къ кругу, такъ какъ DB перпендикулярна къ радіусу FB (кн. 3, пред. 16).

КНИГА IV.

Опредѣленія.

1. Говорятъ, что *прямолинейная фигура вписана* въ другую *прямолинейную фигуру*, если вершины всѣхъ угловъ первой лежатъ на сторонахъ второй.

2. Точно также говорятъ, что *прямолинейная фигура описана* около другой *прямолинейной фигуры*, если всѣ стороны первой проходятъ чрезъ вершины угловъ второй.

3. Говорятъ, что *прямолинейная фигура вписана въ кругъ*, если всѣ вершины угловъ фигуры лежатъ на окружности круга.

4. Говорятъ, что прямолинейная фигура *описана около круга*, если стороны фигуры касаются окружности.

5. Говорятъ, что кругъ *вписанъ въ прямолинейную фигуру*, если онъ *касается* сторонъ фигуры.

6. Говорятъ, что *кругъ описанъ* около прямолинейной фигуры, если онъ проходитъ чрезъ вершины угловъ фигуры.

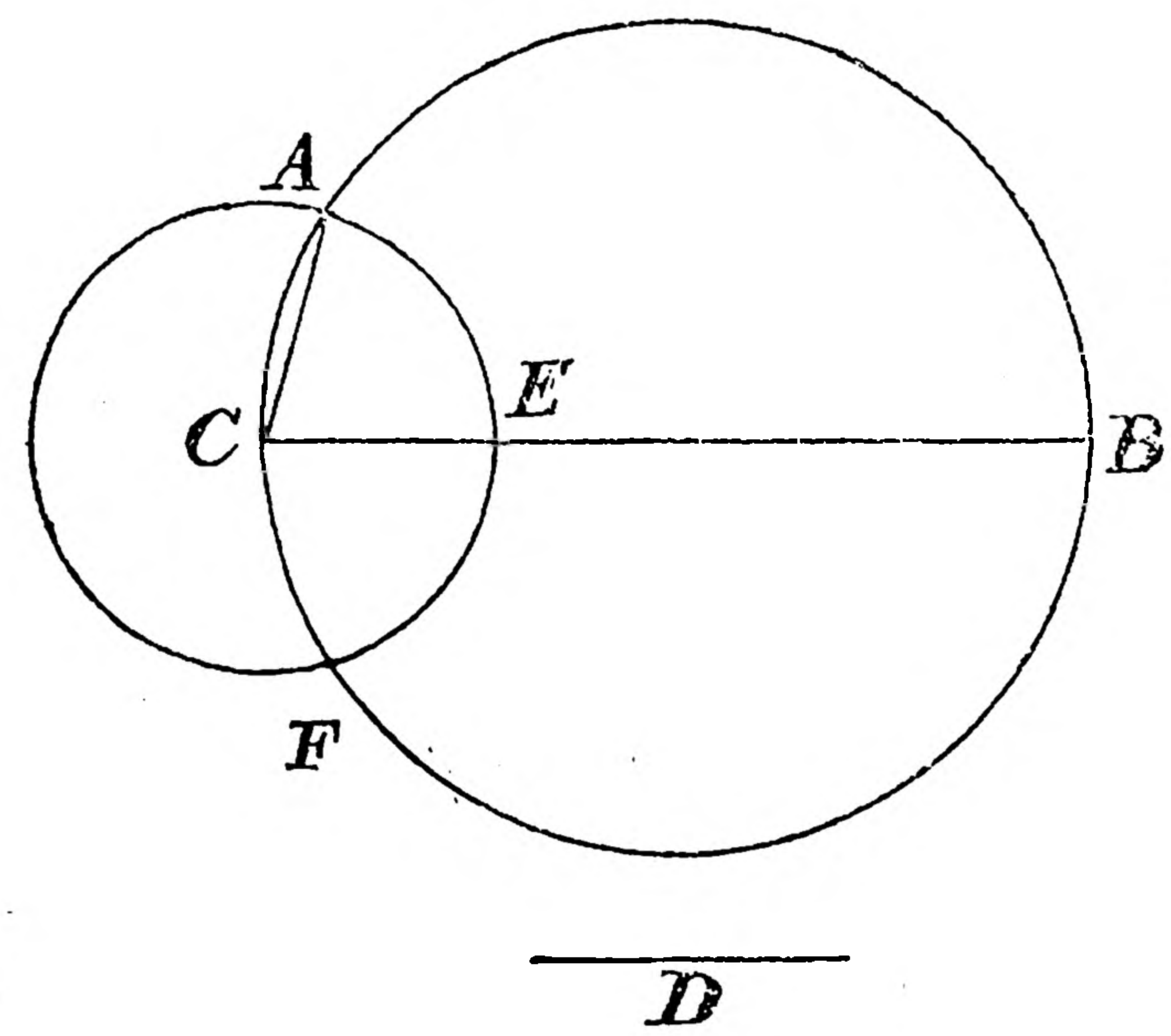
7. Говорятъ, что прямая линія AB (отрѣзокъ) помѣщена въ кругѣ, если ея концы A и B лежатъ на окружности.

Предложенія.

Предложеніе 1. Помѣстить въ данномъ кругѣ ABC, прямую линію AC, равную данной прямой D, которая не больше діаметра круга ABC (фиг. 163).

Рѣшеніе. Проведемъ въ данномъ кругѣ діаметръ BC. Если діаметръ $BC=D$, то задача и рѣшена. Если-же $BC>D$, то на діаметрѣ BC отъ точки C отложимъ $CE=D$ (кн. 1, пред. 3). Изъ точки C, какъ изъ центра, радіусомъ CE опишемъ кругъ AEF. Точку A, пересѣченіе этого круга съ даннымъ кругомъ, соединимъ съ точкою C, прямая AC и будетъ требуемая.

Фиг. 163.



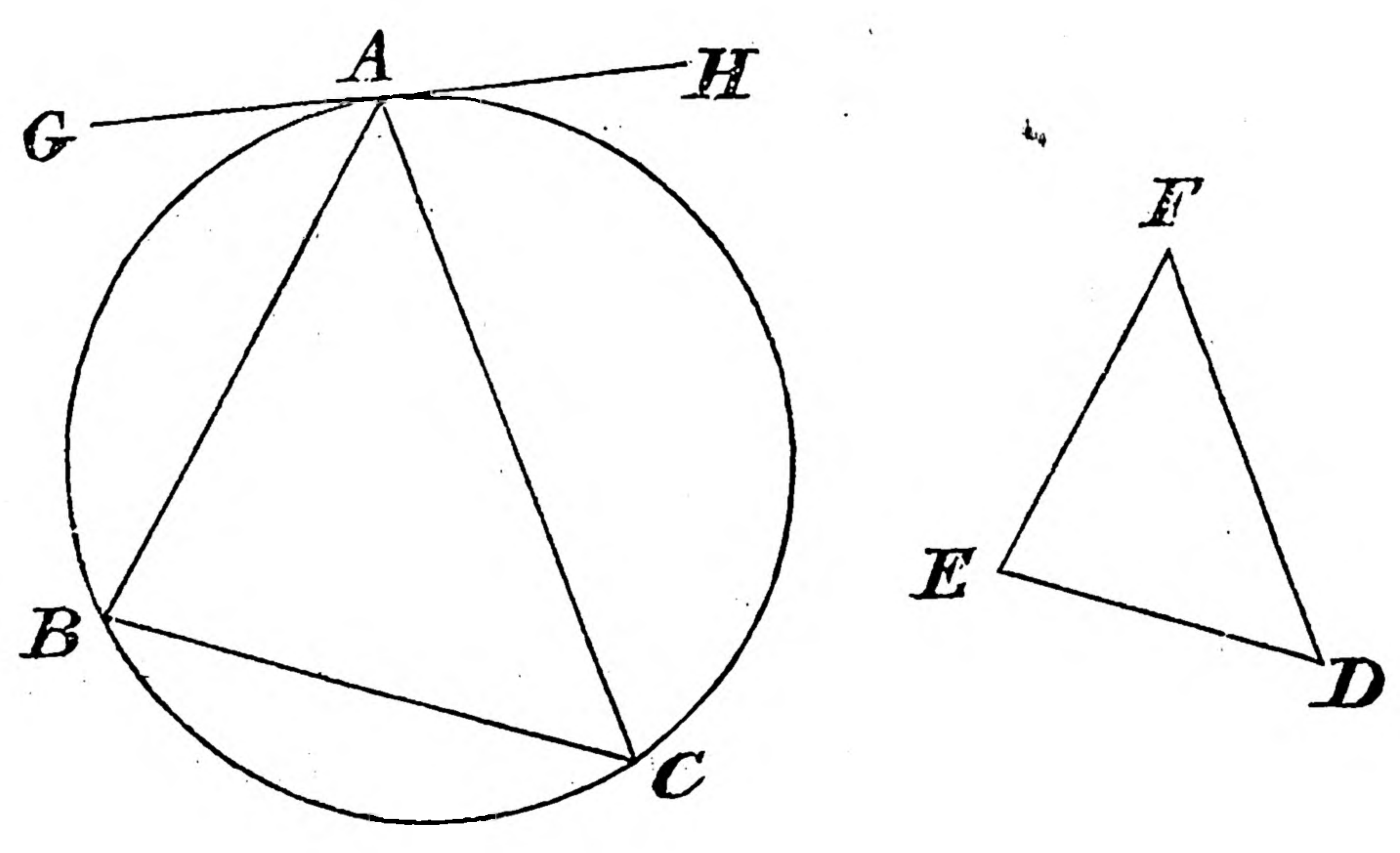
Въ самомъ дѣлѣ, $AC=CE$ (кн. 1, опр. 15), но $CE=D$, слѣдовательно (кн. 1, акс. 1, кн. 4, опр. 7) $AC=D$.

Предложеніе 2. Въ данный кругъ ABC вписать треугольникъ ABC, равноугольный данному треугольнику DEF (фиг. 164)?

Рѣшеніе. На окружности даннаго круга возьмемъ произвольную точку A и чрезъ эту точку проведемъ касательную GAH къ кругу, въ точкѣ A построимъ уголъ HAC (кн. 1, пред. 23), равный углу E треугольника DEF, и уголъ GAB, равный углу D того же треугольника.

Точки B и C, въ которыхъ стороны построенныхъ угловъ встрѣчаютъ окружность, соединимъ прямою BC. Полученный такимъ образомъ треугольникъ ABC будетъ требуемый.

Фиг. 164.



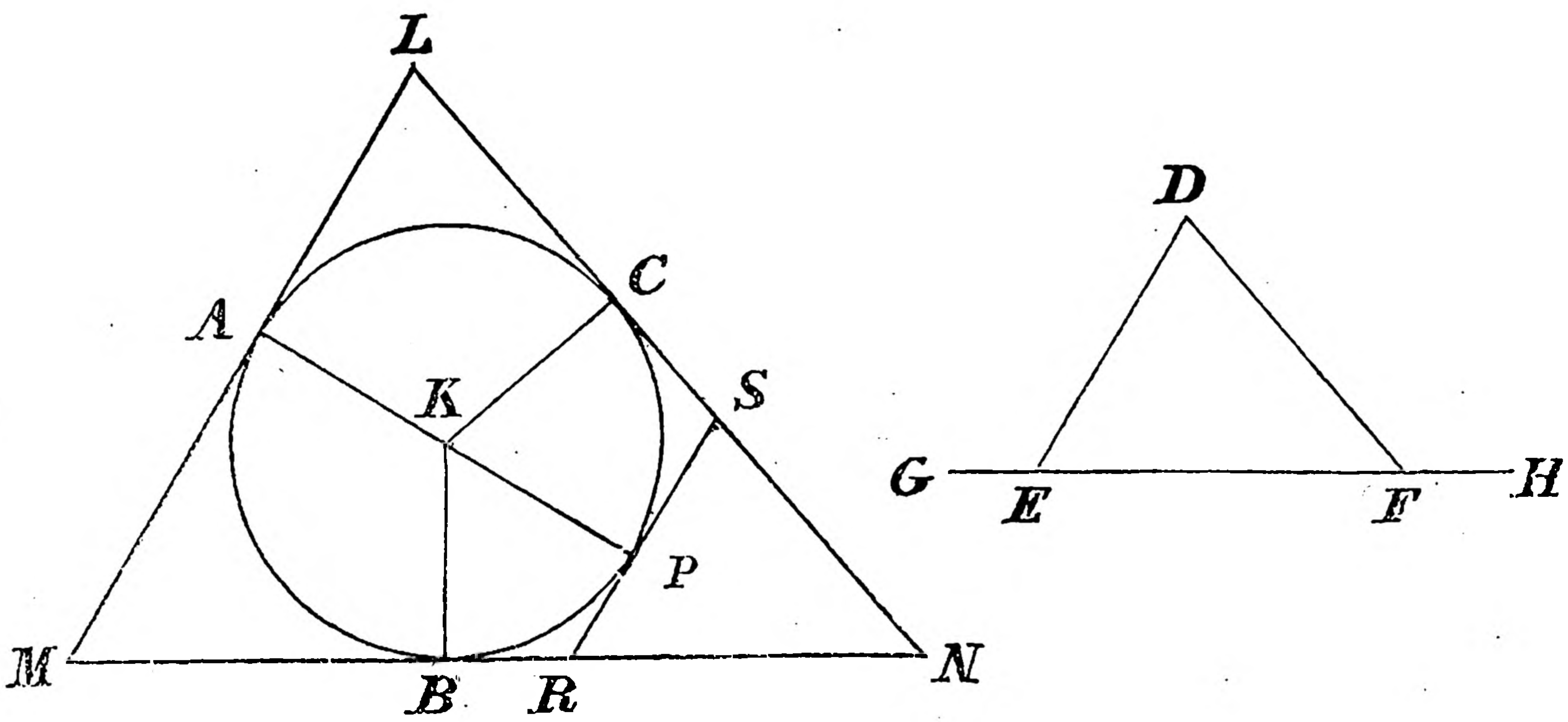
Въ самомъ дѣлѣ, уголъ $HAC=\angle ABC=\angle E$ (кн. 3, пред. 32); на томъ же основаніи уголъ $GAB=\angle ACB=\angle D$, слѣдовательно и уголъ $BAC=\angle F$ (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно, вписанный треугольникъ ABC (кн. 4, опр. 3) есть требуемый.

Предложеніе 3. Около даннаго круга ABC описать треугольникъ, равноугольный данному треугольнику DEF (фиг. 165)?

Рѣшеніе. Продолжимъ въ обѣ стороны сторону EF треугольника DEF.

Изъ центра K, даннаго круга, проведемъ какую нибудь прямую KB къ окружности и въ точкѣ K построимъ $\angle BKA = \angle DEG$ и $\angle BKC = \angle DFH$ (кн. 1, пред. 23). Чрезъ точки встрѣчи A, B и C сторонъ, построенныхъ угловъ, съ окружностью, проведемъ касательныя ML, MN и NL; касательныя эти образуютъ требуемый треугольникъ.

Фиг. 165.



Въ самомъ дѣлѣ, углы при точкахъ A и B прямые (кн. 3, пред. 18). Четыреугольникъ $AMBK$ можно разбить діагональю на два треугольника, слѣдовательно сумма угловъ въ немъ равна четыремъ прямымъ угламъ, но углы при A и B прямые, слѣдовательно:

$$\angle AMB + \angle BKA = 2d = \angle DEG + \angle DEF$$

(кн. 1, пред. 13).

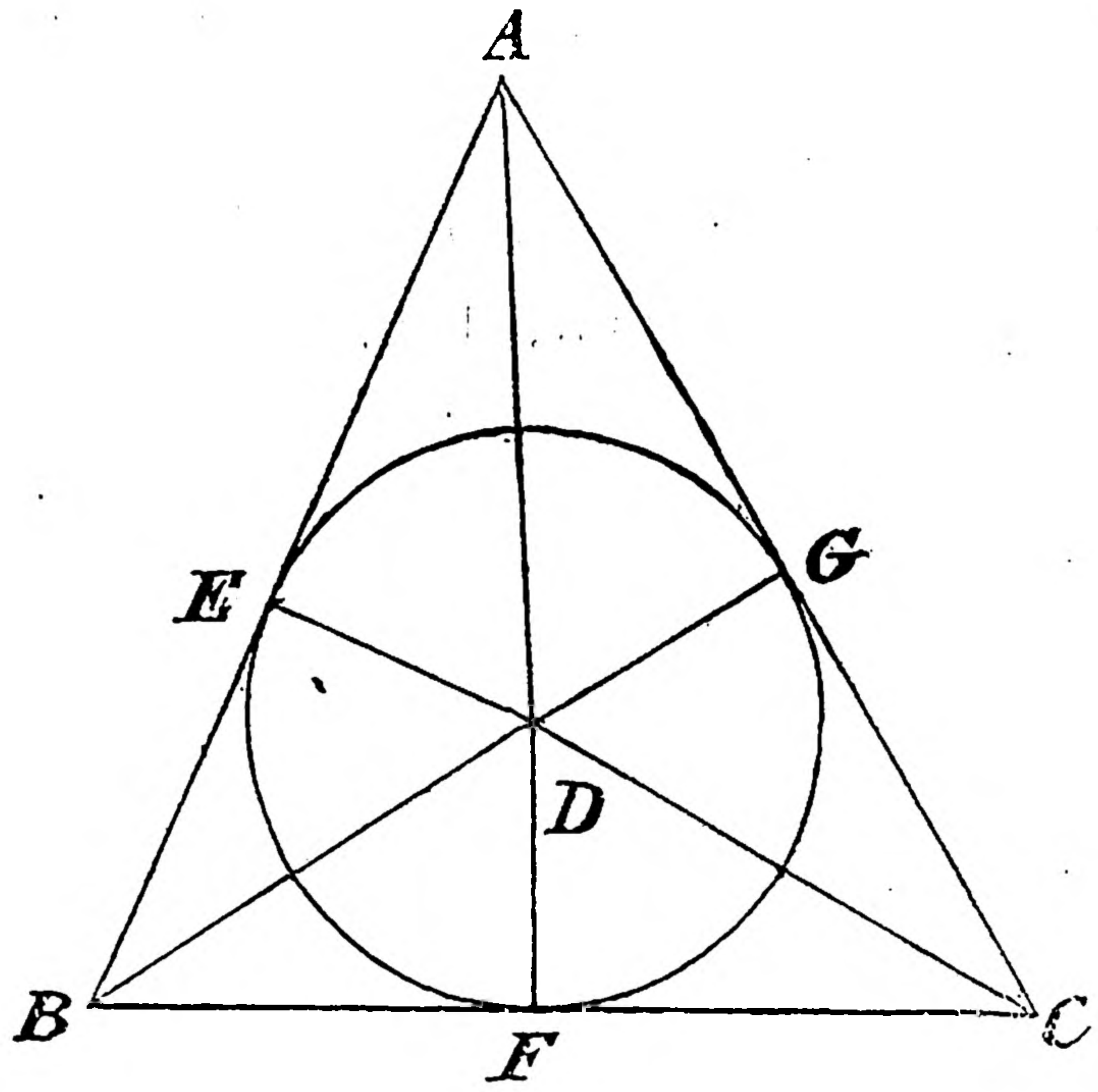
Но, по построенію, $\angle BKA = \angle DEG$, слѣдовательно $\angle AMB = \angle DEF$ (кн. 1, акс. 3). Точно также можно показать, что $\angle CNB = \angle DFE$. Слѣдовательно и $\angle ALC = \angle EDF$ (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно, описанный треугольникъ MLN есть требуемый (кн. 4, опр. 4).

Примѣч. 1. Если радіусъ AK круга ABC продолжимъ до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ P и изъ точки P возставимъ перпендикуляръ RS, который встрѣтитъ стороны MN и LN треугольника LMN въ точкахъ R и S, то получимъ треугольникъ NRS, который будетъ равноугольный треугольникамъ NML и DEF и будетъ описанъ около даннаго круга ABC такъ, что кругъ касается стороны RS и продолженій сторонъ NR и NS.

Предложеніе 4. Въ данный треугольникъ ABC вписать кругъ (фиг. 166)?

Рѣшеніе. Раздѣлимъ два какіе нибудь угла даннаго треугольника пополамъ, напримѣръ углы ABC и BCA (кн. 1, пред. 9). Прямыя BD и CD, дѣлящія эти углы пополамъ, встрѣтятся въ точкѣ D. Изъ точки D опустимъ на стороны треугольника перпендикуляры DE, DF и DG и однимъ изъ этихъ перпендикуляровъ опишемъ кругъ, кругъ этотъ и будетъ искомый.

Фиг. 166.

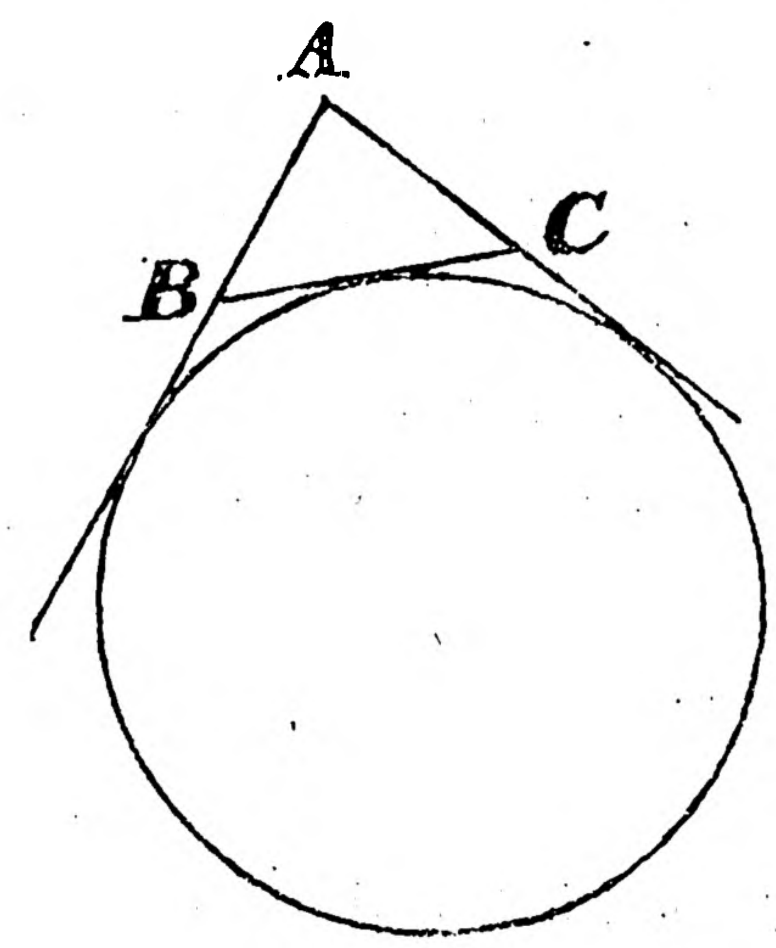


Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ DEB и DFB, $\angle EBD = \angle DBF$ и $\angle DEB = \angle DFB = d$, по построенію, и сторона BD общая, то и $DE = DF$ (кн. 1, пред. 26). Точно также можно показать, что $DF = DG$. Слѣдовательно, описанный изъ точки D, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ одному изъ перпендикуляровъ DE, DF, DG, кругъ пройдетъ чрезъ всѣ три точки E, F G. Слѣдовательно, стороны треугольника ABC, будучи перпендикулярны къ радіусамъ круга EFG, будутъ касательныя къ кругу EFG (кн. 3, пред. 16), который поэтому и есть искомый.

Примѣч. 2. Такимъ же точно образомъ можно въ данный треугольникъ вписать кругъ такъ, чтобы онъ касался одной стороны треугольника и продолженій двухъ другихъ его сторонъ (фиг. 167).

Положимъ, напримѣръ, что кругъ долженъ касаться стороны BC треугольника ABC и продолженій сторонъ AB и AC?

Фиг. 167.



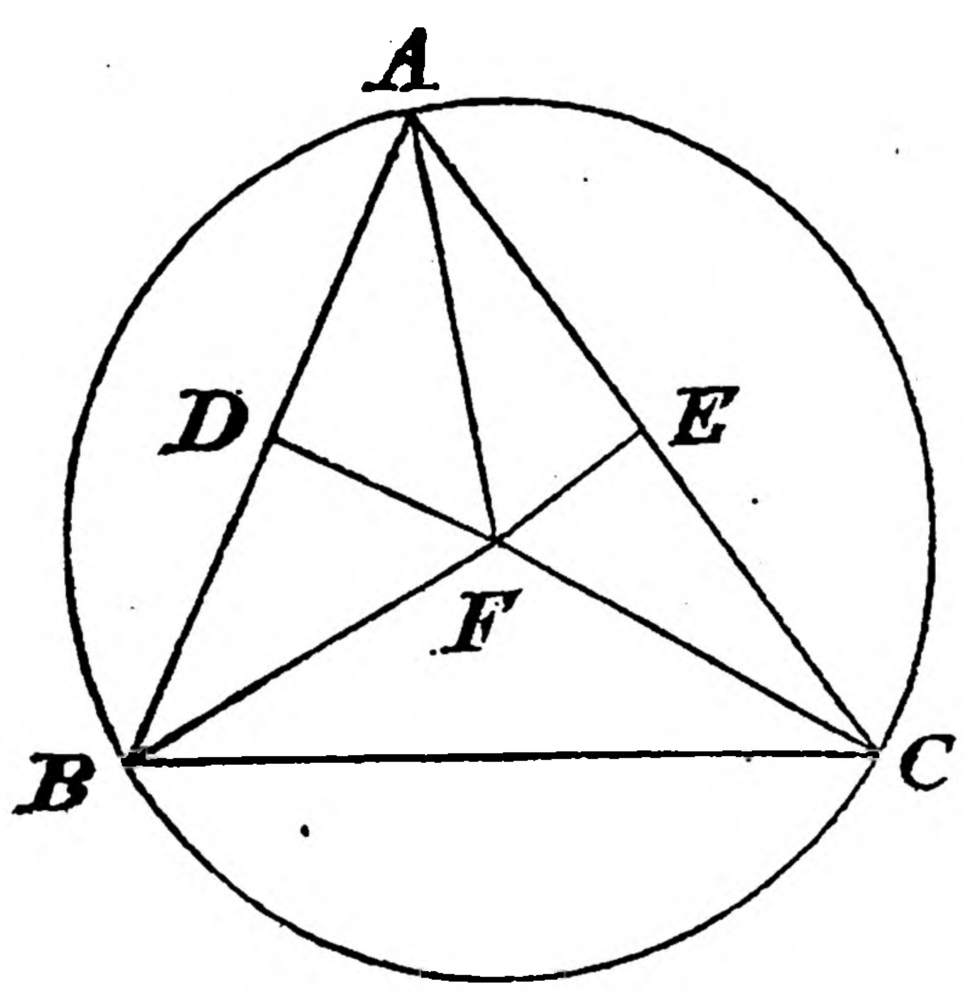
Раздѣлимъ углы между стороною BC и продолженіями сторонъ AB и AC пополамъ. Точка встрѣчи прямыхъ, дѣлящихъ эти углы пополамъ, будетъ центръ искомаго круга. Доказывается это совершенно какъ и въ предложеніи 4.

Предложеніе 5. Описать около даннаго треугольника ABC кругъ.

Рѣшеніе. Раздѣлимъ пополамъ какія нибудь двѣ стороны даннаго треугольника, напримѣръ AB и AC (кн. 1, пред. 10), изъ точекъ дѣленія D и E возставимъ перпендикуляры DF и EF къ сторонамъ AB и AC (кн. 1, пред. 11), которые встрѣтятся въ точкѣ F, лежащей или внутри треугольника, или на третьей сторонѣ его, или наконецъ внѣ его. Изъ точки F, какъ изъ центра, прямою AF опишемъ кругъ ABC, который и будетъ искомый.

1) Точка F лежитъ внутри треугольника ABC (фиг. 168). Проведемъ прямыя FA, FB, FC. Въ треугольникахъ AFD и BFD сторона DF общая, $AD=BD$, $\angle ADF=\angle BDF$, по построенію, слѣдовательно $AF=BF$ (кн. 1, пред. 4).

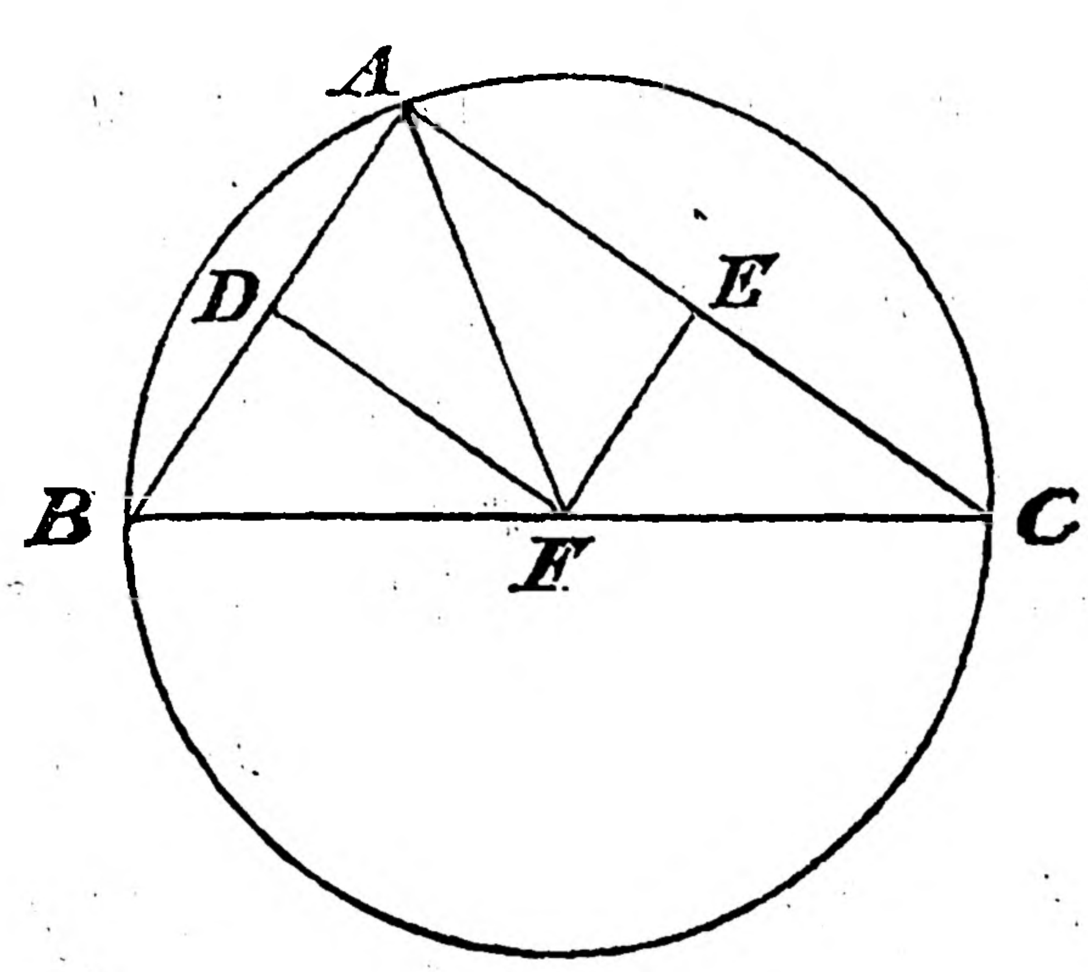
Фиг. 168.



Точно также можно показать, что $AF=CF$. Слѣдовательно кругъ, описанный радіусомъ FA, пройдетъ чрезъ точки A, B и C и есть искомый (кн. 4, опред. 6).

2) Точка F лежитъ на сторонѣ BC треугольника ABC. Соединимъ точку F съ A. Легко показать какъ и въ первомъ случаѣ, что $FA=FB=FC$, а слѣдовательно точка F есть центръ искомаго круга (фиг. 169).

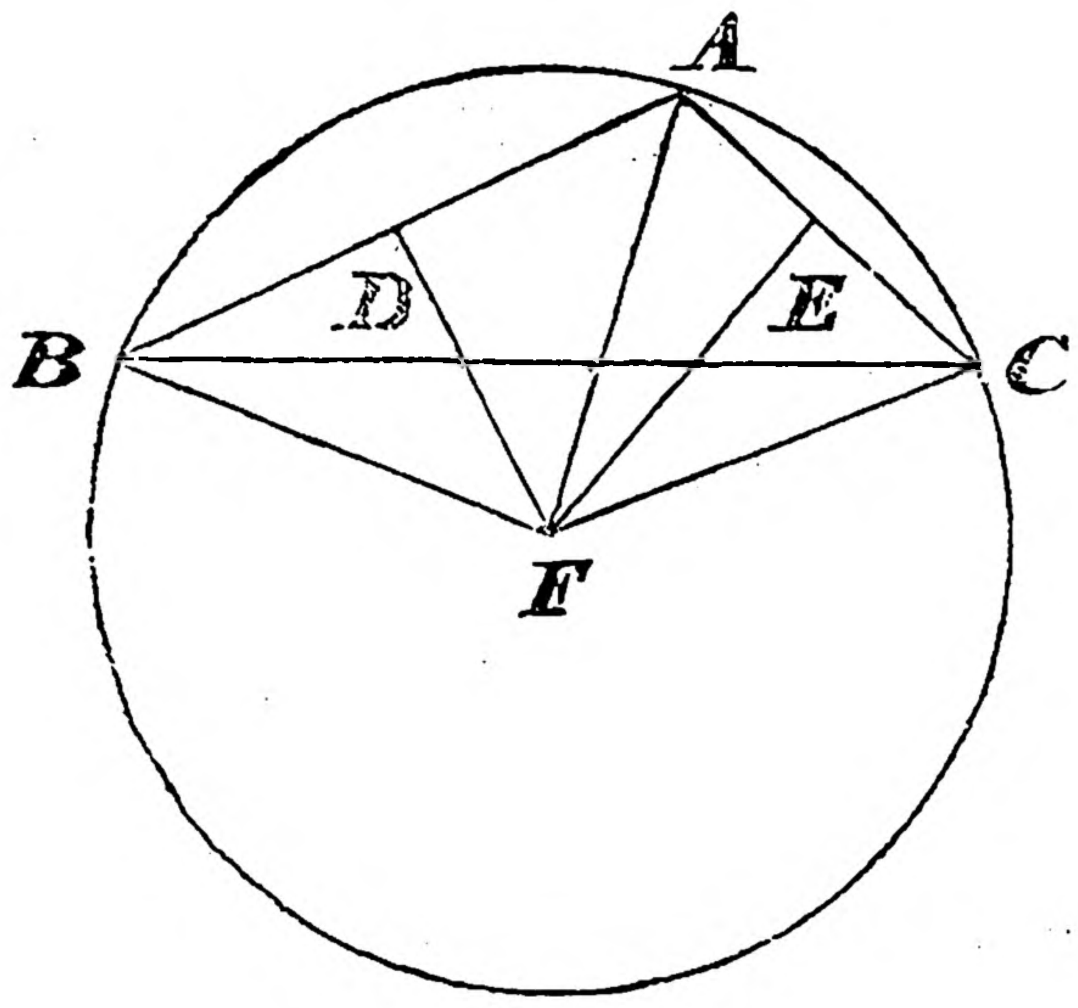
Фиг. 169.



3) Точка F лежитъ внѣ треугольника ABC (фиг. 170). Соединимъ F

съ A, B и C, то мы будемъ опять имѣть $AF=FB$ изъ равенства треугольниковъ AFD и BFD и $AF=CF$ изъ равенства треугольниковъ AFE и CFE. Слѣдовательно точка F будетъ центръ искомаго круга.

Фиг. 170.



Слѣдствіе. Очевидно, что если центръ круга падаетъ внутри треугольника, то каждый изъ угловъ треугольника будетъ меньше прямаго угла, такъ какъ каждый изъ нихъ вписанъ въ сегментъ большій полукруга; если центръ круга падаетъ на одну изъ сторонъ треугольника, то противолежащій этой сторонѣ уголъ равенъ прямому, такъ какъ онъ вписанъ въ полукругъ; наконецъ если центръ круга падаетъ внѣ треугольника, то уголъ, противолежащій сторонѣ, за которой упалъ центръ, будетъ тупой, такъ какъ онъ вписанъ въ сегментъ меньшій полукруга. Слѣдовательно, обратно, если треугольникъ будетъ остроугольный, то центръ круга упадетъ внутри его, если онъ будетъ прямоугольный, то центръ упадетъ на сторонѣ, противолежащей прямому углу, и наконецъ, если треугольникъ будетъ тупоугольный, то центръ упадетъ внѣ треугольника, за стороною, противолежащею тупому углу.

Примѣч. 3. Въ рѣшеніи этой задачи Симсонъ вводитъ еще доказательство, что перпендикуляры FD и FE встрѣтятся, чего у Евклида нѣтъ. Это можно доказать слѣдующимъ образомъ: соединимъ точки D и E, то мы будемъ имѣть:

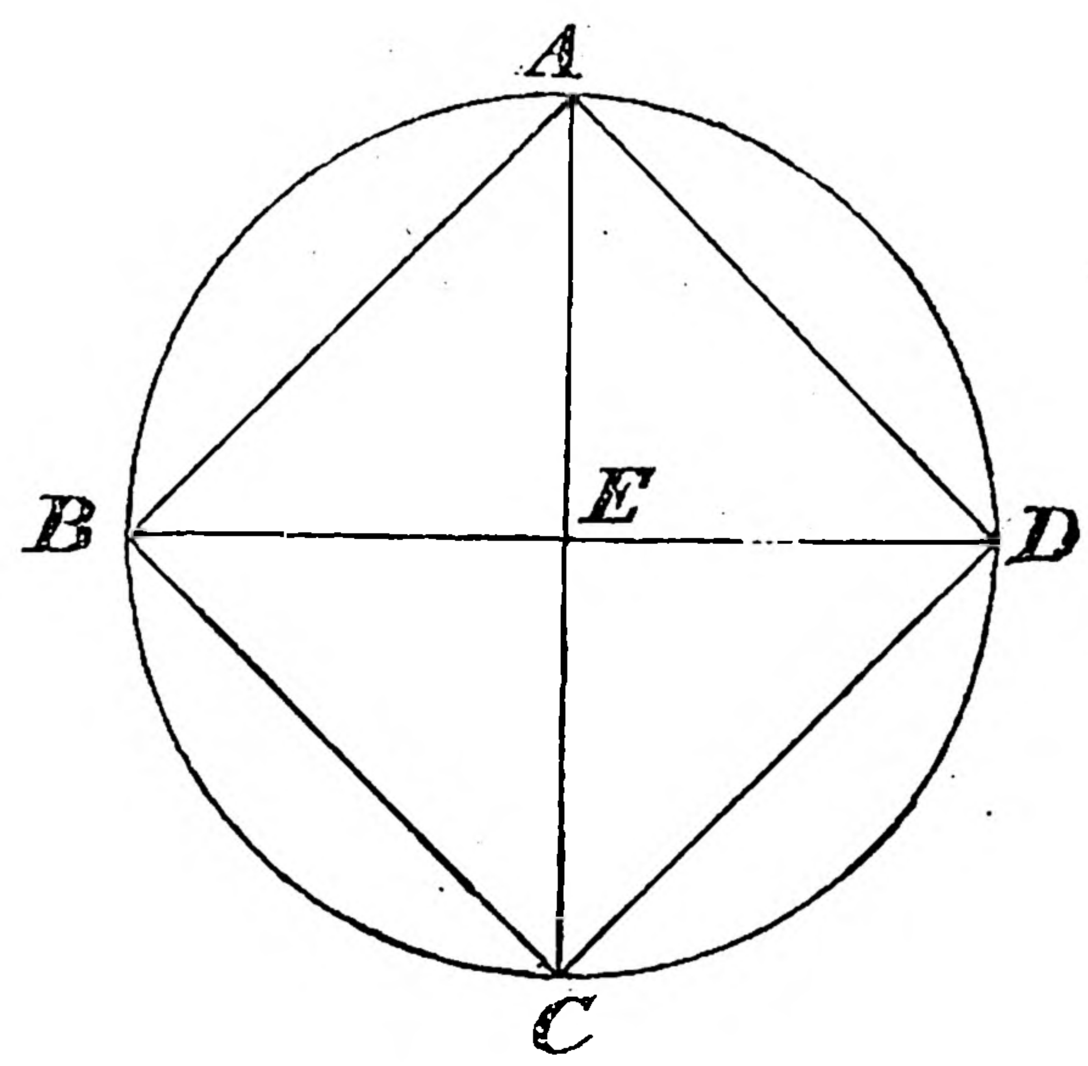
$$\angle EDF + \angle DEF < \angle ADF + \angle AEF = 2d,$$

слѣдовательно прямыя DF и EF встрѣтятся (кн. 1, акс. 11). Здѣсь предположено, что углы ADE и AED оба острые, что всегда можно сдѣлать. Въ самомъ дѣлѣ, $DE \parallel BC$, слѣдовательно треугольники ABC и ADE равноугольны, поэтому надобно только стороны AB и AC такъ выбрать, чтобы углы ABC и ACB были оба острые.

Предложеніе 6. Въ данный кругъ $ABCD$ вписать квадратъ (фиг.171)?

Рѣшеніе. Проведемъ два взаимно перпендикулярные діаметра AC и BD (кн. 1, пред. 11), соединимъ точки пересѣченія діаметровъ съ окружностью прямыми AB, BC, CD и DA, полученный, такимъ образомъ, четыреугольникъ $ABCD$ и будетъ требуемый квадратъ.

Фиг. 171.

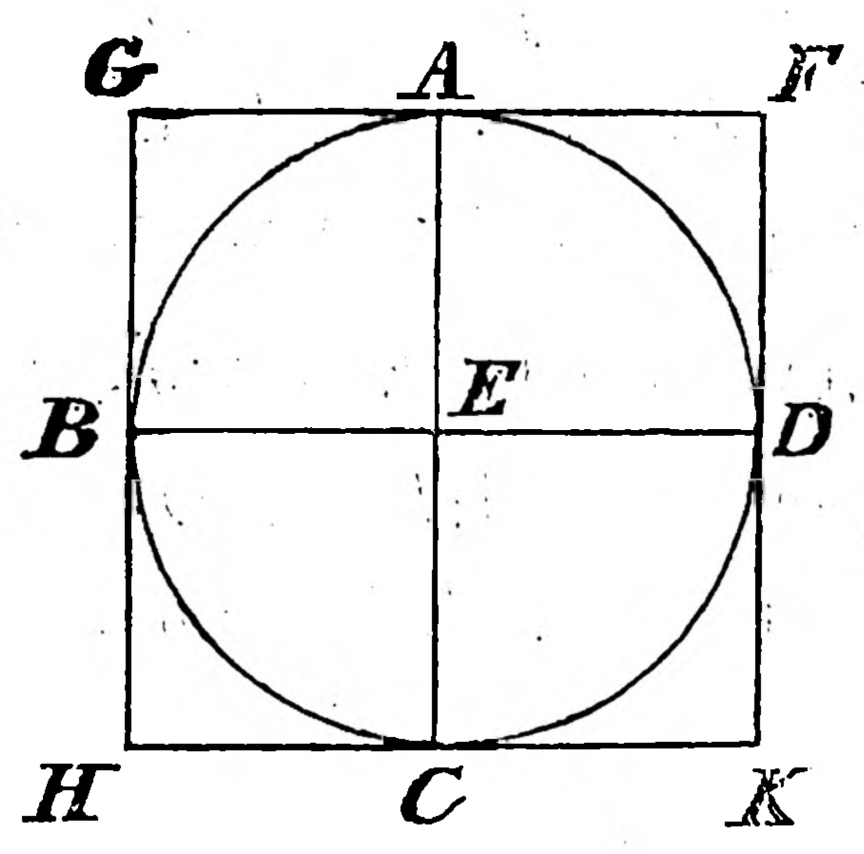


Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ABE и ADE сторона AE общая, $BE=DE$ (кн. 1, опред. 15), углы при E прямые, слѣдовательно и $AB=AD$, на томъ же основаніи и $CB=CD=AB$. Слѣдовательно четыреугольникъ $ABCD$ равносторонній. Такъ какъ BD есть діаметръ, то уголъ $BAD=d$ (кн. 3, пред. 31), по той же причинѣ и углы ABC, BCD и ADC также прямые. Слѣдовательно четыреугольникъ $ABCD$ не только равносторонній, но и прямоугольный, а потому онъ есть квадратъ (кн. 1, опред. 30), вписанный въ кругъ (кн. 4, опред. 3).

Предложеніе 7. Около даннаго круга описать квадратъ (фиг. 172)?

Рѣшеніе. Проведемъ два взаимно перпендикулярные діаметра AC и BD (кн. 1, пред. 11) и чрезъ точки пересѣченія діаметровъ съ окружностью проведемъ касательныя къ кругу FG, GH, HK и KF, образуемый касательными четыреугольникъ $FGHK$ и будетъ требуемый квадратъ.

Фиг. 172.

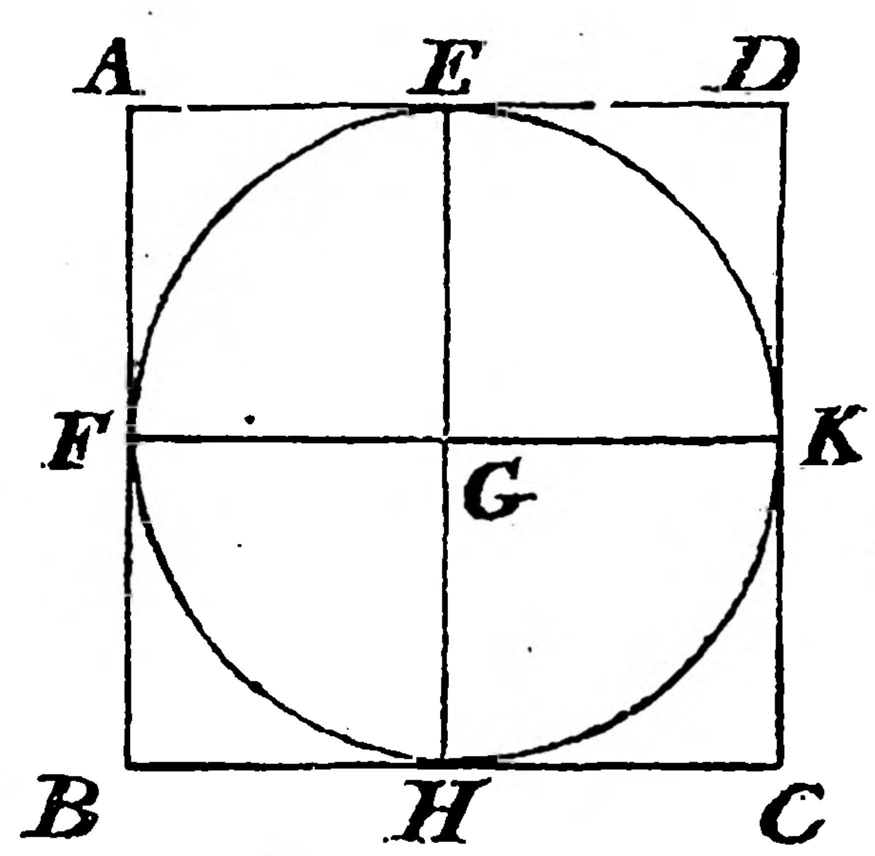


Въ самомъ дѣлѣ, углы при A, B, C и D прямые (кн. 3, пред. 16), равно какъ и при E, слѣдовательно $GF \parallel BD \parallel HK$, точно также $GH \parallel AC \parallel FK$ (кн. 1, пред. 28 и 30). Слѣдовательно четыреугольникъ $FGHK$ есть параллелограмъ, точно также какъ и четыреугольники GD, DH, GC и CF. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 34) $GF=BD=HK$ и $GH=AC=FK$. Но $AC=BD$ (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно $GF=HK=GH=FK$, откуда четыреугольникъ $FGHK$ равносторонній. Уголъ $AGB=\angle AED=d$ (кн. 1, пред. 34), очевидно также что углы при H, K и F прямые. Слѣдовательно четыреугольникъ $FGHK$ прямоугольный, но онъ и равносторонній, слѣдовательно онъ есть квадратъ (кн. 1, опред. 30), описанный около круга (кн. 4, опред. 4).

Предложеніе 8. Въ данный квадратъ $ABCD$ вписать кругъ (фиг. 173)?

Рѣшеніе. Раздѣлимъ двѣ пересѣкающіяся стороны AB и AD въ точкахъ F и E пополамъ. Чрезъ точку E проведемъ прямую $EH \parallel AB$, чрезъ точку F прямую $FK \parallel AD$, прямыя EH и FK пересѣкутся въ точкѣ G. Если изъ точки G, какъ изъ центра, радіусомъ GE опишемъ кругъ, то онъ и будетъ искомый.

Фиг. 173.



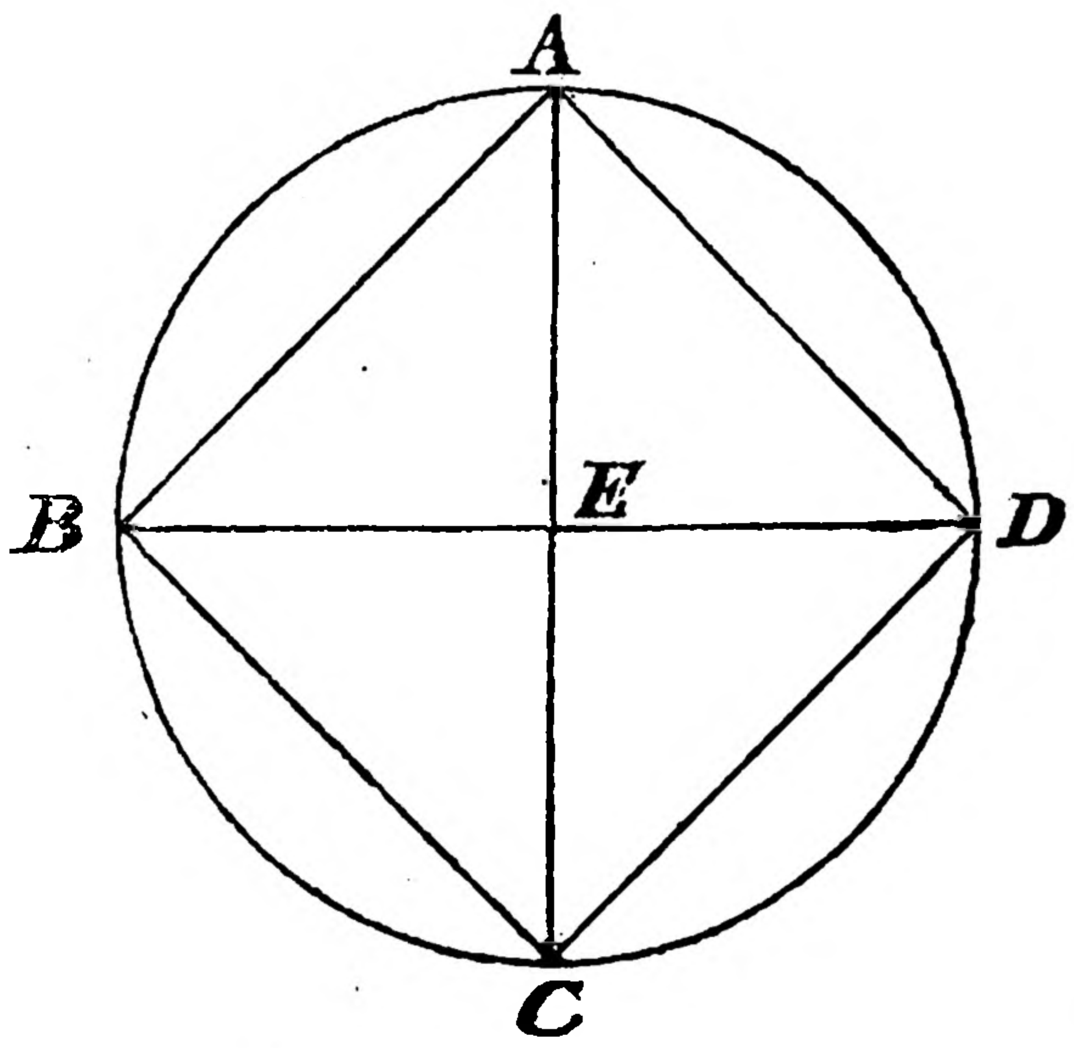
Въ самомъ дѣлѣ, по предъидущему, четыреугольники AG, GB, GC и GD суть параллелограмы, слѣдовательно ихъ противолежащія стороны равны. Но $AD=AB$, слѣдовательно и $AE=AF$ (кн. 1, акс. 7), откуда и $GF=GE$. Точно также можно показать, что $GH=GK=GE$. Слѣдовательно, описанный радіусомъ GE кругъ пройдетъ чрезъ точки F, H и K. Но какъ углы при E, F, H и K прямые (кн. 1, пред. 34), то стороны даннаго квадрата касаются круга въ точкахъ E, F, H и K.

Предложеніе 9. Около даннаго квадрата описать кругъ (фиг. 174)?

Рѣшеніе. Проведемъ діагонали AC и BD и изъ точки ихъ пересѣченія E, какъ изъ центра, радіусомъ EA опишемъ кругъ, который и будетъ требуемый.

Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ABC и ADD сторона AC общая, $AB=AD$ и $BC=CD$ (кн. 1, опред. 30), слѣдовательно $\angle BAC=\angle DAC=\frac{1}{2}d$ (кн. 1, пред. 8). Точно также можно показать, что $\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}d$. Откуда $\angle BAC=\angle ABD$, слѣдовательно $EA=EB$ (кн. 1, пред. 6). Также точно можно показать, что $EC=ED=EA$. Слѣдовательно описанный кругъ

Фиг. 174.



пройдетъ чрезъ вершины угловъ квадрата и будетъ искомый (кн. 4, опред. 4).

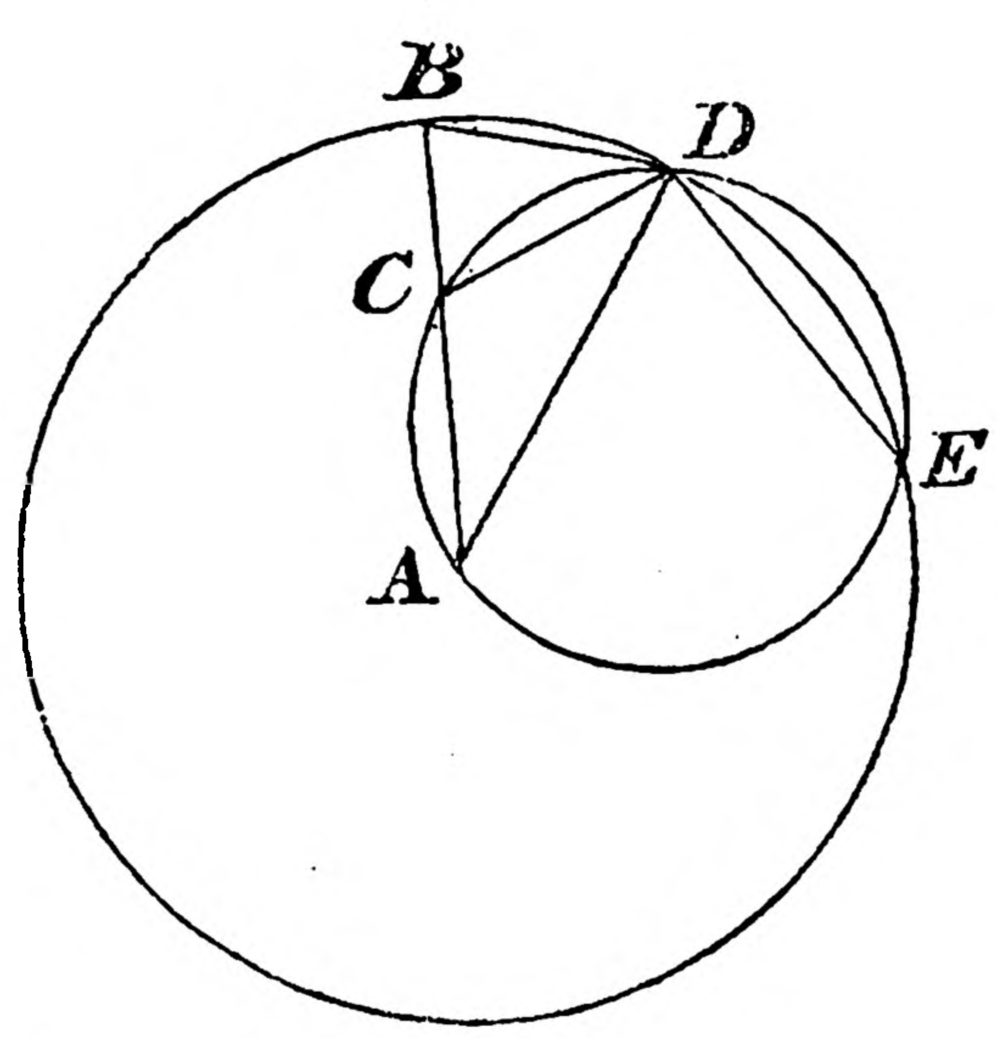
Предложеніе 10. Построить равнобедренный треугольникъ ABD, котораго бы каждый изъ угловъ ABD и ADB при основаніи былъ бы вдвое больше угла BAD при вершинѣ (фиг. 175)?

Рѣшеніе. Возьмемъ произвольную прямую AB и раздѣлимъ ее въ точкѣ C на такія двѣ части AC и CB, чтобы (кн. 2, пред. 11):

$$\square AC = AB \,.\, BC.$$

Изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ AB опишемъ кругъ BDE, помѣстимъ на его окружности прямую $BD=AC$ (кн. 4, пред. 1) и соединимъ A съ D, треугольникъ ABD и будетъ требуемый.

Фиг. 175.



Въ самомъ дѣлѣ, соединимъ C съ D и около треугольника ACD опишемъ кругъ $ACDE$ (кн. 4, пред. 5). Такъ какъ мы имѣемъ, по построенію, $\square AC = \square BD = AB \,.\, BC$, то прямая BD будетъ касательная къ кругу $ACDE$ (кн. 3, пред. 36), слѣдовательно $\angle BDC = \angle DAC$ (кн. 3, пред. 32);

если къ предъидущему равенству прибавимъ къ обѣимъ частямъ $\angle CDA$, то получимъ:

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle CDA.$$

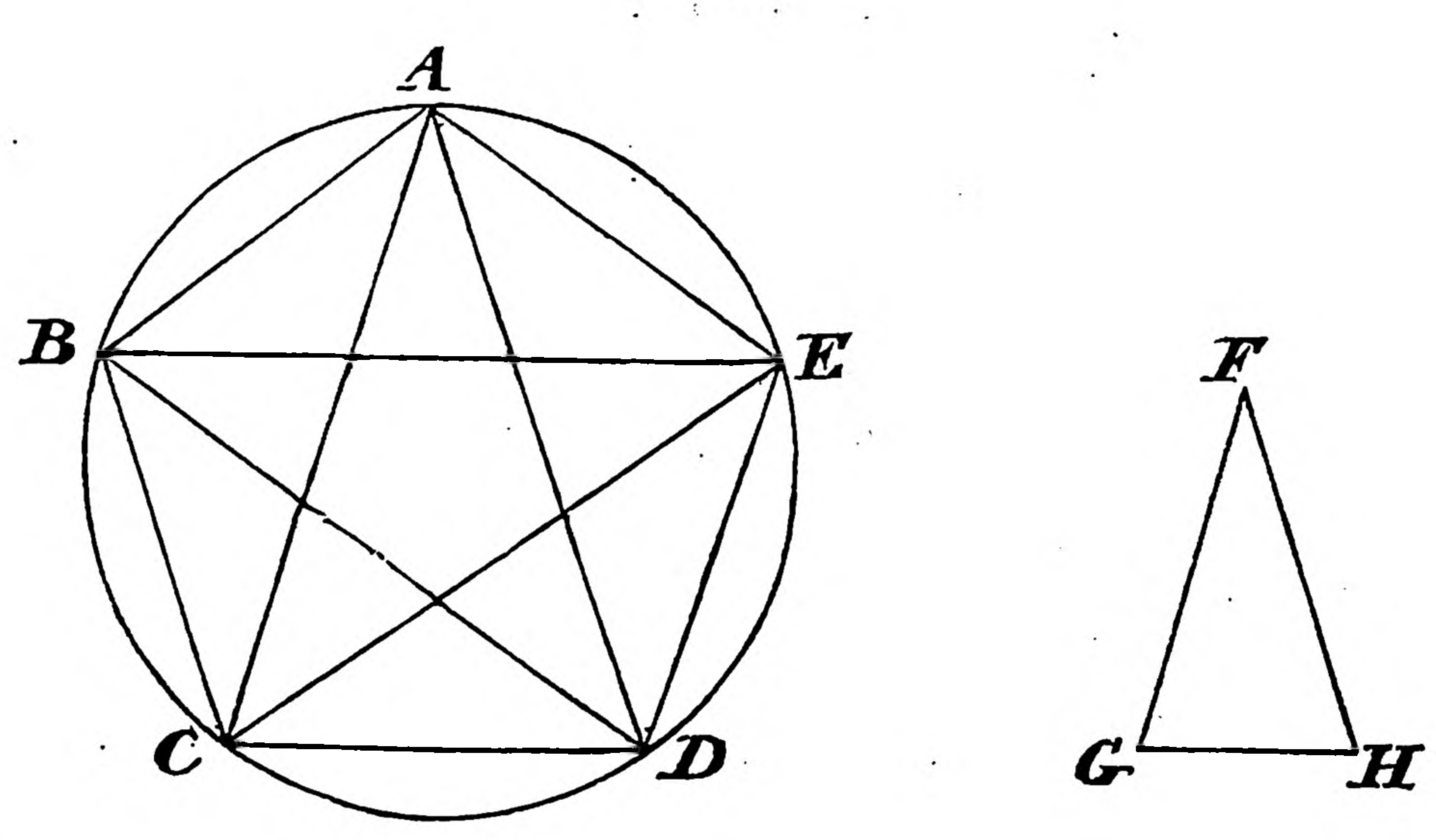
Но $AD = AB$ (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно $\angle ADB = \angle ABD$ (кн. 1, пред. 5). Но мы еще имѣемъ $\angle DAC + \angle CDA = \angle BCD$ (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно $\angle ADB = \angle ABD = \angle BCD$ откуда $BD = CD = AC$ (кн. 1, пред. 6). Изъ этого послѣдняго равенства мы имѣемъ $\angle DAC = \angle CDA$ (кн. 1, пред. 5), откуда $\angle BCD = 2\angle DAC$. Слѣдовательно, какъ уголъ ADB, такъ и уголъ ABD равны $2\angle DAC$.

Примѣч. 4. Легко видѣть, что уголъ BAD есть пятая часть двухъ прямыхъ угловъ, а такъ какъ онъ можетъ быть раздѣленъ пополамъ (кн. 1, пред. 9), то прямой уголъ можетъ быть геометрически раздѣленъ на пять равныхъ частей.

Предложеніе 11. Въ данный кругъ $ABCDE$ вписать равносторонній и равноугольный пятиугольникъ (фиг. 176)?

Рѣшеніе. Построимъ равнобедренный треугольникъ FGH, въ которомъ бы углы при основаніи были, каждый, вдвое больше угла при вершинѣ F (кн. 4, пред. 10). Въ данный кругъ впишемъ треугольникъ ACD, равноугольный построенному треугольнику FGH (кн. 4, пред. 2), такъ чтобы $\angle A = \angle F$, $\angle C = \angle G$ и $\angle D = \angle H$, то мы будемъ имѣть $\angle CAD = \frac{1}{2}\ \angle ACD = \frac{1}{2}\ \angle ADC$. Раздѣлимъ, наконецъ, пополамъ углы ADC и ACD (кн. 1, пред. 9) и проведемъ CE и DB до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ B и E, соединимъ A съ B, B съ C, A съ E и E съ D, то получимъ искомый пятиугольникъ $ABCDE$.

Фиг. 176.



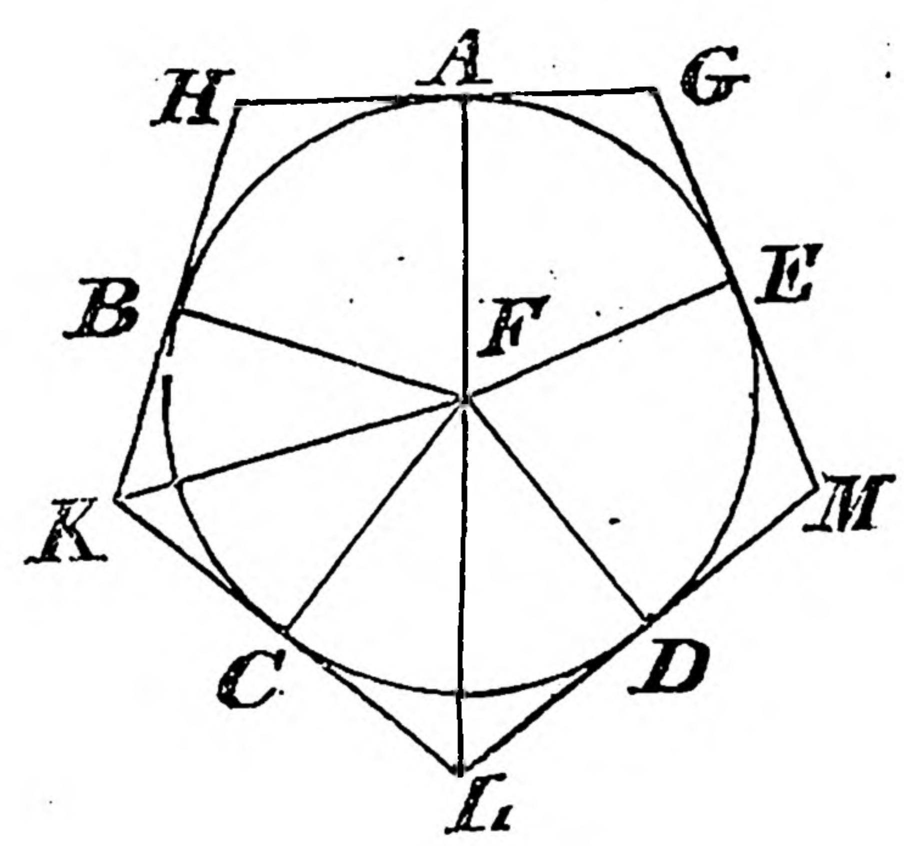
Въ самомъ дѣлѣ, по построенію пять угловъ CAD, ECD, ECA, ADB и BDC равны, слѣдовательно и дуги CD, DE, EA, AB и BC равны (кн. 3, пред. 26), откуда и хорды, ихъ стягивающія, также равны (кн. 3, пред. 29). Слѣдовательно, построенный пятиугольникъ равносторонній.

Такъ какъ дуги AB, BC, CD, DE, EA равны, то дуга $BCDE$=дугѣ $CDEA$, слѣдовательно и $\angle BAE=\angle ABC$ (кн. 3, пред. 27), точно также можно доказать, что $\angle BCD=\angle CDE=\angle DEA=\angle EAB$, слѣдовательно построенный пятиугольникъ и равноугольный.

Предложеніе 12. Около даннаго круга $ABCDE$ описать равносторонній и равноугольный пятиугольникъ (фиг. 177)?

Рѣшеніе. Положимъ, что точки A, B, C, D и E суть вершины правильнаго вписаннаго въ данный кругъ пятиугольника (кн. 4, пред. 11), слѣдовательно дуги AB, BC, CD, DE, EA будутъ равны. Чрезъ точки A, B, C, D, E проведемъ касательныя къ окружности GH, HK, KL, LM, MG, касательныя эти образуютъ пятиугольникъ, который и будетъ требуемый.

Фиг. 177.



Въ самомъ дѣлѣ, пусть F будетъ центръ даннаго круга, соединимъ точки касанія съ центромъ и проведемъ прямыя FK и FL.

Углы при точкахъ B и C прямые (кн. 3, пред. 18), слѣдовательно $\square FK=\square FB+\square BK$ (кн. 1, пред. 47) и $\square FK=\square FC+\square CK$, откуда (кн. 1, акс. 1):

$$\square FB+\square BK=\square FC+\square CK$$

Но $\square FB=\square FC$, слѣдовательно $\square BK=\square CK$ (кн. 1, акс. 3), откуда $BK=CK$. Треугольники FBK и FCK имѣютъ сторону FK общую, $FB=FC$ (кн. 1, опред. 15), $KB=KC$, по доказанному выше, слѣдовательно и $\angle KFB=\angle KFC$ (кн. 1, пред. 8), откуда $\angle BFC=2\angle KFC$ и $\angle BKC=2\angle FKC$. Точно также можно показать, что $\angle CFD=2\angle LFC$ и $\angle CLD=2\angle FLC$. Но такъ какъ дуги BC и CD равны, то $\angle BFC=\angle CFD$ (кн. 3, пред. 27), откуда $\angle KFC=\angle LFC$ (кн. 1, акс. 7). Въ треугольникахъ FKC и FLC $\angle KFC=\angle LFC$, углы при точкѣ C прямые, сторона FC общая, слѣдовательно $KC=LC$ и $\angle FKC=\angle FLC$ (кн. 1, пред. 4).

Такъ какъ $CK=CL$, то $LK=2CK$, точно также легко видѣть, что $KH=2BK$; но мы выше показали, что $CK=KB$, слѣдовательно $KL=KH$.

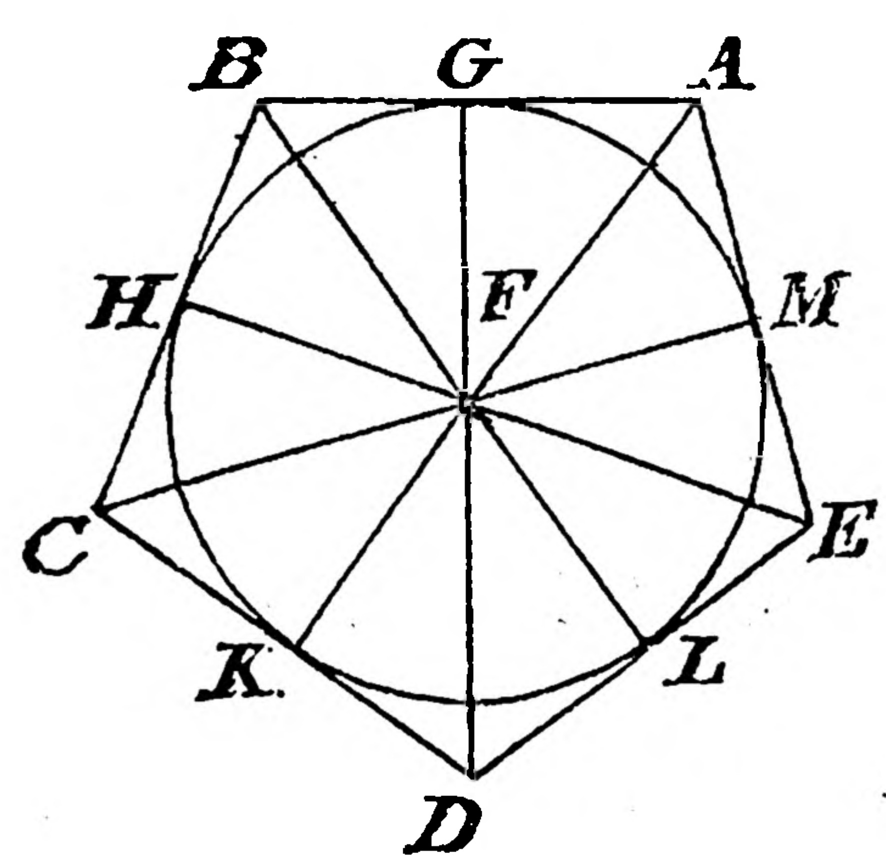
На томъ же основаніи каждая изъ сторонъ HG, GM, ML равны KL и KH, слѣдовательно фигура $GHKLM$ есть равносторонній пятиугольникъ.

Мы выше показали, что $\angle FKC = \angle FLC$, слѣдовательно $2\angle FKC = 2\angle FLC$, но мы также показали, что $2\angle FKC = \angle BKC$ и $2\angle FLC = \angle CLD$, слѣдовательно $\angle BKC = \angle CLD$. На томъ же основаніи можно показать, что углы BHA, AGE, EMD равны, каждый угламъ BKC и CLD. Слѣдовательно фигура $GHKLM$ и равноугольна.

Предложеніе 13. Въ данный равносторонній и равноугольный пятиугольникъ $ABCDE$ вписать кругъ (фиг. 178)?

Рѣшеніе. Раздѣлимъ, какіе нибудь углы пятиугольника, напримѣръ углы BCD и CDE пополамъ (кн. 1, пред. 9), изъ точки F встрѣчи прямыхъ, дѣлящихъ эти углы пополамъ, опустимъ перпендикуляры FG, FH, FK, FL и FM на стороны пятиугольника, изъ точки F, какъ изъ центра радіусомъ равнымъ одному изъ этихъ перпендикуляровъ опишемъ кругъ, который и будетъ требуемый.

Фиг. 178.



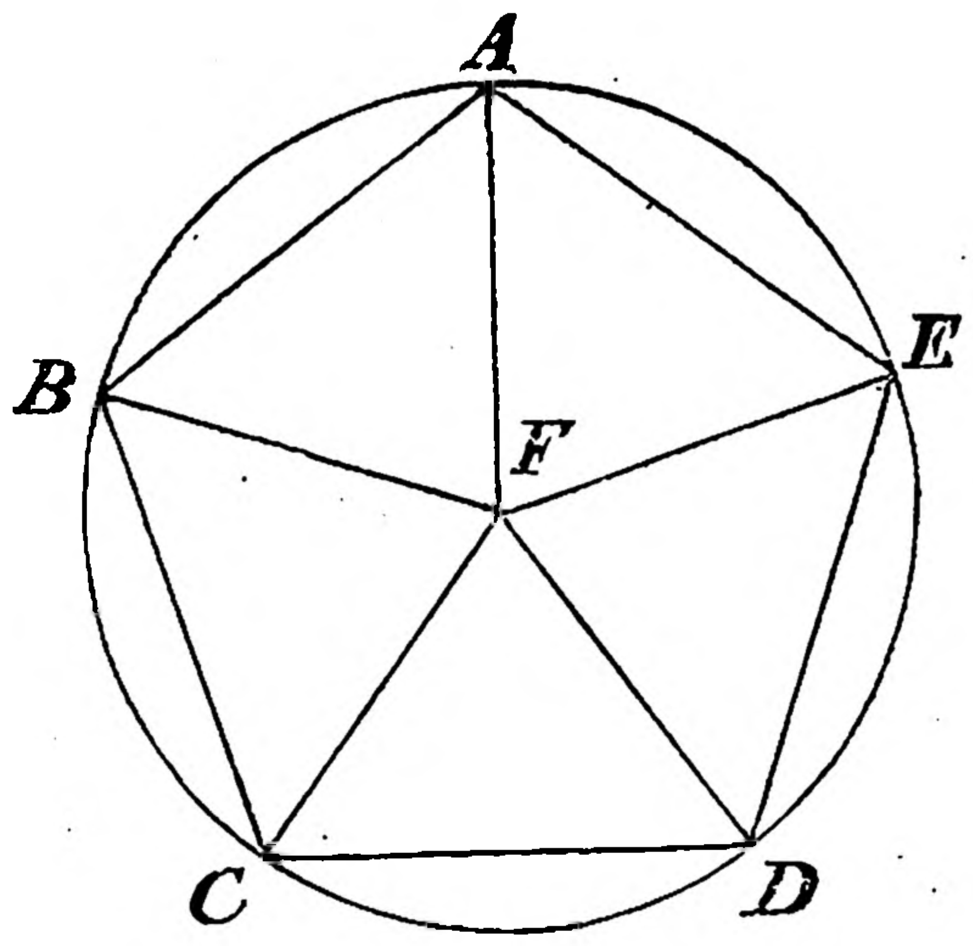
Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ прямыя FB, FA и FE. Въ треугольникахъ FBC и FCD, сторона FC общая, $BC = CD$, по положенію, $\angle FCB = \angle FCD$, слѣдовательно и $\angle CBF = \angle CDF$ (кн. 1, пред. 4). Но $\angle CDE = 2\angle CDF$ и $\angle ABC = \angle CDE$, слѣдовательно $\angle ABC = 2\angle CDF$, откуда видимъ, что прямая FB дѣлитъ уголъ ABC пополамъ. Точно также можно показать, что углы AED и BAE прямыми FE и FA дѣлятся пополамъ.

Такъ какъ $\angle FCH = \angle FCK$, углы при точкахъ H и K прямые, FC сторона общая треугольникамъ FHC и FKC, то $FH = FK$ (кн. 1, пред. 26). Точно также можно показать, что FG, FM и FL равны FH и FK. Слѣдовательно, описанный кругъ проходитъ чрезъ точки G, H, K, L, M и касается сторонъ AB, BC, CD, DE, EA въ этихъ точкахъ (кн. 3, пред. 16).

Предложеніе 14. Около даннаго равносторонняго и равноугольнаго пятиугольника описать кругъ (фиг. 179)?

Рѣшеніе. Раздѣлимъ два угла, данной фигуры, напримѣръ, BCD и CDE пополамъ, изъ точки F, встрѣчи прямыхъ, дѣлящихъ эти углы пополамъ, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ FC или FD опишемъ кругъ, который и будетъ требуемый.

Фиг. 179.

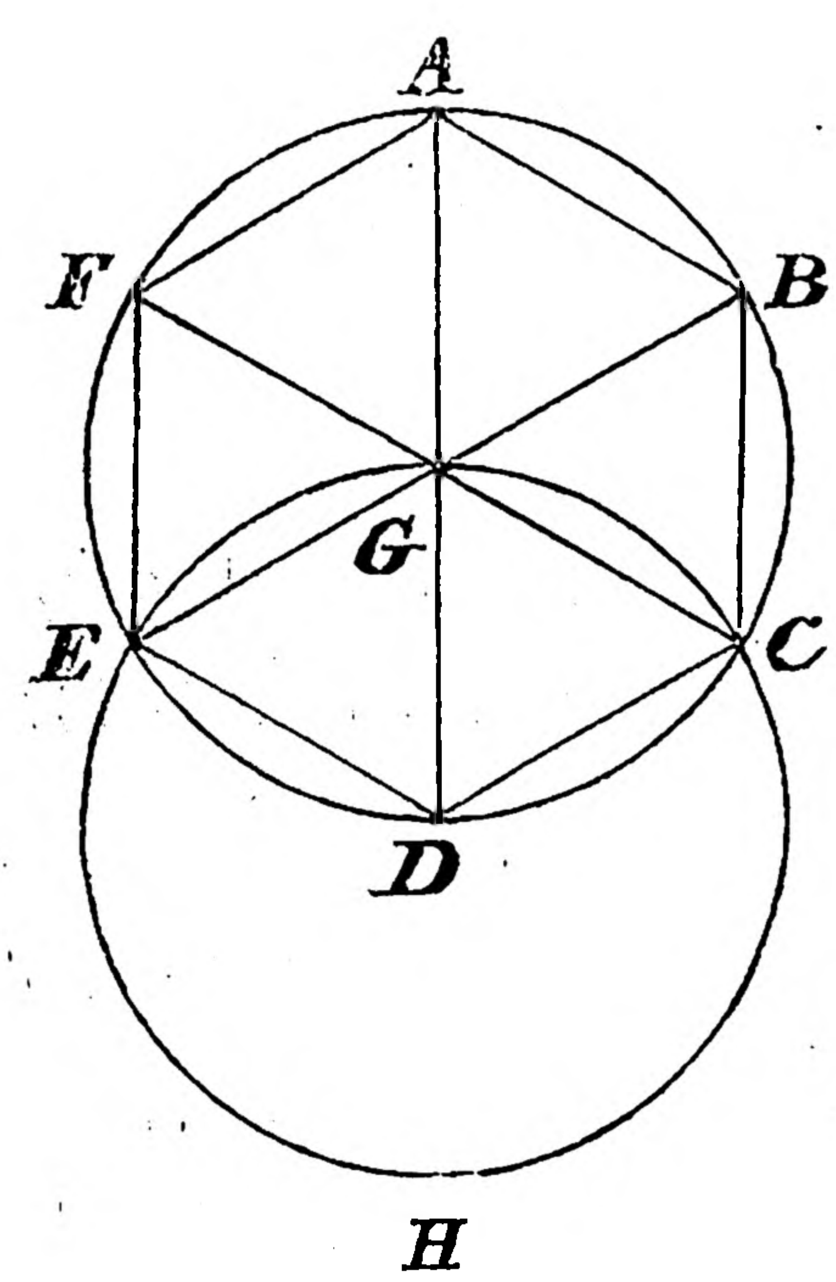


Проведемъ еще прямыя FB, FA и FE, эти прямыя раздѣлятъ углы ABC, BAE и AED пополамъ, что легко показать, какъ въ предъидущемъ предложеніи. Но въ треугольникѣ FCD, $\angle FCD = \angle FDC$, слѣдовательно $FC = FD$ (кн. 1, пред. 6). Точно также легко показать, что FB, FA и FE равны каждая FC и FD. Слѣдовательно описанный кругъ пройдетъ чрезъ точки A, B, C, D и E.

Предложеніе 15. Въ данный кругъ вписать равносторонній и равноугольный шестиугольникъ (фиг. 180)?

Рѣшеніе. Проведемъ въ данномъ кругѣ какой нибудь діаметръ AD, пусть G будетъ центръ круга. Изъ точки D, какъ изъ центра, радіусомъ

Фиг. 180.



DG опишемъ кругъ $EGCH$. Соединимъ точки пересѣченія E и C этого круга съ центромъ G, даннаго круга, прямыми GE и GC, продолжимъ эти прямыя до встрѣчи съ даннымъ кругомъ въ точкахъ B и F и проведемъ прямыя AB, BC, CD, DE, EF и FA; фигура, образуемая этими прямыми и будетъ требуемый шестиугольникъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $GE=GD$, и $GD=DE$ (кн. 1, опред. 15), то треугольникъ GED будетъ равносторонній, слѣдовательно и равноугольный (кн. 1, пред. 5), откуда уголъ EGD составляетъ одну треть двухъ прямыхъ угловъ, на томъ же основаніи и уголъ $CGD=\frac{2}{3}d$, но мы имѣемъ $\angle EGC+\angle CGB=2d$, а $\angle EGC=\frac{2}{3}2d$, слѣдовательно $\angle CGB=\frac{2}{3}d$. Изъ этого видимъ, что три угла EGD, DGC, CGB равны, а слѣдовательно равны и ихъ противоположные углы BGA, AGF, FGE. Слѣдовательно всѣ шесть угловъ около центра G равны между собою, также какъ и шесть сторонъ AB, BC, CD, DE, EA (кн. 3, пред. 29). Слѣдовательно фигура $ABCDE$ есть равносторонній шестиугольникъ.

По предъидущему дуги $FA=ED$, слѣдовательно, если къ обѣимъ частямъ этого равенства прибавимъ по дугѣ $ABCD$, то получимъ, что дуга $FABCD$ равна дугѣ $EDCBA$; откуда и $\angle DEF=\angle EFA$. Точно также можно показать, что и углы ABC, BCD и CDE равны угламъ DEF и EFA. Слѣдовательно наша фигура есть и равноугольный шестиугольникъ.

Слѣдствіе. Изъ предъидущаго видно, что сторона равносторонняго и равноугольнаго шестиугольника, вписаннаго въ данный кругъ, равна радіусу круга.

Предложенія 12, 13 и 14 этой книги относительно пятиугольника могутъ быть рѣшены и относительно шестиугольника.

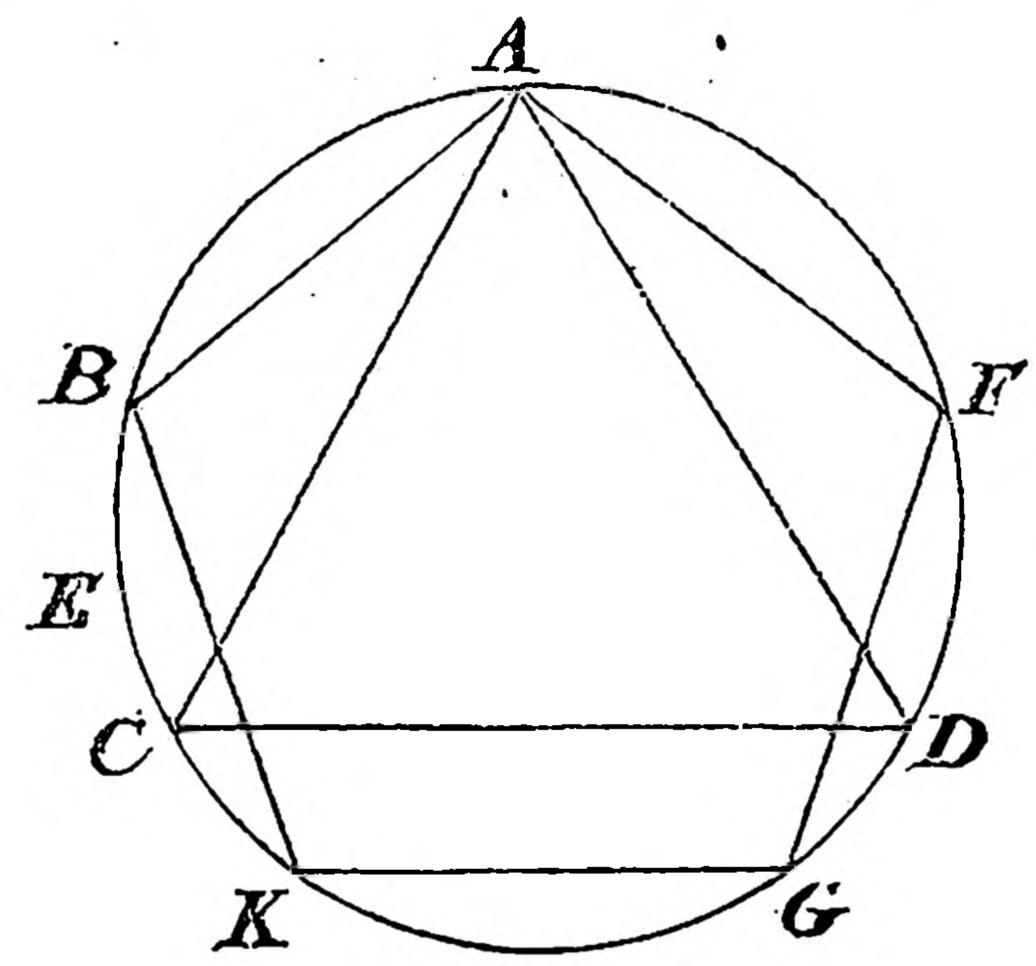
Примѣч. 5. Если точку A соединимъ съ E и съ C и точку E съ C (фиг. 180), то получимъ, очевидно, равносторонній и равноугольный треугольникъ, вписанный въ данный кругъ. Откуда легко построить равносторонній и равноугольный треугольникъ, описанный около даннаго круга.

Предложеніе 16. Въ данный кругъ $ABCD$ вписать равносторонній и равноугольный пятнадцатиугольникъ (фиг. 181)?

Рѣшеніе. Впишемъ въ данный кругъ равносторонній треугольникъ ACD и равносторонній пятиугольникъ $ABKGF$. Раздѣлимъ дугу BC въ точкѣ E пополамъ (кн. 3, пред. 30) и соединимъ точки E и C прямою EC, эта прямая и будетъ сторона требуемаго пятнадцатиугольника.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы пятнадцатиугольникъ былъ вписанъ въ кругъ, то дуга AB содержала бы три пятнадцатыхъ, а дуга ABC пять пятнадцатыхъ цѣлой окружности, слѣдовательно дуга BC будетъ составлять двѣ пятнадцатыхъ части цѣлой окружности, а половина ее EC, одну

Фиг. 181.



пятнадцатую той же окружности. Слѣдовательно хорда дуги EC и будетъ требуемая сторона пятнадцатиугольника.

Слѣдствіе. Относительно пятнадцатиугольника можно рѣшить предложенія соотвѣтствующія предложеніемъ 12, 13 и 14 относительно пятиугольника и при томъ тѣми-же пріемами.

Примѣч. 6. Изъ сказаннаго въ этой книгѣ легко видѣть, что окружность круга можетъ быть раздѣлена на 3, 6, 12, 24, . . . ; на 5, 10, 20, 40, . . . ; на 15, 30, 60, 120, . . . равныхъ частей. Слѣдовательно въ кругъ можно вписать и около круга описать правильные многоугольники такого же числа сторонъ.

Это впрочемъ не даетъ намъ права заключить, что можно вписать въ кругъ правильный полигонъ какого угодно числа сторонъ, напримѣръ геометрически мы не знаемъ какъ вписать въ кругъ правильный семиугольникъ.

Въ 1801 году Гауссъ первый показалъ въ сочиненіи своемъ Disquisitiones Arithmeticae, что если число 2^n+1 есть простое, то можно геометрически вписать въ кругъ правильный полигонъ такого-же числа сторонъ. Напримѣръ $2^4+1=17$, слѣдовательно можно вписать, геометрически, въ кругъ правильный семьнадцатиугольникъ.

Можно бы было показать, въ примѣчаніи къ предложенію 32, первой книги, что сумма внутреннихъ угловъ во всякомъ многоугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ безъ двухъ, а сумма внѣшнихъ угловъ равна двумъ прямымъ, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ съ двумя, т. е. если число сторонъ въ многоугольникѣ есть n, то сумма внутреннихъ угловъ $S=2d(n-2)$, а сумма внѣшнихъ $S_1=2d(n+2)$, но я нахожу что сказать объ этомъ здѣсь удобнѣе.

Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ вершину, какого нибудь угла въ многоугольникѣ проведемъ діагонали, т. е. соединимъ эту вершину съ остальными, то многоугольникъ раздѣлится на треугольники числомъ $n-2$, но въ каждомъ треугольникѣ сумма угловъ равна $2d$ (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ въ многоугольникѣ$=2d(n-2)$.

Такъ какъ сумма угловъ въ каждой вершинѣ многоугольника$=4d$, то сумма угловъ при всѣхъ вершинахъ$=4dn$, но сумма внутреннихъ угловъ$=2d(n-2)$, слѣдовательно сумма внѣшнихъ угловъ будетъ $=2d(n+2)$.

Легко также видѣть, что сумма внѣшнихъ угловъ, обращенныхъ въ одну сторону, равна $4d$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ около каждой вершины, если продолжимъ всѣ стороны многоугольника въ одну сторону, сумма угловъ съ внутренними равна $2d$, то сумма всѣхъ будетъ $=2dn$, а вычитая всѣ внутренніе—найдемъ $4d$.

Въ примѣчаніи 4, книги 4-й я замѣтилъ, что уголъ BAD (фиг. 175) составляетъ пятую часть двухъ прямыхъ угловъ, а слѣдовательно десятую часть четырехъ прямыхъ, изъ чего видимъ, что BD есть сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ. Но $BD=AC$, а AC есть большая часть радіуса AB, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, слѣдовательно, сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна этой большей части радіуса.

Построивъ, такимъ образомъ, на основаніи предложенія 11-го 2-й книги, правильный десятиугольникъ въ кругѣ, мы, соединяя вершины десятиугольника чрезъ одну, построимъ правильный вписанный въ кругъ пятиугольникъ (фиг. 176). Если проведемъ всѣ діагонали AD, DB, BE, EC, CA, то онѣ образуютъ правильный звѣздный пятиугольникъ, о которомъ мы ниже будемъ говорить подробнѣе, а теперь я покажу одно замѣчательное свойство діагоналей правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ. Свойство это состоитъ въ слѣдующемъ: Двѣ, какія нибудь діагонали правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ, пересѣкаясь, дѣлятся каждая въ крайнемъ и среднемъ отношеніяхъ.

Прошу читателя поставить на пересѣченіи діагоналей BD и CE (фиг. 176) букву K.

Въ самомъ дѣлѣ, равнобедренные треугольники BDC и KDC имѣютъ уголъ BDC общій, $\angle BCD=\angle CKD$, слѣдовательно и $\angle CBD=\angle KCD$ (кн. 1, пред. 32). Но въ равноугольныхъ треугольникахъ стороны, заключающія равные углы, пропорціональны (кн. 6, пред. 4), слѣдовательно:

$$BD:DC=DC:KD.$$

Но $DC=CB$, какъ сторона правильнаго пятиугольника, $\angle BCE=\angle BKC$, потому что оба равны центральному углу, соотвѣтствующему $\frac{2}{5}\,4d$. Слѣдовательно $CD=BK$, откуда:

$$BD:BK=BK:DK.$$

КНИГА V.

Опредѣленія.

1. *Частью—мѣрою* (μέρος) называется меньшая величина, измѣряющая большую.

Примѣч. 1. Подъ частью—мѣрою Евклидъ здѣсь разумѣетъ величину содержащуюся извѣстное число разъ безъ остатка въ другой величинѣ или которая, будучи взята два, три и т. д. разъ, даетъ другую величину. Напримѣръ два есть часть—мѣра двѣнадцати. Но 5 не есть часть—мѣра двѣнадцати. Слово *часть* у насъ имѣетъ другое значеніе, извѣстное каждому, поэтому мы, въ этой книгѣ, будемъ употреблять вмѣсто этого слова, слово *мѣра* въ смыслѣ Евклида.

2. Большая величина называется *кратною* меньшей, когда она измѣряется меньшей.

Примѣч. 2. Напримѣръ, число 12 есть кратное чиселъ 2, 3, 4....

3. *Отношеніе* есть нѣкоторая взаимная зависимость между двумя однородными величинами, когда онѣ сравниваются по ихъ количественности. (Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληα ποιὰ σχέσις).

Примѣч. 3. Это опредѣленіе было предметомъ многихъ толкованій, такъ какъ зависимость между двумя однородными величинами можетъ быть безконечно разнообразна. Толкованія эти были обращены на уясненіе смысла выраженія κατὰ πηλικότητα—по количеству, или по количественности. Симсонъ даже думаетъ, что это вставка какого нибудь не дущаго издателя Началъ. Нѣкоторые изъ новыхъ комментаторовъ Евклида выбрасываютъ опредѣленіе, считая его излишнимъ. Можно впрочемъ думать, что выраженіе κατὰ λικότητα у древнихъ математиковъ имѣло болѣе опредѣленный смыслъ, который намъ переданъ ни древними авторами, ни комментаторами.

Зависимость между двумя однородными величинами, какъ я сказалъ, можетъ быть конечно разнообразна, поэтому опредѣленіе Евклида, не зная точнаго смысла выраженія ὰ πηλικότητα, кажется не яснымъ. Очевидно въ Началахъ подъ этой зависимостью сно разумѣть зависимость простѣйшую, а простѣйшая зависимость между двумя одноными величинами есть та, въ которую не входитъ ни какая третья величина, однородная съ ними, поэтому *отношеніе* двухъ однородныхъ величинъ, по Лейбницу, есть такая зависимость, *въ которой одна изъ величинъ служитъ для опредѣленія другой, независимо отъ какой бы то нибыло третьей, однородной съ ними.*

Пусть данныя двѣ однородныя величины будутъ A и B. Чтобы опредѣлить, измѣрить одну изъ нихъ, напримѣръ A, только съ помощью другой B, помножимъ B на такое цѣлое число m, если возможно, чтобы получить $mB=A$, въ этомъ случаѣ говорятъ, что цѣлое число m есть *мѣра* (*μέρος*, часть, доля) *отношеніе* величины A, когда величина B принимается за *единицу* и что величина A есть *кратная* величины B. Отношеніе величинъ изображаютъ символомъ $A:B$ или $\frac{A}{B}$.

Если A не есть величина кратная B, т. е. если нѣтъ такого цѣлаго числа m, чтобы $mB=A$, то выбираютъ такія два цѣлыя числа m и n, чтобы имѣть равенство $nA=mB$. Если это возможно, то очевидно, что n-ыя части величинъ nA и mB будутъ равны и мы будемъ имѣть:

$$A=\frac{m}{n}B$$

т. е. величина A есть m разъ взятая n-ая часть величины B. Въ этомъ случаѣ число $\frac{m}{n}$ опредѣляетъ величину A, когда величина B извѣстна, и говорятъ, что $\frac{m}{n}$ есть *мѣра—отношеніе* величины A, когда величина B принимается за *единицу*. Число $\frac{m}{n}$ называется *дробнымъ*.

Но можетъ случиться, что величины A и B находятся въ такой зависимости, что нѣтъ возможности выбрать числа m и n такъ, чтобы получить равенство $nA=mB$. Въ такомъ случаѣ, помноживъ величину A на произвольное число n, будемъ помножать величину B на 1, 2, 3, 4 и т. д. до тѣхъ поръ пока не дойдемъ до такого числа m, что будемъ имѣть:

$$mB < nA < (m+1)B$$

откуда, взявъ n-ую часть этого неравенства, получимъ:

$$\frac{m}{n}B<A<\frac{m+1}{n}B$$

слѣдовательно m n-хъ частей величины B будутъ меньше A, а $m+1$ n-хъ частей, той же величины, будутъ больше ея, $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ будутъ *мѣры* двухъ величинъ, изъ коихъ одна меньше A, а другая больше ея. Если теперь, произвольно взятое число n, будемъ неопредѣленно увеличивать $n<n_1<n_2<n_3< \ldots$, выбирая при этомъ числа m_1, m_2, m_3, такъ, чтобы они удовлетворяли условію, которому удовлетворяетъ число m, то мы получимъ два ряда мѣръ:

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots,$$

$$\frac{m_1+1}{n_1}, \frac{m_2+1}{n_2}, \frac{m_3+1}{n_3}, \ldots,$$

изъ коихъ первыя будутъ *мѣры* величинъ меньшихъ A, а вторыя будутъ *мѣры* величинъ большихъ A. Разность между этими мѣрами есть $\frac{1}{n}$ и при неопредѣленномъ возрастаніи числа n можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины.

Тотъ предѣлъ, къ которому приближаются при неопредѣленномъ возрастаніи числа n, мѣры $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, есть извѣстное опредѣленное число, которое называется *мѣрою—отношеніемъ* величины A, когда величина B взята за *единицу*. Такой предѣлъ не есть число *цѣлое*, не есть и *дробное*, а есть число, которое называютъ *несоизмѣримымъ*. Такія числа подлежать такимъ же законамъ, какимъ подлежатъ числа цѣлыя и дробныя и надъ ними совершаются всѣ ариѳметическія дѣйствія. Это есть обобщенная идея числа, безъ которой не было бы возможности измѣрять величины, встрѣчающіяся въ геометріи.

Мы выше видѣли, что для того чтобы имѣть мѣру величины A, когда другая, однородная съ ней B, принимается за единицу, надобно отыскать два такія цѣлыя числа n и m, чтобы:

$$nA=mB.$$

Это послѣднее равенство показываетъ, какъ мы видѣли, что n-ая часть величины B содержится въ величинѣ A m разъ безъ остатка, т. е. что n-ая часть величины B есть *общая мѣра* обѣихъ величинъ A и B.

Эту общую мѣру или числа n и m разыскиваютъ слѣдующимъ образомъ:

Меньшую изъ нихъ, напримѣръ B, наносятъ на большую A. Если меньшая B содержится въ A извѣстное число разъ безъ остатка, то говорятъ, что величина A есть кратная величины B, а число, показывающее сколько разъ B содержится въ A, называется *мѣрою* величины A, когда величина B принята за единицу.

Но если B содержится въ A α_0 разъ съ остаткомъ $r_1<B$, то мы будемъ имѣть:

$$A=\alpha_0 B+r_1 \tag{1}$$

Изъ этого равенства видимъ, что если бы величины B и r_1 имѣли, общую мѣру, т. е. если бы существовала такая величина, которая содержится, какъ въ B, такъ и въ r_1 безъ остатка, то эта величина будетъ содержаться и въ A безъ остатка. Поэтому надобно смотрѣть не содержится-ли само r_1 въ B безъ остатка? Если бы это случилось, то мы будемъ имѣть $B=\alpha_1 r_1$, а изъ (1), найдемъ:

$$A=(\alpha_0\alpha_1+1)\,r_1\,,$$

откуда:

$$\alpha_1 A=(\alpha_0\alpha_1+1)\,B\,,$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, искомыя числа n и m будутъ $n=\alpha_1$, $m=\alpha_0\alpha_1+1$.

Но этого можетъ и не случиться, тогда:

$$B=\alpha_1 r_1+r_2 \tag{2}$$

$r_2<r_1$.

Разсуждая надъ этимъ равенствомъ, какъ и надъ (1), найдемъ, что величина, которая содержится какъ въ r_2 и въ r_1 безъ остатка будетъ содержаться безъ остатка въ B и въ A.

Поэтому надобно опять смотрѣть не содержится ли r_2 въ r_1 безъ остатка, если содержится, то мы будемъ имѣть $r_1 = \alpha_2 r_2$, откуда:

$$B = (\alpha_1\alpha_2 + 1)\, r_2\,, \quad A = [\alpha_0(\alpha_1\alpha_2 + 1) + \alpha_2]\, r_2\,,$$

слѣдовательно:

$$(\alpha_1\alpha_2 + 1)\, A = [\alpha_0(\alpha_1\alpha_2 + 1) + \alpha_2]\, B\,,$$

въ этомъ случаѣ искомыя числа n и m будутъ:

$$n = \alpha_1\alpha_2 + 1, \quad m = \alpha_0(\alpha_1\alpha_2 + 1) + \alpha_2\,.$$

Если бы r_2 не содержалось въ r_1 безъ остатка, то мы будемъ еще имѣть:

$$r = \alpha_2 r_2 + r_3\,,$$

$r_3 < r_2$.

Поступая съ этимъ послѣднимъ равенствомъ какъ и съ предъидущими, и продолжая подобнымъ образомъ, мы можемъ наконецъ дойти до такого остатка r_n, который въ предъидущемъ r_{n-1} содержится безъ остатка, т. е. $r_{n-1} = \alpha_n r_n$. Дѣлая послѣдовательныя подстановленія, чтобы выразить B и A чрезъ r_n, мы найдемъ:

$$A = m r_n\,, \quad B = n r_n\,,$$

откуда:

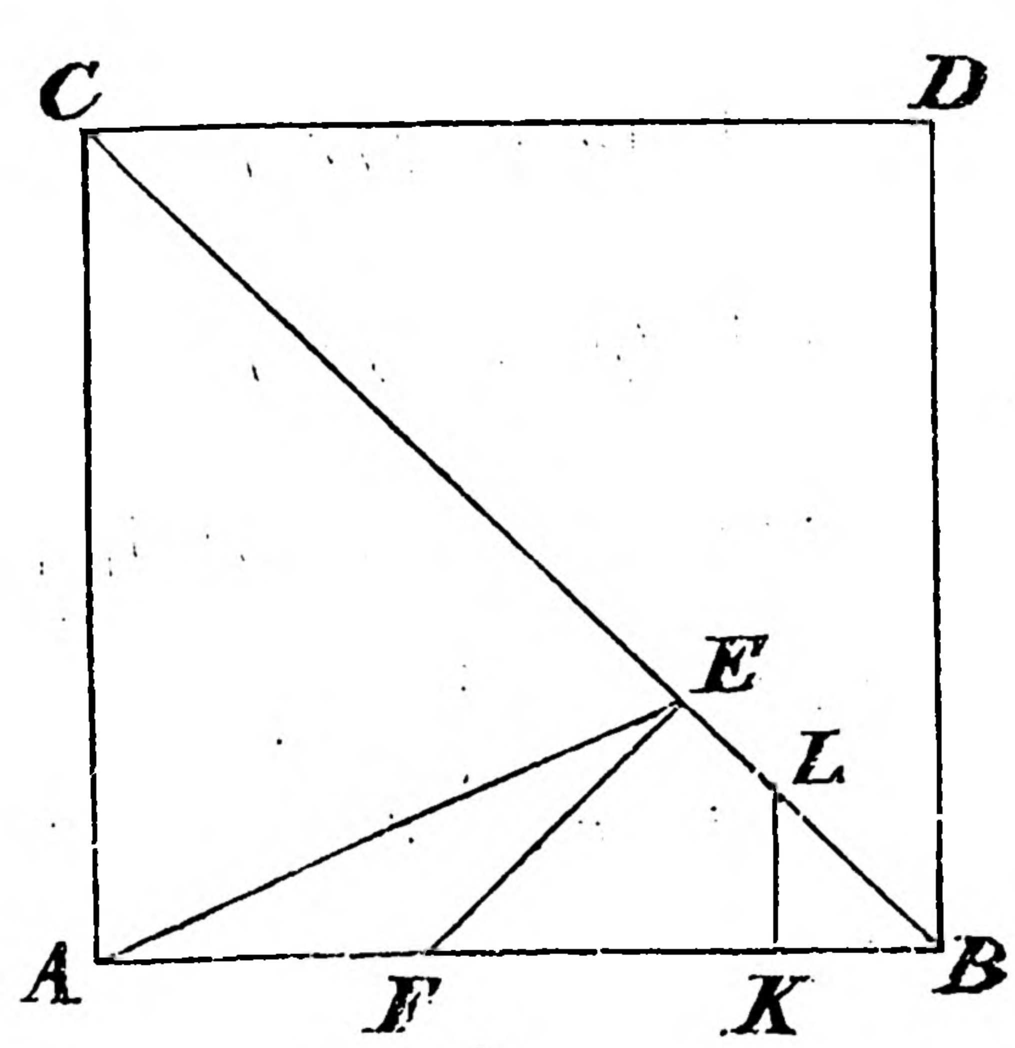
$$nA = mB.$$

Слѣдовательно n-я часть величины B содержится въ A m разъ, т. е. число $\frac{m}{n}$ будетъ мѣра величины A, когда величина B принята за единицу.

Но можетъ случиться, что подобное наложеніе, будучи продолжено до безконечности, никогда не приведетъ къ такому остатку, который бы содержался въ предъидущемъ извѣстное число разъ безъ остатка, тогда величины A и B не имѣютъ общей мѣры и называются *несоизмѣримыми*. Мы выше показали, что надобно понимать, въ этомъ случаѣ, подъ *мѣрою* величины A, когда величина B принята за единицу.

Что такія несоизмѣримыя величины существуютъ въ геометріи въ этомъ легко убѣдиться на слѣдующемъ простомъ примѣрѣ: діагональ квадрата съ его стороною суть величины несоизмѣримыя.

Фиг. 182.



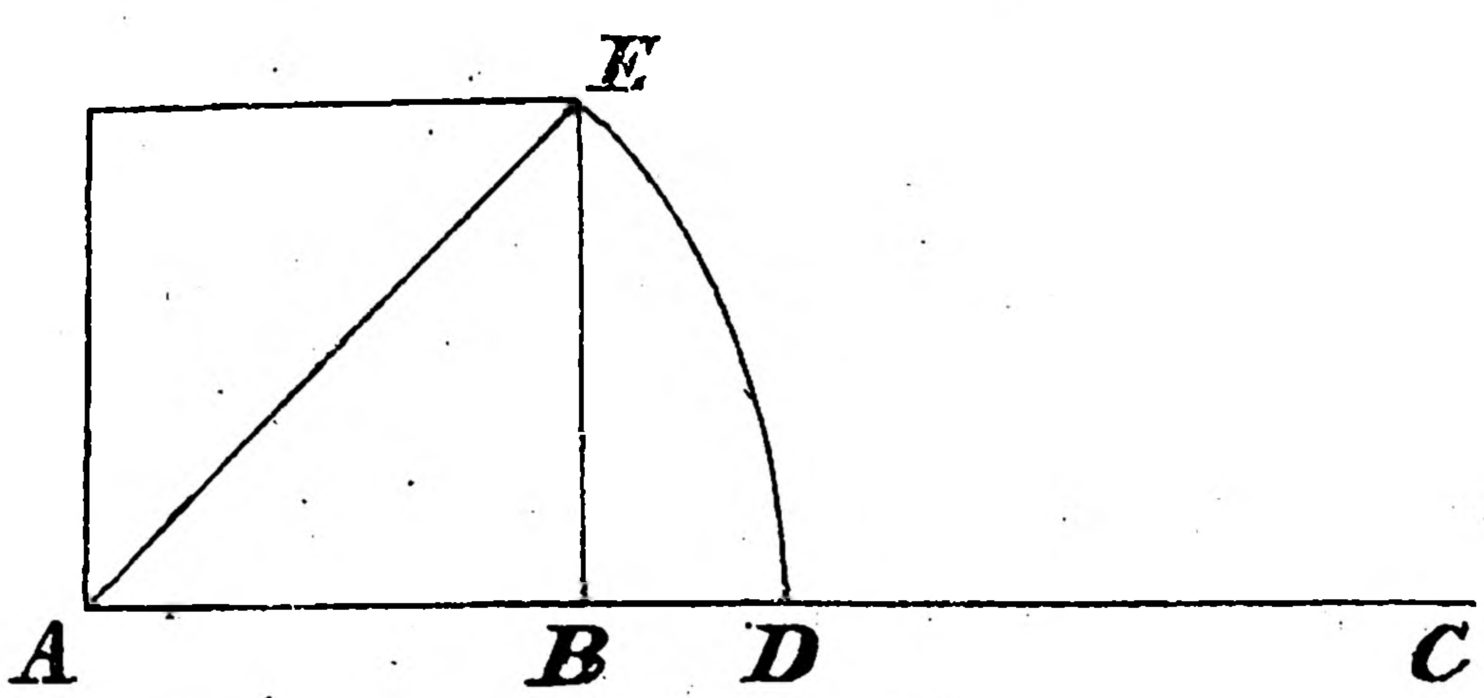
Построимъ квадратъ $ABDC$, коего сторона есть произвольно взятая прямая AB, (кн. 1, пред. 46), и проведемъ діагональ BC. Эта діагональ меньше $2AB$ (кн. 1, пред. 20) и больше AB, слѣдовательно сторона AB совмѣстится на діагонали BC одинъ разъ съ остаткомъ $EB<AB$. Возставимъ изъ точки E перпендикуляръ и продолжимъ его до встрѣчи съ AB въ точкѣ F. Въ треугольникѣ FEB уголъ при E прямой, уголъ $EBF=\frac{1}{2}d$, такъ какъ въ треугольникѣ ABC $\angle ACB=\angle CBA$ (кн. 1, пред. 5), слѣдовательно $\angle BFE=\frac{1}{2}d$, откуда сторона $EF=EB$ (кн. 1, пред. 6). Соединивъ точки A и E получимъ равнобедренный треугольникъ ACE, въ которомъ $\angle CEA=\angle CAE$, но $\angle CEF=\angle CAF$, слѣдовательно $\angle AEF=\angle EAF$ (кн. 1, акс. 3), откуда $AF=EF$ (кн. 1, пред. 6). Изъ этого видимъ, что остатокъ EB содержиться въ сторонѣ квадрата два раза съ остаткомъ KB, который меньше предъидущаго остатка EB, такъ какъ въ $\triangle FEB$, $EB=FK>\frac{1}{2}FB$. Но треугольникъ FEB равнобедренный и прямоугольный, слѣдовательно съ нимъ можно поступить какъ и съ треугольникомъ ABC, т. е. наложить остатокъ KB на сторону EB, въ которой онъ будетъ также содержаться два раза съ остаткомъ меньшимъ KB. Продолжая подобное построеніе и нанося полученные остатки на предъидущіе, мы, очевидно, будемъ постоянно получать остатки, которые, уменьшаясь неопредѣленно, никогда не могутъ сдѣлаться нулемъ. Слѣдовательно діагональ квадрата съ его стороною не имѣютъ общей мѣры—суть величины несоизмѣримыя.

Если сторону квадрата примемъ за единицу, то діагональ его выражается несоизмѣримымъ числомъ $\sqrt{2}$.

Разсматривая предметы природы мы составляемъ понятіе о протяженіи и числѣ. О цѣломъ числѣ мы составляемъ понятіе, разсматривая собраніе одинаковыхъ предметовъ. Число одинаковыхъ предметовъ будетъ выражать *мѣру—отношеніе* всѣхъ къ одному изъ нихъ, этотъ одинъ называется *единицей*.

Объ одной какой нибудь непрерывной величинѣ, напримѣръ о длинѣ, площади, объемѣ, вѣсѣ, времени, мы составляемъ понятіе, сравнивая ее съ другою однородною, но которая намъ ближе извѣстна. Эта послѣдняя величина называется *единицею*. Отношеніе данной къ этой послѣдней можетъ быть числомъ цѣлымъ, дробнымъ и несоизмѣримымъ, какъ мы выше видѣли. Если бы мы не обобщили понятія о числѣ, то не было бы возможности измѣрять данной единицей всѣ возможныя величины: такъ, напримѣръ, пусть данная единица будетъ AB, требуется выразить числомъ разстоянія всѣхъ возможныхъ точекъ на неопредѣленной прямой AC отъ точки A (фиг. 182)?

Фиг. 182.



Если бы мы ограничились только цѣлыми числами, т. е. повтореніемъ единицы AB, и ея равными частями, то тотчасъ видимъ, что на какія бы части мы взятую единицу AB не раздробляли, ни одна изъ этихъ частей, наложенная на AC, начиная съ точки A, не упадетъ въ точку D, которой разстояніе отъ A равно діагонали AE квадрата, построеннаго на взятой единицѣ AB. Всегда случиться, что точка D будетъ лежать между двумя послѣдовательными дѣленіями. Изъ этого видимъ, что если бы мы въ систему цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ не ввели чиселъ несоизмѣримыхъ, то выразить разстояніе AD съ помощью единицы AB было бы невозможно.

До сихъ поръ мы разсматривали отношеніе двухъ величинъ A и B независимо отъ какой бы то нибыло третьей, однородной съ ними, но часто случается, что надобно взять третью величину C, однородную съ ними, и выразить отношеніе A къ B когда обѣ онѣ измѣряются величиною C.

Я говорю, что въ этомъ случаѣ мѣра величины A, когда B принимается за единицу, равна частному мѣры A на мѣру B, когда величина C принимается за единицу.

Въ самомъ дѣлѣ, помножимъ B на какое нибудь число n и положимъ, что это число такъ выбрано, что nB не можетъ быть меньше C. Будемъ помножать C на 1, 2, 3, 4 и т. д. пока не дойдемъ до такого числа m что $mC{=}nB$, или что nB лежитъ между двумя послѣдовательными кратными mC и $(m+1)\,C$, т. е. во всякомъ случаѣ:

$$mC \text{ не}{>} nB < (m+1)\,C.$$

Помножимъ A на какое нибудь число n' и возьмемъ такое кратное отъ B, напримѣръ m', чтобы:

$$m'B \text{ не}{>} n'A < (m'+1)\,B.$$

Изъ двухъ предъидущихъ неравенствъ мы получимъ, помножая первое на m', а второе на n:

$$mm'C \text{ не}{>} mn'B, \quad m'nB \text{ не}{>} nn'A$$

откуда:

$$mm'C \text{ не}{>} nn'A.$$

Точно также изъ тѣхъ же неравенствъ мы получимъ:

$$n(m'+1)B < (m+1)\,(m'+1)\,C$$

$$nn'A < n(m'+1)\,B,$$

а слѣдовательно:

$$mm'C \text{ не}{>} nn'A < (m+1)\,(m'+1)\,C$$

Изъ этого послѣдняго неравенства видимъ, что мѣра величины A, когда C принимается за единицу, есть предѣлъ произведенія чиселъ $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, которыхъ предѣлы суть мѣры величины A, когда C принимается за единицу, и величины A, когда B принимается за единицу. Слѣдовательно мѣра величины A, когда C принимается за единицу, равна произведенію мѣры величины A, когда B принимается за единицу, на мѣру величины B, когда C принимается за единицу. Откуда видимъ, что мѣра величины A, когда B принимается за единицу есть частное мѣры величины A на мѣру величины B, когда величина C принимается за единицу.

Это частное мѣръ двухъ величинъ A и B, когда за единицу принимается третья, совершенно произвольная величина C, однородная съ ними, называется *отношеніемъ* двухъ величинъ A и B и означается символомъ $A:B$ или $\frac{A}{B}$.

4. Говорятъ, что двѣ величины имѣютъ отношеніе между собою, если меньшую изъ нихъ можно повторить столько разъ, чтобы результатъ былъ равенъ или больше большей.

Примѣч. 4. Этимъ опредѣленіемъ Евклидъ хочетъ показать, что сравниваемыя величины должны быть однородны, напримѣръ длина и длина, площадь и площадь и т. д. Но длина и площадь отношенія, въ смыслѣ выше изложенномъ, имѣть не могутъ, такъ какъ, сколько бы разъ длину не повторили, площадь не получится.

5. Говорятъ, что четыре величины находятся въ томъ же отношеніи: первая ко второй и третья къ четвертой, когда равнократныя величины первой и третьей, взятыя по произвольной кратности, всегда или больше, или равны, или меньше, соотвѣтственно, равнократныхъ величинъ второй и четвертой, взятыхъ также по другой произвольной кратности.

Примѣч. 5. Пояснимъ это примѣромъ: если величина A имѣетъ такое же отношеніе къ величинѣ B, какое величина C имѣетъ къ величинѣ D, то по Евклиду, если $nA \lesseqgtr mB$, то необходимо и $nC \lesseqgtr mD$, гдѣ m и n суть цѣлыя совершенно произвольныя числа. Отношеніе 2 къ 4 тоже, что и 10 къ 20, поэтому если $2n \lesseqgtr 10m$, то и $4n \lesseqgtr 20m$.

Числа 2 и 3, 7 и 8 не имѣютъ того же отношенія, такъ какъ, помноживъ 2 и 7 на 3, и 3 и 8 на 2, мы получимъ числа 6, 6, 21, 16 не удовлетворяющія опредѣленію Евклида.

Евклидъ выбралъ это опредѣленіе *пропорціональности* величинъ, такъ какъ оно распространяется и на величины несоизмѣримыя, и я ниже покажу, что оно тождественно съ опредѣленіемъ пропорціональности, которое даютъ новые геометры, именно:

Пропорціональныя величины суть тѣ, которыхъ отношенія равны. Если величины A и B пропорціональны величинамъ C и D, то это условіе, если A и B, C и D суть величины соизмѣримыя, выразится двумя равенствами:

$$nA=mB, \quad nC=mD,$$

гдѣ числа m и n опредѣлены способомъ, изложеннымъ при разысканіи общей мѣры двухъ величинъ. Если же A и B, C и D несоизмѣримы, то условіе пропорціональности выразится неравенствами:

$$mB<nA<(m+1)\,B, \quad mD<nC<(m+1)\,D,$$

а въ обоихъ случаяхъ:

$$mB\leqq nA<(m+1)\,B, \quad mD\leqq nC<(m+1)\,D.$$

Разсмотримъ послѣдній случай. Для этого раздѣлимъ одну изъ величинъ A и B, напримѣръ, меньшую B, на равныя части и нанесемъ ихъ на величину A столько разъ, сколько возможно, такъ какъ A и B несоизмѣримы, то получится остатокъ меньше одной изъ нанесенныхъ частей. Положимъ, что величину B дѣлять все на большее и на большее число равныхъ частей; соотвѣтственно этимъ дѣленіямъ остатокъ, при нанесеніи этихъ дѣленій на величину A, будетъ все меньше и меньше и можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины. Величина A, уменьшенная на этотъ остатокъ, будетъ соизмѣрима съ B и будетъ имѣть съ нею отношеніе, которое выразится дробью, коей числитель и знаменатель суть цѣлыя числа. Положимъ, что дѣлили величину B на n_1, n_2, n_3, . . . равныхъ частей, числа n_1, n_2, n_3, . . . возрастаютъ неопредѣленно. Положимъ, что, нанося послѣдовательно эти дѣленія на A, мы найдемъ, что онѣ въ A содержатся m_1, m_2, m_3, . . разъ съ остатками: ε_1, ε_2, ε_3, . . , которые убываютъ неопредѣленно, по мѣрѣ возрастанія чиселъ n_1, n_2, n_3, . . . Отбрасывая эти остатки отъ величины A, мы получимъ неопредѣленный рядъ величинъ A_1, A_2, A_3, . . , соизмѣримыхъ съ B, и коихъ отношенія къ B будутъ:

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots$$

Положимъ теперь, что мы имѣемъ другія двѣ несоизмѣримыя однородныя величины C и D, которыя впрочемъ съ величинами A и B могутъ быть не однородны. Если, дѣля меньшую изъ нихъ D на тоже число n_1, n_2, n_3, . . . равныхъ частей и нанося ихъ на величину C, найдемъ, что эти части, соотвѣтственно, будутъ содержаться въ C m_1, m_2, m_3, . . разъ съ остатками меньшими соотвѣтственныхъ дѣленій, и которые, при неопредѣленномъ возрастаніи чиселъ n_1, n_2, n_3, . . неопредѣленно убываютъ, то говорятъ, что *отношеніе* несоизмѣримыхъ величинъ A и B *равно отношенію* несоизмѣримыхъ величинъ C и D, или что несоизмѣримыя величины A и B, C и D *пропорціональны.*

И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ мы имѣемъ всегда:

$$\frac{m}{n}B<A<\frac{m+1}{n}B$$

$$\frac{m}{n}D<C<\frac{m+1}{n}D,$$

при неопредѣленномъ возрастаніи числа n, то предѣлъ, къ которому стремятся дроби:

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{m+1}{n}, \tag{a}$$

будетъ мѣра и величины A, когда B принимается за единицу, и величины C, когда D принимается за единицу.

Остается показать только, что предѣлъ, къ которому стремятся дроби (a) независитъ отъ способа, или закона, по которому величины B и D дѣлились на равныя части.

Положимъ, что, производя дѣленія величинъ B и D по извѣстному закону, мы получимъ, какъ для величинъ A и B такъ и для величинъ C и D, равныя дроби:

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots$$

Измѣнимъ законъ дѣленія на равныя части величинъ B и D и положимъ, что одно дѣленіе величины B содержится въ A k разъ съ остаткомъ, а одно изъ дѣленій величины D содержится въ C больше чѣмъ k разъ съ остаткомъ. Означимъ чрезъ ε ту величину, на которую $k+1$ дѣленій величины B превосходятъ величину A, и замѣтимъ, что $k+1$ дѣленій величины D, по положенію, меньше величины C. Раздѣлимъ величину B на равныя части, которыя бы были меньше ε и при томъ по закону, удовлетворяющему опредѣленію равенства отношеній несоизмѣримыхъ величинъ. Слѣдовательно, соотвѣтствующихъ дѣленій величины

D въ C будетъ столько, сколько дѣленій B содержится въ A. Но очевидно, что въ A будетъ меньше частей меньшихъ отъ ε чѣмъ въ $A+\varepsilon$, т. е. чѣмъ въ $k+1$ дѣленіяхъ. Соотвѣтствующихъ частей величины D должно быть въ $k+1$ дѣленіяхъ C, столько, сколько и въ $k+1$ дѣленіяхъ A, а ихъ меньше, что противорѣчитъ предположенному закону дѣленія. Слѣдовательно, какъ только величины B и D, раздѣленныя по извѣстному закону, на равное число равныхъ частей и эти части, соотвѣтственно, содержатся въ A и C одинаковое число разъ съ остатками, меньшими каждаго изъ дѣленій соотвѣтственно, то это будетъ имѣть мѣсто и при всякомъ другомъ законѣ дѣленія величинъ B и D.

Теперь остается показать, что опредѣленіе пропорціональности Евклида, совпадаетъ съ изложеннымъ выше.

Въ самомъ дѣлѣ, по Евклиду, если величины A и B, C и D пропорціональны, то мы всегда должны имѣть совмѣстно:

$$nA \overset{<}{\underset{>}{=}} mB, \quad nC \overset{<}{\underset{>}{=}} mD,$$

или

$$\frac{m}{n} B \overset{<}{\underset{>}{=}} A, \quad \frac{m}{n} D \overset{<}{\underset{>}{=}} C,$$

для совершенно произвольныхъ цѣлыхъ чиселъ n и m.

Возьмемъ произвольное цѣлое число n и пусть m будетъ число, показывающее наибольшее число n-хъ частей B, содержащихся въ A, то легко видѣть, что:

$$\frac{m}{n} B<A, \quad \frac{m+1}{n} B>A.$$

Слѣдовательно, по опредѣленію Евклида, необходимо чтобы и

$$\frac{m}{n} D<C, \quad \frac{m+1}{n} D>C,$$

а эти неравенства и показываютъ, что отношенія величинъ A и B, C и D суть предѣлы къ которымъ стремятся дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ при неопредѣленномъ возрастаніи числа n, или что этотъ предѣлъ есть мѣра величинъ A и C, когда B и D, приняты соотвѣтственно за единицы. Если величины A, B, C, D пропорціональны, то пишутъ:

$$A:B=C:D \quad \text{или} \quad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

6. **Пропорціональными величинами называются такія, коихъ отношенія равны.**

Примѣч. 6. Мы въ примѣч. 4 показали тождество опредѣленія 5 съ этимъ послѣднимъ. Многіе комментаторы, не понимая глубокаго смысла опред. 5, принимали только это послѣднее.

7. **Если кратное первой величины больше кратнаго второй, а кратное третьей меньше кратнаго четвертой, то говорятъ, что отношеніе первой величины ко второй больше отношенія третьей къ четвертой.**

8. Пропорціональность есть подобіе отношеній (Ἀναλογία δέ ἐστιν ἡ τῶν ὁμοιότης, а по нѣкоторымъ спискамъ ταυτότης).

Примѣч 7. Пропорціональность есть сходство, подобіе. Очевидно Евклидъ здѣсь разумѣетъ *подобіе, сходство* геометрическихъ фигуръ.

9. Пропорція состоитъ, по крайней мѣрѣ, изъ трехъ членовъ.

Примѣч. 8. Три однородныя величины пропорціональны, когда отношеніе первой ко второй будетъ равно отношенію второй къ третьей. Напр.:

$$2:4=4:8.$$

10. Когда три величины пропорціональны, то говорятъ, что первая къ третьей имѣетъ *двойное* отношеніе первой ко второй.

Примѣч. 9. Вторая величина называется *средне-пропорціональною* между первой и третьей.

11. Если четыре величины *непрерывно* пропорціональны, то говорятъ, что первая къ четвертой имѣетъ *утроенное* отношеніе первой ко второй, *учетверенное* и т. д.

Примѣч. 10. Подъ величинами непрерывно пропорціональными Евклидъ подразумѣваетъ величины въ непрерывной пропорціи, которая составляетъ геометрическую прогрессію:

$$1:2=2:4=4:8=8:16=16:32=32:64.$$

Отношенія такихъ величинъ всѣ происходятъ отъ одного первоначальнаго отношенія, поэтому древніе геометры и дали имъ особенныя названія. Такъ напримѣръ отношеніе $1:4$ можно разсматривать какъ результатъ перехода чрезъ два отношенія $1:2$ и $2:4$, поэтому отношеніе $1:4$ назвали *удвоеннымъ* отношеніемъ $1:2$. Точно также отношеніе $1:64$ можно разсматривать какъ результатъ перехода чрезъ отношенія $1:2$, $2:4$, $4:8$, $8:16$, $16:32$ и $32:64$, т. е. чрезъ шесть отношеній, а поэтому оно называется *ушестереннымъ* отношеніемъ $1:2$.

12. Если нѣсколько величинъ пропорціональны, то предъидущія называютъ *соотвѣтственными* предъидущимъ, а послѣдующія *соотвѣтственными* послѣдующимъ.

13. *Перемѣною отношеній* (Ἐναλλὰξ λόγος) называется, если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что первая относится къ третьей, какъ вторая къ четвертой.

Примѣч. 11. То есть если $A:B=C:D$, то мы имѣемъ $A:C=B:D$.

14. *Обратно* (Ἀνάπαλιν λογός), когда изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что вторая такъ относится къ первой, какъ четвертая къ третьей.

Примѣч. 12. То есть, если $A:B=C:D$, то мы имѣемъ $B:A=D:C$.

15. *Чрезъ сложеніе* (Σύνθεσις λόγου), если изъ четырехъ пропорціональ-

ныхъ величинъ заключаютъ, что сумма первой и второй такъ относится ко второй, какъ сумма третьей и четвертой относится къ четвертой.

Примѣч 13. То есть, если $A:B=C:D$, то мы имѣемъ $A+B:B=C+D:D$.

16. *Чрезъ выдѣленіе, вычитаніе* (Διαίρεσις λόγου), если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что разность между первой и второй такъ относится ко второй, какъ разность между третьей и четвертой относится къ четвертой.

Примѣч. 14. Если $A:B=C:D$, то: $A-B:B=C-D:D$.

17. *На оборотъ* (Αναστροφή λόγου), если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что первая такъ относится къ разности первой и второй, какъ третья къ разности третьей и четвертой.

Примѣч. 15. Если $A:B=C:D$, то: $A:A-B=C:C-D$.

18. *По равенству* (Δι̉ίσου λόγος), когда имѣя два ряда величинъ соотвѣтственно пропорціональныхъ, заключаютъ, что первая величина перваго ряда относится такъ къ послѣдней, какъ первая втораго ряда къ послѣдней.

Примѣч. 16. То есть, если мы имѣемъ два ряда величинъ:

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ .\ .\ .\ ,\ a_n\,,$$

$$b_1\,,\ b_2\,,\ b_3\,,\ .\ .\ .\ ,\ b_n\,,$$

такихъ, что:

$$a_1:a_2=b_1:b_2\,,\quad a_2:a_3=b_2:b_3\,,\quad a_3:a_4=b_3:b_4\,,\ .\ .\ .\ ,$$

то

$$a_1:a_n=b_1:b_n\,.$$

19. *По прямому равенству* (Τεταγμένη), когда, имѣя два ряда такихъ величинъ, что въ первомъ рядѣ первая изъ нихъ такъ относится ко второй, какъ во второмъ рядѣ первая ко второй и еще въ первомъ рядѣ вторая такъ относится къ третьей, какъ вторая къ третьей во второмъ рядѣ и т. д., заключаютъ, что первая такъ относится къ послѣдней въ первомъ ряду, какъ первая къ послѣдней во второмъ ряду.

20. *По обратному* (Τεταραγμένη нестройный) *равенству*, когда, имѣя два ряда такихъ величинъ, что въ первомъ рядѣ, первая такъ относится ко второй, какъ предпослѣдняя къ послѣдней во второмъ рядѣ и вторая къ третьей, въ первомъ рядѣ, какъ третья съ конца ко второй съ конца втораго и т. д., заключаютъ что первая относится къ послѣдней въ первомъ рядѣ, какъ первая къ послѣдней во второмъ ряду.

Примѣч. 17. То есть, если:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_n$$

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \ldots, b_n,$$

два ряда такихъ величинъ что:

$$a_1 : a_2 = b_{n-1} : b_n, \quad a_2 : a_3 = b_{n-2} : b_{n-1},$$

то

$$a_1 : a_n = b_1 : b_n.$$

Опредѣленія 19 и 20 суть частные случаи опредѣленія 18.

Аксіомы.

1. Величины равнократныя одной и той же величины, или равныхъ величинъ, равны между собою.

2. Величины, коихъ одна и таже величина есть равнократная, или же которыхъ равныя величины суть равнократныя, равны между собою.

3. Кратная большей величины больше кратной величины меньшей.

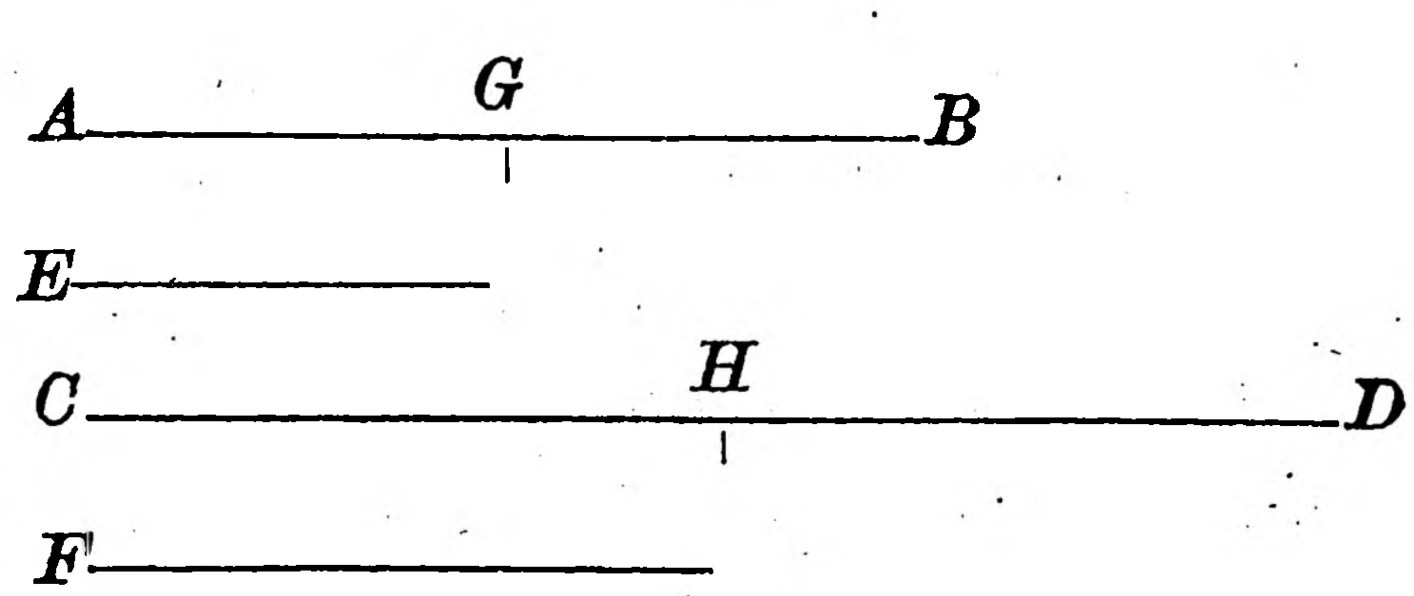
4. Изъ двухъ величинъ, коихъ взяты равнократныя, та больше, которой равнократная больше.

Предложенія.

Предложеніе 1. Если нѣсколько величинъ суть соотвѣтственно равнократныя другихъ, въ такомъ же числѣ величинъ, по какой бы то ни было кратности, каждая каждой, то сумма первыхъ будетъ кратная величина суммы вторыхъ, по той же кратности (фиг. 183).

Доказат. Пусть величины AB и CD будутъ равнократныя другихъ E и F, каждая каждой, по какой нибудь кратности, то сумма $AB+CD$, величинъ AB и CD, будетъ равнократная величина суммы $E+F$ величинъ E и F, по той же кратности.

Фиг. 183.



Такъ какъ величина AB такой же кратности величины E, какой величина CD величины F, то сколько величинъ равныхъ E содержится въ AB, столько величинъ равныхъ F содержится въ CD. Пусть AG, GB суть части AB равныя E и CH, HD суть части CD равныя F, то число частей CH, HD будетъ равно числу частей AG, GB. Но такъ какъ $AG=E$, а $CH=F$, то сумма $AG+CH=E+F$, точно также $GB=E$, $HD=F$, то сумма $GB+HD=E+F$. Слѣдовательно сколько величинъ равныхъ E содержится въ AB, столько разъ сумма $E+F$ величинъ E и F содержится въ суммѣ $AB+CD$, т. е. какой кратности величина AB будетъ величины E, такой кратности и сумма величинъ AB и CD будетъ суммы величинъ E и F.

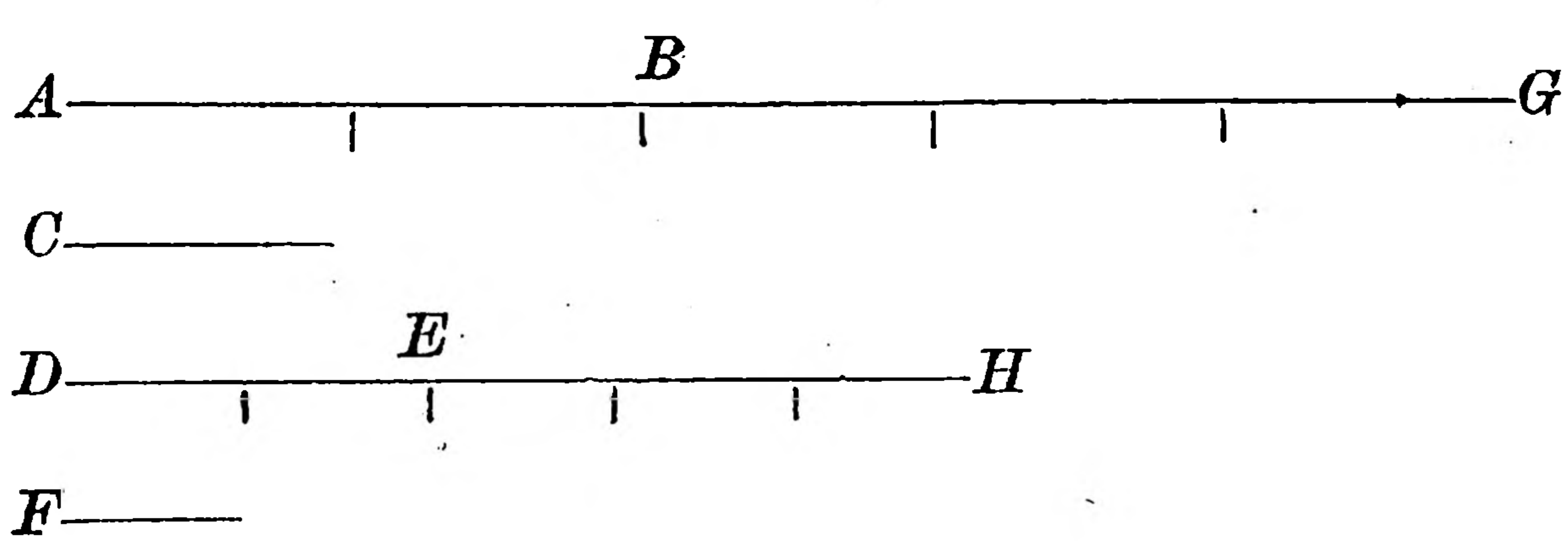
Примѣч. 18. Если $a_1=nr_1$, $a_2=nr_2$, $a_3=nr_3$, . . , то:

$$a_1+a_2+a_3+\ .\ .\ =n(r_1+r_2+r_3+\ .\ .).$$

Предложеніе 2. Если первая величина будетъ такой же кратности второй, какой третья четвертой, а пятая величина будетъ такой же кратности второй, какой шестая четвертой, то сумма первой и пятой будетъ такой же кратности второй, какой сумма третьей и шестой четвертой (фиг. 184).

Доказат. Пусть первая величина AB будетъ такой же кратности второй C, какой третья величина DE четвертой F; и пятая величина BG пусть будетъ такой же кратности второй C, какой шестая EH четвертой F; то сумма первой и пятой будетъ такой же кратности второй C, какой сумма третьей и шестой будетъ четвертой F.

Фиг. 184.



Такъ какъ AB есть величина такой же кратности величины C, какой DE величины F, то сколько величинъ равныхъ C содержится въ AB, столько величинъ равныхъ F содержится въ DE; по той же причинѣ, сколько величинъ равныхъ C содержится въ BG, столько величинъ равныхъ F содержится въ EH. Слѣдовательно сколько величинъ равныхъ C содержится въ цѣлой величинѣ AG, столько величинъ равныхъ F содержится въ цѣлой DH, т. е. какой кратности AG будетъ величины C, такой же кратности будетъ DH величины F.

Примѣч. 19. Если $a_1=na_2$, $a_3=na_4$, $a_5=ma_2$, $a_6=ma_4$, то:

$$a_1+a_5=(n+m)\,a_2\,,\quad a_3+a_6=(n+m)\,a_4\,.$$

Слѣдствіе. Изъ предъидущаго очевидно, что если величины a_1, a_2, a_3, . . , суть кратныя величины r, а величины $b_1, b_2, b_3, \ldots$, суть той же кратности величины q, то есть если мы имѣемъ:

$$a_1 = n_1 r,\ a_2 = n_2 r,\ \ldots,\ a_m = n_m r$$

$$b_1 = n_1 q,\ b_2 = n_2 q,\ \ldots,\ b_m = n_m q$$

то:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = (n_1 + n_2 + \ldots + n_m) r$$

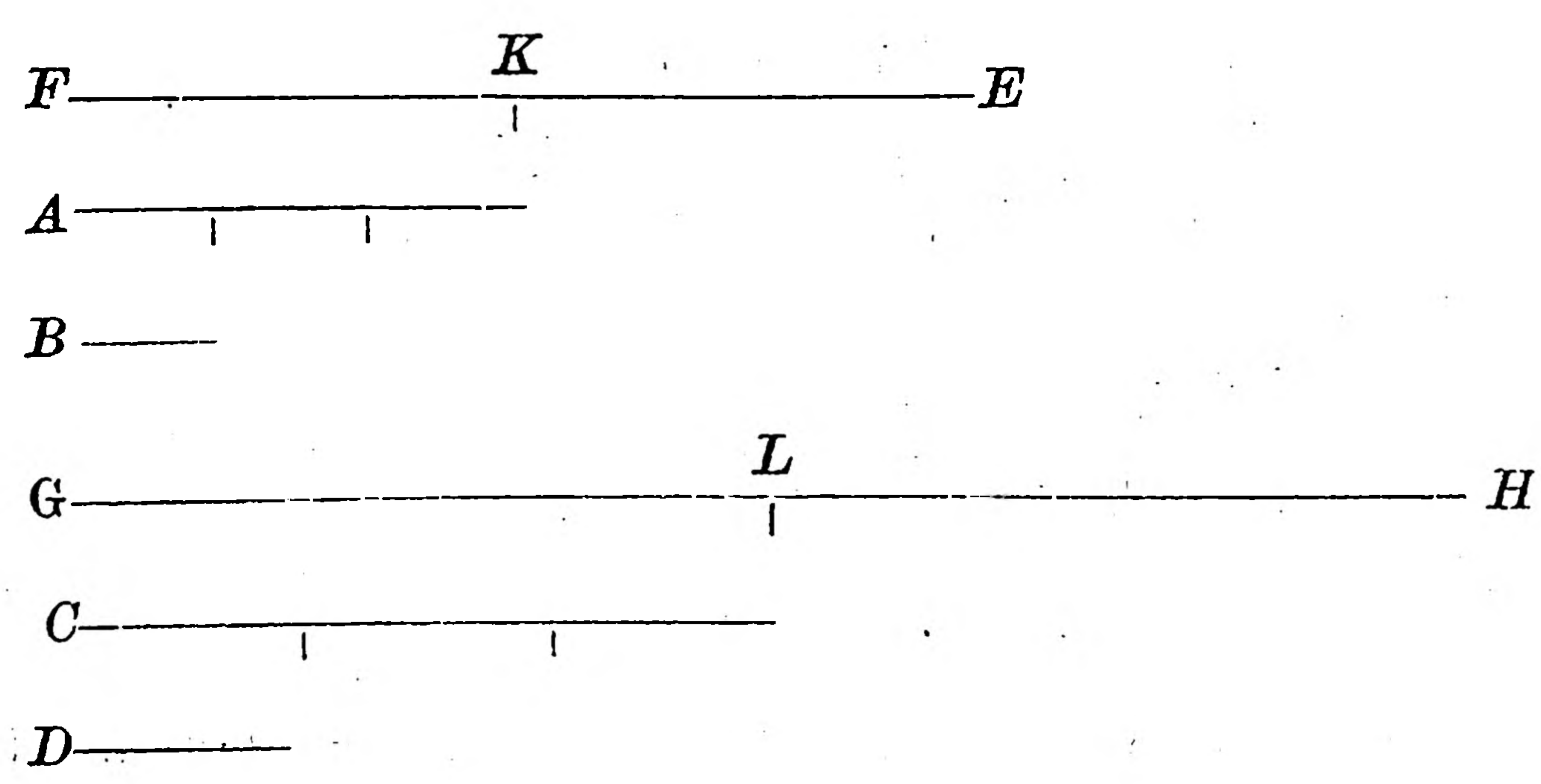
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m = (n_1 + n_2 + \ldots + n_m) q$$

Предложенiе 3. Если первая величина будетъ такой же кратности второй, какой третья четвертой и если возьмемъ равнократныя первой и третьей, то эти послѣднiя будутъ равнократныя одна второй, а другая третьей (фиг. 185).

Доказат. Пусть первая величина A будетъ такой же кратности второй B, какой третья C четвертой D; возьмемъ FE и GH равнократныя величины первая величины A, а вторая величины C, то FE будетъ такой же кратности величины B, какой GH будетъ величины D.

Такъ какъ FE есть величина такой же кратности отъ A, какой GH отъ C, то сколько равныхъ A содержится въ FE, столько величинъ равныхъ C содержится въ GH.

Фиг. 185.



Пусть FK и KE суть части величины FE, равныя величинѣ A и GL, LH суть части величины GH, равныя C, то число частей FK, KE будетъ равно числу частей GL, LH; но какъ A есть такой же кратности отъ B, какой C отъ D, то FK, KE будутъ такой же кратности отъ B, какой GL, LH отъ D, слѣдовательно сумма величинъ FK и KE или величина FE будетъ такой же кратности отъ B, какой сумма величинъ GL и LH, или величина GH будетъ отъ D.

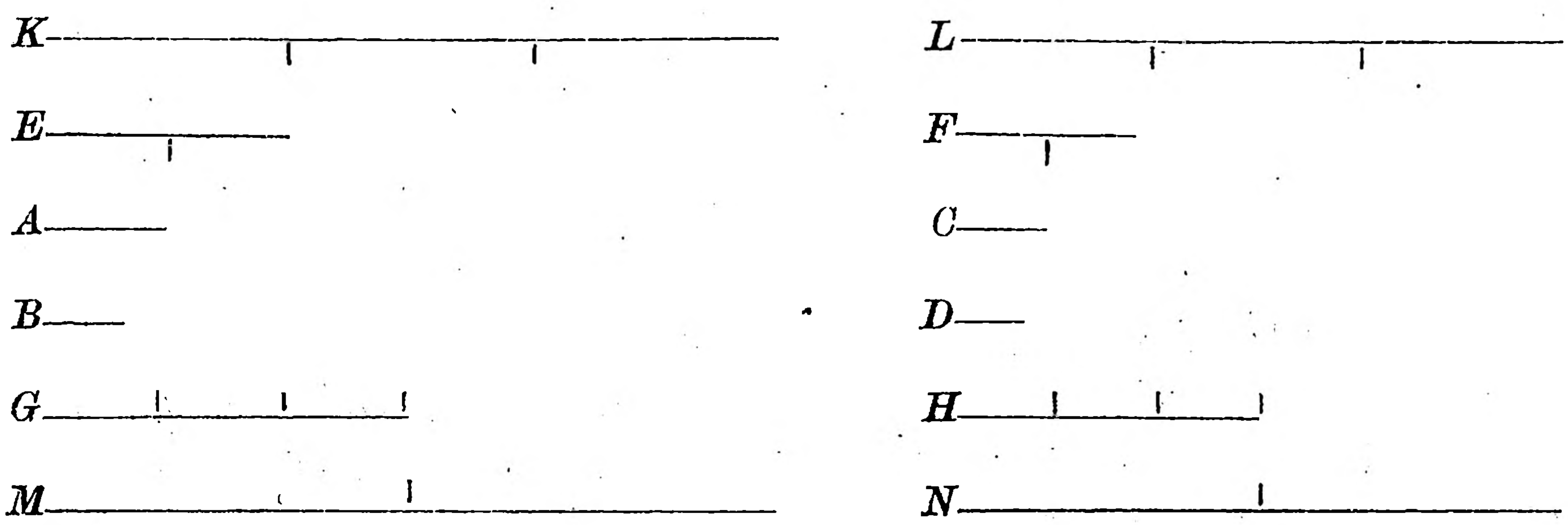
Примѣч. 20. Если $a_1 = nr_1$, $b_1 = nq_1$, то:

$$ma_1 = mnr_1,\quad mb_1 = mnq_1.$$

Предложеніе 4. Если изъ четырехъ величинъ отношеніе первой ко второй равно отношенію третьей къ четвертой, то величины, равнократныя первой и третьей съ величинами, равнократными второй и четвертой, будутъ имѣть между собою тоже отношеніе (фиг. 186).

Доказат. Пусть первая величина A имѣетъ ко второй B такое же отношеніе, какое имѣетъ третья C къ четвертой D.

Фиг. 186.



Возьмемъ величины E и F, равнократныя величинъ A и C, и величины G и H, равнократныя величинъ B и D, но по какой нибудь другой кратности; то величина E будетъ имѣть такое же отношеніе къ величинѣ G, какое имѣетъ имѣетъ величина F къ величинѣ H.

Возьмемъ новыя величины K и L, равнократныя величинъ E и F, и M и N, равнократныя G и H. Такъ какъ E есть такой же кратности отъ A, какой F отъ C, а величины K и L взяты равнократными E и F, слѣдовательно K будетъ такой же кратности отъ A, какой L отъ C (кн. 5, пред. 3). По той же причинѣ M будетъ такой же кратности отъ B, какой N отъ D. Но отношеніе A къ B равно отношенію C къ D, а K и L суть равнократныя A и C по нѣкоторой кратности, а M и N суть равнократныя B и D по какой нибудь другой кратности, слѣдовательно, если $K>M$, то $L>N$, если $K=M$, то $L=N$ и если $K<M$, то $L<N$ (кн. 5, опред. 8). Но K и L суть равнократныя отъ E и F, по извѣстной кратности, а M и N суть также равнократныя отъ G и H, по какой нибудь другой кратности, слѣдовательно E относится къ G, какъ F къ H (кн. 5, опред. 5).

Примѣч. 21. Если $a:b=c:d$, то:

$$ma:nb=mc:nd$$

и еще:

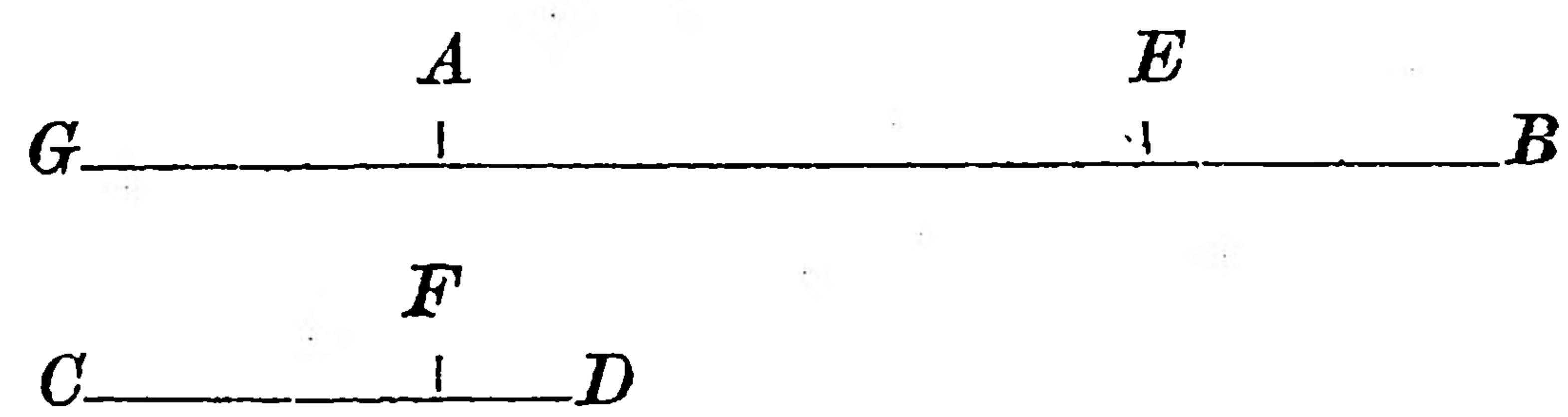
$$ma:b=mc:d$$

$$a:nb=c:nd.$$

Предложеніе 5. Если изъ двухъ величинъ первая будетъ извѣстной кратности второй и нѣкоторая часть первой будетъ такой же кратности нѣкоторой части второй, то остатокъ первой будетъ той же кратности остатка второй (фиг. 187).

Доказат. Пусть величина AB будетъ кратная величины CD и часть ея AE пусть будетъ такой же кратности части CF, величины CD, какой AB отъ CD.

Фиг. 187.



Пусть AG будетъ такой же кратности отъ FD, какой AE отъ CF, то AE будетъ такой же кратности отъ CF, какой EG отъ CD (кн. 1, пред. 1). Но, по положенію, AE такой же кратности отъ CF, какой AB отъ CD, откуда AB и EG будутъ равнократныя величины CD, слѣдовательно $EG=AB$. Отнимая по AE найдемъ, что остатокъ AG будетъ равенъ остатку EB (кн. 1, акс. 3), но такъ какъ AE такой же кратности отъ CF, какой AG отъ FD, а $AG=EB$, то AE будетъ такой же кратности отъ CF, какой EB отъ FD. Но AE такой же кратности отъ CF, какой AB отъ CD, слѣдовательно EB будетъ такой же кратности FD, какой AB отъ CD.

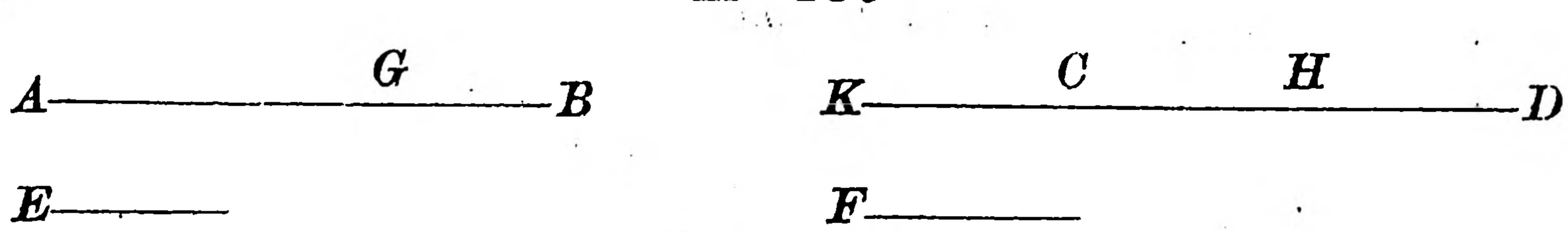
Примѣч. 22. Если $a_1=nb_1$, и если a_2 и b_2 суть части величинъ a_1 и b_1 и притомъ такія, что $a_2=nb_2$, то мы имѣемъ:

$$a_1-a_2=n(b_1-b_2).$$

Предложеніе 6. Если двѣ величины будутъ равнократныя другихъ двухъ и если отъ первыхъ отымемъ равнократныя вторыхъ, то получимъ остатки, которые или будутъ равны вторымъ величинамъ, или будутъ отъ нихъ равнократные.

Доказат. Случай 1. Пусть двѣ величины AB и CD будутъ равнократныя другихъ двухъ E и F. Если изъ AB и CD вычтемъ AG и CH, равнократныя тѣхъ же E и F, то остатки GB и HD будутъ или равны величинамъ E и F, или будутъ равнократные этихъ послѣднихъ (фиг. 188).

Фиг. 188.

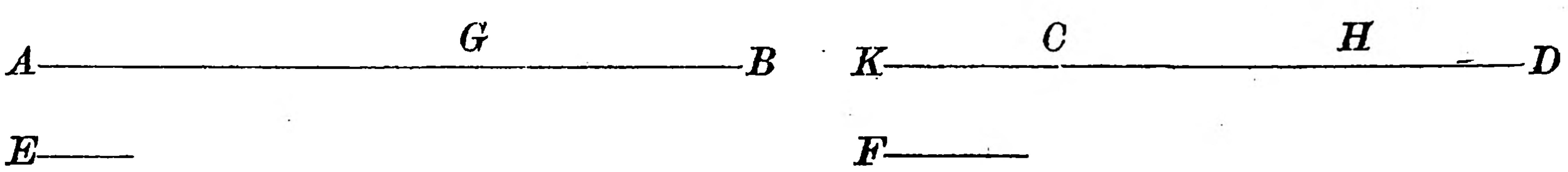


Возьмемъ во первыхъ GB и HD равные E и F и возьмемъ еще

$KC=F$; такъ какъ AG такой же кратности отъ E, какой CH отъ F, то AB будетъ такой же кратности отъ E, какой KH отъ F. Но AB такой же кратности отъ E, какой CD отъ F, слѣдовательно KH и CD суть равнократныя отъ F, откуда $KH=CD$ (кн. 5, акс. 1). Отымая по CH мы получимъ остатокъ $KC=HD$ (кн. 1, акс. 3), но $KC=F$, слѣдовательно и $HD=F$, откуда заключаемъ, что если $GB=E$, то $HD=F$.

Случай 2. Пусть теперь GB будетъ кратное отъ E, то HD будетъ равнократное отъ F. Возьмемъ величину CK такой же кратности отъ F, какой величина GB отъ E и какъ AG есть величина такой же кратности отъ E, какой CH отъ F, то AB будетъ такой же кратности отъ E, какой KH отъ F (кн. 5, пред. 2) (фиг. 189).

Фиг. 189.



Но AB такой же кратности отъ E, какой CD отъ F, слѣдовательно HK и CD суть величины равнократныя одной и той же величины F, слѣдовательно $CD=HK$. Отнимая по CH, получимъ равные остатки $CK=HD$; и какъ GB такой же кратности отъ E, какой HD отъ F и $CK=HD$, то HD будетъ такой же кратности отъ F, какой GB отъ E.

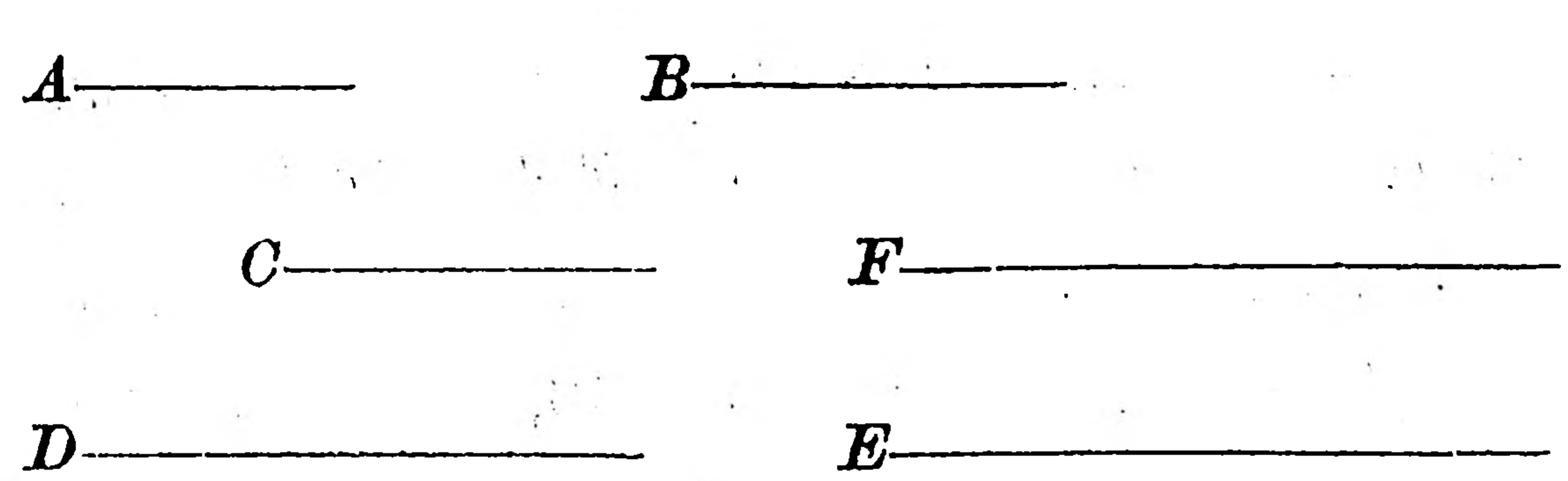
Примѣч. 23. Если $a_1=nr_1$ и $a_2=nr_2$, $b_1=mr_1$, $b_2=mr_2$, то:

$$a_1-b_1=(n-m)r_1\ ,\ a_2-b_2=(n-m)r_2\ .$$

Предложеніе 7. Равныя величины къ одной и той же величинѣ имѣютъ одно и тоже отношеніе и одна и таже величина къ равнымъ величинамъ имѣетъ одно и тоже отношеніе (фиг. 190).

Доказат. Случай 1. Пусть A и B будутъ равныя величины и C другая какая нибудь величина. Я говорю, что величина A и B къ C имѣютъ одно и тоже отношеніе и что величина C къ величинамъ A и B имѣетъ одно и тоже отношеніе.

Фиг. 190.



Возьмемъ величины D и E, равнократныя величинъ A и B, и величину F кратную отъ C, по какой нибудь другой кратности. Такъ какъ D есть величина такой же кратности отъ A, какой E отъ B и какъ по условію $A=B$, то мы имѣемъ также $D=E$ (кн. 5, акс. 1). Слѣдовательно, если $D>F$, то также $E>F$, если $D=F$, то также $E=F$ и если $D<F$, то также $E<F$, но D и E суть величины равнократныя величинъ A и B и F есть величина кратная величины C, по какой нибудь другой кратности, то (кн. 5, опред. 5) $A:C=B:C$.

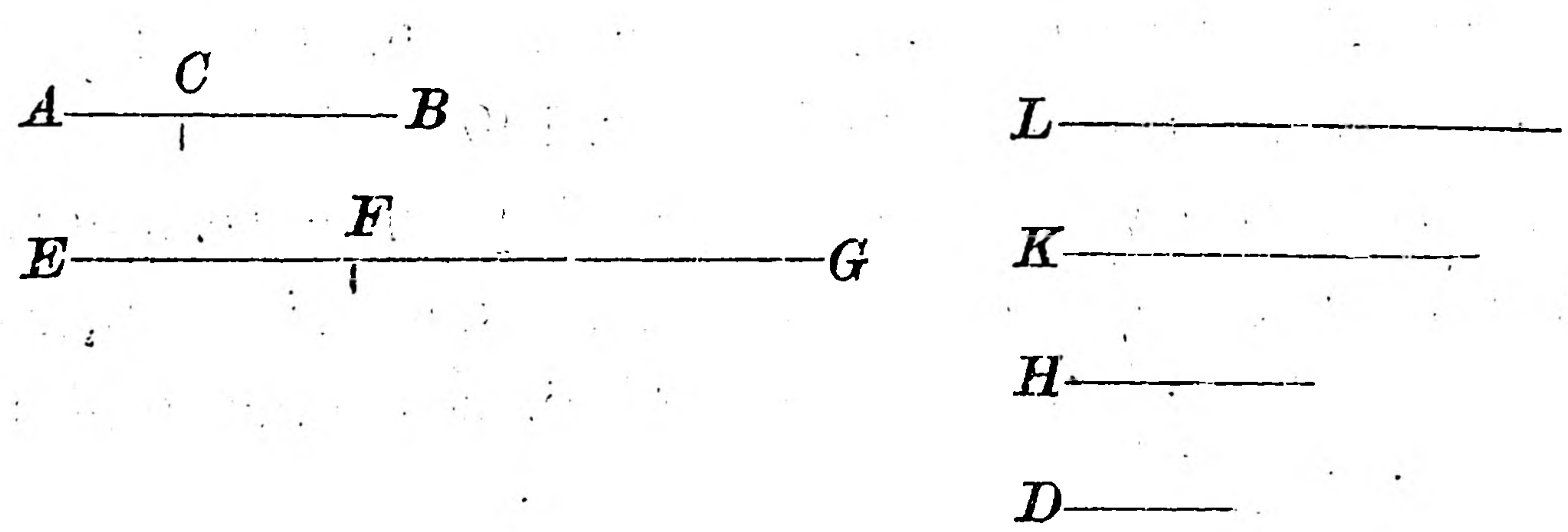
Случай 2. Величина C имѣетъ къ величинамъ A и B тоже отношеніе. Поступая какъ выше, мы докажемъ, что $D=E$, слѣдовательно если $F \gtreqless D$, то $F \gtreqless E$; но F есть величина кратная отъ C, а D и E суть величины равнократныя отъ A и B, по другой, какой нибудь кратности, слѣдовательно: $C:A=C:B$ (кн. 5, опред. 5).

Примѣч. 24. Если $A=B$, то $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$ и $\frac{C}{A}=\frac{C}{B}$.

Предложеніе 8. Изъ двухъ неравныхъ величинъ отношеніе большей больше отношенія меньшей къ одной и той же третьей величинѣ; и одна и таже величина къ величинѣ меньшей имѣетъ отношеніе больше отношенія ея къ величинѣ большей.

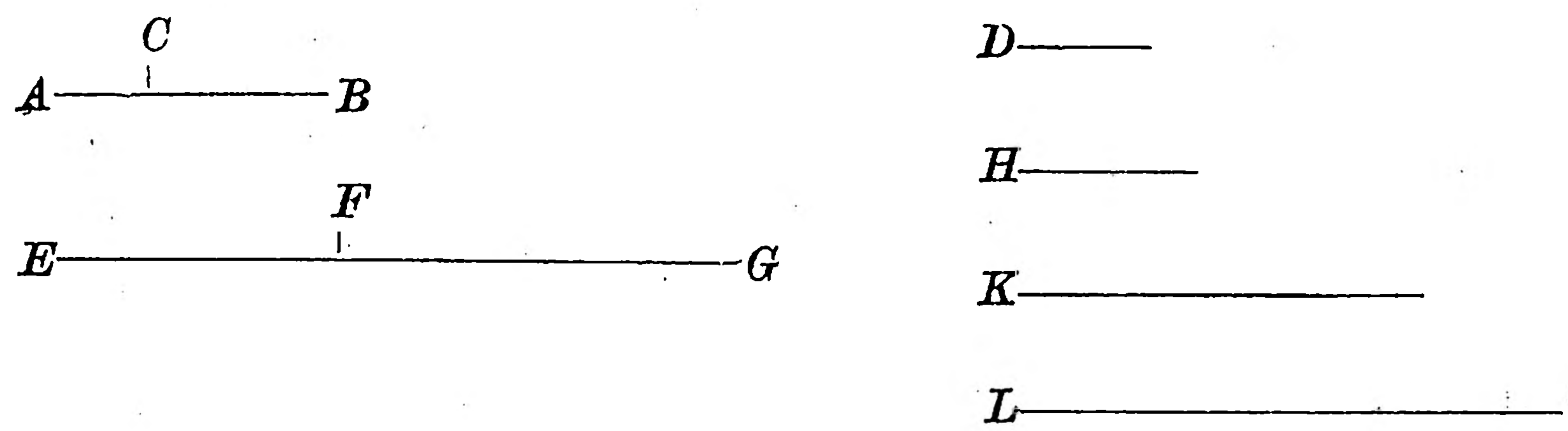
Доказат. Случай 1. Пусть AB и BC будутъ двѣ неравныя величины и пусть $AB>BC$, пусть D будетъ какая нибудь другая величина; говорятъ, что отношеніе AB къ D больше отношенія BC къ D и что отношеніе D къ BC больше отношенія D къ AB (фиг. 191).

Фиг. 191.



Если та изъ величинъ AC и CB, которая не больше другой, не будетъ меньше D, то возьмемъ величины EF и FG, двойныя величинъ AC и CB. Если же та изъ величинъ, которая не больше другой будетъ меньше величины D, какъ въ фигурѣ 192, то умноженная, она можетъ превзойти D. Сколько разъ мы взяли меньшую изъ величинъ AC и CB для того, чтобы получить величину больше D, столько же разъ возьмемъ и большую изъ нихъ. Пусть EF и FG будутъ такія кратныя величинъ AC и CB. Слѣдовательно, обѣ величины EF и FG будутъ больше D.

Фиг. 192.



Въ обоихъ случаяхъ возьмемъ $H=2D$, $K=3D$, и т. д., пока неполучимъ такую величину кратную D, которая первая будетъ больше FG. Пусть L будетъ эта первая величина и пусть K будетъ величина, кратная D, непосредственно меньше величины L.

Такъ какъ L есть первая изъ величинъ кратныхъ D, которая больше FG, а K есть величина непосредственно меньшей кратности той же D, то FG не меньше K.

Но какъ EF есть величина такой кратности отъ AC, какой FG отъ CB, то EG есть величина такой же кратности отъ AB, какой FG отъ CB, т. е. EG и FG суть равнократныя AB и CB.

Но было показано, что FG не меньше K, а EF больше D, слѣдовательно цѣлое EG больше K и D вмѣстѣ взятыхъ. Но K и E, вмѣстѣ взятыя, равны L, слѣдовательно EG больше L. Но FG не больше L, а EG и FG равнократныя отъ AB и BC и L есть величина кратная отъ D, слѣдовательно отношеніе AB къ D больше отношенія BC къ D (кн. 5, опред. 7).

Случай 2. Отношеніе D къ BC будетъ больше отношенія D къ AB.

Сдѣлавъ тоже построеніе можно легко показать, что L больше FG, но не больше EG.

Но L есть кратное отъ D, а EG и FG кратныя отъ AB и CB, слѣдовательно отношеніе D къ BC больше отношенія D къ AB.

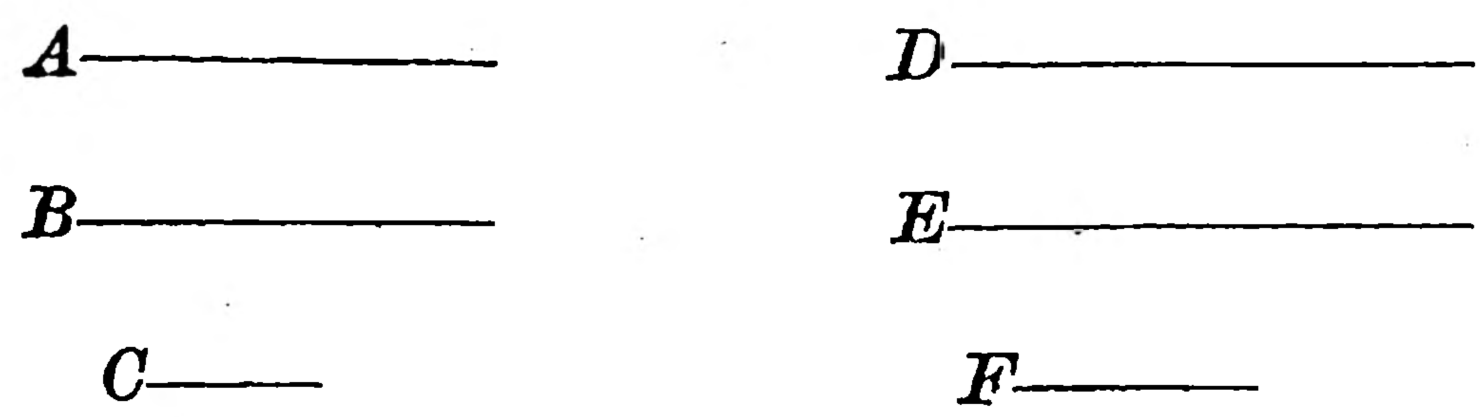
Примѣч. 25. Если $A>B$, то $\frac{A}{D}>\frac{B}{D}$ и $\frac{D}{A}<\frac{D}{B}$, какая бы ни была величина D.

Предложеніе 9. Величины, имѣющія одно и тоже отношеніе съ одною и тою же величиною, равны между собою, и величины, къ которымъ одна и таже величина имѣетъ тоже отношеніе также равны между собою (фиг. 193).

Доказат. Случай 1. Положимъ, что величины A и B имѣютъ одно и тоже отношеніе къ величинѣ C, то $A=B$.

Въ самомъ дѣлѣ, если величины A и B не равны, то одна изъ нихъ больше другой, пусть $A>B$.

Фиг. 193.



Изъ того, что было показано въ пред. 8, мы всегда можемъ найти величины, равнократныя отъ A и B и величину кратную отъ C и при томъ такія, что кратное отъ A больше кратнаго отъ C, и кратное отъ B не больше кратнаго отъ C.

Пусть такія кратныя отъ A и B будутъ D и E, а кратное отъ C пусть будетъ F, слѣдовательно $D>F$, но E не$>F$.

Но такъ какъ A къ C и B къ C имѣютъ тоже отношеніе, а D и E суть кратныя отъ A и B и F кратное отъ C и при томъ такія, что $D>F$, слѣдовательно должно быть $E>F$. Но E не больше F, слѣдовательно невозможно, чтобы A не было равно B.

Случай 2. Теперь пусть C имѣетъ къ A и B одно и тоже отношеніе, A будетъ равно B.

Изъ того, что было показано въ пред. 8, можно всегда найти величину F, кратную отъ C, и кратныя величины D и E отъ B и A и при томъ такія, что $F>E$, но не$>D$.

Такъ какъ C относится къ B, какъ C къ A, и F кратное отъ C больше D кратнаго отъ A, слѣдовательно F, кратное отъ B, больше отъ D, но мы имѣемъ F не$>D$, что невозможно. Слѣдовательно $A=B$.

Примѣч. 26. Если $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$, то $A=B$, или если $\frac{C}{A}=\frac{C}{B}$, то также $A=B$.

Предложеніе 10. Если отношенія двухъ величинъ къ третьей неравны, то та изъ нихъ, которой отношеніе больше, больше той которой отношеніе меньше и та, къ которой одна и таже величина имѣетъ отношеніе больше, меньше той, къ которой она имѣетъ отношеніе меньшее (фиг. 194).

Доказат. Случай 1. Пусть отношеніе A къ C больше отношенія B къ C, то $A>B$.

Такъ какъ отношеніе A къ C больше отношенія B къ C, то (кн. 5, опред. 7) есть нѣкоторыя величины D и E равнократныя величинъ A и B, и нѣкоторая величина F, кратная отъ C и при томъ такія, что $D>F$, но E не$>F$. Но D и E суть величины, равнократныя величинъ A и B, слѣдовательно $A>B$ (кн. 5, акс. 4).

отъ B, D, F; то, если $G \gtreqless L$, мы будемъ имѣть и $H \gtreqless M$, $K \gtreqless N$, откуда, если $G \gtreqless L$, то и сумма величинъ G, H, $K \gtreqless$ суммы величинъ L, M, N; но G и сумма величинъ G, H, K суть равнократныя, первая отъ A, а вторая отъ суммы величинъ A, C, E (кн. 5, пред. 1), а также L и сумма величинъ L, M, N суть равнократныя первая отъ B, а вторая отъ суммы величинъ B, D, F, по другой кратности; слѣдовательно (кн. 5, опред. 5) A относится къ B, какъ сумма величинъ A, C, E къ суммѣ величинъ B, D, F.

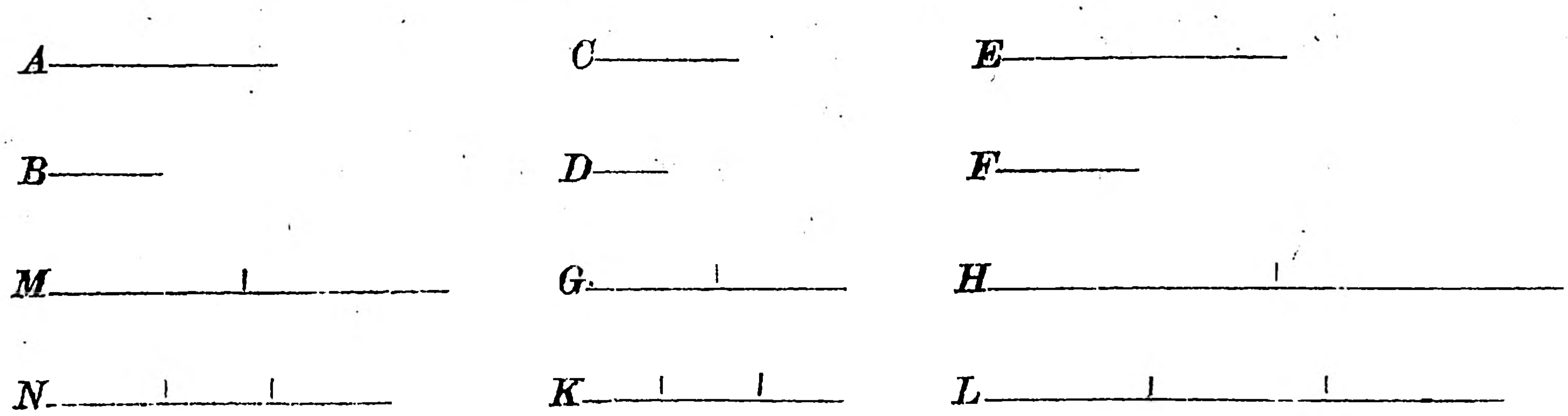
Примѣч. 29. Если $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, то мы имѣемъ:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Предложеніе 13. Если первая величина относится ко второй, какъ третья къ четвертой, и если отношеніе третьей къ четвертой больше отношенія пятой къ шестой, то и отношеніе первой ко второй больше отношенія пятой къ шестой (фиг. 197).

Доказат. Пусть первая величина A относится ко второй B, какъ третья C къ четвертой D, но пусть отношеніе третьей C къ четвертой D больше отношенія пятой E къ шестой F, я говорю, что отношеніе A къ B будетъ больше отношенія E къ F. Такъ какъ отношеніе C къ D больше отношенія E къ F, то есть (кн. 5, опред. 7) нѣкоторыя величины G, H, равнократныя величинъ C и E, и нѣкоторыя другія величины K, L, равнократныя величинъ D, F, такія, что непремѣнно $G>K$, но H не$>L$. Возьмемъ величины M и N кратныя отъ A и B, различной кратности.

Фиг. 197.



Такъ какъ A относится къ B, какъ C къ D и взяты равнократныя M и G величинъ A и C и равнократныя N и K величинъ B и D, то, если $G \gtreqless K$, необходимо будетъ $M \gtreqless N$. Но H не больше L, а M и H суть равнократныя отъ A и E, а N и L равнократныя отъ B и F, по другой кратности, слѣдовательно (кн. 5, опред. 7), отношеніе A къ B будетъ больше отношенія E къ F.

Примѣч. 30. Если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ и $\frac{C}{D}>\frac{E}{F}$, то:

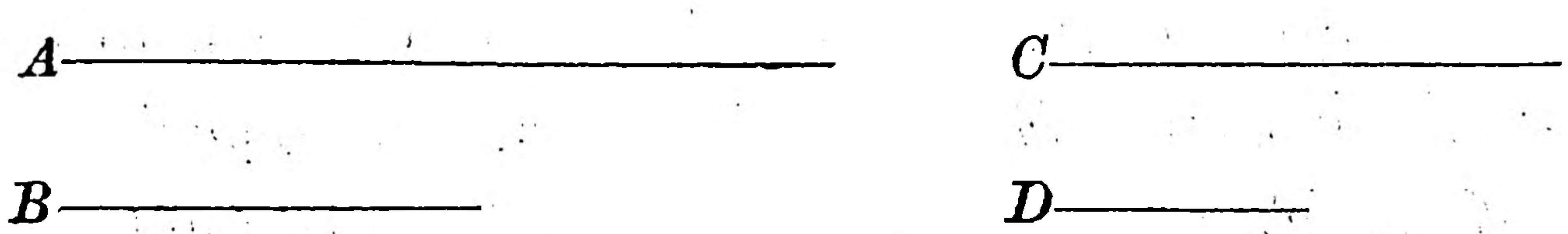
$$\frac{A}{B}>\frac{E}{F}.$$

Предложеніе 14. Если четыре величины пропорціональны, т. е. первая относится ко второй, какъ третья къ четвертой и если первая больше, равна или меньше третьей, то вторая будетъ также больше, равна или меньше четвертой (фиг. 198).

Доказат. Случай 1. Пусть A, B, C и D будутъ эти четыре величины, то если $A>C$, то $B>D$.

Такъ какъ $A>C$, то отношеніе A къ B будетъ больше отношенія C къ B (кн. 5, опред. 8), но A относится къ B какъ C къ D, слѣдовательно (кн. 5, пред. 13), отношеніе C къ D будетъ больше отношенія C къ B. Но та изъ величинъ, къ которой одна и таже величина имѣетъ, отношеніе больше, меньше (кн. 5, пред. 10), слѣдовательно $D<B$, или $B>D$.

Фиг. 198.



Случай 2. Если $A=C$, то $B=D$. Въ самомъ дѣлѣ, если A относится къ B, какъ C къ D и $A=C$, то A будетъ относится къ B какъ A къ D, слѣдовательно $B=D$ (кн. 5, пред. 10).

Случай 3. Наконецъ если $A<C$, то будетъ и $B<D$. Такъ какъ $C>A$, и C относится къ D какъ A къ B, слѣдовательно, какъ въ первомъ случаѣ, $D>B$ или $B<D$.

Примѣч. 31. Если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ и если $A \gtreqless C$, то:

$$B \gtreqless D.$$

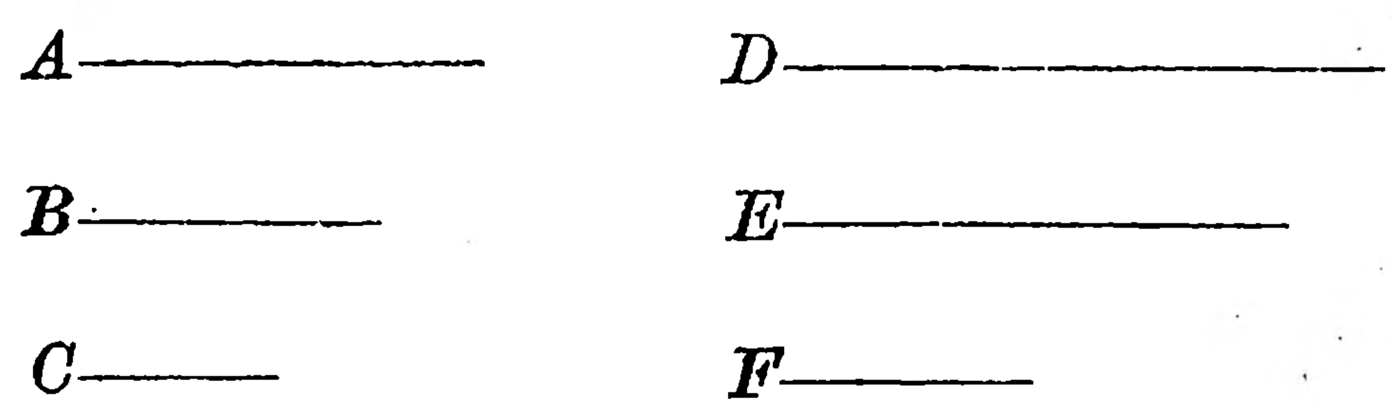
Предложеніе 15. Двѣ величины имѣютъ между собою такое же отношеніе, какое имѣютъ ихъ равнократныя (фиг. 199).

Доказат. Пусть AB будетъ такое кратное отъ C, какое ED отъ F; я говорю, что отношеніе C къ F будетъ равно отношенію AB къ ED.

Случай 2. Пусть отношеніе C къ B больше отношенія C къ A, то $A>B$. Такъ какъ всегда есть кратное F отъ C и равнократныя E и D отъ B и A, притомъ такія, что $F>E$, но не$>D$, слѣдовательно $E<D$ (кн. 5, опред. 7).

Но какъ E и D суть равнократныя отъ B и A, и $E<D$, то $B<A$.

Фиг. 194.



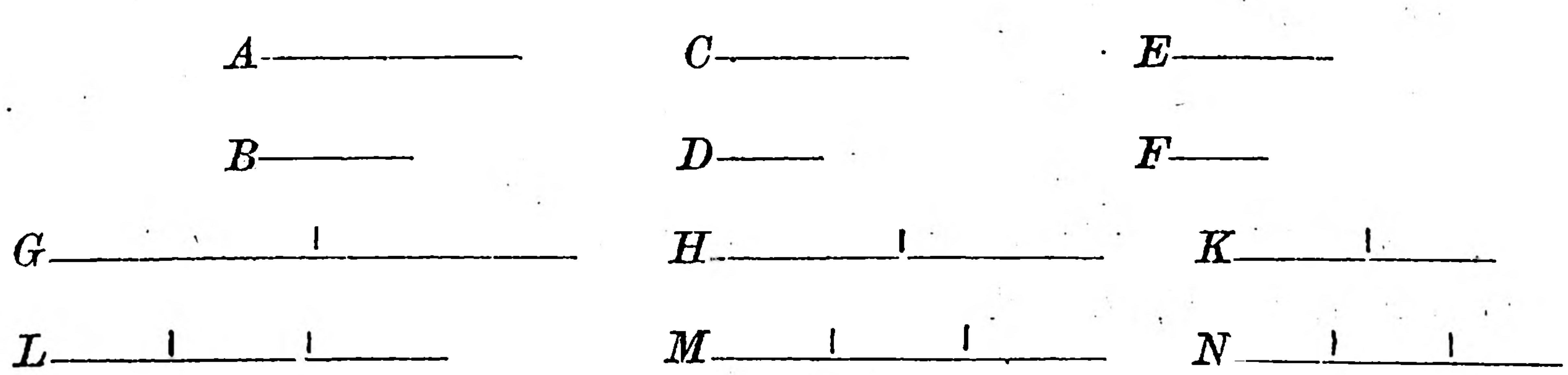
Примѣч. 27. Если $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$, то $A>B$, или если $\frac{C}{A} < \frac{C}{B}$, то $B<A$.

Предложеніе 11. Отношенія равныя одному и тому же отношенію равны между собою (фиг. 195).

Доказат. Пусть отношеніе A къ B равно отношенію C къ D, а отношеніе C къ D равно отношенію E къ F; я говорю что отношеніе A къ B равно отношенію E къ F.

Возьмемъ равнократныя величинъ A, C, E и пусть онѣ будутъ G, H и K, возьмемъ также, по какой нибудь другой кратности, равнократныя величинъ B, D и F и пусть онѣ будутъ L, M и N.

Фиг. 195.



Такъ какъ величина A относится къ B, какъ C къ D и взяты равнократныя G, H величинъ A, C и равнократныя, по другой кратности, L, M величинъ B, D, то, если $G \gtreqless L$, мы будемъ имѣть также $H \gtreqless M$ (кн. 5, опред. 5). Такъ какъ C относится къ D, какъ E къ F, и взяты равнократныя H, K величинъ C, E и равнократныя M, N величинъ D, F, то, если $H \gtreqless M$, мы будемъ имѣть и $K \gtreqless N$. Но G и K суть величины равнократныя A и E, по какой нибудь кратности, а L, N суть величины равнократныя B и F, по какой нибудь другой кратности, слѣдовательно A относится къ B, какъ E къ F (кн. 5, опред. 5).

Примѣч. 28. Если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, а $\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$, то:

$$\frac{A}{B}=\frac{E}{F}.$$

Здѣсь Симсонъ прибавилъ четыре предложенія, опущенныя Евклидомъ, и доказалъ ихъ по его же способу. Я приведу только предложенія, а доказательства оставляю, такъ какъ ихъ легко доказать самому.

Предлож. А. Если первая изъ четырехъ величинъ имѣетъ ко второй такое же отношеніе, какъ третья къ четвертой и если первая $\gtreqless$ второй, то третья также $\gtreqless$ четвертой.

Предлож. В. Если четыре величины пропорціональны, то онѣ и *обратно* пропорціональны, т. е. если $A:B=C:D$, то $B:A=D:C$.

Предлож. С. Если первая величина такой же кратности, или такая же часть второй, какой кратности, или какая часть третья четвертой, то первая будетъ такъ относится ко второй, какъ третья къ четвертой.

Если $A=nB$, $C=nD$, или если $A=\frac{1}{n}B$, $C=\frac{1}{n}D$, то $A:B=C:D$.

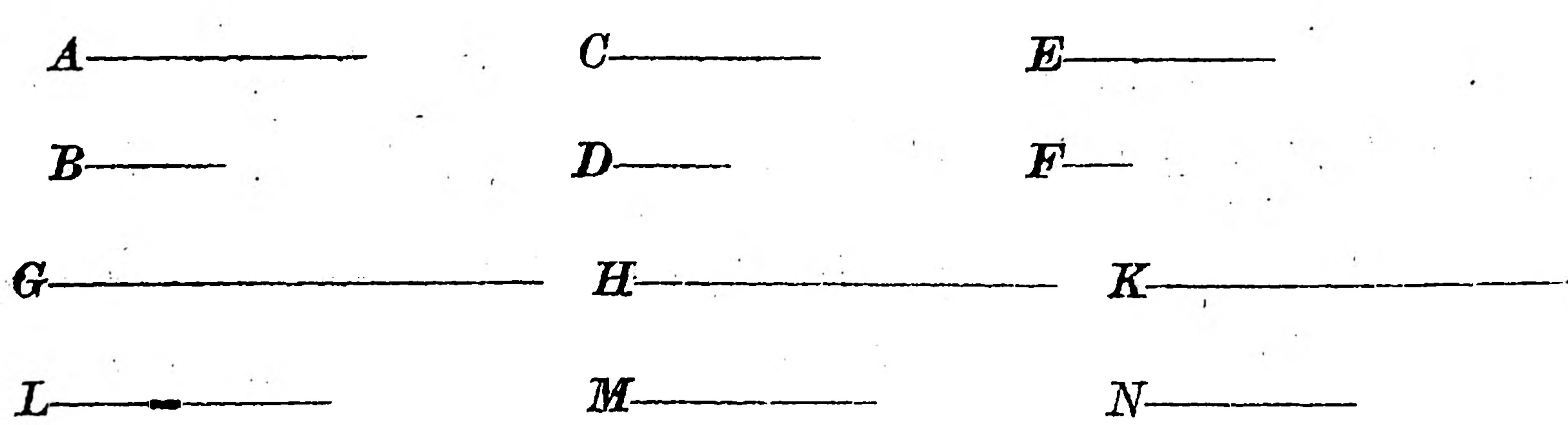
Предлож. D. Если первая величина относится ко второй, какъ третья къ четвертой, и если первая есть кратная, или часть второй, то третья будетъ такой же кратности, или такая же часть четвертой.

Если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ и если $A=nB$ или $A=\frac{1}{n}B$, то $C=nD$ или $C=\frac{1}{n}D$.

Предложеніе 12. Если какое нибудь число величинъ пропорціональны, то одинъ изъ предъидущихъ членовъ относится къ своему послѣдующему, какъ сумма всѣхъ предъидущихъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ (фиг. 196).

Доказат. Пусть будетъ сколько угодно пропорціональныхъ величинъ A, B, C, D, E, F, т. е. что A относится къ B, какъ C къ D, какъ E къ F, я говорю что A относится къ B, какъ сумма величинъ A, C, E къ суммѣ величинъ B, D, F.

Фиг. 196.



Возьмемъ равнократныя G, H, K величинъ A, C, E, по какой нибудь кратности и равнократныя L, M, N величинъ B, D, F по какой нибудь другой кратности.

Такъ какъ A относится къ B, какъ C къ D и какъ E къ F и взяты G, H, K равнократныя отъ A, C, E и равнократныя L, M, N

слѣдовательно (кн. 5, пред. 2), цѣлая величина HO будетъ такой же кратности отъ EB, какой цѣлая MP отъ FD, т. е. HO и MP суть величины равнократныя отъ EB и FD. Но AB такъ относится къ EB, какъ CD къ FD и взяты равнократныя GK и LN отъ AB и CD и другія равнократныя HO и MP отъ EB и FD, то, если $GK \gtreqless HO, LN \gtreqless MP$. Но если $GH > KO$, то, прибавляя по HK, получимъ $GK > HO$, а также $LN > MP$, отнимая по MN, получимъ $LM > NP$, слѣдовательно, если $GH > KO$, то также $LM > NP$. Точно также можно показать, что если $GH \gtreqless KO$, то $LM \gtreqless NP$. Но GH и LM суть величины равнократныя величинъ AE и CF, а KO и NP суть равнократныя, по другой кратности, отъ EB и FD, слѣдовательно AE такъ относится къ EB, какъ CF къ FD (кн. 5, опред. 5).

Примѣч. 34. Если $a_1 + a_2 : a_2 = b_1 + b_2 : b_2$, то:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 .$$

Предложеніе 18. Если четыре величины отдѣльно пропорціональны, то онѣ пропорціональны и взятыя вмѣстѣ, т. е. если первая относится такъ ко второй, какъ третья къ четвертой, то первая и вторая вмѣстѣ будетъ такъ относится ко второй, какъ третья и четвертая вмѣстѣ къ четвертой (фиг. 202).

Доказат. Пусть четыре величины AE, EB, CF, FD будутъ пропорціональны, т. е. AE такъ относится къ EB, какъ CF къ FD, говорю, что AE и EB вмѣстѣ, т. е. AB будетъ такъ относится къ EB, какъ CF и FD вмѣстѣ, т. е. CD къ FD.

Фиг. 202.

Если бы величина AB не относилась къ EB, какъ CD къ FD, а какъ CD къ какой нибудь другой величинѣ большей или меньшей отъ FD.

Пусть во первыхъ она будетъ $GD < FD$, т. е. что AB такъ относится къ EB, какъ CD къ GD, то (кн. 5, пред. 17) AE будетъ такъ относиться къ EB, какъ CG къ GD. Но по условію AE такъ относится къ EB, какъ CF къ FD, слѣдовательно (кн. 5, пред. 11) CG будетъ такъ относиться къ GD, какъ CF къ FD. Но очевидно $CG > CF$, слѣдовательно (кн. 5, пред. 14) $GD > FD$, что противурѣчитъ положенію $GD < FD$.

Точно также можно показать, что GD не можетъ быть и $> FD$, слѣдовательно $GD = FD$.

Примѣч. 35. Если $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, то:

$$a_1 + a_2 : a_2 = b_1 + b_2 : b_2 .$$

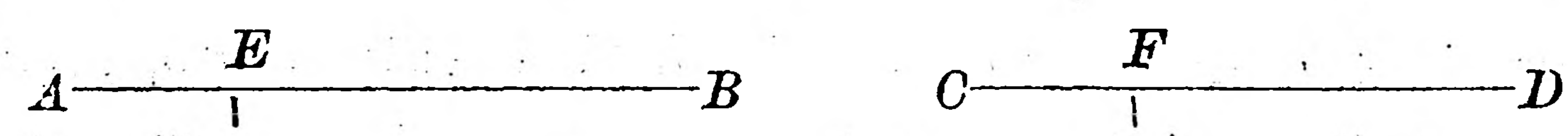
Симсонъ измѣнилъ предъидущее доказательство Евклида и замѣнилъ его другимъ подобнымъ предшествующимъ этому послѣднему.

Предложеніе 19. Если цѣлыя величины относятся между собою, какъ ихъ части, то и остатки будутъ относиться, между собою, какъ цѣлыя (фиг. 203).

Доказат. Если AB такъ относится къ CD, какъ часть AB, EB относится къ части CD, FD, то EB будетъ такъ относиться къ FD, какъ AB къ CD.

Такъ какъ AB относится къ CD, какъ AE къ CF, то (кн. 5, пред. 16) AB будетъ такъ относиться къ AE, какъ CD къ CF, слѣдовательно, (кн. 5, пред. 17) EB будетъ такъ относится къ AE какъ FD къ CF, слѣдовательно (кн. 5, пред. 16) EB будетъ такъ относиться къ FD, какъ AE къ CF. Но отношеніе AE къ CF равно отношенію AB къ CD по условію, слѣдовательно AB такъ относится къ CD, какъ EB къ FD

Фиг. 203.



Примѣч. 36. Если $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, то:

$$a_1 : a_2 = a_1 - b_1 : a_2 - b_2 .$$

Симсонъ здѣсь прибавилъ еще слѣдующее предложеніе:

Предлож. E. Если четыре величины пропорціональны, то онѣ и обратно пропорціональны, т. е. если $AB : BE = CD : DF$ (фиг. 203), то и обратно $AB : AE = CD : CF$ (кн. 5, опред. 17).

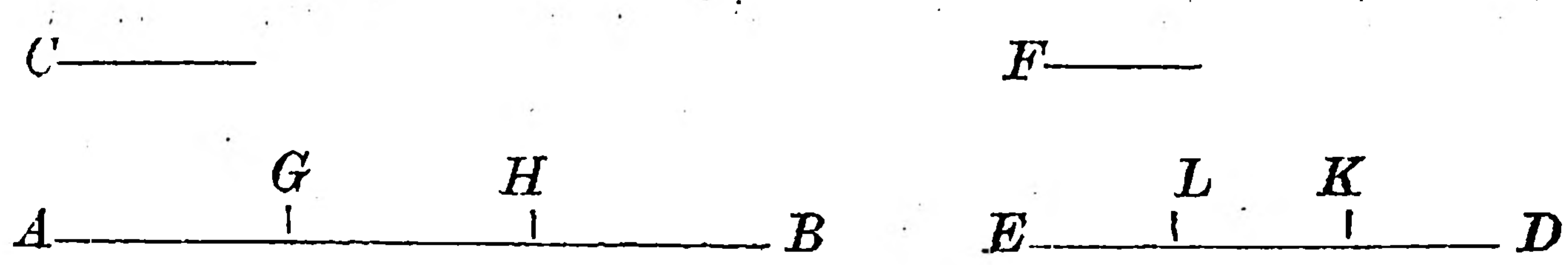
Предложеніе 20. Если есть три величины и другія три, притомъ такія, что взятыя по двѣ имѣютъ тоже самое отношеніе, то если первая $\gtreqless$ третьей, четвертая будетъ $\gtreqless$ шестой (фиг. 204).

Доказат. Пусть первыя три величины будутъ A, B, C, а вторыя три D, E, F и при томъ такія, что $A : B = D : E$, $B : C = E : F$, я говорю, что если $A \gtreqless C$, то $D \gtreqless F$.

Пусть $A > C$, то мы видѣли (кн. 5, пред. 8), что $\frac{A}{B} > \frac{C}{B}$. Но мы имѣемъ $A : B = D : E$, слѣдовательно (кн. 5, пред. 13) $\frac{D}{E} > \frac{C}{B}$. Но мы так-

Такъ какъ величина AB такой же кратности C, какой ED отъ F, то сколько величинъ C заключается въ AB, столько величинъ F заключается въ ED.

Фиг. 199.



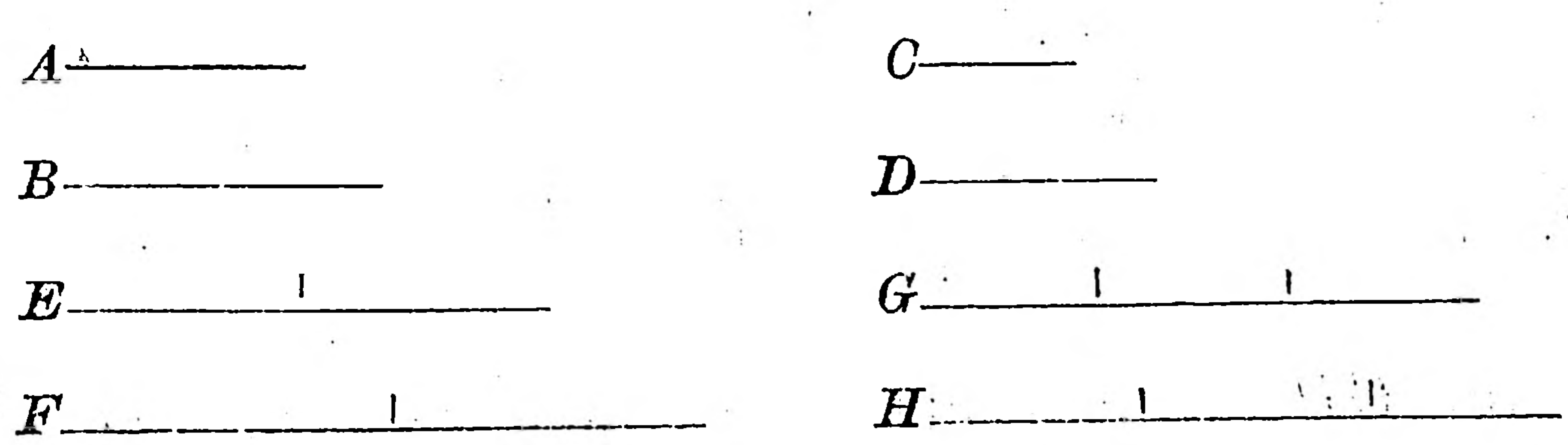
Пусть AG, GH, HB суть части AB равныя C и EL, LK, KD части ED равныя F, число частей въ AB и ED будетъ одно и тоже. Слѣдовательно (кн. 5, пред. 7), величина AG будетъ такъ относится къ EL, какъ GH къ KL, и какъ HB къ KD. Но предъидущій относится къ послѣдующему, какъ сумма предъидущихъ къ суммѣ послѣдующихъ (кн. 5, пред. 12), слѣдовательно, AG такъ относится къ EL, какъ AB къ ED, но $AG=C$, а $EL=F$, слѣдовательно C относится къ F, какъ AB къ ED.

Примѣч. 32. $\frac{C}{F}=\frac{nC}{nF}$.

Предложеніе 16. Если четыре величины пропорціональны, то онѣ останутся пропорціональны, если перемѣстить средніе члены (фиг. 200).

Доказат. Пусть четыре величины A, B, C, D пропорціональны и пусть A относится къ B, какъ C къ D, я говорю, что A будетъ относиться къ C, какъ B къ D.

Фиг. 200.



Возьмемъ величины E и F, равнократныя величинъ A и B, и величины G и H, равнократныя величинъ C и D.

Такъ какъ E есть величина такой же кратности отъ A, какой F отъ B, то (кн. 5, пред. 15) A относится къ B, какъ E къ F, но A къ B, какъ C къ D, слѣдовательно (кн. 5, пред. 11), C относится къ D, какъ E къ F. Такъ какъ G и H суть величины равнократныя величинъ C и D, то (кн. 5, пред. 15) C относится къ D, какъ G къ H; но C къ D, какъ E къ F, слѣдовательно E къ F, какъ G къ H. Но если четыре однородныя величины пропорціональны и первая будетъ $\substack{>\\=\\<}$ третьей, то вторая будетъ $\gtreqless$ четвертой (кн. 5, опред. 5), слѣдовательно, если $E \gtreqless G$, то $F \gtreqless H$; но E и F суть равнократныя величинъ A и B, G и H суть равнократныя величинъ C и D, слѣдовательно A относится къ C какъ B къ D.

Примѣч. 33. Если $A:B=C:D$, то:

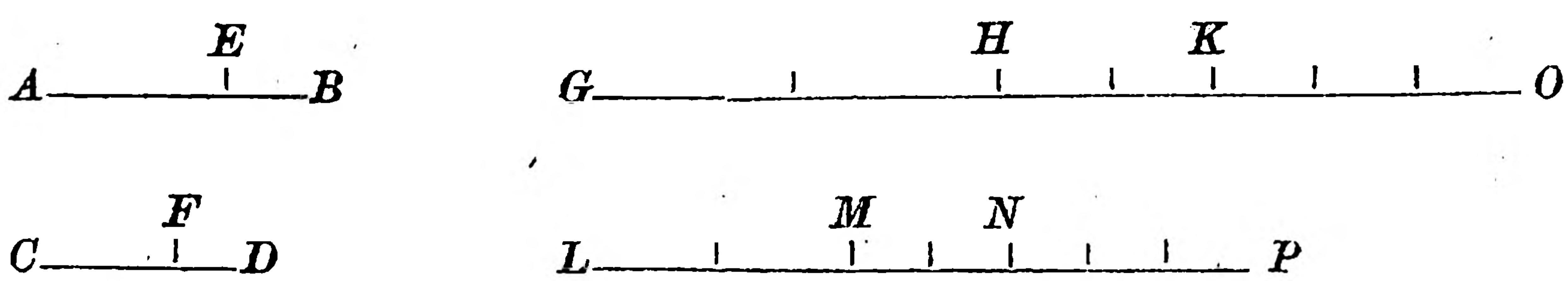
$$A:C=B:D.$$

Предложеніе 17. Если четыре величины, взятыя вмѣстѣ, пропорціональны, то онѣ и отдѣльно будутъ пропорціональны, т. е. если сумма двухъ величинъ имѣетъ такое же отношеніе къ одной изъ нихъ, какое имѣетъ сумма другихъ двухъ величинъ къ одной изъ нихъ, то остальная изъ первыхъ величинъ будетъ относиться къ первой, какъ остальная изъ вторыхъ къ ихъ первой (фиг. 201).

Доказат. Пусть AB, EB, CD, FD, четыре пропорціональныя величины, т. е. AB такъ относится къ EB, какъ CD къ FD, я говорю, что AE такъ относится къ EB, какъ CF къ FD.

Возьмемъ величины GH, HK, LM, MN, равнократныя, по какой нибудь кратности, величинъ AE, EB, CF, FD и величины KO и NP, равнократныя, по какой нибудь другой кратности, величинъ EB и FD.

Фиг. 201.

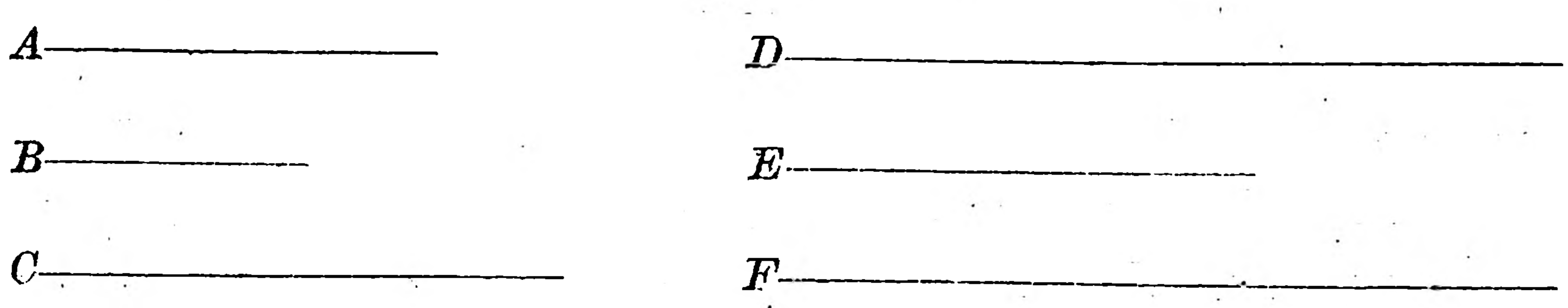


Такъ какъ GH есть величина такой же кратности отъ AE, какой HK отъ EB, то (кн. 5, пред. 1) GK будетъ такой же кратности отъ AB, какой GH отъ AE; но GH есть величина такой же кратности отъ AE, какой LM отъ CF, слѣдовательно GK будетъ такой же кратности отъ AB, какой LN отъ CD (кн. 5, пред. 1).

Такъ какъ LM такой же кратности отъ CF, какой MN отъ FD, то LM будетъ такой же кратности отъ CF, какой LN отъ CD; но мы показали, что LM такой же кратности отъ CF, какой GK отъ AB, слѣдвательно, GK будетъ такой же кратности отъ AB, какой LN отъ CD, откуда GK и LN суть величины равнократныя величинъ AB и CD.

Такъ какъ HK такой же кратности отъ EB, какой MN отъ FD и KO такой же кратности отъ той же величины EB, какой NP отъ FD, же имѣемъ $C : B = F : E$, слѣдовательно $\frac{D}{E} > \frac{F}{E}$, откуда (кн. 5, пред. 10) $D > F$ (фиг. 203).

Фиг. 204.

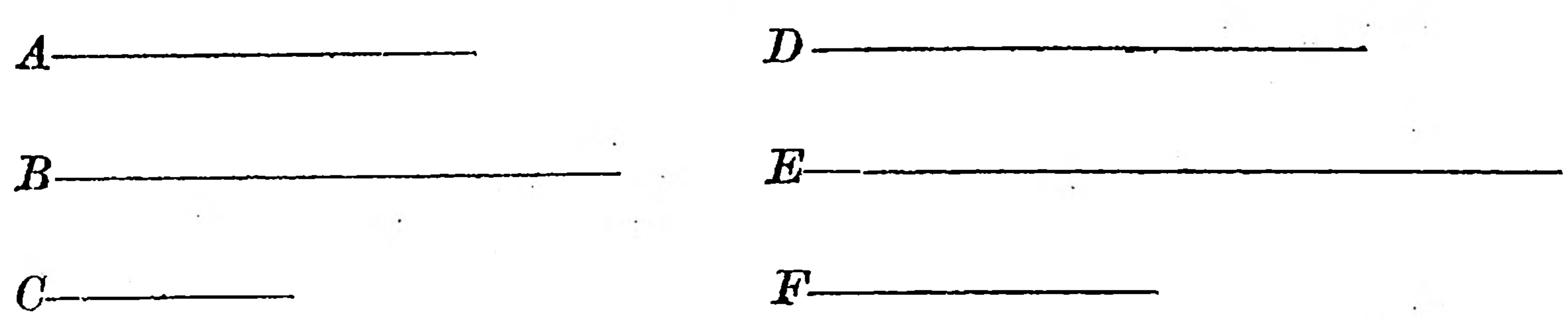


Такимъ же точно образомъ можно доказать, что если $A \gtreqless C$, то $D \gtreqless F$.

Предложеніе 21. Если есть три величины и другія три притомъ такія, что взятыя по двѣ, но по обратному порядку (кн. 5, опред. 20), имѣютъ одно и тоже отношеніе, то, если первая величина $\gtreqless$ третьей, четвертая будетъ $\gtreqless$ шестой (фиг. 205).

Доказат. Пусть первыя три величины будутъ A, B, C, а вторыя D, E, F и притомъ такія, что $A : B = E : F$, а $B : C = D : E$, я говорю, что если $A \gtreqless C$, то $D \gtreqless F$.

Фиг. 205.



Пусть $A > C$, то (кн. 5, пред. 8) $\frac{A}{B} > \frac{C}{B}$. Но $A : B = E : F$, слѣдовательно (кн. 5, пред. 13) $\frac{E}{F} > \frac{C}{B}$; но $C : B = E : D$. Слѣдовательно $\frac{E}{F} > \frac{E}{D}$, откуда $D > F$ (кн. 5, пред. 10).

Точно также можно показать, что если $A \gtreqless C$, то $D \gtreqless F$.

Предложеніе 22. Если нѣсколько величинъ и нѣсколько другихъ въ такомъ же числѣ, взятыя по двѣ, имѣютъ одно и тоже отношеніе, то онѣ будутъ и по равенству (кн. 5, опред. 18) имѣть одно и тоже отношеніе, т. е. первая будетъ относиться къ послѣдней перваго ряда, какъ первая къ послѣдней втораго ряда (фиг. 206).

Доказат. Пусть величины перваго ряда будутъ A, B, C, а величины втораго ряда D, E, F, притомъ такія, что:

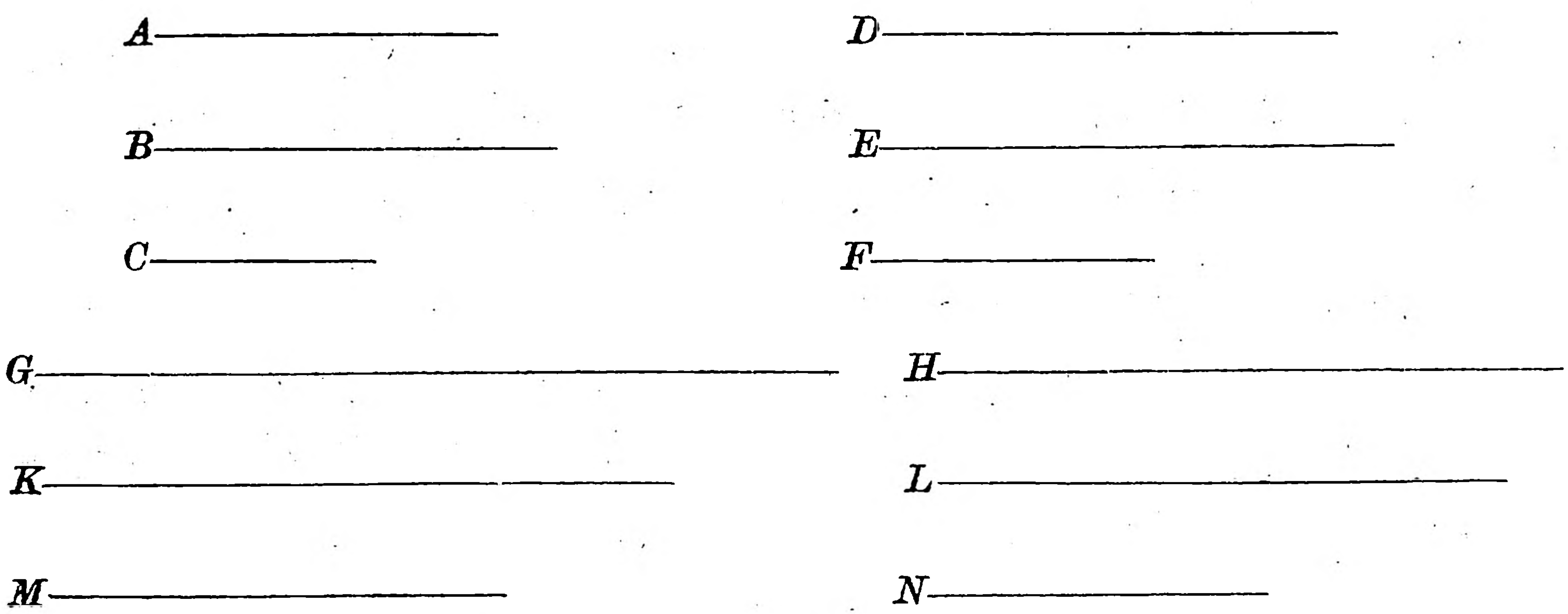
$$A:B=D:E,\quad B:C=E:F$$

я говорю, что мы будемъ имѣть также:

$$A:C=D:F.$$

Возьмемъ G и H равнократныя величинъ A и D, по какой нибудь кратности и K и L равнократныя отъ B и E, по другой какой нибудь кратности и наконецъ M и N равнократныя отъ C и F также по произвольной кратности.

Фиг. 206.



Такъ какъ мы имѣемъ:

$$A:B=D:E \text{ и } B:C=E:F,$$

то (кн. 5, пред. 4):

$$G:K=H:L \text{ и } K:M=L:N,$$

откуда, если $G\overset{>}{\underset{<}{=}}H$, то $K\overset{>}{\underset{<}{=}}L$, и если $K\overset{>}{\underset{<}{=}}L$, то $M\overset{>}{\underset{<}{=}}N$, слѣдовательно если $G\overset{>}{\underset{<}{=}}H$, то $M\overset{>}{\underset{>}{=}}N$.

Но, G и H суть равнократныя A и D, а M и N равнократныя C и F, слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$A:C=D:F.$$

Предложеніе 23. Если нѣсколько величинъ перваго ряда къ такому же числу величинъ втораго ряда, взятыя по двѣ, имѣютъ тоже самое отношеніе, но въ обратномъ порядкѣ (кн. 5, опред. 20), то онѣ будутъ и по равенству (кн. 5, опред. 19) имѣть тоже самое отношеніе, т. е. первая къ послѣдней, перваго ряда, будетъ находиться въ такомъ же отношеніи, въ какомъ первая къ послѣдней втораго ряда (фиг. 207).

Доказат. Пусть величины перваго ряда будутъ A, B, C, а величины втораго ряда D, E, F и при томъ такія, что:

$$A : B = E : F \quad \text{и} \quad B : C = D : E.$$

Я говорю, что мы будемъ имѣть:

$$A : C = D : F.$$

Возьмемъ величины G, H, K равнократныя величинъ A, B, D по какой нибудь кратности и L, M, N равнократныя отъ C, E, F по другой какой нибудь кратности.

Но мы имѣемъ $A : B = E : F$ и $B : C = D : E$, слѣдовательно (кн. 5, пред. 4):

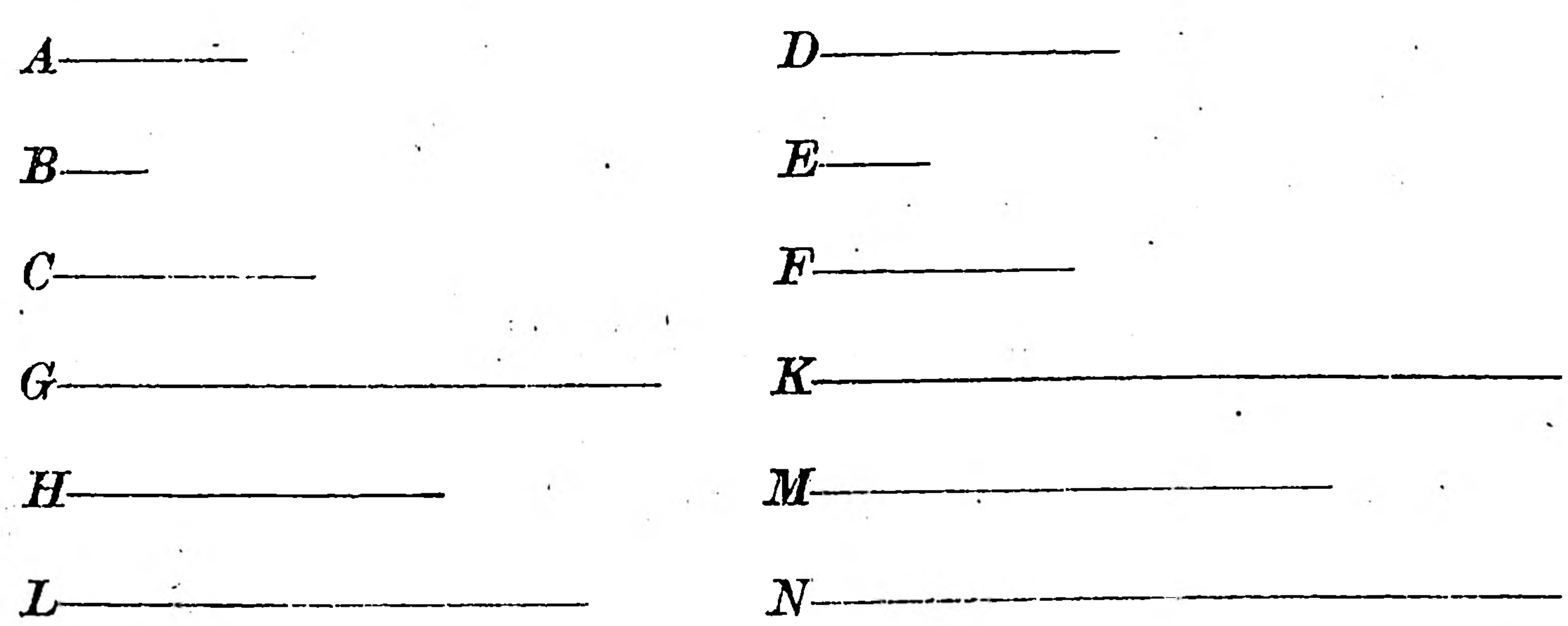
$$G : H = M : N \quad \text{и} \quad H : L = K : M,$$

откуда, если $G \gtreqless K$, то $L \gtreqless N$.

Но G и K суть равнократныя отъ A и D, а L и N равнократныя отъ C и F, слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$A : C = D : F.$$

Фиг. 207.

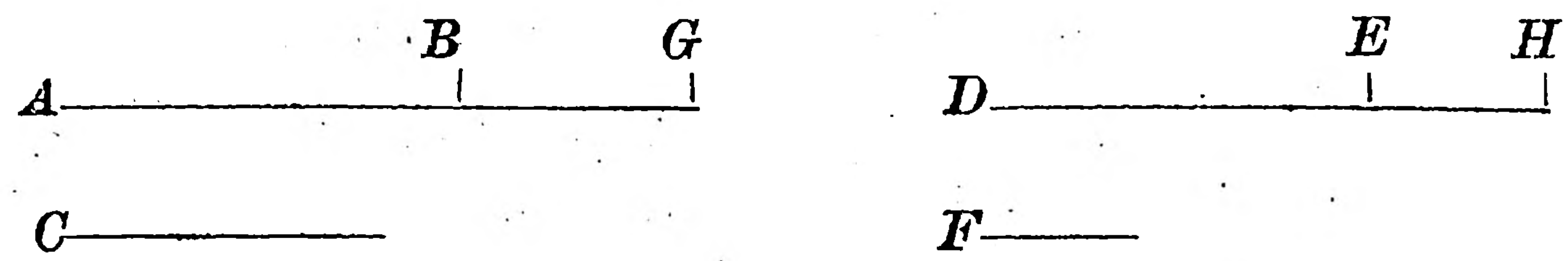


Предложеніе 24. Если первая величина относится ко второй, какъ третья къ четвертой и пятая ко второй, какъ шестая къ четвертой, то сумма первой и пятой будетъ такъ относится ко второй, какъ сумма третьей и шестой къ четвертой (фиг. 208).

Доказат. Если первая величина AB относится ко второй C, какъ третья DE къ четвертой F и пятая BG ко второй C, какъ шестая EH

къ четвертой F, то AG, сумма AB и BG будетъ относиться къ C, какъ DH, сумма DE и EH, относится къ F.

Фиг. 208.



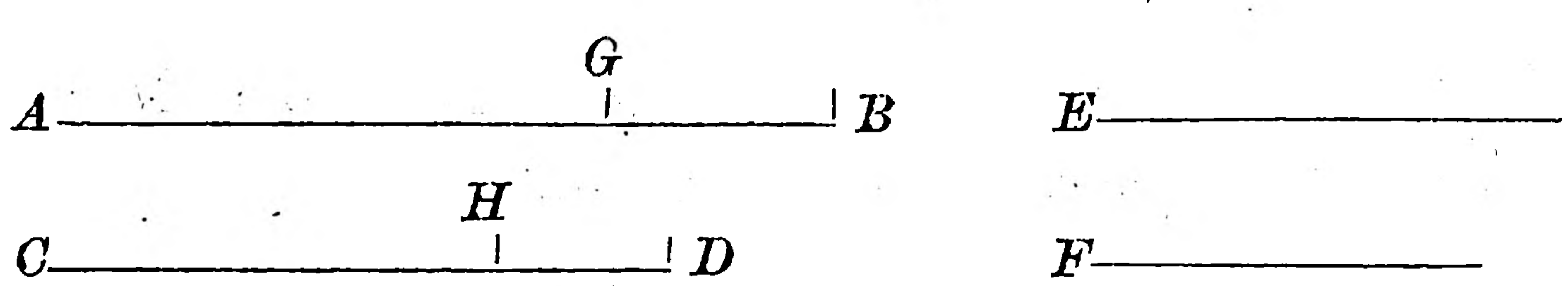
Такъ какъ $BG:C=EH:F$, то $C:BG=F:EH$; но $AB:C=DE:F$, слѣдовательно (кн. 5, пред. 22) $AB:BG=DE:EH$, откуда (кн. 5,пред. 18) $AG:BG=DH:EH$. Но мы имѣемъ также $BG:C=EH:F$; слѣдовательно (кн. 5, пред. 22):

$$AG:C=DH:F.$$

Предложеніе 25. Если четыре однородныя величины пропорціональны, то сумма найбольшей и найменьшей изъ нихъ будетъ больше суммы двухъ остальныхъ (фиг. 209).

Доказат. Пусть эти величины будутъ AB, CD, E, F и пусть $AB:CD=E:F$, если AB будетъ найбольшая величина, то F будетъ найменьшая (кн. 5, пред. 14), я говорю, что сумма $AB+F>CD+E$.

Фиг. 209.



Возьмемъ $AG=E$ и $CH=F$, то, такъ какъ $AB:CD=E:F$, мы имѣемъ $AB:CD=AG:CH$, слѣдовательно (кн. 5, пред. 19) $GB:HD=$ $=AB:CD$. Но $AB>CD$, слѣдовательно $GB>HD$. Но мы имѣемъ $AG+F=CH+E$, слѣдовательно, (кн. 1, акс. 2):

$$GB+AG+F>HD+CH+E$$

т. е.:

$$AB+F>CD+E.$$

Примѣч. 37. Симсонъ въ концѣ этой книги прибавилъ четыре предложенія, относительно сложныхъ отношеній, но которыя для нашей цѣли не имѣютъ значенія, поэтому я ихъ опускаю.

КНИГА VI.

Опредѣленія.

1. Прямолинейными *подобными* (ὅμοιος) фигурами называются такія, которыя имѣютъ равные углы, каждый каждому, и стороны, заключающія равные углы, пропорціональныя.

2. Говорятъ что двѣ величины *обратно* пропорціональны другимъ двумъ, когда одна изъ первыхъ относится къ одной изъ вторыхъ, какъ остальная изъ вторыхъ относится къ остальной изъ первыхъ.

Примѣч. 1. Если величины A и B обратно пропорціональны величинамъ D и C, то:

$$A:D=C:B \text{ или } A:C=D:B.$$

3. Говорятъ, что прямая раздѣлена въ *крайнемъ* и *среднемъ* отношеніи, когда цѣлая прямая относится къ большему отрѣзку ея такъ, какъ этотъ послѣдній отрѣзокъ, относится къ меньшему.

Примѣч. 2. Если прямая AB въ точкѣ C раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то мы будемъ имѣть:

Фиг. 210.

$$AB:AC=AC:CB.$$

4. *Высотою* (ὕψος) фигуры называется перпендикуляръ, опущенный изъ *вершины* (κορυφή) на *основаніе* (βάσις).

5. Отношеніе называется составленнымъ изъ отношеній, когда эти отношенія, будучи перемноженны, даютъ отношеніе (λόγος ἐκ λόγων συγ-

κεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ, ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινάς λόγον).

Примѣч. 3. Это опредѣленіе означаетъ, что если мы имѣемъ отношенія:

$$\frac{A}{B}=\frac{K}{L}, \frac{B}{C}=\frac{M}{N}, \frac{C}{D}=\frac{S}{R}$$

то:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A}{D}=\frac{K}{L}\cdot\frac{M}{N}\cdot\frac{S}{R}\cdot$$

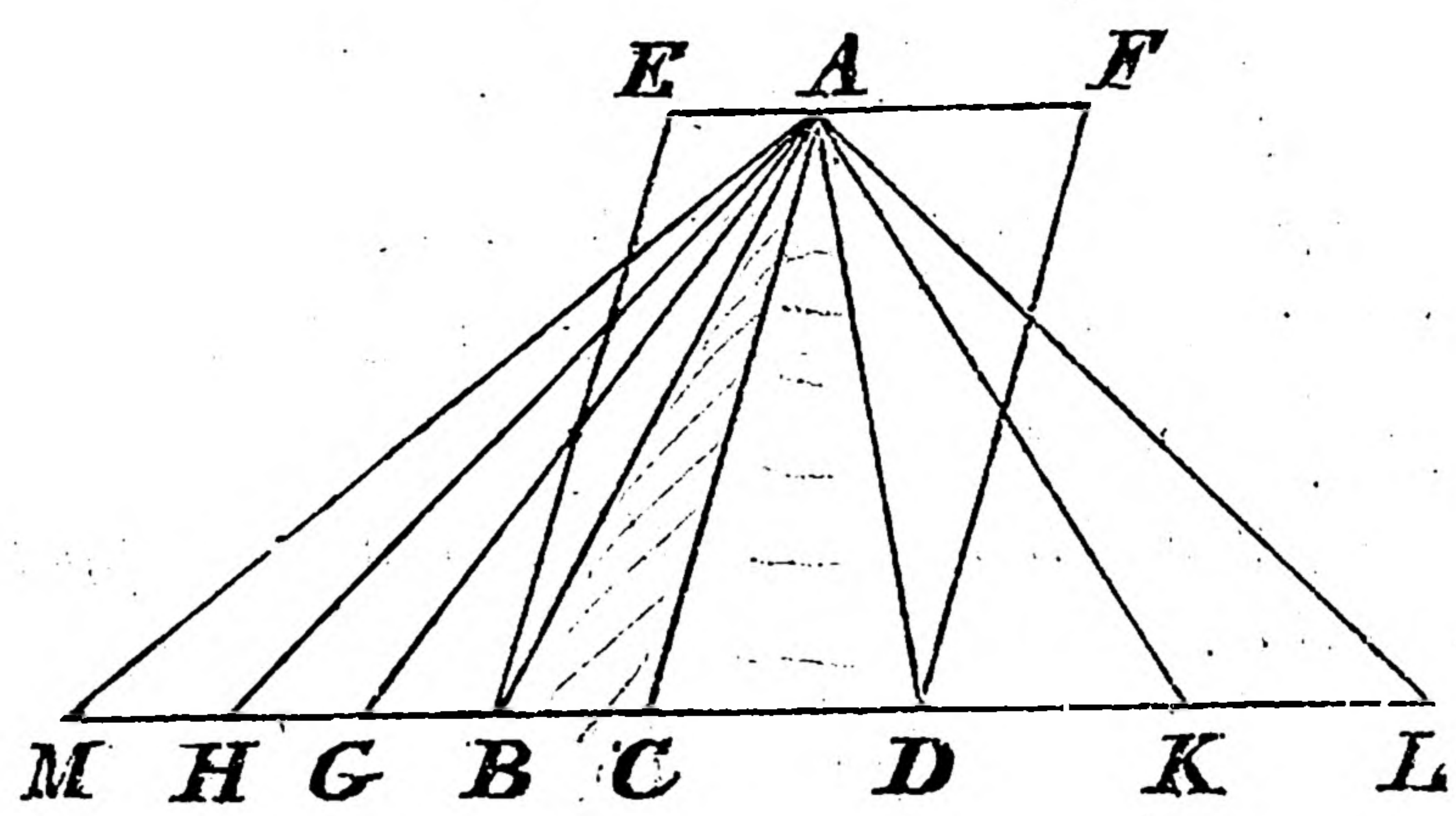
Въ нѣкоторыхъ изданіяхъ Евклида находится еще шестое опредѣленіе, но оно не имѣетъ значенія и въ большей части изданій опускается.

Предложенія.

Предложеніе 1. Два треугольника или два параллелограма, имѣющіе равныя высоты, относятся между собою какъ ихъ основанія (фиг. 211).

Доказат. Пусть такіе треугольники и параллелограмы будутъ ABC и ACD, EC и CF. Высота ихъ есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины A на прямую BD. Говорю, что два треугольника между собою и два параллелограма между собою относятся какъ основаніе BC къ основанію CD.

Фиг. 211.



Продолжимъ BD въ обѣ стороны и возьмемъ BG, GH, HM равныя BC, сколько угодно; точно также возьмемъ DK, KL, равныя CD и сколько угодно. Проведемъ прямыя AG, AH, AM, AK, AL.

Треугольники ABC, AGB, AHG, AHM равны (кн. 1, пред. 38). Слѣдовательно какой кратности основаніе MC будетъ отъ BC, такой же кратности треугольникъ AMC будетъ отъ треугольника ABC. По той же причинѣ треугольникъ ALC будетъ такой же кратности отъ треугольника ADC, какой кратности основаніе LC будетъ отъ основанія CD. Слѣдовательно, смотря потому будетъ ли основанiе $LC \gtreqless MC$, треугольникъ ALC будетъ $\gtreqless$ треугольника AMC. Слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$\triangle ABC : \triangle ADC = BC : CD.$$

Такъ какъ параллелограмы CE и CF равны удвоеннымъ треугольникомъ ABC и ADC (кн. 1, пред. 41), то (кн. 5, пред. 15):

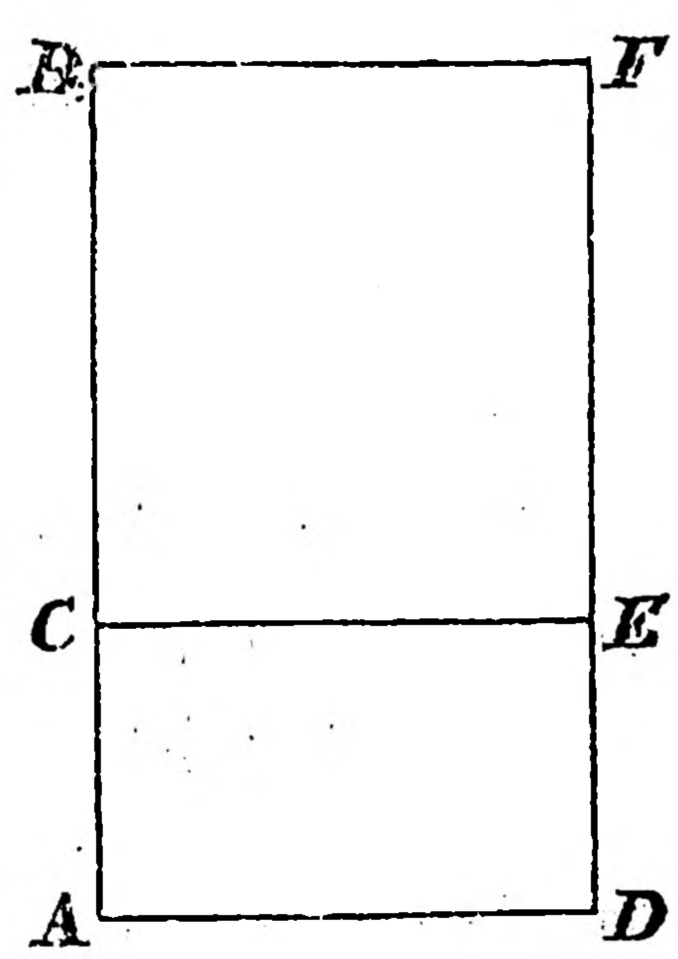
$$CE : CF = BC : CD.$$

Примѣч. 4. Такимъ образомъ Евклидъ доказываетъ это одно изъ самыхъ важныхъ предложенiй. Нынѣ оно доказывается слѣдующимъ образомъ:

Предлож. Два прямоугольника, имѣющiе равныя основанiя, относятся между собою, какъ ихъ высоты.

Доказат. Пусть данные прямоугольники, имѣющiе общее основанiе AD будутъ $ABFD$ и $ACED$.

Фиг. 212.



Если высоту одного изъ нихъ, напримѣръ AC, раздѣлимъ на произвольное число n равныхъ частей, то, нанося такую часть на высоту AB другаго прямоугольника, мы всегда найдемъ такое число m, что:

$$\frac{m}{n} AC \leqq AB < \frac{m+1}{n} AC \qquad (1)$$

Чрезъ точки дѣленiя высотъ AC и AB проведемъ параллельныя основанiю AD, то прямоугольникъ AE раздѣлится, очевидно, также на n равныхъ прямоугольниковъ, а въ прямоугольникѣ AF такихъ частей будетъ содержаться или m или съ остаткомъ, т. е. мы всегда будемъ имѣть:

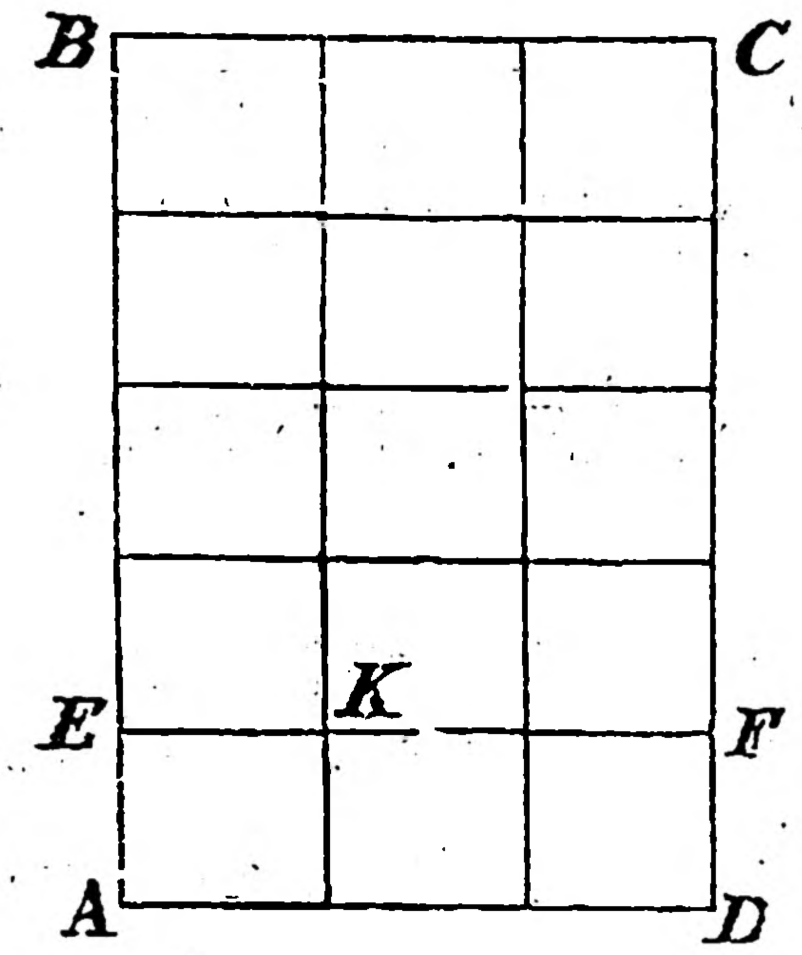
$$\frac{m}{n} AE \leqq AF < \frac{m+1}{n} AE. \qquad (2)$$

Но если условiя (1) и (2) выполненны для всякаго произвольнаго числа n, то (см. кн. 5, примѣч. 5):

$$AF : AE = AB : AC.$$

Мѣра площади прямоугольника. Если на высоту AB прямоугольника, который назовемъ чрезъ P, нанесемъ сторону AE, какого нибудь квадрата AK.

Фиг. 213.



и чрезъ точку дѣленія E проведемъ EF параллельно основанію AD, то по предъидущему мы будемъ имѣть:

$$\frac{AF}{AK} = \frac{AD}{AE}.$$

Разсматривая прямоугольники AC и AF, имѣющіе общее основаніе AD, мы имѣемъ:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE},$$

перемножая эти послѣднія равенства получимъ (кн. 6, опред. 5):

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AD}{AE}.$$

Изъ этого выводимъ, что отношеніе площади прямоугольника AC къ площади квадрата AK равно произведенію отношеній основанія и высоты къ сторонѣ того же квадрата. Если за единицу площади принять площадь квадрата AK, а за единицу длины принять его сторону, то отношенія:

$$\frac{AC}{AK}, \frac{AB}{AE}, \frac{AD}{AE}$$

будутъ первое мѣра площади прямоугольника, а два послѣднія мѣры высоты AB и основанія AD. Поэтому пишутъ:

$$AC = AD \cdot AB$$

и говорятъ для краткости рѣчи, *что площадь прямоугольника равна произведенію мѣры основанія на мѣру высоту, или просто произведенію основанія на высоту, т. е. въ площади прямоугольника AC находится столько квадратныхъ единицъ, сколько находится линейныхъ единицъ въ произведеніи основанія AD на высоту AB.* Если данный прямоугольникъ будетъ квадратъ, то основаніе его будетъ равно высотѣ, слѣдовательно площадь квадрата равна произведенію его стороны на самую себя, т. е. $AC = AB \cdot AB$, что изображается такъ: $AC = AB^2$.

Мѣра площади параллелограма. Такъ какъ параллелограмъ и прямоугольникъ имѣющіе равныя основанія и высоты равновелики (кн. 1, пред. 35) и какъ площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ основанія на высоту, то *площадь параллелограма измѣряется также произведеніемъ основанія на высоту.*

Мѣра площади треугольника. Треугольникъ, имѣющій равное основаніе и высоту съ прямоугольникомъ, равенъ половинѣ прямоугольника (кн. 1, пред. 41), слѣдовательно, *площадь треугольника измѣряется половиной произведенія его основанія на высоту.*

Мѣра многоугольника. Какое бы ни было число сторонъ многоугольника, всегда его можно разбить на треугольники. Если возьмемъ за общую вершину точку внутри многоугольника, то онъ разобьется на треугольники, коихъ число будетъ равно числу сторонъ многоугольника. Если возьмемъ за общую вершину—вершину одного изъ угловъ многоугольника, то онъ разобьется діагоналями, проведенными изъ общей вершины къ остальнымъ вершинамъ многоугольника, на треугольники, коихъ число будетъ на двѣ единицы меньше числа сторонъ многоугольника.

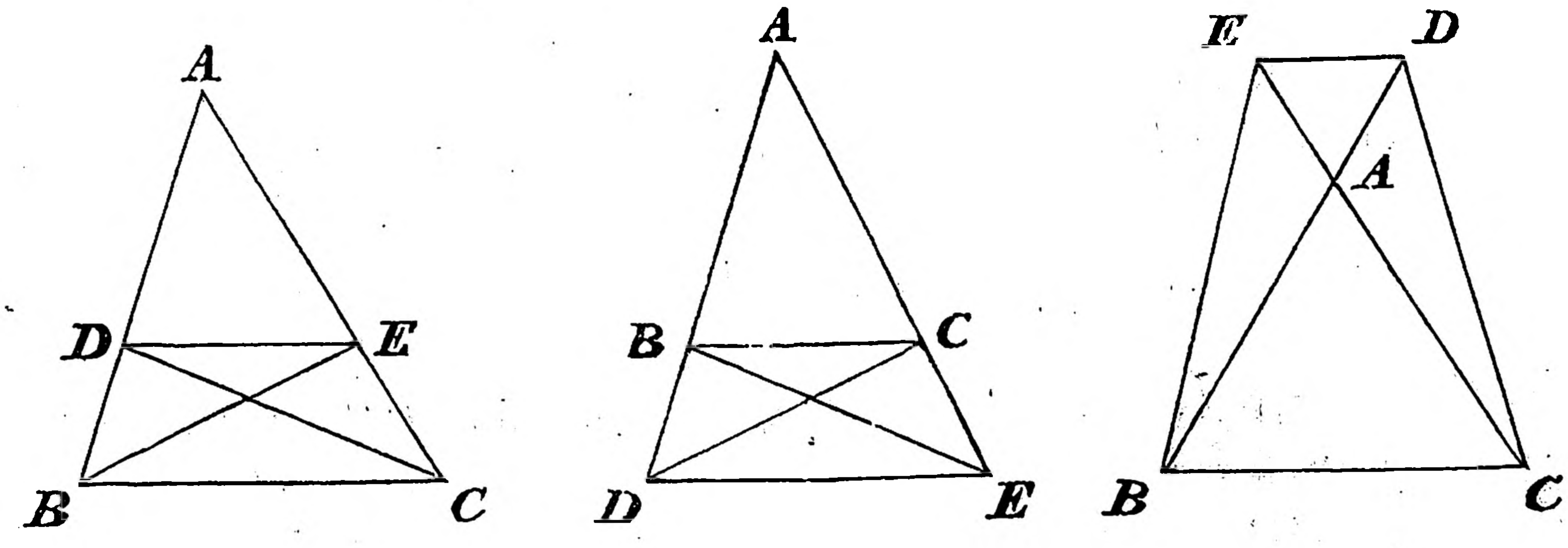
Слѣдовательно мѣра многоугольника получится складывая мѣры всѣхъ треугольниковъ. Если многоугольникъ будетъ правильный, то мѣра его площади равна *произведенію периметра на половину апоѳемы,* т. е. на перпендикуляръ, опущенный, изъ центра описаннаго круга, на сторону многоугольника. Точно такимъ же образомъ получится мѣра всякой плоской фигуры, ограниченной прямыми линіями.

Предложеніе 2. Если въ какомъ нибудь треугольникѣ проведемъ линію параллельную одной изъ его сторонъ, то она, встрѣчая остальныя двѣ стороны или ихъ продолженія, раздѣлитъ ихъ на части пропорціональныя; и обратно, если прямая, встрѣчая двѣ стороны треугольника, дѣлитъ ихъ, или ихъ продолженія на части пропорціональныя, то она параллельна третьей сторонѣ (фиг. 214).

Доказат. 1) Пусть прямая DE будетъ параллельна одной изъ сторонъ BC треугольника ABC. Я говорю, что мы будемъ имѣть:

$$BD : DA = CE : EA.$$

Фиг. 214.



Соединимъ точку B съ E и C съ D. Треугольники BDE и CDE равны, такъ какъ имѣютъ общее основаніе DE, а вершины ихъ B и C лежатъ на прямой BC параллельной основанію DE (кн. 1, пред. 37). Но мы видѣли (кн. 5, пред 7), что двѣ равныя величины къ одной и той же имѣютъ равныя отношенія, слѣдовательно:

$$\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$$

Но треугольники BDE и ADE, имѣя разныя основанія BD и DA, имѣютъ одну и туже высоту, такъ какъ ихъ основанія лежатъ на одной прямой, а обѣ вершины находятся въ точкѣ E, слѣдовательно, (кн. 6, пред. 1):

$$\triangle BDE : \triangle ADE = BD : DA.$$

По той же причинѣ:

$$\triangle CDE : \triangle ADE = CE : EA$$

откуда (кн. 5, пред. 11):

$$BD : DA = CE : EA.$$

2) Пусть теперь прямая DE дѣлитъ стороны AB и AC треугольника ABC на части пропорціональныя, т. е. пусть:

$$BD : DA = CE : EA,$$

я говорю, что DE будетъ параллельна сторонѣ BC.

Дѣлая тоже построеніе, мы имѣемъ:

$$BD : DA = \triangle BDE : \triangle ADE$$

и

$$CE : EA = \triangle CDE : \triangle ADE,$$

слѣдовательно:

$$\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE.$$

Откуда треугольники BDE и CDE имѣютъ одно и тоже отношеніе къ треугольнику ADE, слѣдовательно (кн. 5, пред. 9):

$$\triangle BDE = \triangle CDE.$$

Но эти треугольники имѣютъ общее основаніе DE, слѣдовательно (кн. 1, пред. 40) ихъ вершины B и C лежатъ на прямой BC, параллельной основанію DE.

Примѣч. 5. Такъ доказалъ Евклидъ эту одну изъ самыхъ важныхъ теоремъ, такъ доказываетъ ее и Лежандръ. Другіе геометры доказываютъ эту теорему независимо отъ отношенiй между площадями треугольниковъ, способомъ болѣе естественнымъ, который основанъ на слѣдующей, весьма простой, теоремѣ.

Предлож. Если чрезъ точки, равноотстоящiя одна отъ другой, взятыя на одной изъ двухъ какихъ нибудь прямыхъ, проведемъ параллельныя, въ какомъ нибудь направленiи, то эти параллельныя раздѣлятъ и другую прямую на равныя между собою части (фиг. 215).

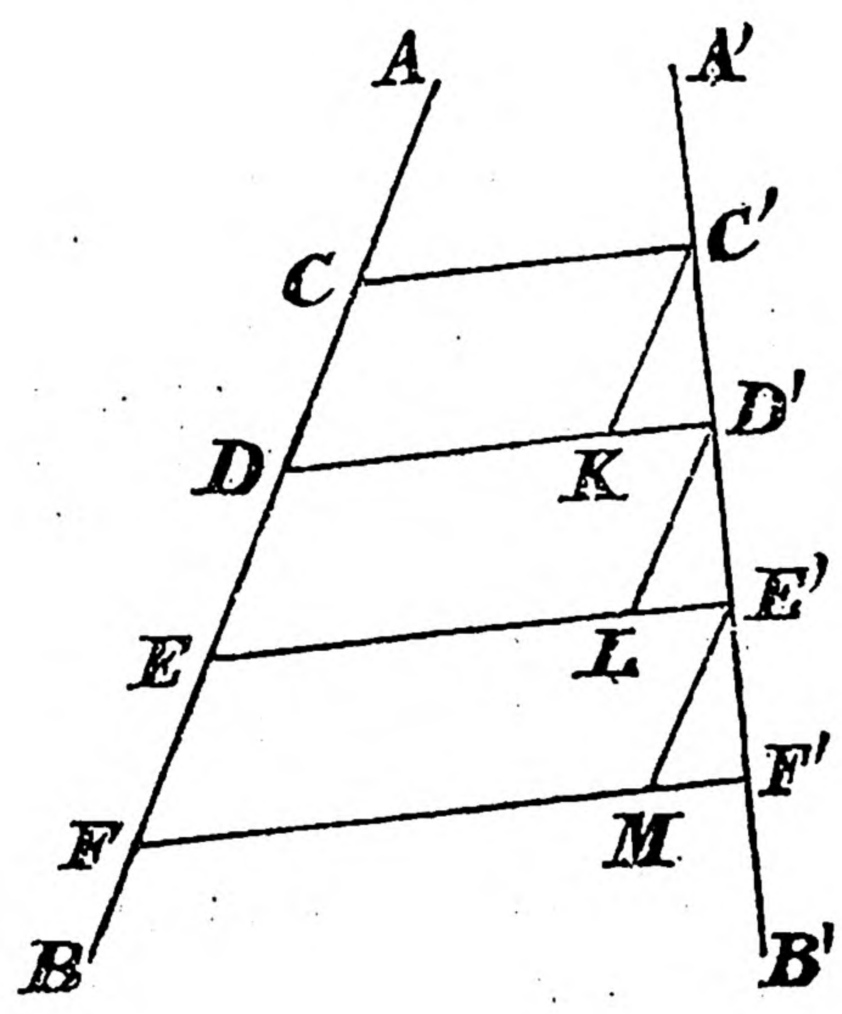
Доказат. Пусть двѣ данныя прямыя будутъ AB и $A'B'$. Пусть прямая AB въ точкахъ C, D, E, F, . . раздѣлена на равныя части, т. е. пусть:

$$CD = DE = EF = \ldots$$

Я говорю, что параллельныя между собою прямыя CC', DD', EE', FF', . . . дѣлятъ прямую $A'B'$ также на равныя части:

$$C'D' = D'E' = E'F' = \ldots$$

Фиг. 215.



Чрезъ точки C', D', E', . . проведемъ прямыя $C'K$, $D'L$, $E'M$, . . параллельныя прямой AB (кн. 1, пред. 31).

Треугольники $C'KD'$, $D'LE'$, $E'MF'$, . . всѣ равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ два треугольника $C'KD'$ и $D'LE'$, въ нихъ сторона $C'K = D'L$ (кн, 1, пред. 34), $\angle C'KD' = \angle CDK = \angle DEL = \angle D'LE'$ (кн. 1, пред. 29), по той же причинѣ $\angle KC'D' = \angle LD'E'$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 10):

$$\triangle C'KD' = \triangle D'LE'$$

откуда $C'D' = D'E'$.

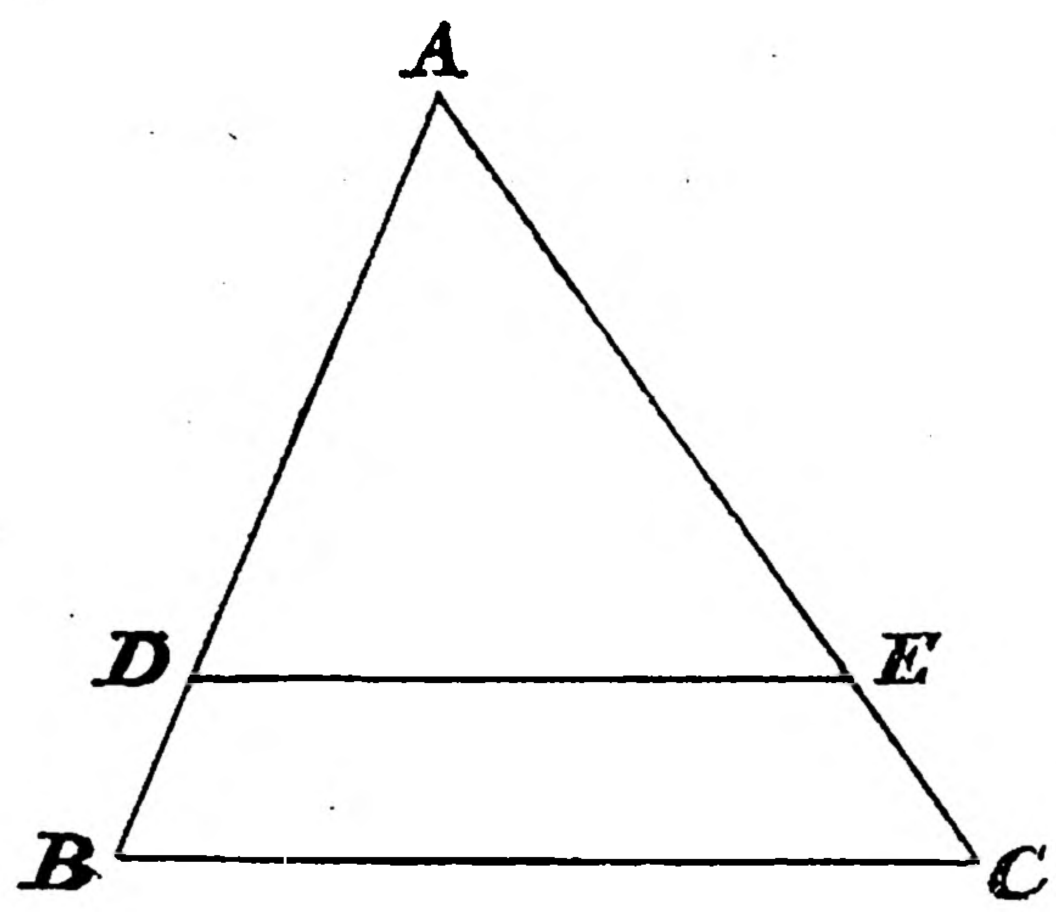
Подобнымъ образомъ можно доказать, что $D'E' = E'F' = \ldots$

Съ помощью этой послѣдней теоремы легко теперь доказать предложенiе 2, слѣдующимъ образомъ:

Пусть въ треугольникѣ ABC (фиг. 216) на сторонѣ AB взята гдѣ нибудь точка D и проведена прямая $DE \parallel BC$, требуется доказать, что:

$$AD:DB=AE:EC.$$

Фиг. 216.



Раздѣлимъ одинъ изъ отрѣзковъ стороны AB, напримѣръ AD, на произвольное число равныхъ частей, напримѣръ n. Наложимъ n-ю часть отрѣзка AD на отрѣзокъ DB, то мы всегда будемъ имѣть:

$$\frac{m}{n} \leqq \frac{DB}{AD} < \frac{m+1}{n} \tag{1}$$

Если чрезъ точки дѣленій отрѣзковъ AD и DB проведемъ параллельныя основанію BC, то, по теоремѣ выше доказанной, мы найдемъ также:

$$\frac{m}{n} \leqq \frac{EC}{AE} < \frac{m+1}{n} \tag{2}$$

Такъ какъ неравенства (1) и (2) всегда будутъ имѣть мѣсто, какое бы число n не было, то мы заключаемъ (кн. 5, прим. 5):

$$AD:DB=AE:EC.$$

Изъ этого отношенія мы имѣемъ (кн. 5, пред. 12):

$$AD+DB:AD=AE+EC:AE,$$

или

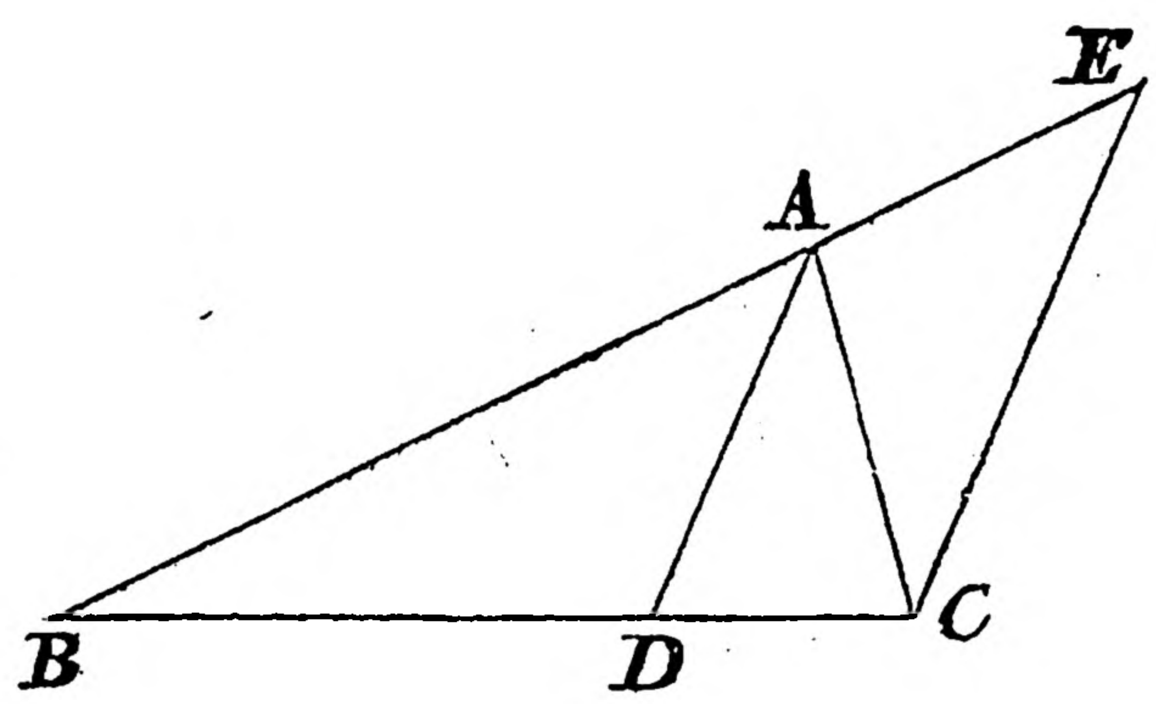
$$AB:AD=AC:AE.$$

Предложеніе 3. Если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ раздѣлимъ прямою пополамъ, то эта прямая, встрѣчая противулежащую сторону, дѣлитъ ее на части пропорціональныя остальнымъ сторонамъ треугольника; и обратно, если одна изъ сторонъ треугольника раздѣлена на части, пропорціональныя остальнымъ сторонамъ, то прямая, соединяющая точку дѣленія съ вершиною противулежащаго угла, раздѣлитъ этотъ уголъ пополамъ (фиг. 217).

Доказат. 1) Пусть въ треугольникѣ ABC, уголъ BAC, прямою AD, раздѣленъ пополамъ. Я говорю, что:

$$BD:DC=BA:AC.$$

Фиг. 217.



Чрезъ точку C проведемъ прямую $CE \parallel DA$ и продолжимъ сторону BA до встрѣчи ея съ CE въ точкѣ E. Такъ какъ въ треугольникѣ BCE, изъ взятой на сторонѣ точки A, проведена параллельная AD основанію CE, то мы имѣемъ (кн. 6, пред. 2):

$$BD:DC=BA:AE. \qquad (1)$$

Но $\angle BAD=\angle DAC$ по условію, и $\angle BAD=\angle BEC$ (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно $\angle DAC=\angle BEC$. Но $\angle DAC=\angle ACE$ (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно $\angle BEC=\angle ACE$. Откуда $AE=AC$ (кн. 1, пред. 6). Подставляя въ пропорцію (1) вмѣсто AE сторону AC, найдемъ:

$$BD:DC=BA:AC.$$

2) Теперь положимъ, что мы имѣемъ:

$$BD:DC=BA:AC$$

требуется доказать, что:

$$\angle BAD=\angle DAC.$$

Соединяя точку D съ точкою A и дѣлая тоже построеніе, мы имѣемъ:

$$BD:DC=BA:AE.$$

Но по условію:

$$BD:DC=BA:AC$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$BA : AC = BA : AE.$$

Откуда $AC = AE$ (кн. 5, пред. 9).

Если $AC = AE$, то $\angle AEC = \angle ACE$ (кн. 1, пред. 5). Но $\angle AEC = \angle BAD$ (кн. 1, пред. 29) и $\angle DAC = \angle ACE$, по той же причинѣ, слѣдовательно (кн. 1, акс. 1):

$$\angle BAD = \angle DAC.$$

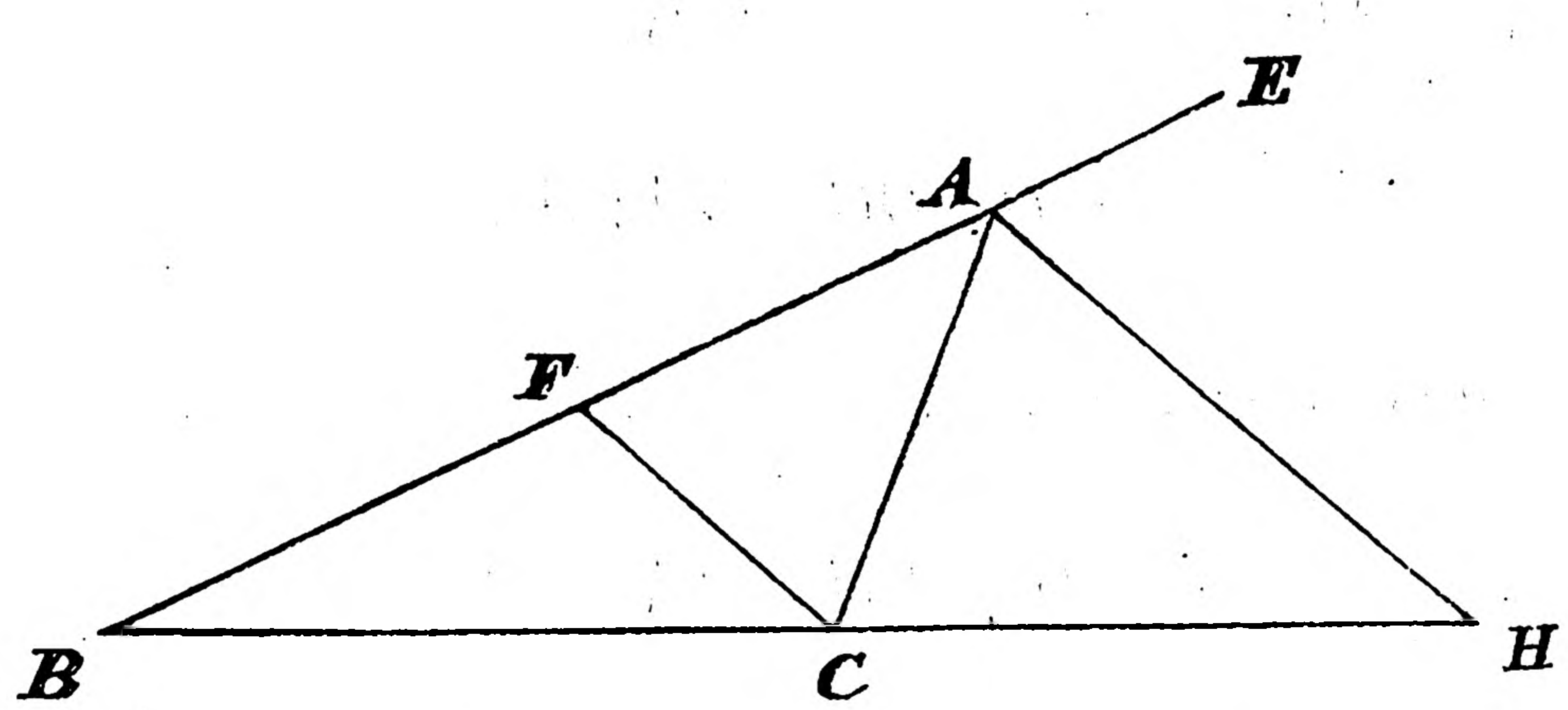
Примѣч. 6. Здѣсь Симсонъ прибавилъ слѣдующую весьма важную теорему:

Предлож. Если продолжимъ одну изъ сторонъ треугольника и раздѣлимъ внѣшній уголъ пополамъ, то равнодѣлящая прямая, встрѣчая противуположную сторону треугольника, раздѣлитъ ее такъ, что отрѣзки, заключенные между ея концами и точкою встрѣчи равнодѣлящей, будутъ пропорціональны остальнымъ сторонамъ треугольника; и обратно, если продолжимъ одну изъ сторонъ треугольника и на этомъ продолженіи возьмемъ такую точку, чтобы отрѣзки стороны, заключенные между ея концами и взятою точкою, были пропорціональны остальнымъ сторонамъ треугольника, то прямая, соединяющая взятую точку съ вершиною противулежащаго угла, раздѣлитъ внѣшній уголъ треугольника пополамъ (фиг. 218).

Доказат. 1) Пусть въ треугольникѣ ABC внѣшній уголъ CAE раздѣленъ пополамъ прямою AH, встрѣчающею продолженіе противуположной стороны BC въ точкѣ H, я говорю, что:

$$BH : CH = BA : AC.$$

Фиг. 218.



Чрезъ точку C проведемъ $CF \parallel HA$.

Въ треугольникѣ BCF чрезъ точку H, стороны BC, проведена $HA \parallel CF$, то (кн. 6, пред. 2) мы имѣемъ:

$$BH : CH = BA : FA. \qquad (1)$$

Но по построенію $\angle EAH = \angle HAC$, и $\angle EAH = \angle AFC$, $\angle HAC = \angle ACF$ (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно $\angle ACF = \angle AFC$, откуда $FA = AC$ (кн. 1, пред. 5). Подставляя въ пропорцію (1) вмѣсто FA, AC найдемъ, что:

$$BH : CH = BA : AC.$$

2) Пусть въ треугольникѣ ABC на продолженіи стороны BC взята точка H, такъ, что:

$$BH:CH=BA:AC,$$

я говорю, что $\angle CAH=\angle EAH$.

Соединяя точку H съ точкою A и дѣлая тоже построеніе, мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 2):

$$BH:CH=BA:FA.$$

Но по условію мы имѣемъ:

$$BH:CH=BA:AC,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 9) $FA=AC$.

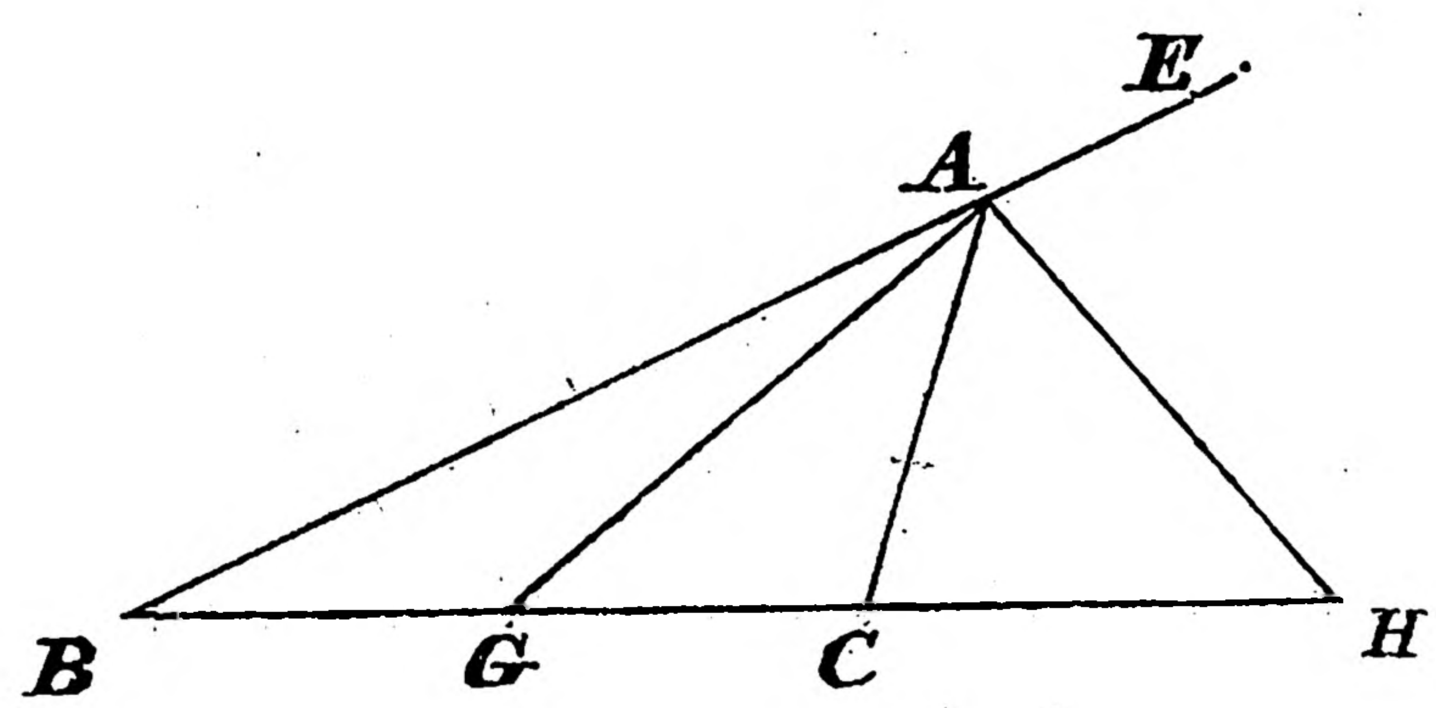
Если $FA=AC$, то $\angle ACF=\angle AFC$ (кн. 1, пред. 6). Но $AH \parallel CF$, слѣдовательно $\angle CFA=\angle EAH$ и $\angle FCA=\angle CAH$ (кн. 1, пред. 29), откуда:

$$\angle CAH=\angle EAH.$$

Слѣдствіе. Если въ треугольникѣ ABC (фиг. 219) раздѣлимъ пополамъ какой нибудь изъ внутреннихъ угловъ, напримѣръ $\angle BAC$, а также и смежный ему внѣшній уголъ EAC, то равнодѣлящія эти углы AG и AH встрѣтятъ противуположную сторону BC въ точкахъ G и H, такъ, что:

$$BG:GC=BH:HC.$$

Фиг. 219.



Въ самомъ дѣлѣ, изъ предъидущаго мы имѣемъ:

$$BG:GC=BA:AC, \quad BH:HC=BA:AC,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$BG:GC=BH:HC.$$

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что прямая BC въ точкахъ G и H раздѣлена *внутренно* и *внѣшне* въ одномъ и томъ же отношеніи. Такое дѣленіе называется *гармоническимъ*, а четыре точки B, C, G, H называются *гармоническими*. Попарно B,C и G,H называются *сопряженными*.

Если бы мы отсчитывали всѣ отрѣзки отъ точки H, то въ пропорцію надобно подставить вмѣсто:

$$BG=BH-GH \text{ и } GC=GH-CH,$$

т., е. мы будемъ имѣть:

$$BH-GH:GH-CH=BH:HC,$$

откуда:

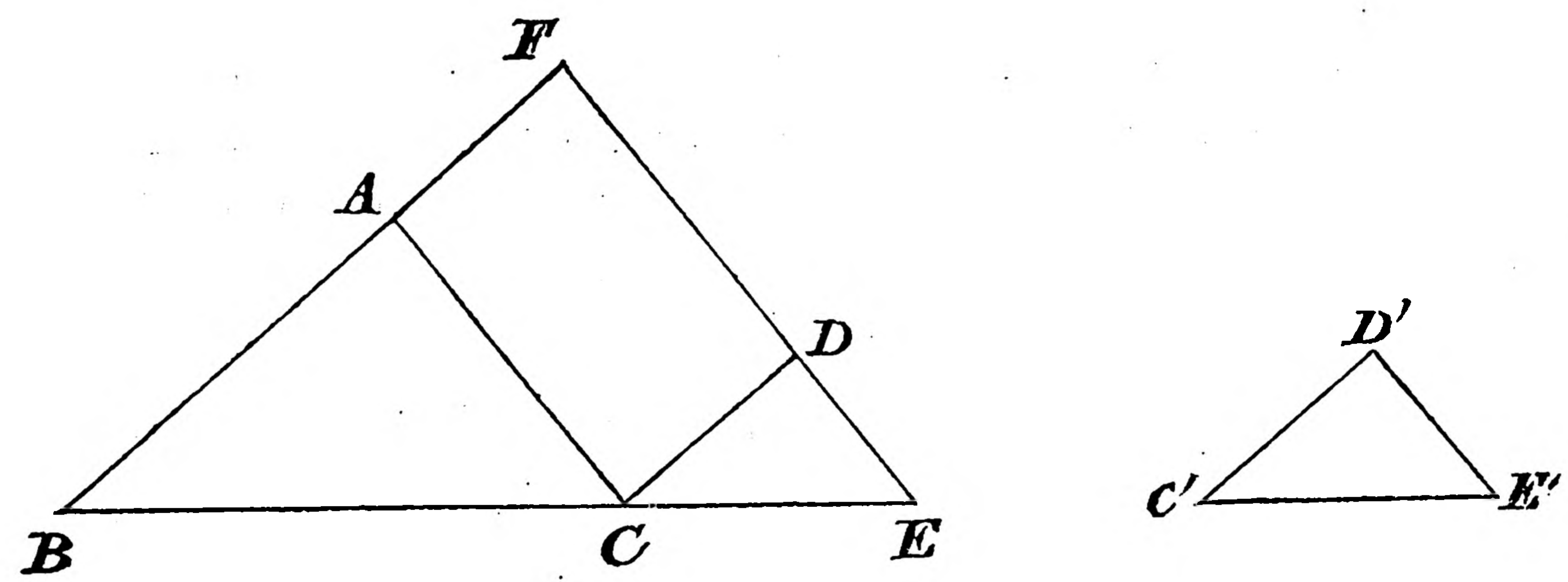
$$\frac{2}{HG}=\frac{1}{HC}+\frac{1}{BH}.$$

Предложенiе 4. Въ равноугольныхъ треугольникахъ стороны, противулежащiя равнымъ угламъ, пропорцiональны между собою, а соотвѣтственныя стороны будутъ тѣ, которыя лежатъ противъ равныхъ угловъ (фиг. 220).

Доказат. Пусть треугольники ABC и $D'C'E'$ будутъ равноугольны такъ, что $\angle ABC=\angle D'C'E'$, $\angle ACB=\angle D'E'C'$ и $\angle BAC=\angle C'D'E'$, я говорю, что:

$$AB:BC:CA=D'C':C'E':E'D'$$

Фиг. 220.



т. е. сходственныя стороны будутъ имѣть одно и тоже отношенiе.

Помѣстимъ треугольникъ $D'C'E'$ такъ, чтобы его основанiе $C'E'$ помѣстилось на продолженiи основанiя BC треугольника ABC и чтобы точка C' совпала съ точкою C, то $\triangle D'C'E'$ приметъ положенiе DCE.

Такъ какъ $\angle ABC+\angle ACB<2d$ (кн. 1, пред. 17), $\angle ACB=\angle DEC$, то $\angle ABC+\angle DEC<2d$, откуда стороны BA и ED, будучи продолжены встрѣтятся въ точкѣ F (кн. 1, акс. 11). Но $\angle ACB=\angle DEC$, слѣдовательно $CA \parallel EF$ (кн. 1, пред. 29). По той же причинѣ $BF \parallel CD$.

Такъ какъ въ треугольникѣ FBE, $AC \parallel FE$, то (кн. 6, пред. 2) мы имѣемъ:

$$AB:BC=AF:CE,$$

но $AF=CD$ (кн. 1, пред. 34), слѣдовательно:

$$AB:BC=CD:CE.$$

Точно также, какъ въ $\triangle FBE$, $DC \parallel FB$, то:

$$DE : FD = CE : BC,$$

но $FD = AC$ (кн. 1, пред. 34), слѣдовательно:

$$DE : AC = CE : BC.$$

откуда:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{CE}$$

или

$$AB : BC = CD : CE, \quad AC : BC = DE : CE,$$

$$AB : AC = CD : DE.$$

Слѣдствіе. Откуда видимъ, что равноугольные треугольники суть фигуры *подобныя* (кн. 6, опред. 1).

Предложеніе 5. Если въ двухъ треугольникахъ стороны пропорціональны, то треугольники будутъ и равноугольны, и равнымъ угламъ будутъ противулежать сходственныя стороны (фиг. 221).

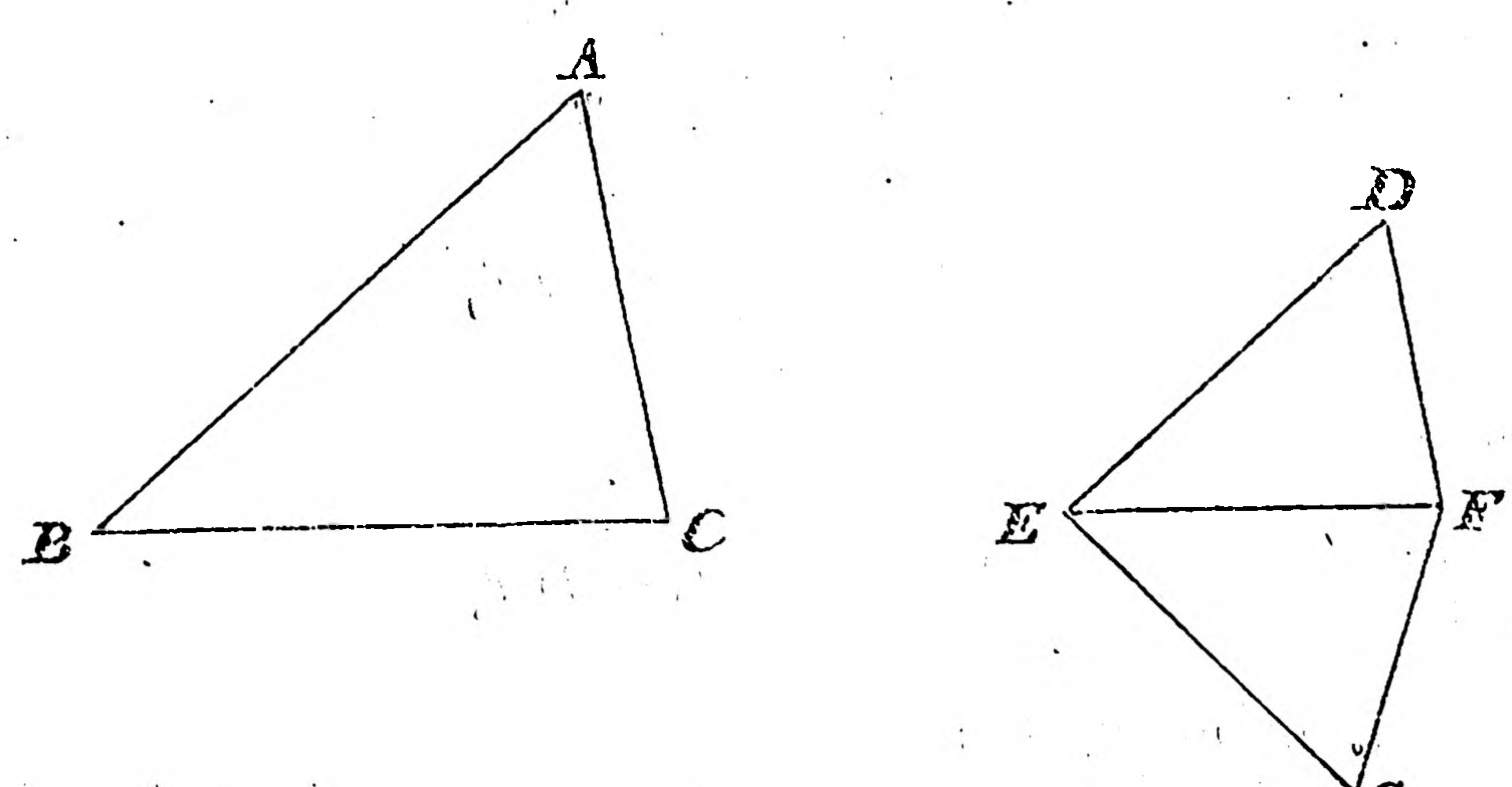
Доказат. Пусть треугольники, имѣющіе пропорціональныя стороны, будутъ ABC и DEF, т. е. пусть:

$$AB : BC = DE : EF, \quad BC : CA = EF : FD, \quad BA : AC = ED : DF.$$

Я говорю, что треугольникъ ABC будетъ равноугольный треугольнику DEF и притомъ такъ, что:

$$\angle ABC = \angle DEF, \quad \angle ACB = \angle DFE, \quad \angle BAC = \angle EDF.$$

Фиг. 221.



Построимъ $\angle FEG = \angle ABC$ и $\angle EFG = \angle ACB$ (кн. 1, пред. 28), то третій уголъ $\angle EGF = \angle BAC$ (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно треугольникъ EGF будетъ равноугольный треугольнику ABC, а если эти треугольники равноугольны, то ихъ стороны пропорціональны (кн. 6, пред. 4), т. е. $AB : BC = EG : EF$; но мы имѣемъ по условію $AB : BC = ED : EF$, откуда (кн. 5, пред. 9) $EG = ED$. По той же причинѣ $FG = DF$, а какъ EF есть сторона общая треугольникамъ EDF и EGF, то $\triangle EDF = \triangle EGF$ (кн. 1, пред. 8). Откуда:

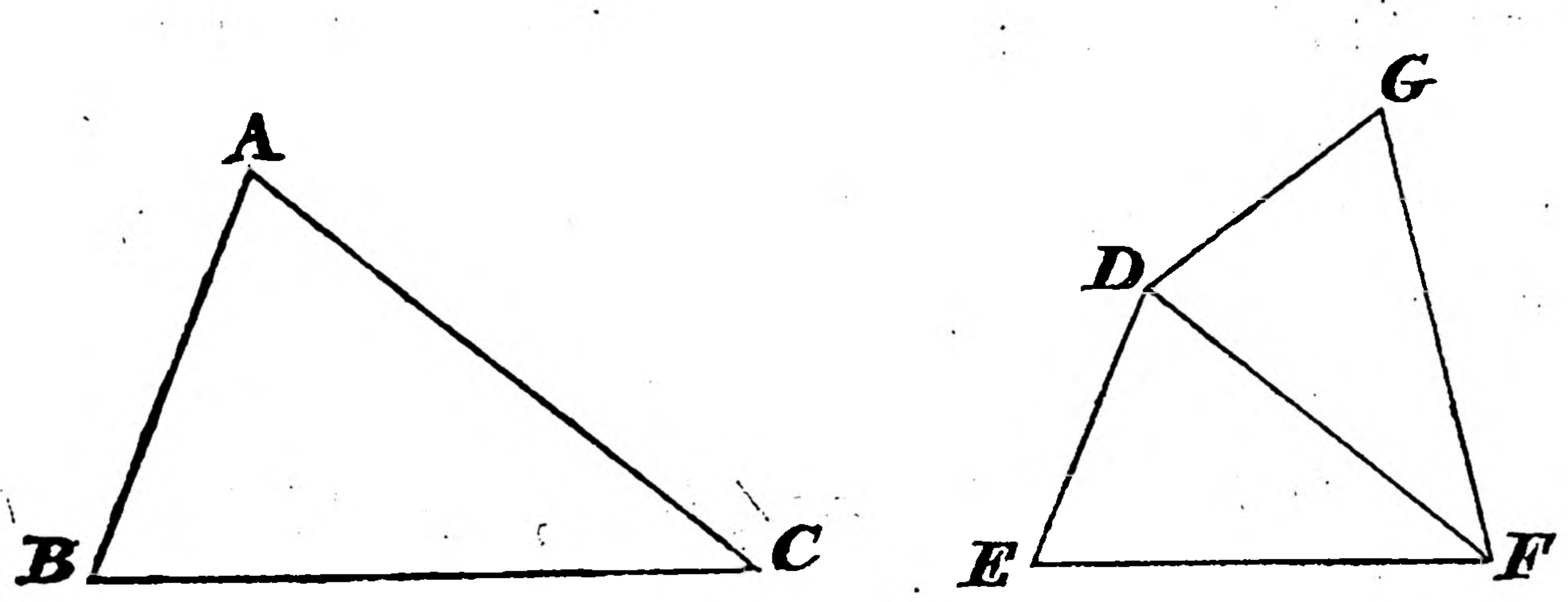
$$\angle GEF = \angle ABC = \angle DEF, \quad \angle EFG = \angle ACB = \angle DFE,$$

$$\angle EGF = \angle BAC = \angle EDF.$$

Предложеніе 6. Если два треугольника имѣютъ по два равные угла, заключенные между пропорціональными сторонами, то треугольники будутъ равноугольны и соотвѣтственнымъ сторонамъ будутъ противулежать равные углы (фиг. 222).

Доказат. Пусть въ треугольникахъ ABC и DEF $\angle BAC = \angle EDF$ и $BA : AC = ED : DF$. Я говорю, что $\triangle ABC$ будетъ равноугольный $\triangle DEF$ и такъ что $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$.

Фиг. 222.



Построимъ $\angle FDG = \angle BAC$ и $\angle DFG = \angle ACB$ (кн. 1, пред. 23), то и остальной $\angle ABC = \angle DGF$. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$BA : AC = GD : DF,$$

но мы имѣемъ по условію:

$$BA : AC = ED : DF,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11) $ED : DF = GD : DF$, откуда (кн. 5, пред. 9), $ED = GD$.

Въ треугольникахъ DEF и DGF стороны ED и DF равны сторонамъ GD и DF и $\angle EDF = \angle GDF$, откуда (кн. 1, пред. 4) $\angle DFG = \angle DFE$, и $\angle DGF = \angle DEF$, но $\angle DFG = \angle ACB$, слѣдовательно $\angle ACB = \angle DFE$. Но какъ по положенію $\angle BAC = \angle EDF$, то и третій уголъ $\angle ABC = \angle DEF$. Слѣдовательно треугольники ABC и DEF равноугольны.

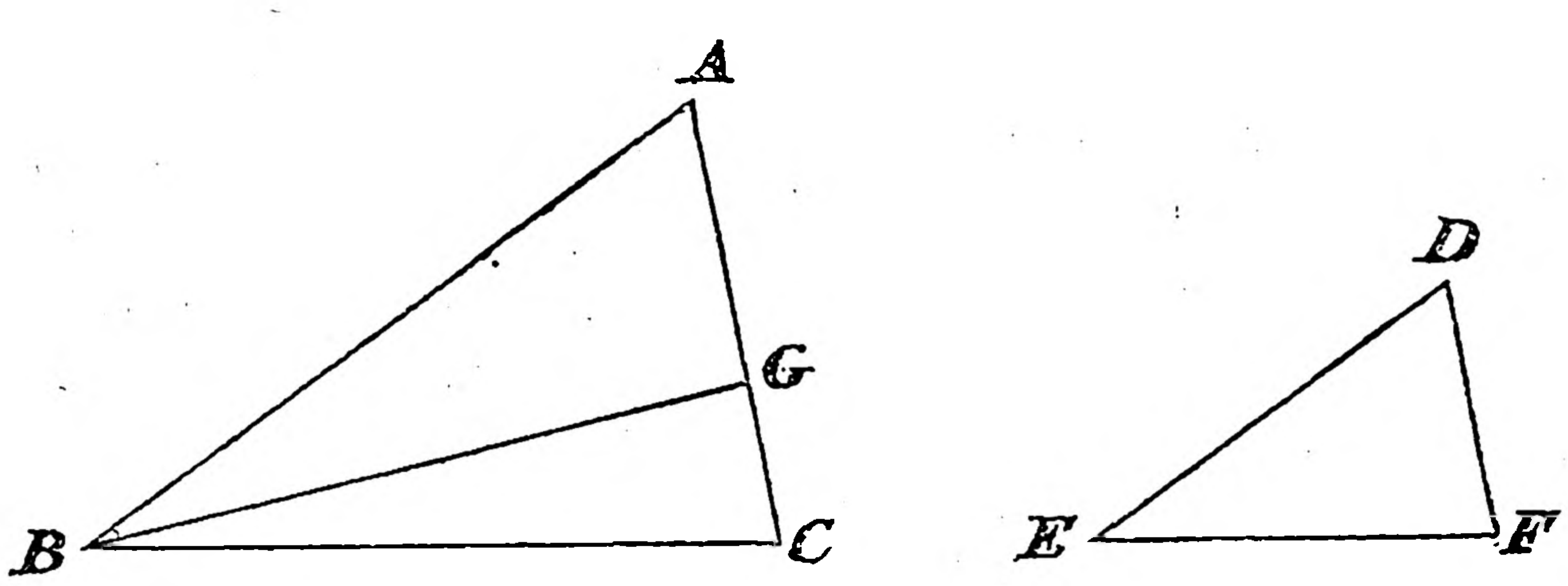
Предложеніе 7. Если два треугольника имѣютъ по одному углу равному и стороны, заключающія другой уголъ перваго треугольника, пропорціональны сторонамъ, заключающимъ другой уголъ втораго треугольника и если при этомъ остальные углы треугольниковъ оба или меньше, или не меньше прямаго угла, то треугольники будутъ равноугольны и притомъ такъ, что углы, заключенные между пропорціональными сторонами, будутъ равны (фиг. 223).

Доказат. Пусть въ треугольникахъ ABC и DEF $\angle BAC = \angle EDF$ и стороны, заключающія углы ABC и DEF, пропорціональны, т. е.:

$$AB : BC = DE : EF$$

и если при этомъ или $\angle ACB < d$ и $EFD < d$, или $\angle ACB \geqq d$ и $\angle EFD \geqq d$.

Фиг. 223.



1) Положимъ во первыхъ, что $\angle ACB < d$ и $\angle EFD < d$.

Если бы углы ABC и DEF были неравны, то одинъ изъ нихъ, напримѣръ ABC больше другаго DEF, т. е. $\angle ABC > \angle DEF$.

Отложивъ въ треугольникѣ ABC $\angle ABG = \angle DEF$, то, такъ какъ углы BAC и EDF равны, то и $\angle AGB = \angle DFE$ (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно треугольники ABG и DEF равноугольны и мы имѣемъ (кн. 6, пред. 4):

$$AB : BG = DE : EF,$$

но по условію:

$$AB : BC = DE : EF,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AB : BC = AB : BG$$

откуда $BC=BG$ (кн. 5, пред. 9). Но если $BC=BG$, то $\angle BGC=\angle BCG$ (кн. 1, пред. 5). Но по положенію $\angle BCG<d$, слѣдовательно и $\angle BGC<d$, а если этотъ послѣдній уголъ меньше прямаго, то его смежный уголъ $AGB>d$, что противурѣчитъ положенію $\angle DFE=\angle AGB<d$.

Слѣдовательно уголъ ABC не можетъ быть больше угла DEF, точно также онъ не можетъ быть и меньше, слѣдовательно:

$$\angle ABC=\angle DEF.$$

2) Пусть теперь $\angle ACB \overline{\gtrless} d$ и $\angle DFE \overline{\gtrless} d$.

Если въ этомъ случаѣ, какъ и въ первомъ, предположимъ, что углы ABC и DEF неравны, то мы докажемъ, какъ и выше, что $BG=BC$ и что $\angle BGC=\angle ACB \overline{\gtrless} d$, слѣдовательно въ треугольникѣ BGC мы будемъ имѣть $\angle BGC+\angle GCB \overline{\gtrless} 2d$, что невозможно (кн. 1, пред. 17). Слѣдовательно $\angle ABC=\angle DEF$.

Примѣч. 7. Это предложеніе можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Предложеніе. Если двѣ стороны одного треугольника пропорціональны двумъ сторонамъ другаго треугольника и углы, противулежащіе парѣ соотвѣтственныхъ сторонъ, равны, то углы, противулежащіе другой парѣ соотвѣтственныхъ сторонъ треугольниковъ, будутъ или равны, или сумма ихъ будетъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Доказат. Углы, заключенные между пропорціональными сторонами, будутъ или равны или неравны. Если эти углы равны, то треугольники, имѣя по два равные угла каждый каждому, будутъ равноугольны (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно намъ необходимо разсмотрѣть только тотъ случай, въ которомъ углы, заключенные между пропорціональными сторонами, неравны.

Пусть въ треугольникахъ ABC и DEF (фиг. 223) $\angle BAC=\angle EDF$ и

$$AB:BC=DE:EF,$$

но углы, ABC и DEF, заключенные между пропорціональными сторонами, неравны и пусть, какъ выше $\angle ABC>\angle DEF$. Я говорю, что:

$$\angle ACB+\angle DFE=2d.$$

Въ самомъ дѣлѣ, дѣлая тоже построеніе, мы найдемъ, какъ и прежде, что $\angle BGA=\angle DFE$, $BG=BC$, слѣдовательно $\angle BGC=\angle BCG$ (кн. 1, пред. 5). Но такъ какъ $\angle BGA+\angle BGC=2d$ (кн. 1, пред. 13), а $\angle BGA=\angle DFE$, $\angle BGC=\angle BCG$, то мы и будемъ имѣть:

$$\angle ACB+\angle DFE=2d.$$

Изъ этого послѣдняго заключенія вытекаетъ предложеніе 7.

Въ самомъ дѣлѣ, если каждый изъ угловъ ACB, DFE или больше, или меньше, или равенъ прямому углу, то они могутъ быть только равными.

Предложенiе 8. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ вершины прямаго угла опустимъ на противулежащую сторону (гипотенузу) перпендикуляръ, то онъ раздѣлитъ данный треугольникъ на два треугольника, изъ коихъ каждый подобенъ цѣлому и подобны между собою (фиг. 224).

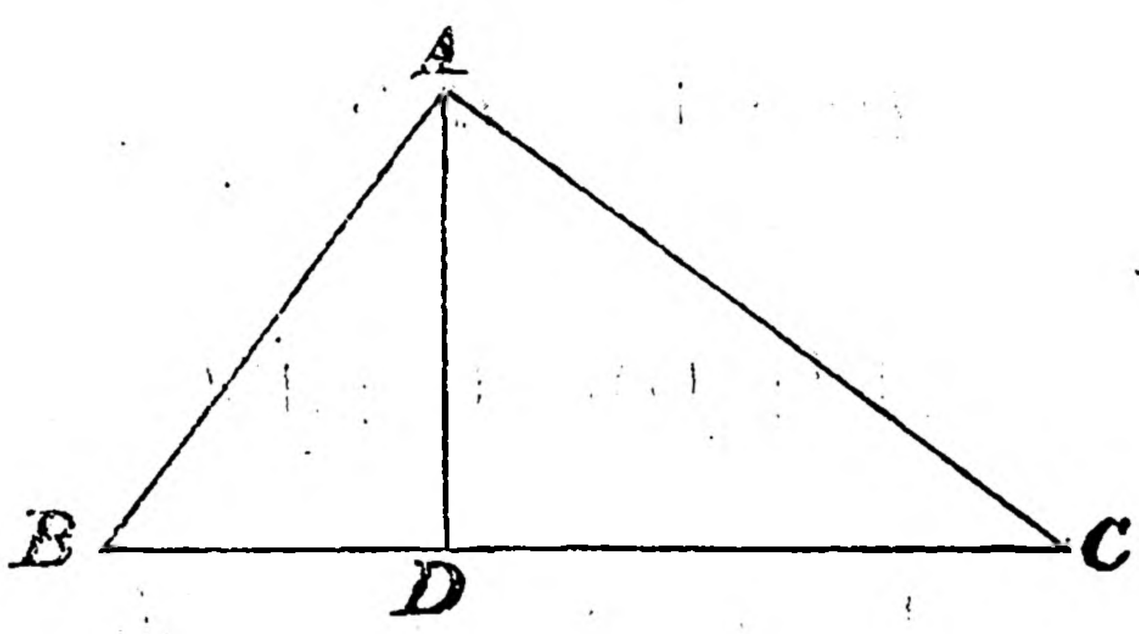
Доказат. Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ $BAC=d$. Я говорю, что перпендикуляръ AD дѣлитъ треугольникъ ABC на два треугольника ABD и ACD, подобныхъ цѣлому ABC и подобныхъ между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ABC и ABD углы BAC и ADB равны, какъ прямые, уголъ ABD общiй, слѣдовательно (кн. 1, пред. 32) $\angle ACD=\angle BAD$. Но въ равноугольныхъ треугольникахъ стороны пропорцiональны (кн. 6, пред. 4), слѣдовательно треугольники ABC и ABD подобны (кн. 6, опред. 1).

Точно такимъ же образомъ можно показать, что $\triangle ABC$ подобенъ $\triangle ACD$.

Разсматривая, наконецъ, треугольники ABD и ACD, находимъ, что $\angle ADB=\angle ADC$, какъ прямые, $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle ABD=\angle CAD$, какъ мы выше показали, слѣдовательно и треугольники ABD и ACD подобны.

Фиг. 224.



Слѣдствiе. Изъ сказаннаго выше легко видѣть, что перпендикуляръ AD есть средне-пропорцiональная линiя между отрѣзками BD и DC гипотенузы BC, т. е. что (кн. 6, пред. 4):

$$BD:AD=AD:DC.$$

И что каждый изъ катетовъ AB и AC есть средне-пропорцiональная линiя между цѣлою гипотенузою BC и прилежащими отрѣзками BD и DC, т. е. (кн. 6, пред. 4):

$$BD:AB=AB:BC \text{ и } DC:AC=AC:BC.$$

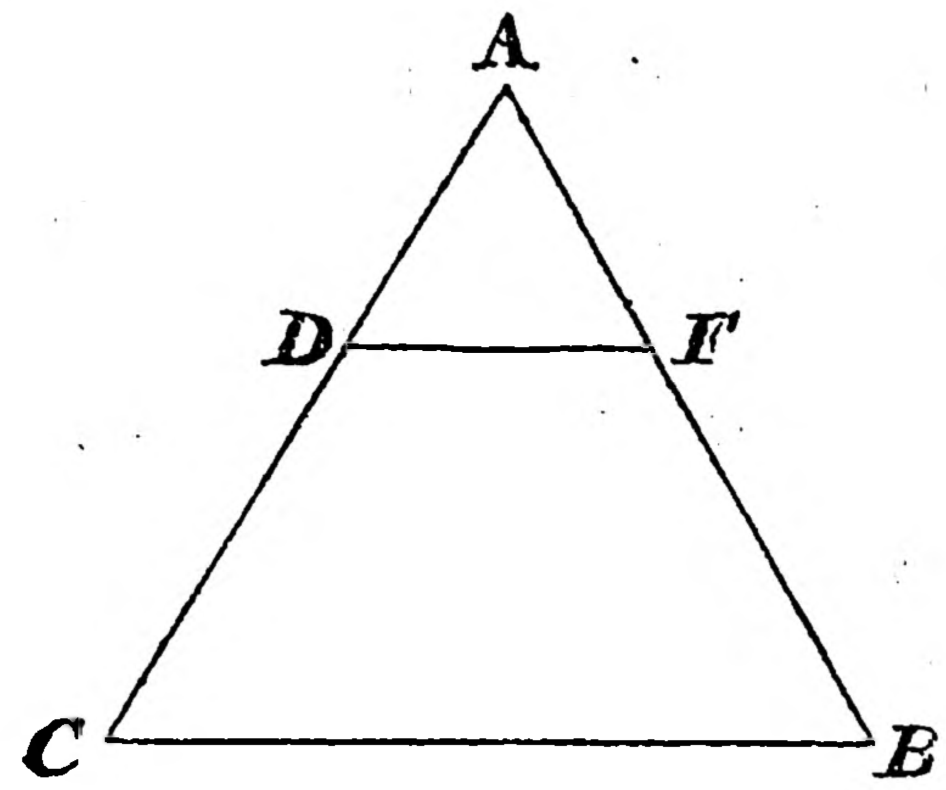
Примѣч 8. Въ текстѣ Евклида, сказано: *то треугольники при перпендикулярѣ*, а не такъ какъ мы сказали: *то перпендикуляръ раздѣлитъ данный треугольникъ* и т. д.

Предложенiе 9. Отъ данной прямой линiи отрѣзать данную ея часть (фиг. 225)?

Рѣшеніе. Пусть данная прямая будетъ AB, требуется отрѣзать отъ нея такую ея часть, которой бы прямая AB была данной кратности.

Чрезъ точку A проведемъ прямую AC, подъ произвольнымъ угломъ къ AB. На прямой AC возьмемъ произвольную точку D и отложимъ на AC столько разъ AD, какой кратности AB должна быть ея части.

Фиг. 225.



Точку C соединимъ съ B, чрезъ точку D проведемъ $DF \parallel CB$ (кн. 1, пред. 31). Часть AF прямой AB и будетъ требуемая.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ треугольникѣ ACB проведена $DF \parallel CB$, то (кн. 6, пред. 2):

$$CD : AD = BF : AF$$

или (кн. 5, пред. 18):

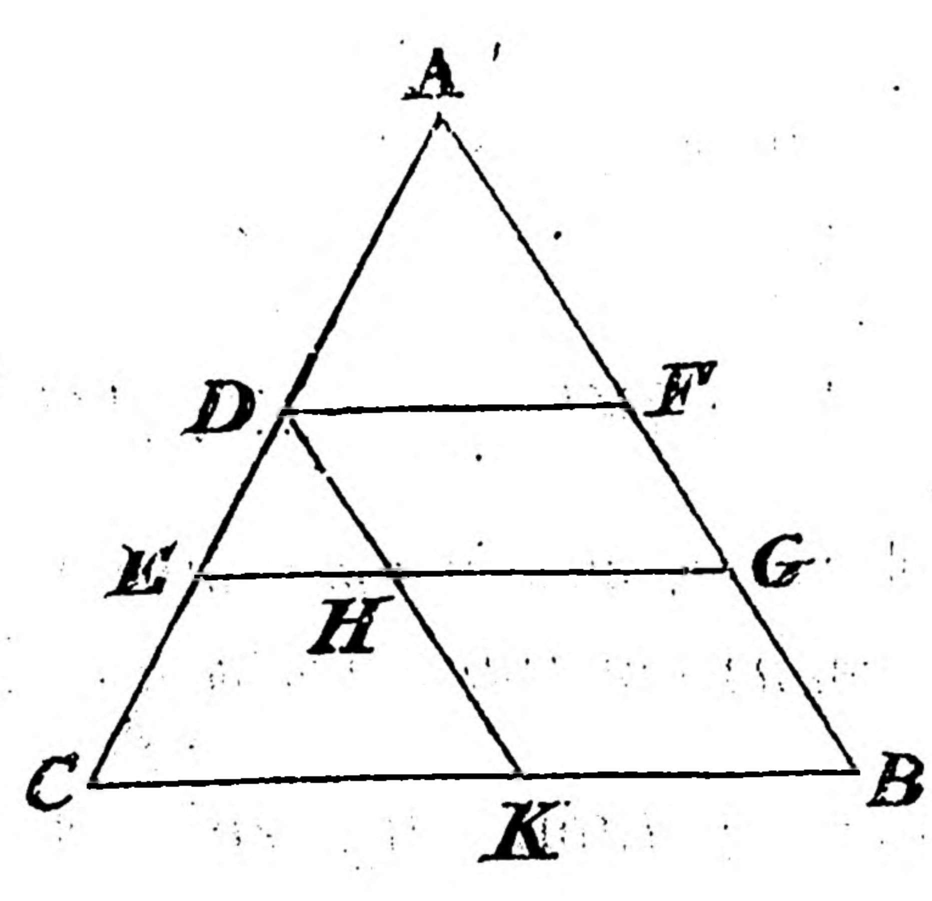
$$AC : AD = AB : AF.$$

Но AC есть линія данной кратности AD, слѣдовательно (кн. 5, примѣч. 28, пред. D) и AB будетъ той же кратности отъ AF.

Предложеніе 10. Раздѣлить данную прямую на части пропорціональныя и одинаково расположенныя, частямъ другой прямой (фиг. 226)?

Рѣшеніе. Пусть данная прямая будетъ AB и другая прямая AC, раздѣлить AB такъ какъ раздѣлена уже AC?

Фиг. 226.



Пусть прямая AC въ точкахъ D и E раздѣлена извѣстнымъ образомъ. Поставимъ прямыя AB и AC въ такое положеніе, чтобы онѣ составляли, какой нибудь уголъ CAB. Соединимъ C съ B и чрезъ точки D и E проведемъ DF и EG параллельно CB и чрезъ D линію $DK \parallel AB$. Очевидно фигуры HF и HB будутъ параллелограмы (кн. 1, пред. 33), слѣдовательно $DH=FG$ и $HK=GB$. Какъ въ треугольникѣ DKC проведена $EH \parallel CK$, то (кн. 6, пред. 2):

$$CE : ED = KH : HD$$

или

$$CE : ED = BG : GF.$$

Точно также въ $\triangle AEG$ проведена $FD \parallel EG$, слѣдовательно (кн. 6, пред. 2):

$$ED : DA = GF : FA$$

и еще:

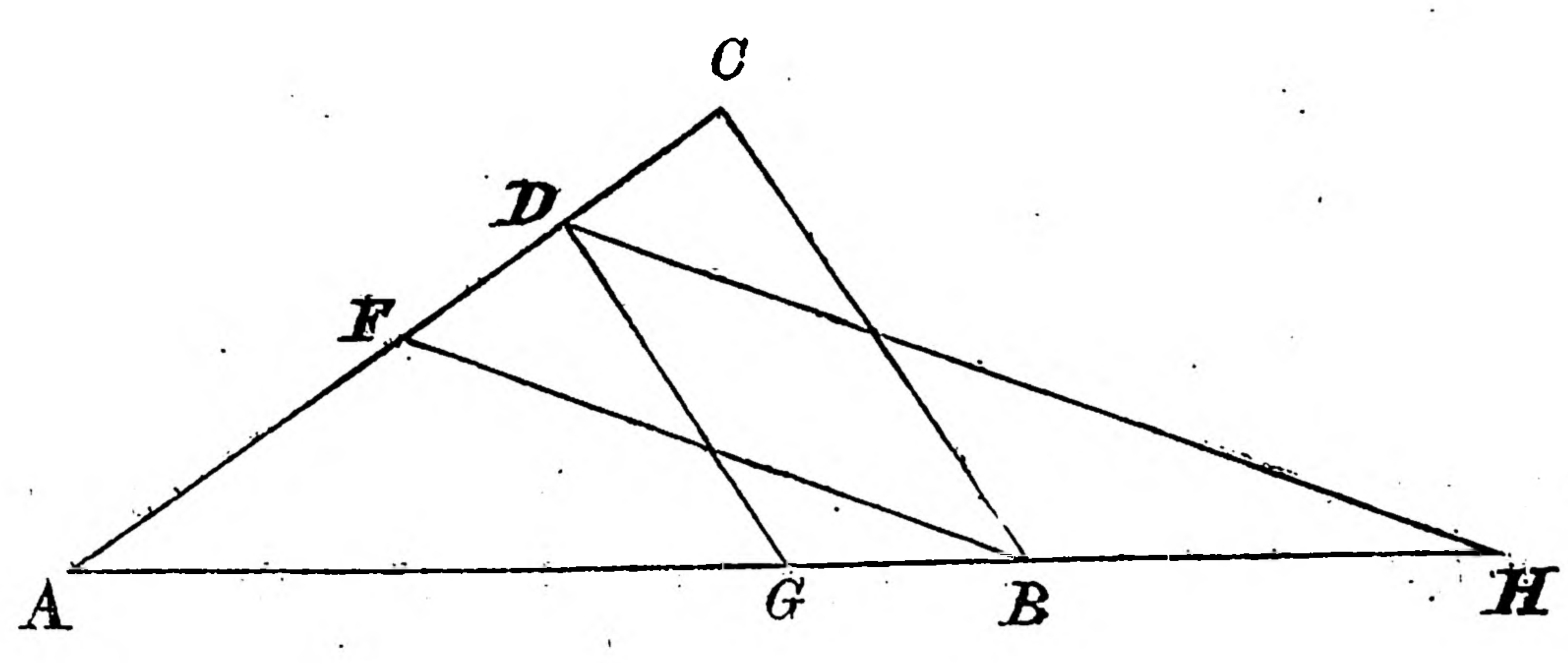
$$CD : DA = BF : FA.$$

Слѣдовательно прямая AB въ точкахъ F и G раздѣлена пропорціонально частямъ прямой AC, которыя и расположены одинаково, т. е. подобно.

Примѣч. 9. Съ помощью этого предложенія легко раздѣлить данную прямую AB *внутренно* и *внѣшне* въ данномъ отношеніи (фиг. 227).

Пусть данное отношеніе будетъ $AD : DC$ и пусть $AD > DC$.

Фиг. 227.



Помѣстимъ прямую AC такъ, чтобы она составляла произвольный уголъ съ данною прямою AB. Соединимъ B съ C и чрезъ точку D проведемъ $DG \parallel BC$, то прямая AB въ точкѣ G раздѣлена въ отношеніи $AD : DC$ (кн. 6, пред. 2), т. е.:

$$AG : GB = AD : DC. \qquad (1)$$

Отложимъ на прямой AD отъ точки D отрѣзокъ $DF=DC$. Соединимъ, найденную точку F съ B и чрезъ точку D проведемъ $DH \parallel FB$, то прямая AB въ точкѣ H будетъ раздѣлена *внѣшне* въ томъ же самомъ отношеніи. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (кн. 6, пред. 2).

$$AH : BH = AD : FD,$$

но $FD = DC$, слѣдовательно:

$$AH : BH = AD : DC, \tag{2}$$

т. е. прямая AB въ точкѣ H раздѣлена *внѣшне* въ томъ же самомъ отношеніи.

Сравнивая (1) и (2), мы найдемъ (кн. 5, пред. 11):

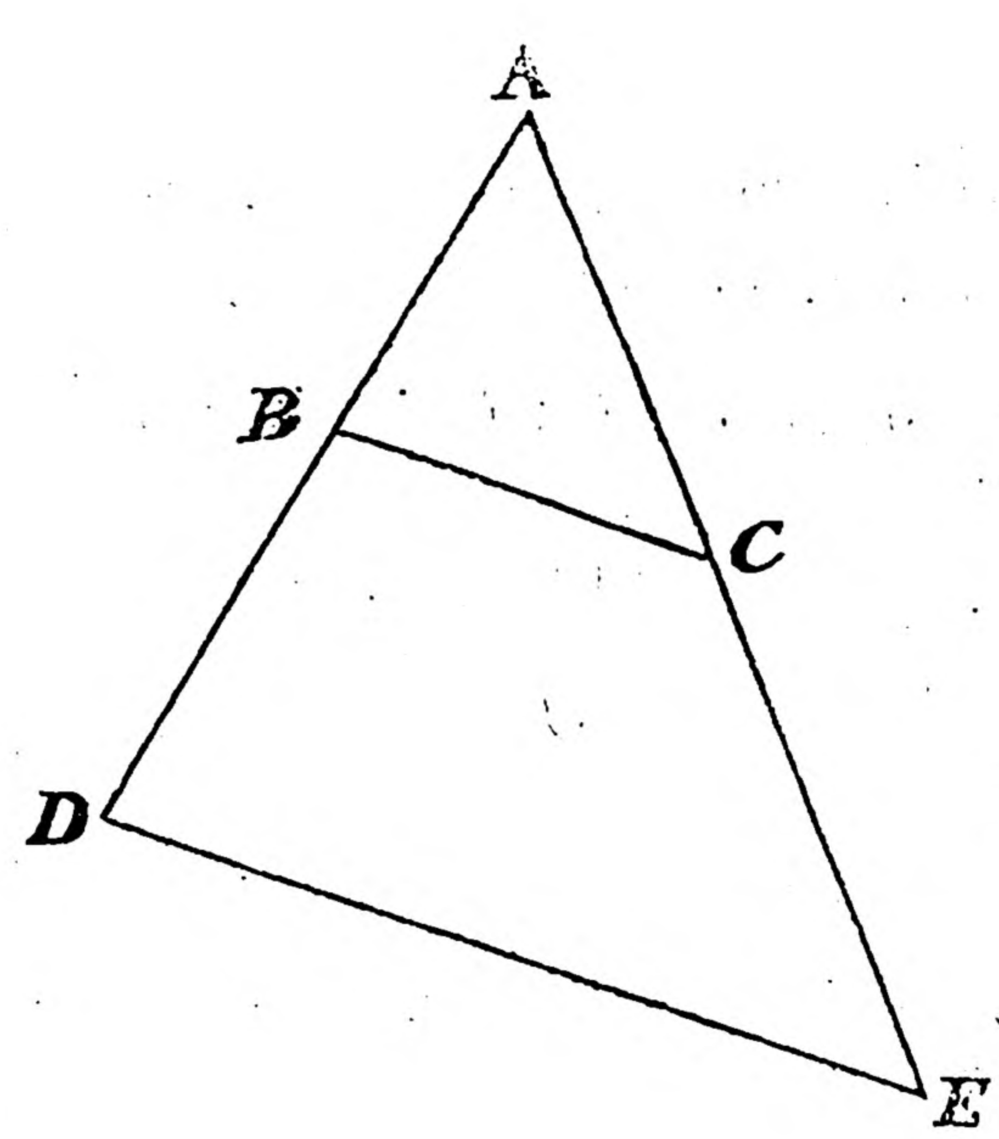
$$AG : GB = AH : BH.$$

Слѣдовательно точки A, G, B, H суть гармоническія (кн. 6, примѣч. 6):

Предложеніе 11. Даны двѣ прямыя линіи найти третью пропорціональную (фиг. 228)?

Рѣшеніе. Пусть AB и AC будутъ двѣ данныя линіи, такъ взятыя чтобы онѣ составляли произвольный уголъ, требуется найти третью пропорціональную къ AB съ AC.

Фиг. 228.



Продолжимъ линію AB такъ чтобы $BD = AC$ и чрезъ точку D проведемъ $DE \parallel BC$, то мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 2):

$$AB : BD = AC : CE$$

но $BD = AC$, слѣдовательно:

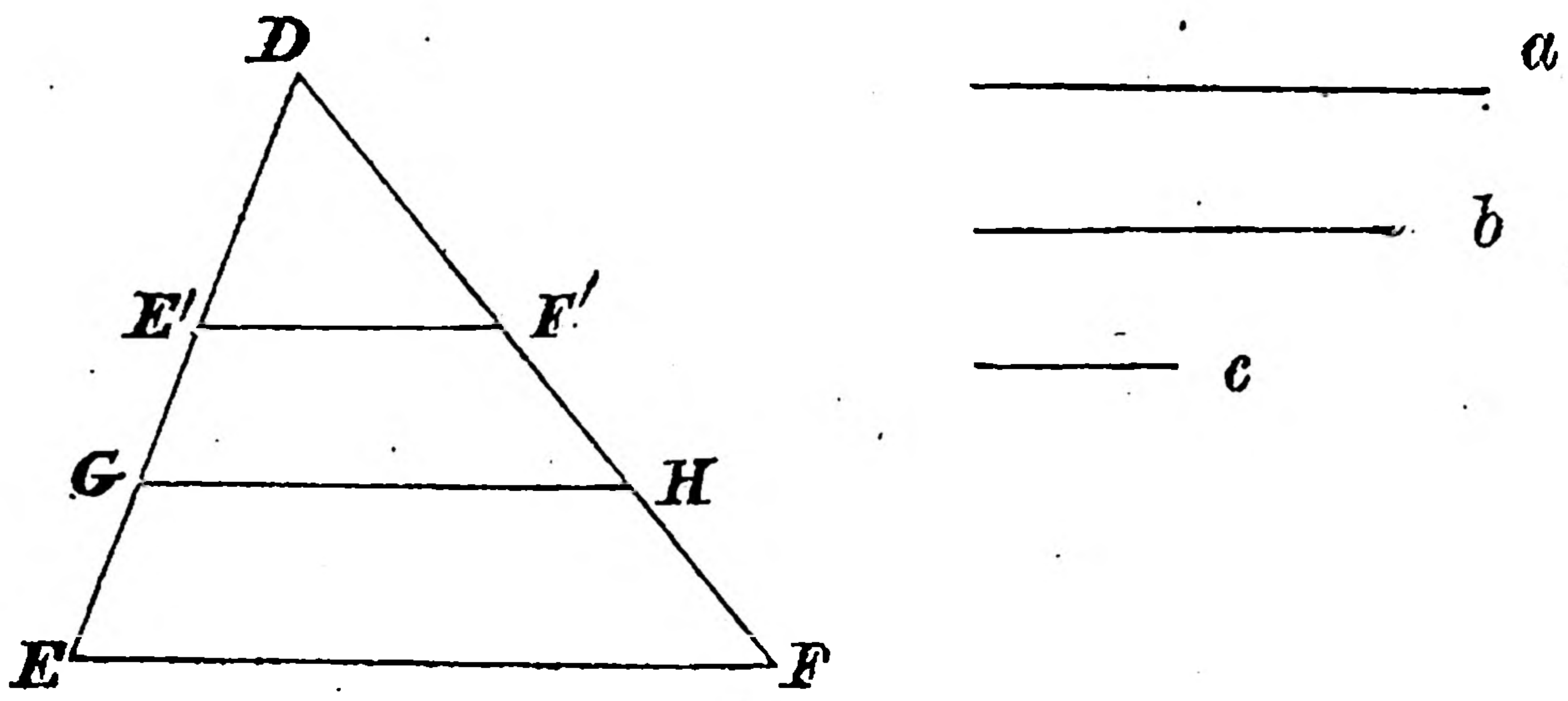
$$AB : AC = AC : CE.$$

Предложеніе 12. Даны три прямыя линіи, найти четвертую пропорціональную (фиг. 229)?

Рѣшеніе. Пусть данныя три прямыя линіи будутъ a, b, c, найти четвертую пропорціональную?

Проведемъ двѣ прямыя линіи DE и DF, такъ чтобы онѣ составляли произвольный уголъ EDF.

Фиг. 229.



Отложимъ на прямой DE отъ точки D, отрѣзокъ $DG=b$ и отъ точки G отрѣзокъ $GE=c$. На прямой DF отъ той же точки D отложимъ отрѣзокъ $DH=a$. Соединимъ точки G и H, а чрезъ точку E проведемъ $EF \parallel GH$; то отрѣзокъ HF и будетъ четвертая пропорціональная.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (кн. 6, пред. 2):

$$DG : GE = DH : HF$$

или

$$b : c = a : HF.$$

Примѣч. 10. Можно откладывать всѣ три данныя прямыя отъ точки D, $DG=b$, $DE'=c$, $DH=a$ и соединить точки G и H, чрезъ точку E' провести $E'F' \parallel GH$, то мы будемъ имѣть:

$$DG : DE' = DH : DF'$$

или

$$b : c = a : DF',$$

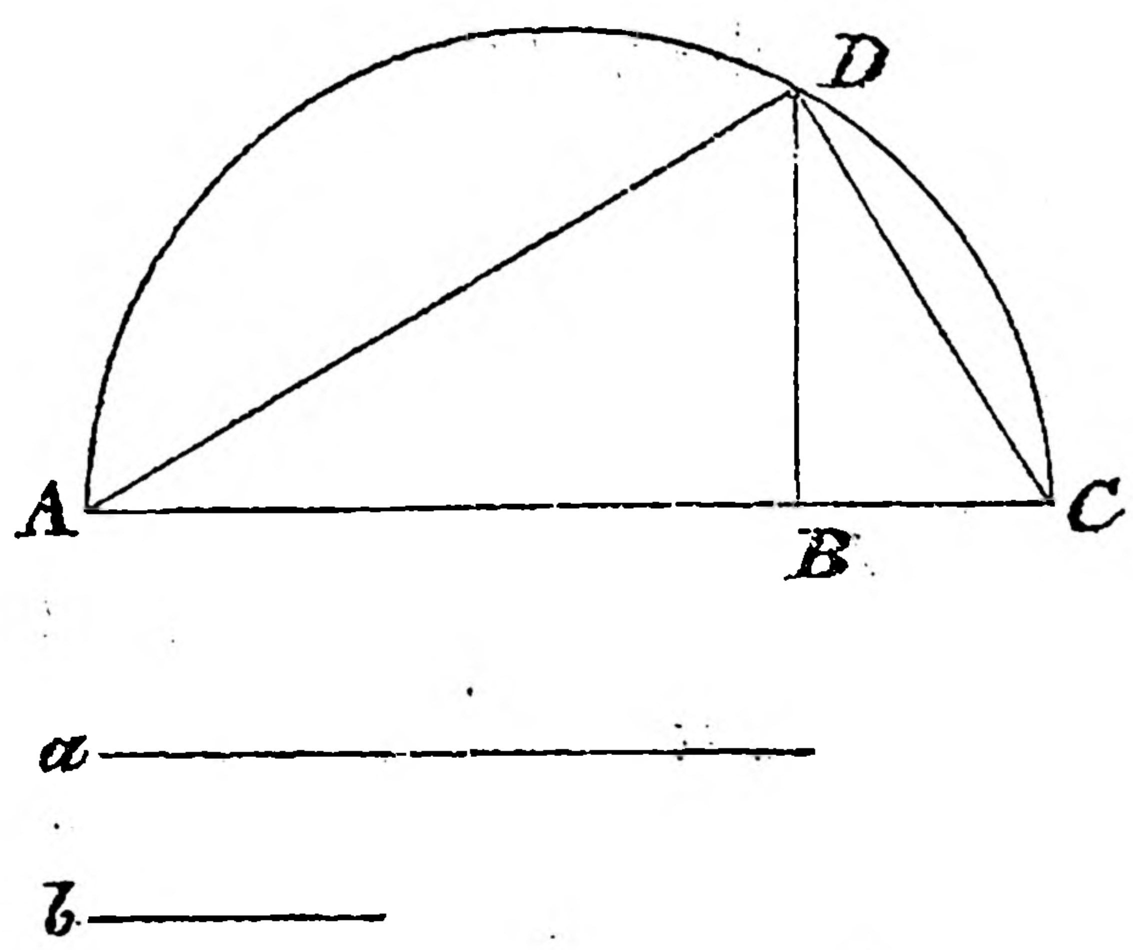
слѣдовательно искомая прямая будетъ DF'.

Предложеніе 13. Даны двѣ прямыя линіи найти средне-пропорціональную (фиг. 230)?

Рѣшеніе. Пусть данныя прямыя будутъ a и b, найти средне-пропорціональную. Отложимъ на какой нибудь прямой одинъ за другимъ отрѣзки $AB=a$ и $BC=b$ и на AC, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ ADC. Изъ точки B возставимъ перпендикуляръ къ AC и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ D. Я говорю, что BD и будетъ искомая прямая.

Если соединимъ точку D съ A и C, то треугольникъ ADC будетъ прямоугольный (кн. 3, пред. 31) и какъ изъ вершины D прямаго угла

Фиг. 230.

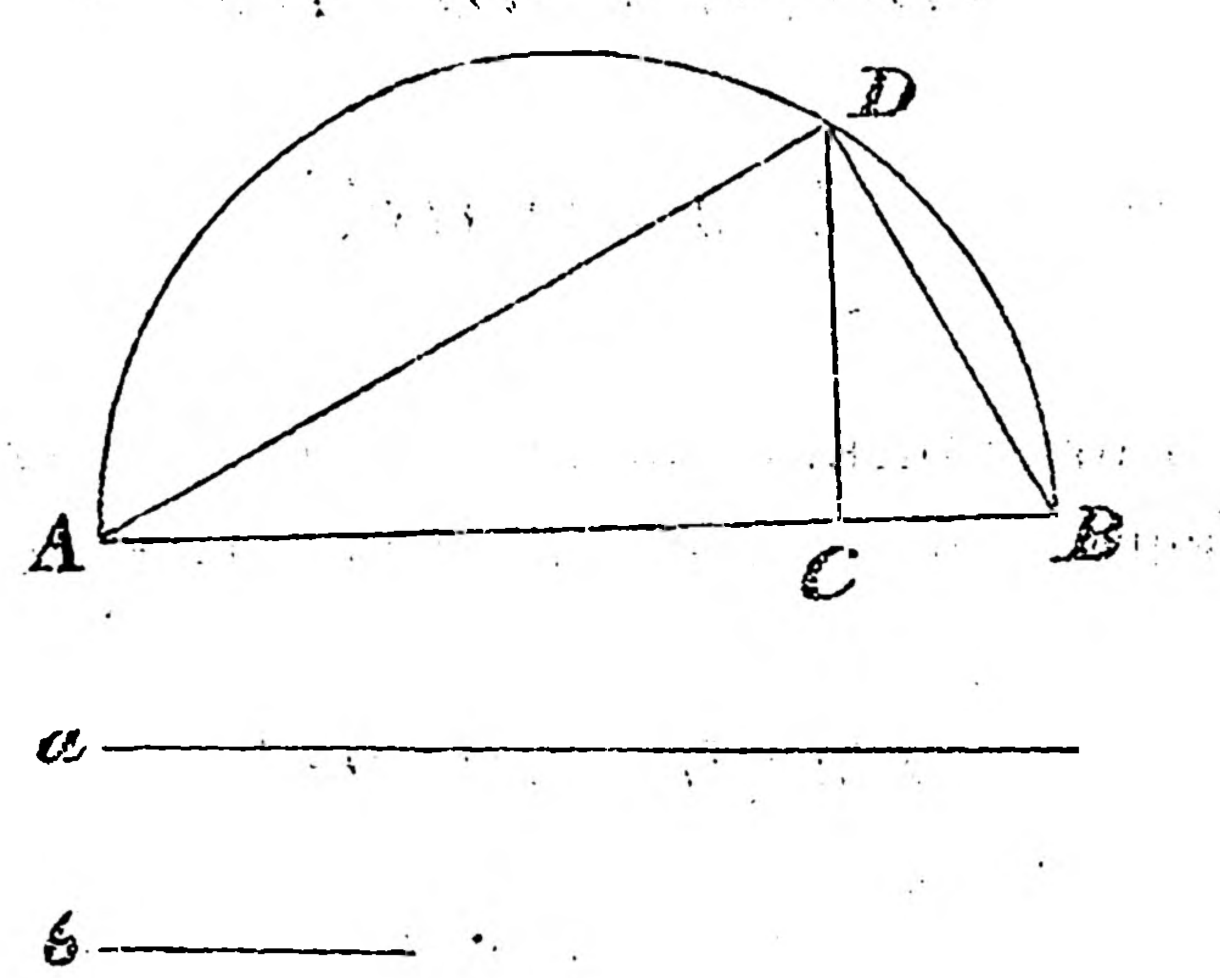


ADC опущенъ на гипотенузу перпендикуляръ DB, то (кн. 6, пред. 8) онъ и будетъ искомая средне-пропорціональная прямая.

Примѣч. 11. Эту задачу можно рѣшить еще двумя слѣдующими построеніями.

1) На большей изъ двухъ данныхъ прямыхъ $AB=a$, отъ точки B отложимъ меньшую $BC=b$, и на большей, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ ADB.

Фиг. 231.

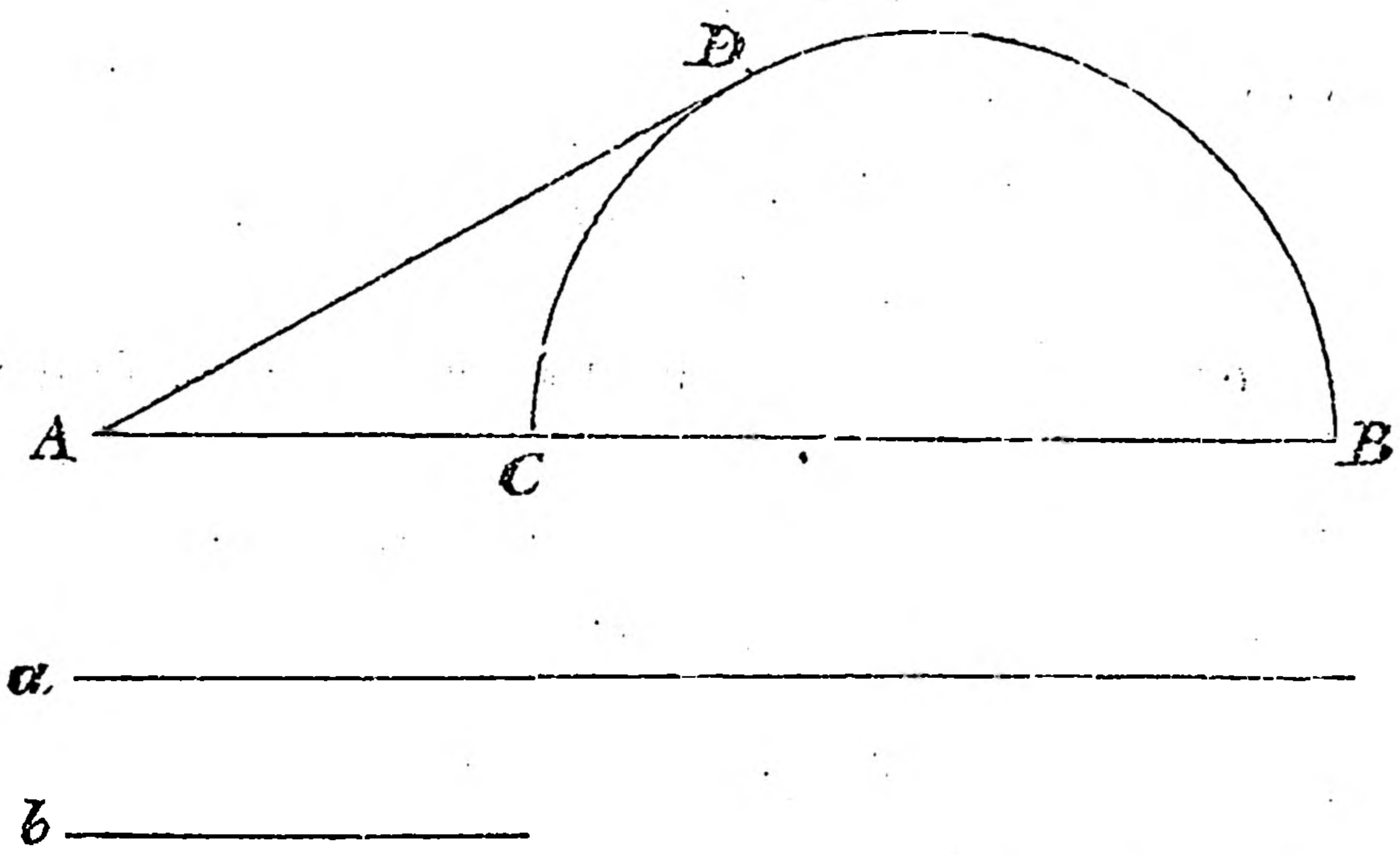


Изъ точки C возставимъ перпендикуляръ CD и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ D. Точку D соединимъ съ точками A и B; полученный такимъ образомъ треугольникъ ADB будетъ прямоугольный (кн. 3, пред. 31), въ которомъ изъ вершины прямаго угла D опущенъ перпендикуляръ DC на гипотенузу AB, слѣдовательно (кн. 6, пред. 8) катетъ DB и будетъ искомая средне-пропорціональная линія между AB и BC, т. е. между данными.

2) Отложимъ на большей $AB=a$ отъ точки A меньшую $AC=b$, и на остаткѣ BC, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ CDB, изъ точки A проведемъ касательную AD (кн. 3, пред. 17), то эта касательная и будетъ искомая прямая, такъ какъ мы имѣемъ (кн. 3, пред. 36):

$$\square AD = AB \,.\, AC.$$

Фиг. 232.



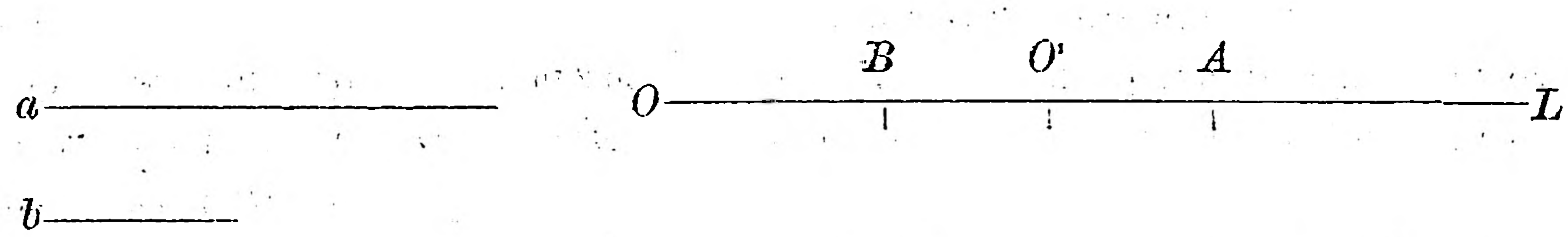
Замѣчу еще что эта задача уже рѣшена предложеніемъ 11.

Примѣч. 12. Среднимъ ариѳметическимъ двухъ однородныхъ величинъ называется ихъ *полусумма.*

Предложеніе a). Даны двѣ прямыя a и b, найти прямую, которая бы была среднимъ ариѳметическимъ между a и b (фиг. 233)?

Рѣшеніе. Положимъ что $a>b$. На неопредѣленной прямой OL отъ точки O отложимъ $OA=a$ и $OB=b$ (кн. 1, пред. 2).

Фиг. 233.



Раздѣлимъ разстояніе AB пополамъ (кн. 1, пред. 10) въ точкѣ O', я говорю, что OO' и будетъ средне-ариѳметическое между a и b, т. е.:

$$OO'=\frac{a+b}{2}.$$

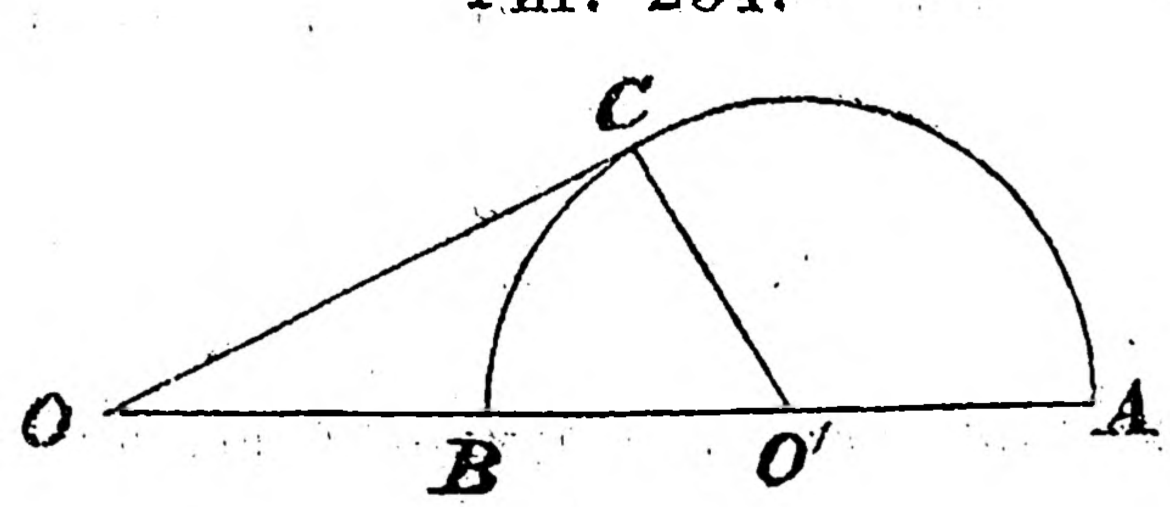
Въ самомъ дѣлѣ, $OO'=OB+BO'$, а $BO'=\frac{OA-OB}{2}$, слѣдовательно:

$$OO'=OB+\frac{OA-OB}{2}=\frac{OA+OB}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Предложеніе b). Средне-ариѳметическая прямая больше средне-геометрической, или средне-пропорціональной (фиг. 234).

Доказат. Пусть $OA=a$, $OB=b$. Средне-ариѳметическая, какъ мы выше видѣли, будетъ OO'.

Фиг. 234.



На AB, какъ на діаметрѣ опишемъ полукругъ BCA, изъ точки O проведемъ касательную OC (кн. 3, пред. 17). Мы выше видѣли, что OC есть средне-пропорціональная между

OA и OB, т. е. $OC^2 = OA \cdot OB = a \cdot b$. Если точку касанія C соединимъ съ центромъ O, полукруга BCA, то изъ треугольника OCO' будемъ имѣть, очевидно, $OO' > OC$, но $OO' = \frac{a+b}{2}$, а $OC = \sqrt{ab}$, слѣдовательно:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Если разность между $\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$ означимъ чрезъ δ, то будемъ имѣть:

$$\delta = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

или

$$2\delta = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2,$$

помножая обѣ части на $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, найдемъ:

$$2\delta(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (a-b)^2.$$

Такъ какъ $a > b$, то, подставивъ въ первую часть предъидущаго выраженія вмѣсто $\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$, получимъ:

$$8\delta b < (a-b)^2,$$

откуда:

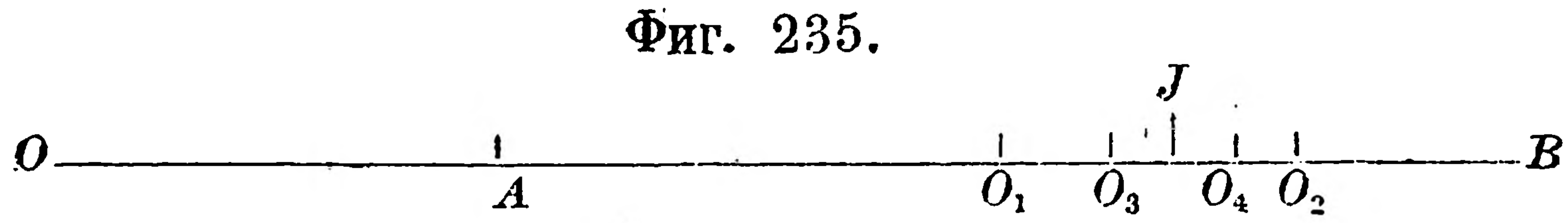
$$\delta < \frac{(a-b)^2}{8b},$$

т. е. разность между средне-ариѳметическимъ и средне-геометрическимъ двухъ прямыхъ всегда меньше квадрата ихъ разности, раздѣленнаго на восемь разъ взятую меньшую прямую.

Предложеніе c). Если возьмемъ средне-ариѳметическую OO_1 двухъ прямыхъ OA и OB (фиг. 235), затѣмъ возьмемъ средне-ариѳметическую OO_2 прямыхъ OB и OO_1, потомъ средне-ариѳметическую прямыхъ OO_1 и OO_2 и будемъ продолжать такое дѣйствіе неопредѣленно, то точки $O_1, O_2, O_3, \ldots$ будутъ приближаться неопредѣленно къ точкѣ J, взятой на разстояніи $\frac{2}{3}AB$ отъ точки A, т. е.:

$$OJ = OA + \tfrac{2}{3}AB.$$

Фиг. 235.



Доказат. Если $AJ = \frac{2}{3}AB$, $BJ = \frac{1}{3}AB$, то:

$$OA = OJ - 2BJ, \quad OB = OJ + BJ.$$

Возьмемъ средне-ариѳметическую этихъ двухъ прямыхъ, то найдемъ:

$$OO_1 = OJ - \frac{BJ}{2}.$$

Средне-ариѳметическая этой послѣдней прямой и прямой OB будетъ:

$$OO_2 = OJ + \frac{BJ}{4} = OJ + \frac{BJ}{2^2},$$

продолжая подобнымъ образомъ, найдемъ:

$$OO_3=OJ-\frac{BJ}{2^3},\ OO_4=OJ+\frac{BJ}{2^4},\ \ldots$$

$$OO_n=OJ\pm\frac{BJ}{2^n},$$

знакъ + когда n есть число четное, а знакъ — когда n есть число нечетное.

Изъ послѣдняго выраженія видимъ, что по мѣрѣ возрастанія числа n дробь $\frac{BJ}{2^n}$ убываетъ неопредѣленно, слѣдовательно точка O_n приближается къ точкѣ J.

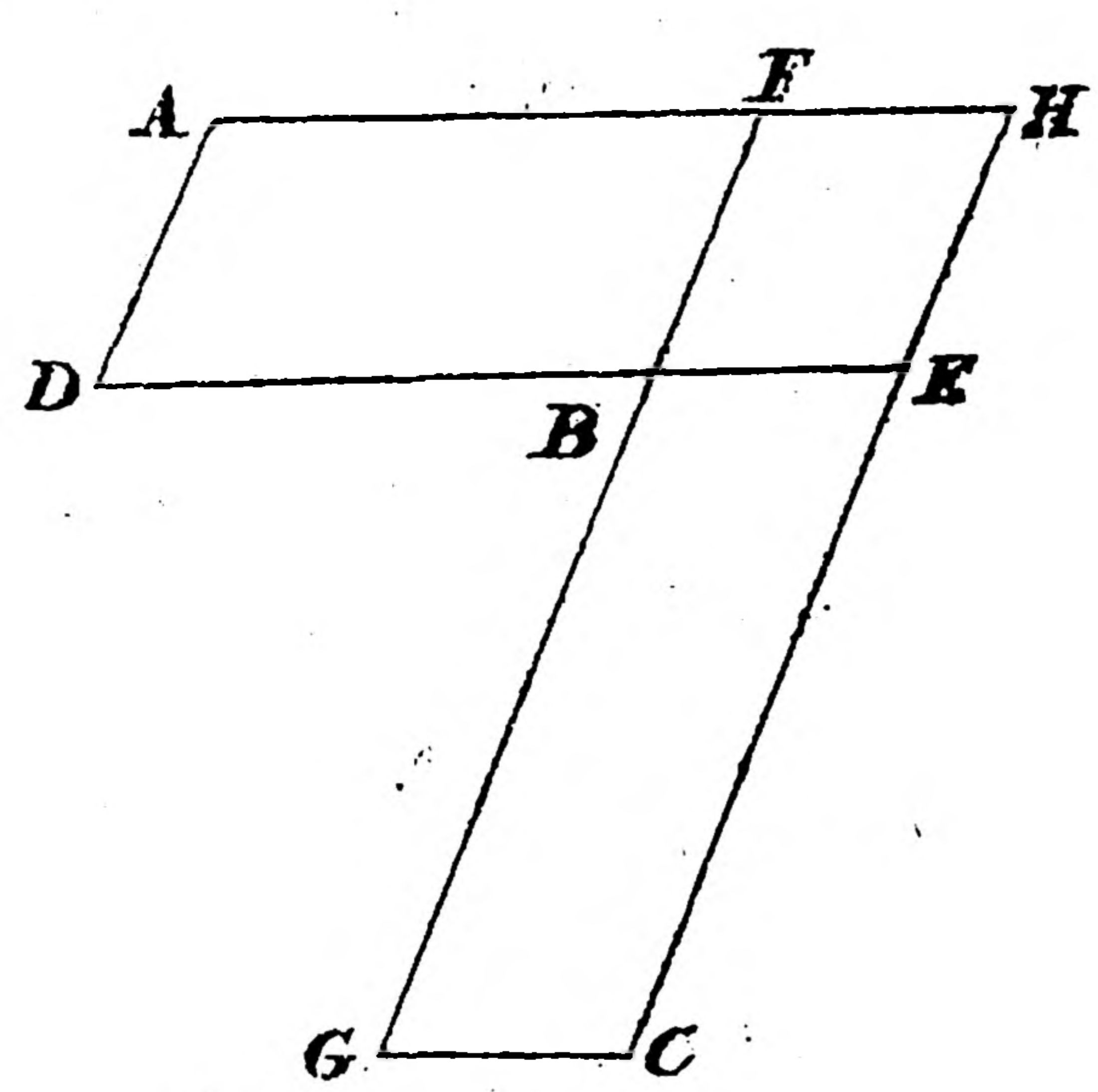
Предложенія (b) и (c) важны при разысканіи отношенія окружности къ діаметру.

Предложеніе 14. Если въ двухъ равныхъ параллелограмахъ уголъ одного равенъ углу другаго, то стороны параллелограмовъ, заключающія равные углы, будутъ обратно пропорціональны; и обратно, если въ двухъ параллелограмахъ уголъ одного равенъ углу другаго и стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, то параллелограмы равны (фиг. 233).

Доказат. 1) Пусть параллелограмы AB и BC равны и $\angle FBD=$ $=\angle GBE$. Я говорю, что:

$$DB:BE=GB:BF.$$

Фиг. 236.



Помѣстимъ параллелограмы AB и BC такъ, чтобы сторона BE параллелограма BC была продолженіемъ стороны DB параллелограма AB, то, такъ какъ углы DBF и GBE равны, сторона BF параллелограма AB будетъ продолженіе стороны GB параллелограма BC (кн. 1, пред. 14).

Такъ какъ параллелограмъ AB равенъ параллеграму BC, то (кн. 5, пред. 7):

$$AB:FE=BC:FE,$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$AB : FE = DB : BE$$

и

$$BC : FE = GB : BF$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$DB : BE = GB : BF.$$

2) По условію мы имѣемъ $\angle DBF = \angle GBE$ и

$$DB : BE = GB : BF,$$

я говорю, что параллелограмы AB и BC равны. Тоже построеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB : FE = DB : BE$$

и

$$BC : FE = GB : BF.$$

Но по условію:

$$DB : BE = GB : BF,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 9):

$$AB : FE = BC : FE,$$

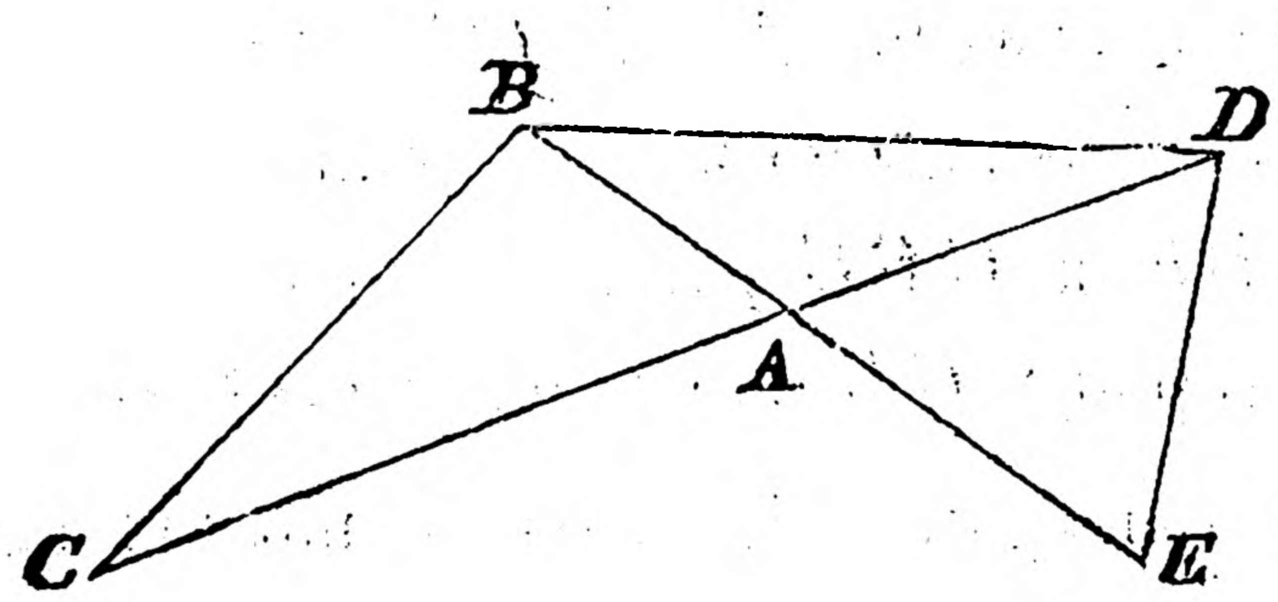
откуда $AB = BC$.

Предложеніе 15. Если въ двухъ равныхъ треугольникахъ уголъ одного равенъ углу другаго, то стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны; и обратно, если въ двухъ треугольникахъ, уголъ одного равенъ углу другаго и стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, то треугольники будутъ равны (фиг. 237).

Доказат. 1) Пусть треугольники ABC и ADE равны и $\angle BAC = \angle DAE$. Я говорю, что:

$$CA : AD = EA : AB.$$

Фиг. 237.



Помѣстимъ треугольники ABC и ADE такъ, чтобы сторона AD была продолженіемъ стороны CA, то (кн. 1, пред. 14) сторона EA будетъ продолженіемъ стороны AB. Соединимъ точки B и D.

Такъ какъ $\triangle ABC = \triangle ADE$, то (кн. 5, пред. 7):

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \triangle ADE : \triangle ABD. \tag{1}$$

$$\triangle ABC : \triangle ABD = CA : AD \tag{2}$$

и

$$\triangle ADE : \triangle ABD = EA : AB \tag{3}$$

откуда, соображаясь съ (1), (2), (3) (кн. 5, пред. 11), найдемъ:

$$CA : AD = EA : AB.$$

2) По условію мы имѣемъ $\angle BAC = \angle DAE$ и

$$CA : AD = EA : AB,$$

я говорю, что:

$$\triangle ABC = \triangle ADE.$$

Тоже построеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$CA : AD = EA : AB$$

и

$$\triangle ABC : \triangle ABD = CA : AD$$

$$\triangle ADE : \triangle ABD = EA : AB,$$

откуда:

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \triangle ADE : \triangle ABD$$

а изъ этой пропорціи имѣемъ (кн. 5, пред. 9):

$$\triangle ABC = \triangle ADE.$$

Предложеніе 16. Если четыре прямыя линіи пропорціональны, то прямоугольникъ, построенный на крайнихъ прямыхъ, равенъ прямоугольнику, построенному на среднихъ; и обратно, если прямоугольникъ, построенный на крайнихъ прямыхъ, равенъ прямоугольнику, построенному на среднихъ прямыхъ, то четыре прямыя пропорціональны (фиг. 238).

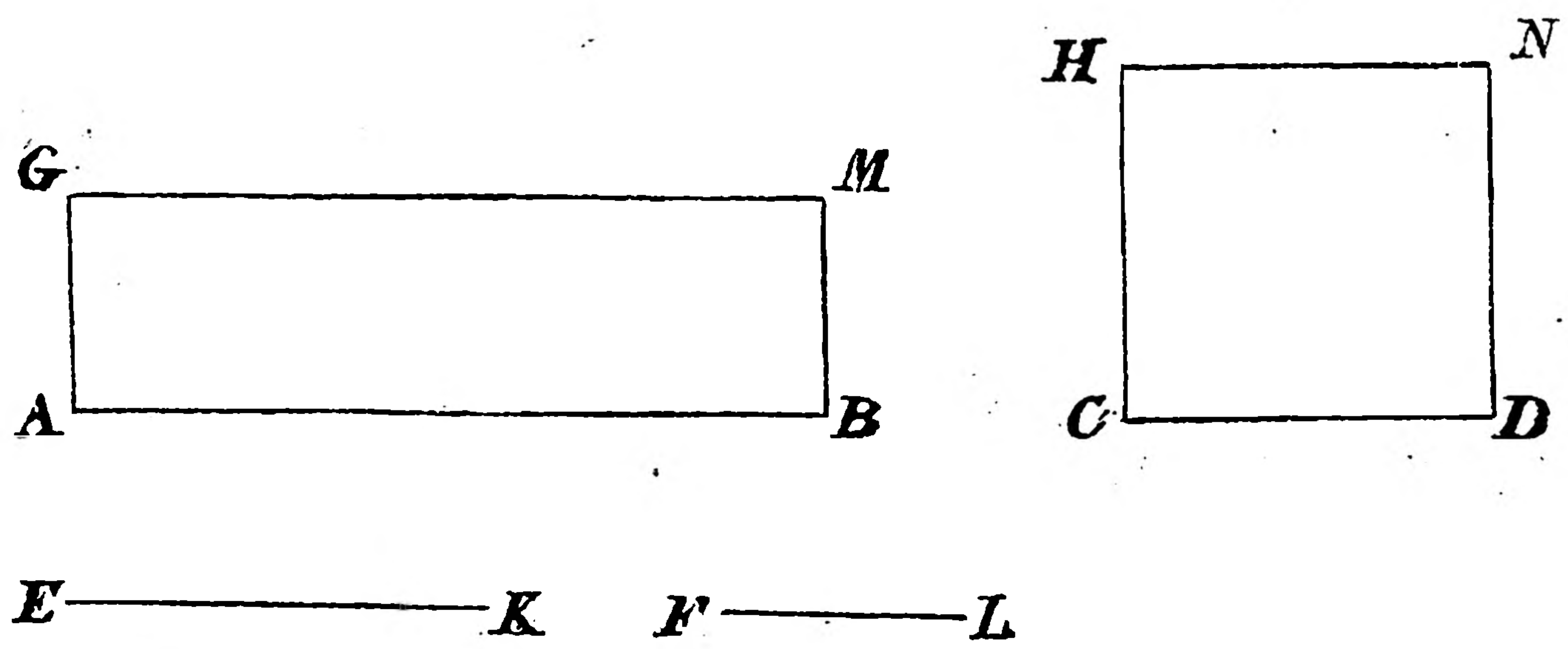
Доказат. 1) Пусть четыре прямыя линіи AB, CD, EK, FL пропорціональны, т. е.:

$$AB:CD=EK:FL.$$

Я говорю, что прямоугольникъ, построенный изъ AB и FL, равенъ прямоугольнику, построенному изъ CD и EK, т. е.:

$$AB.FL=CD.EK$$

Фиг. 238.



Изъ точекъ A и C прямыхъ AB и CD возставимъ перпендикуляры $AG=FL$ и $CH=EK$ и построимъ прямоугольники GB и HD.

Такъ какъ изъ условія и построенія мы имѣемъ;

$$AB:CD=CH:AG$$

то въ параллелограмахъ GB и HD, углы равны и стороны обратно пропорціональны, и слѣдовательно (кн. 6, пред. 14) они равны.

2) Положимъ теперь, что прямоугольникъ GB, построенный изъ прямыхъ AB и FL, равенъ прямоугольнику HD, построенному изъ прямыхъ CD и EK. Я говорю, что четыре прямыя линіи пропорціональны, т. е. что:

$$AB:CD=EK:FL.$$

Сдѣлавъ тоже построеніе, и замѣчая что прямоугольники GB и HD равны, мы будемъ имѣть $\angle BAG=\angle DCH$, слѣдовательно (кн. 6, пред. 14):

$$AB:CD=CH:AG,$$

откуда, замѣчая, что $CH=EK$, $AG=FL$, найдемъ:

$$AB:CD=EK:FL.$$

Примѣч. 13. Это предложеніе есть частный случай предложенія 14.

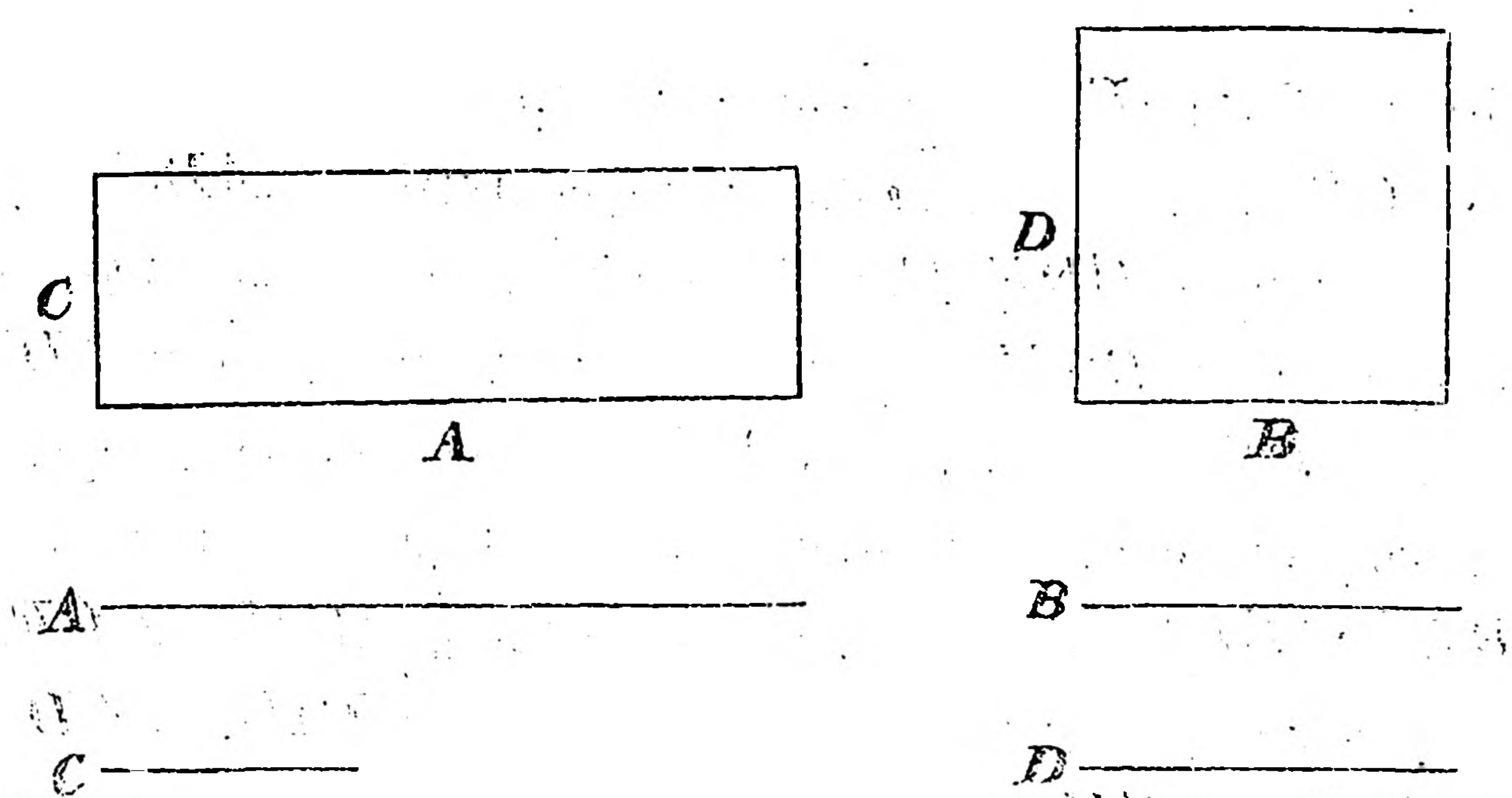
Предложеніе 17. Если три прямыя линіи пропорціональны, то прямоугольникъ, построенный изъ крайнихъ, равенъ квадрату, построенному на средней, и обратно, если прямоугольникъ, построенный на крайнихъ, равенъ квадрату, построенному на средней, то три прямыя линіи пропорціональны (фиг. 239).

Доказат. 1) Пусть три прямыя линіи A, B, C будутъ пропорціональны, т. е.:

$$A : B = B : C.$$

Я говорю, что прямоугольникъ, построенный изъ прямыхъ A и C, равенъ квадрату, построенному на прямой B.

Фиг. 239.



Возьмемъ четвертую прямую $D=B$, то (кн. 5, пред. 7) мы будемъ имѣть:

$$A : B = D : C$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 16) прямоугольникъ, построенный изъ прямыхъ A и C, равенъ прямоугольнику, построенному изъ прямыхъ B и D. Но прямоугольникъ, построенный изъ прямыхъ B и D, есть квадратъ, такъ какъ $B=D$.

2) Пусть теперь прямоугольникъ, построенный изъ A и C равенъ квадрату, построенному на B. Я говорю, что:

$$A : B = B : C$$

Сдѣлавъ тоже построеніе, видимъ, что прямоугольникъ изъ A и C будетъ равенъ прямоугольнику, построенному изъ B и D, слѣдовательно (кн. 6, пред. 16):

$$A : B = D : C$$

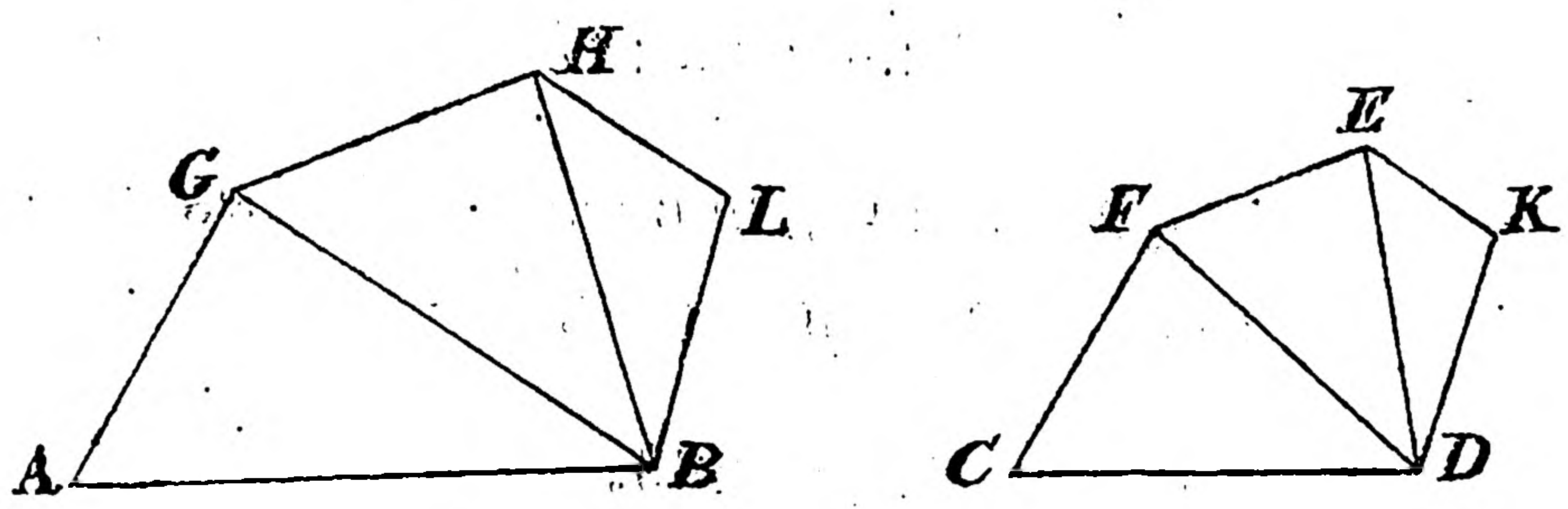
но $D=B$, слѣдовательно:

$$A : B = B : C.$$

Предложеніе 18. На данной прямой построить многоугольникъ подобный и подобно расположенный данному многоугольнику (фиг. 240)?

Рѣшеніе. Пусть данная прямая будетъ AB, а данный многоугольникъ $CDKEF$. Требуется на прямой AB построить многоугольникъ подобный и подобно расположенный, такъ чтобы AB и CD были соотвѣтственными сторонами.

Фиг. 240.



Соединимъ D съ F и построимъ на прямой AB уголъ $BAG=\angle DCF$ и $\angle ABG=\angle CDF$, слѣдовательно, построенный $\triangle ABG$ будетъ равноугольный треугольнику CDF. Точно также, проведя прямую DE, на прямой BG построимъ $\triangle BGH$, равноугольный треугольнику DFE и наконецъ на прямой BH построимъ $\triangle BHL$, равноугольный треугольнику DEK.

Такъ какъ углы, построенные при точкѣ B, равны угламъ при точкѣ D, то и $\angle ABL=\angle CDK$. По той же причинѣ $\angle AGH=\angle CFE$, $\angle GHL=\angle FEK$. Въ треугольникахъ BHL и DEK $\angle BHL=\angle DEK$, слѣдовательно и $\angle HLB=\angle EKD$. Изъ этого видимъ, что построенный многоугольникъ $AGHLB$ равноугольный данному $CFEKD$.

Далѣе треугольники AGB и CFD подобны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$AG:AB=CF:CD.$$

Точно также изъ подобныхъ треугольниковъ BGH и DFE мы имѣемъ:

$$BG:BH=DF:DE$$

а изъ подобныхъ треугольниковъ BHL и DEK мы имѣемъ:

$$BH:BL=DE:DK,$$

и

$$BL:LH=DK:KE.$$

Но такъ какъ:

$$AB:BG=CD:DF;\quad BG:BH=DF:DE,$$

$$BH:BL=DE:DK,$$

то (кн. 5, пред. 22):

$$AB : BL = CD : DK.$$

Точно также можно показать, что:

$$AG : GH = CF : FE$$

и

$$GH : HL = FE : EK.$$

Слѣдовательно многоугольники $ABLHG$ и $CDKEF$ не только равноугольны, но у нихъ, стороны заключающія равные углы, пропорціональны, т. е. они подобны.

Примѣч. 14. Подобными многоугольниками *подобно расположенными* называются такіе, коихъ соотвѣтственныя стороны параллельны въ одномъ и томъ же направленіи.

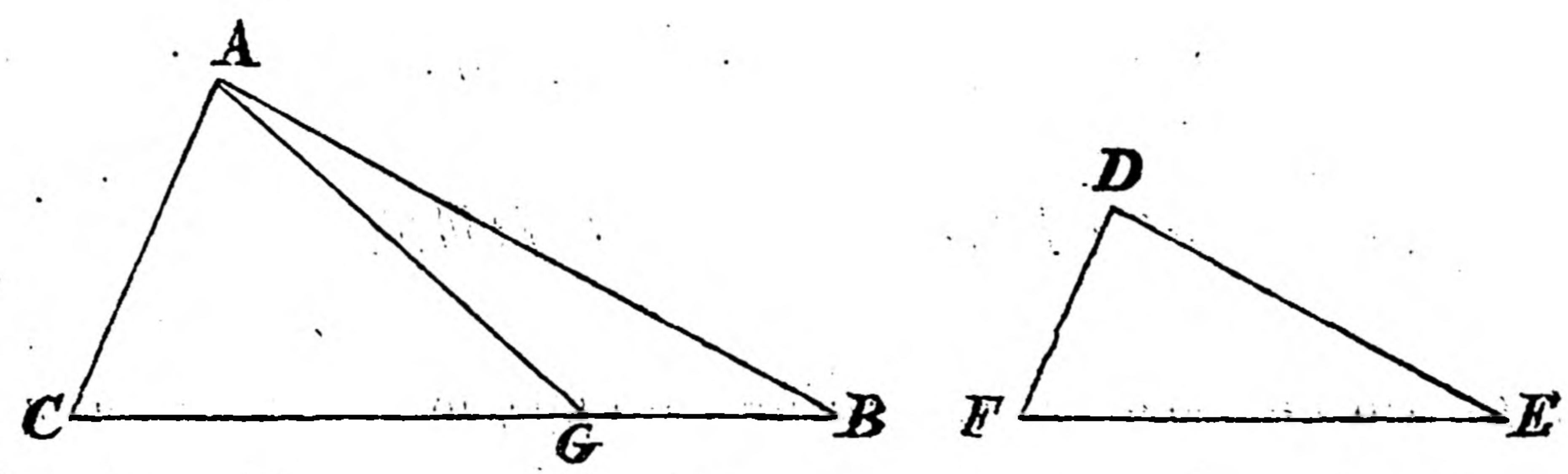
Предложеніе 19. Отношеніе подобныхъ треугольниковъ равно двойному отношенію соотвѣтственныхъ сторонъ (кн. 5, опред. 10) (фиг. 241).

Доказат. Пусть данные треугольники будутъ ABC и DEF и пусть $\angle ABC = \angle DEF$, то:

$$AB : BC = DE : EF.$$

Я говорю, что $\triangle ABC : \triangle DEF = 2(BC : EF)$.

Фиг. 241.



Построимъ къ прямымъ BC и EF третью пропорціональную BG такъ, чтобы:

$$BC : EF = EF : BG.$$

Точку G соединимъ съ A. Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, опред. 1):

$$AB : BC = DE : EF$$

или (кн. 5, опред. 13):

$$AB : DE = BC : EF.$$

Но по построенію:

$$BC:EF=EF:BG, \qquad (1)$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AB:DE=EF:BG.$$

Изъ этой пропорціи видимъ, что въ треугольникахъ ABG и DEF стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, слѣдовательно (кн, 6, пред. 15):

$$\triangle ABG=\triangle DEF.$$

Но изъ пропорціи (1) видимъ, что отношеніе $BC:BG=2\,(BC:EF)$, а такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$\triangle ABC:\triangle ABG=BC:BG,$$

то:

$$\triangle ABC:\triangle ABG=2\,(BC:EF).$$

Но

$$\triangle ABG=\triangle DEF$$

слѣдовательно:

$$\triangle ABC:\triangle DEF=2\,(BC:EF).$$

Слѣдствіе. Изъ сказаннаго дѣлается яснымъ, что если три линіи BC, EF, BG пропорціональны, то первая относится къ третьей, какъ треугольникъ, построенный на первой къ треугольнику подобному и подобно расположенному, построенному на второй; и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$BC:BG=\triangle ABC:\triangle DEF.$$

Примѣч. 15. Новые геометры выражаютъ это предложеніе такъ: площади подобныхъ треугольниковъ относятся между собою, какъ площади квадратовъ, построенныхъ на соотвѣтственныхъ сторонахъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$\triangle ABC:\triangle ABG=BC:BG,$$

но

$$BC:EF=EF:BG,$$

слѣдовательно:

$$BC:BG=\square EF:\square BG$$

откуда:

$$\triangle ABC:\triangle ABG=\square EF:\square BG$$

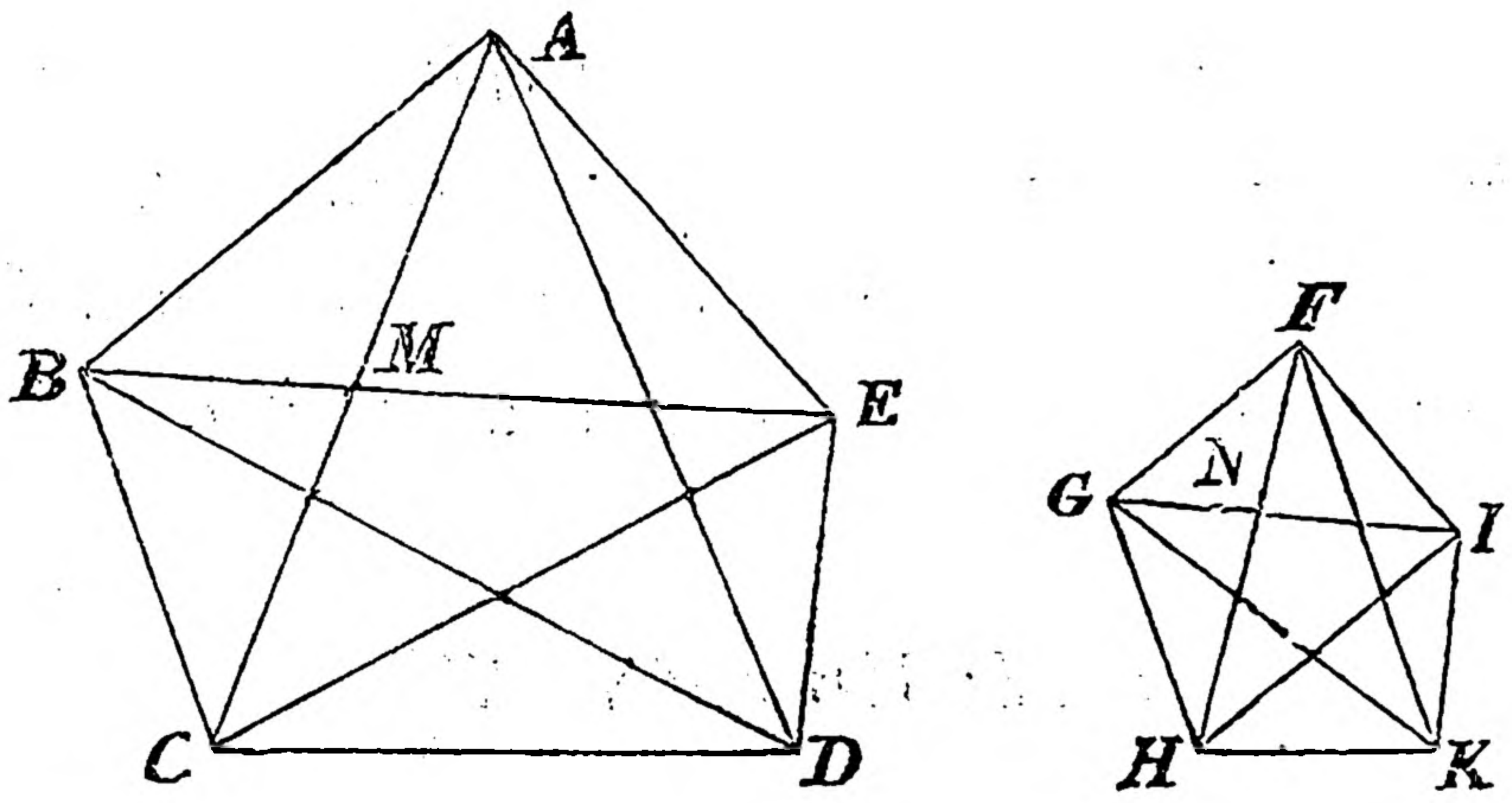
или

$$\triangle ABC:\triangle DEF=\square BC:\square EF.$$

Предложенiе 20. Два подобные многоугольника могутъ быть раздѣлены на одинаковое число подобныхъ треугольниковъ, имѣющихъ между собою отношенiе, равное отношенiю многоугольниковъ, а отношенiе многоугольниковъ равно двойному отношенiю соотвѣтственныхъ сторонъ (фиг. 242).

Доказат. 1) Пусть данные многоугольники будутъ $ABCDE$ и $FGHKI$ и пусть сторона AB будетъ соотвѣтственна сторонѣ FG. Я говорю, что многоугольники могутъ быть раздѣлены на одно и тоже число подобныхъ треугольниковъ.

Фиг. 242.



Проведемъ дiагонали BE, EC, GI, IH. Такъ какъ многоугольникъ $ABCDE$ подобенъ многоугольнику $FGHKI$, то $\angle BAE = \angle GFI$ и

$$AB : AE = FG : FI,$$

слѣдовательно треугольники ABE и FGI, имѣя по равному углу, заключенному между пропорцiональными сторонами, будутъ подобны (кн. 6, пред. 6); откуда слѣдуетъ, что $\angle ABE = \angle FGI$, но изъ подобiя многоугольниковъ мы имѣемъ $\angle ABC = \angle FGH$, слѣдовательно (кн. 1, акс. 3) и $\angle EBC = \angle IGH$. Изъ подобiя треугольниковъ ABE и FGI мы имѣемъ:

$$AB : BE = FG : GI,$$

а изъ подобiя многоугольниковъ:

$$AB : BC = FG : GH,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 22):

$$BE : BC = GI : GH.$$

Откуда видимъ, что треугольники BEC и GIH имѣютъ $\angle EBC = \angle IGH$, какъ мы выше показали, и эти углы заключаются между пропорцiональными сторонами, слѣдовательно треугольники подобны. Точно такимъ же образомъ можно показать, что треугольникъ *ECD* подобенъ треугольнику *IHK*. Слѣдовательно многоугольники *ABCDE* и *FGHKI* раздѣлены на одно и тоже число подобныхъ треугольниковъ.

2) Я говорю, что мы будемъ еще имѣть:

$$ABCDE : FGHKI = \triangle ABE : \triangle FGI = \triangle EBC : \triangle IGH =$$

$$= \triangle CED : \triangle HIK.$$

Такъ какъ $\triangle ABC$ подобенъ $\triangle FGH$, то $\angle BAM = \angle GFN$ и $\angle ABM = \angle FGN$, слѣдовательно въ треугольникахъ *ABM* и *FGN* $\angle AMB = \angle FNG$, а потому треугольники эти подобны. Подобнымъ образомъ можно показать, что и треугольники *BMC* и *GNH* подобны, слѣдовательно:

$$AM : MB = FN : NG$$

и

$$BM : MC = GN : NH$$

откуда (кн. 5, пред. 22):

$$AM : MC = FN : NH.$$

Но (кн. 6, пред. 1):

$$AM : MC = \triangle ABM : \triangle MBC$$

и

$$AM : MC = \triangle AME : \triangle MEC,$$

откуда (кн. 5, пред. 11):

$$\triangle ABM : \triangle MBC = \triangle AME : \triangle MEC$$

или

$$\triangle ABM : \triangle AME = \triangle MBC : \triangle MEC,$$

откуда (кн. 5, пред. 12):

$$\triangle ABE : \triangle CBE = \triangle ABM : \triangle MBC = AM : MC.$$

По той же причинѣ:

$$\triangle FGI : \triangle HGI = FN : NH,$$

но

$$AM : MC = FN : NH$$

слѣдовательно:

$$\triangle ABE : \triangle CBE = \triangle FGI : \triangle HGI,$$

или (кн. 5, пред. 16):

$$\triangle ABE : \triangle FGI = \triangle CBE : \triangle HGI.$$

Проведя BD и GK, легко показать, что:

$$\triangle CBE : \triangle HGI = \triangle ECD : \triangle IHK,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$\triangle ABE : \triangle FGI = \triangle CBE : \triangle HGI = \triangle ECD : \triangle IHK.$$

Но (кн. 5, пред. 12) одинъ изъ предъидущихъ относится къ своему послѣдующему, какъ сумма всѣхъ предъидущихъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, слѣдовательно:

$$ABCDE : FGHKI = \triangle ABE : \triangle FGI.$$

Но мы выше (кн. 6, пред. 19) видѣли, что:

$$\triangle ABE : \triangle FGI = 2\,(AB : FG)$$

слѣдовательно:

$$ABCDE : FGHKI = 2\,(AB : FG). \qquad \text{(a)}$$

Слѣдствіе 1. Если къ AB и FG возьмемъ третье пропорціональное X, то мы будемъ имѣть (кн. 5, опред. 10).

$$AB : X = 2\,(AB : FG),$$

слѣдовательно:

$$\triangle ABE : \triangle FGI = AB : X$$

откуда:

$$ABCDE : FGHKI = AB : X.$$

Слѣдствіе 2. Очевидно также, что вообще, если три прямыя линіи пропорціональны, то фигура, построенная на первой прямой, относится къ подобной и подобно расположенной фигурѣ построенной на второй прямой, какъ первая прямая къ третьей.

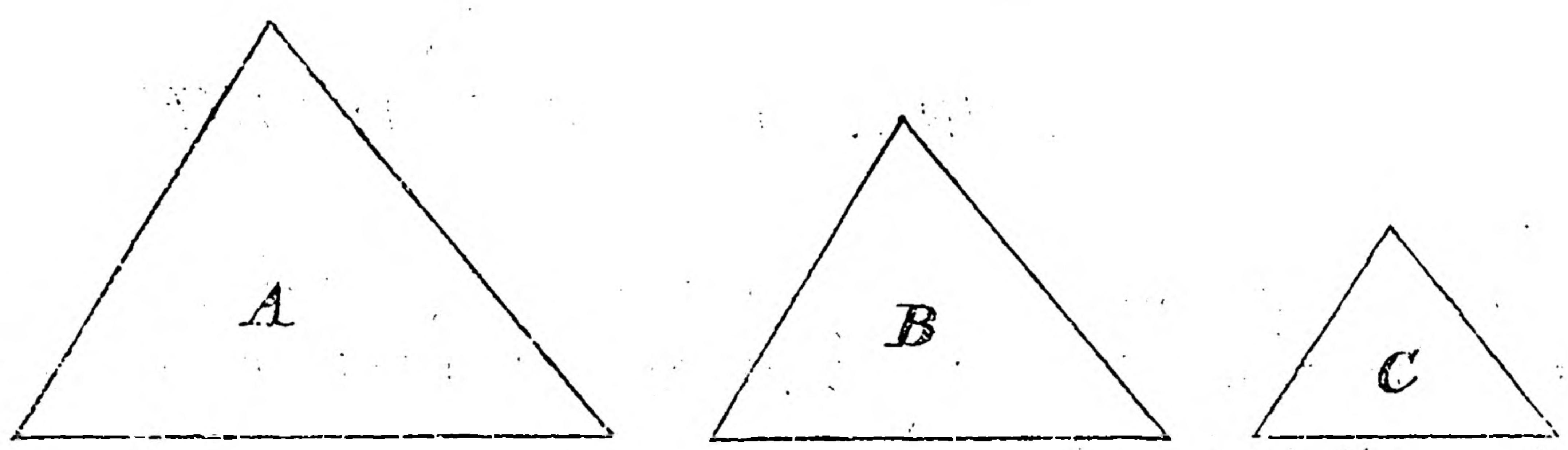
Примѣч. 16. Мы уже показали въ примѣч. (кн. 6, прим. 13), что пропорція (a) можетъ быть написана такъ:

$$ABCDE : FGHKI = \square AB : \square FG.$$

Предложеніе 21. Многоугольники подобные одному и тому же многоугольнику подобны между собою (фиг. 243).

Доказат. Пусть многоугольники A и B подобны многоугольнику C. Я говорю, что A и B будутъ подобны.

Фиг. 243.



Такъ какъ фигура A подобна фигурѣ C и фигура B подобна той же C, то ихъ стороны, заключающія равные углы, пропорціональны, слѣдовательно фигуры A и B также равноугольны (кн. 1, акс. 1) и (кн. 5, пред. 11) стороны, заключающія равные углы, пропорціональны; слѣдовательно фигуры A и B (кн. 6, опред, 1) подобны.

Примѣч 17. Въ настоящемъ примѣчаніи я обобщу и дополню недосказанное Евклидомъ относительно подобія фигуръ на плоскости.

Два подобные многоугольника на плоскости могутъ имѣть, одинъ относительно другаго, два различныя положенія:

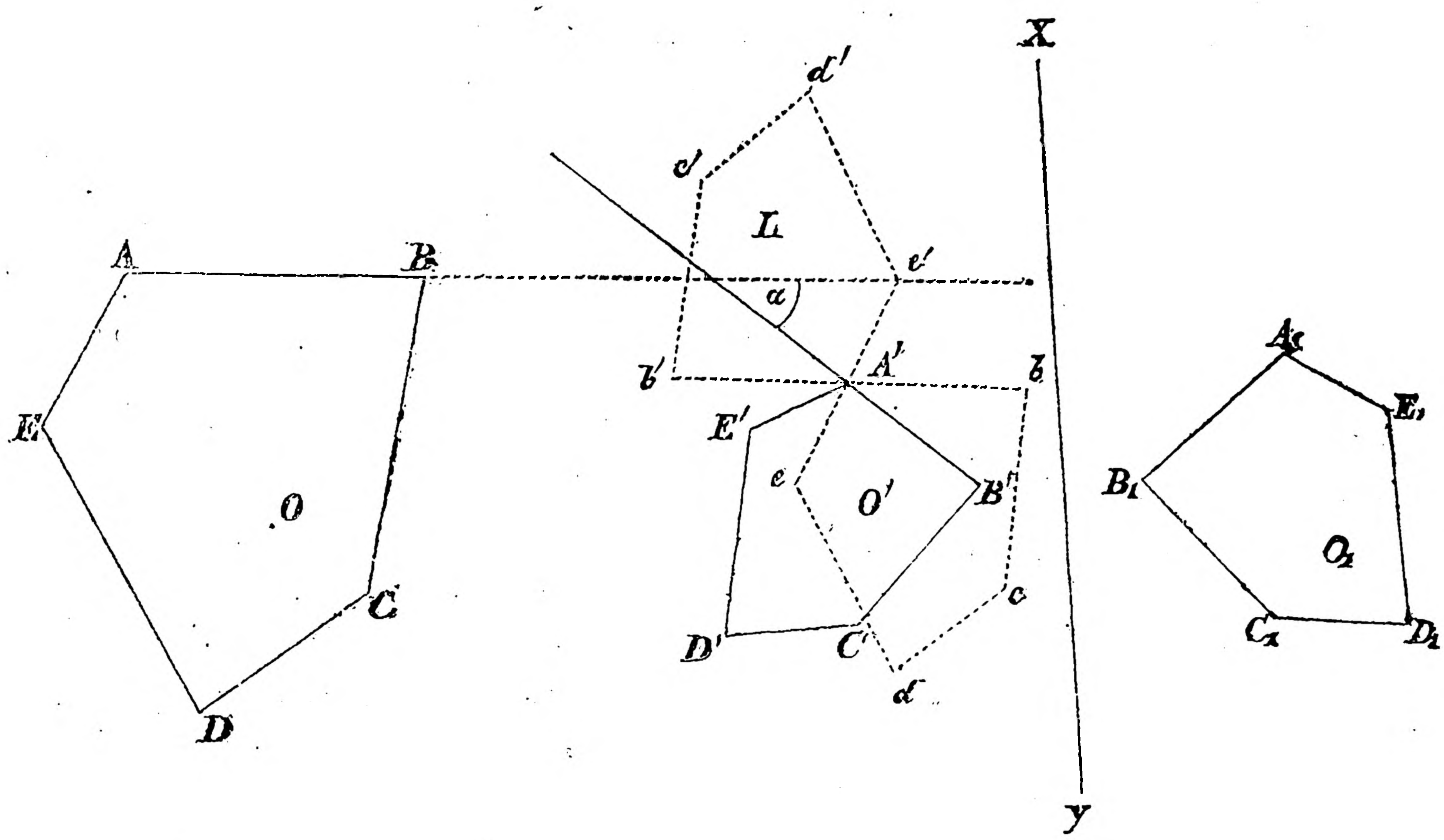
1) Они могутъ быть такъ расположены, что два наблюдателя, находясь одинъ внутри одного многоугольника, а другой внутри другаго, будутъ оба видѣть движеніе точки по контурамъ многоульниковъ, отъ соотвѣтственныхъ точекъ къ соотвѣтственнымъ, въ одну сторону, т. е. или съ права на лѣво, или съ лѣва на право.

Такіе два многоугольника можно поворотомъ одного изъ нихъ въ плоскости, привесть въ такое положеніе, въ которомъ ихъ сходственныя стороны будутъ параллельны въ одномъ и томъ же направленіи или въ противуположномъ, т. е. двѣ какія нибудь, сходственныя стороны будутъ составлять уголъ$=0$, или$=2d$

Если въ подобныхъ многоугольникахъ $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ сходственныя стороны будутъ AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CD и $C'D'$, DE и $D'E'$, EA и $E'A'$, а слѣдовательно сходственныя точки будутъ A и A', B и B', C и C', D и D', E и E', то, очевидно, наблюдатели, находясь внутри многоугольниковъ, въ какихъ нибудь точкахъ O и O', будутъ оба видѣть движеніе точки по контуру, одинъ отъ A къ B, а другой отъ A' къ B', оба съ лѣва на право.

Предлож. а. Я говорю, что эти многоугольники можно поворотомъ въ плоскости, привесть въ такое положенiе, въ которомъ ихъ сходственныя стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$ и т. д. будутъ параллельны (фиг. 244).

Фиг. 244.



Доказат. Такъ какъ многоугольники O и O' подобны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}=k$$

и

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=C',\ \angle D=\angle D',\ \angle E=\angle E'.$$

Продолжимъ стороны AB и $A'B'$ до встрѣчи ихъ въ точкѣ L, эти стороны вообще будутъ составлять, какой нибудь уголъ α. Если многоугольникъ O' повернемъ въ его плоскости, около точки A', такъ чтобы $\angle\alpha$ сдѣлался$=0$, то сторона $A'B'$ сдѣлается параллельна сторонѣ AB въ одномъ и томъ же направленiи. Если сторона $A'B' \parallel AB$, а по условiю $\angle B=\angle B'$, то и сторона $B'C'$ будетъ параллельна сторонѣ BC и т. д. Многоугольникъ O' приметъ положенiе $A'bcde$. Такiе многоугольники называются *подобными* и *подобно расположенными.*

Если же, около точки A' поворотимъ многоугольникъ O' такъ, чтобы $\angle\alpha=2d$, то мы будемъ еще имѣть $A'B' \parallel AB$, но въ противуположномъ направленiи, въ такой же параллельности будутъ и остальныя сходственныя стороны. Многоугольникъ O' приметъ положенiе $A'b'c'd'e'$. Такiе многоугольники называются *подобными* и *противуположно расположенными.*

2) Если многоугольникъ $A'B'C'D'E'$ поворотимъ вмѣстѣ съ плоскостью его около какой нибудь оси XY, лежащей въ той же плоскости, такъ чтобы онъ упалъ на туже плоскость другой стороной, то онъ приметъ положенiе $A_1B_1C_1D_1E_1$, которое называется *симметричнымъ* положенiемъ относительно оси XY. Такъ какъ многоугольникъ O' такимъ поворотомъ ни въ чемъ не измѣнился, слѣдовательно остался подобнымъ многоугольнику O, то говорятъ, что два многоугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ *симметрически по-*

добны. Очевидно, въ такихъ многоугольникахъ наблюдатели, находящіеся внутри многоугольниковъ въ точкахъ O и O_1, будутъ видѣть движеніе точки одинъ отъ A къ B и другой отъ A_1 къ B_1 въ противуположныхъ направленіяхъ, т. е. первый наблюдатель будетъ видѣть движеніе точки отъ A къ B съ лѣва на право, а второй отъ A_1 къ B_1 съ права на лѣво.

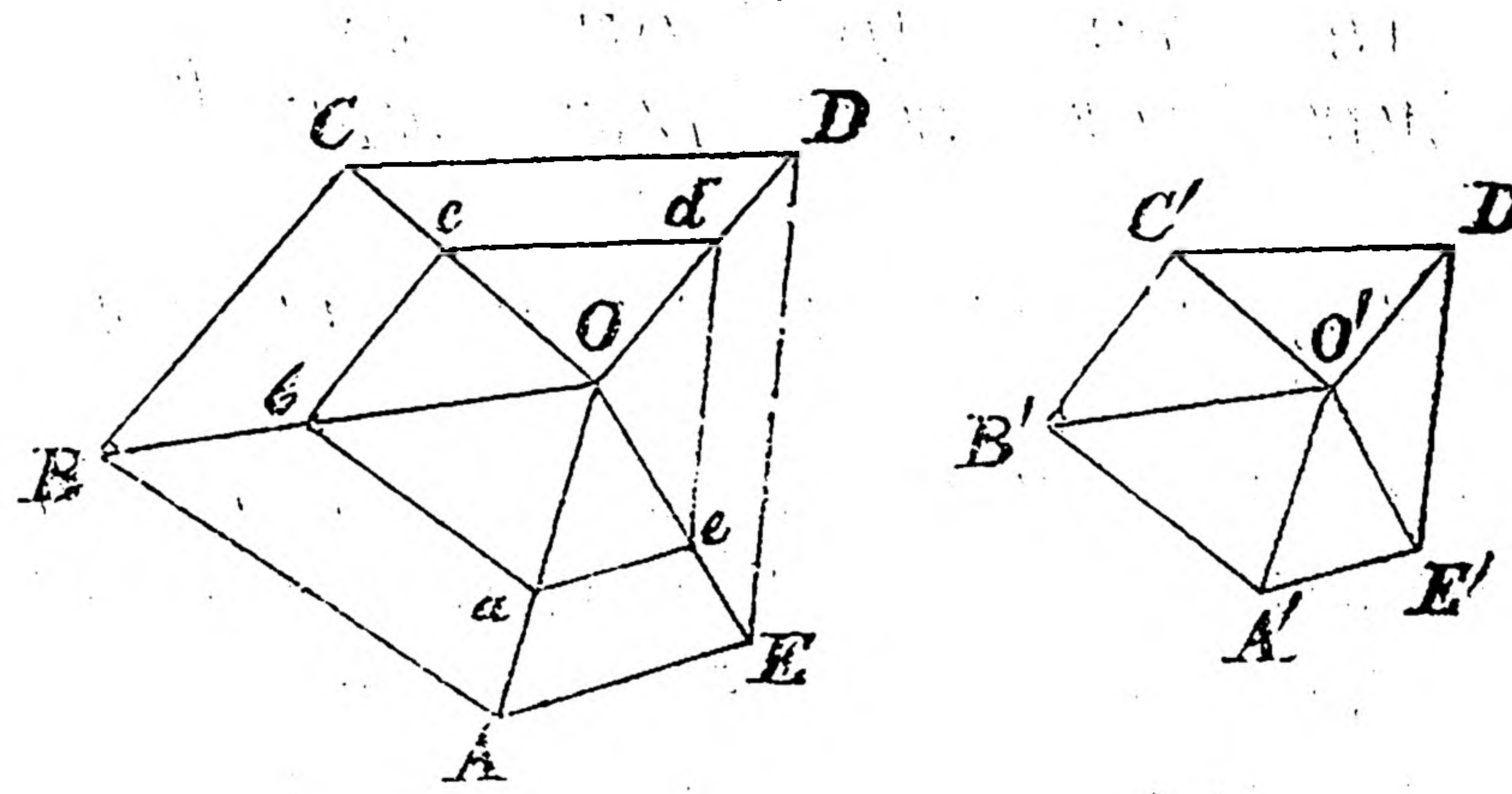
Слѣдовательно, если даны два многоугольника O и O_1 симметрично подобные, то, чтобы привесть ихъ въ такое положеніе, въ которомъ бы ихъ сходственныя стороны были параллельны въ одномъ и томъ же направленіи, или въ противуположныхъ направленіяхъ, надобно сначала одинъ изъ многоугольниковъ, напримѣръ O_1, поворотомъ около какой нибудь оси XY привесть въ положеніе O', и затѣмъ поворотомъ въ плоскости около одной изъ его вершинъ, напримѣръ A', привесть или въ положеніе $A'bcde$, или въ положеніе $A'b'c'd'e'$.

Слѣдовательно подобные многоугольники всегда могутъ быть приведены въ такое положеніе, при которомъ ихъ сходственныя стороны будутъ параллельны въ одномъ и томъ же направленіи. По этому мы и будемъ теперь разсматривать только такіе многоугольники. Теперь я обобщу 20 предложеніе шестой книги Началъ Евклида.

Предлож. ъ. На плоскости двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ многоугольниковъ, по произвольно взятой точкѣ, относительно перваго многоугольника, можно всегда найти такую точку, относительно втораго многоугольника, что если соединимъ первую точку съ вершинами перваго многоугольника, а вторую съ вершинами втораго многоугольника, то образуются двѣ системы подобныхъ треугольниковъ, и при томъ подобными будутъ тѣ, которые имѣютъ основаніями сходственныя стороны данныхъ многоугольниковъ.

Доказат. Пусть данные многоугольники будутъ $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (фиг. 245).

Фиг. 245.



Такъ какъ многоугольники подобны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

и

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',\ \angle D = D',\ \angle E = \angle E'.$$

Возьмемъ внутри, или внѣ, напримѣръ внутри, многоугольника $ABCDE$ произвольную точку O и соединимъ ее съ вершинами A, B, C, D, E прямыми линіями. Чрезъ точку напримѣръ A', въ многоугольникѣ $A'B'C'D'E'$ проведемъ прямую $A'O' \parallel AO$ и построимъ на ней точку O' такъ, чтобы (кн. 6, пред. 12):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O'}.$$

Если эту точку O' соединимъ съ вершинами A', B', C', D', E' втораго многоугольника, то треугольники OAB, OBC, OCD, . . будутъ подобны треугольникамъ $O'A'B'$, $O'B'C'$, $O'C'D'$. . .

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ по построенію въ треугольникахъ OAB и $O'A'B'$ мы имѣемъ $\angle OAB = \angle O'A'B'$ и $AB : A'B' = OA : OA'$, то (кн. 6, пред. 6) ΔOAB подобенъ $\Delta O'A'B'$.

Изъ подобія этихъ треугольниковъ мы будемъ имѣть $\angle OBA = \angle O'B'A'$, но $\angle ABC = \angle A'B'C'$ изъ подобія многоугольниковъ, слѣдовательно $\angle OBC = \angle O'B'C'$.

Такъ какъ изъ подобія треугольниковъ OAB и $O'A'B'$ мы имѣемъ $AB : A'B' = OB : O'B'$, а изъ подобія многоугольниковъ мы имѣемъ $AB : A'B' = BC : B'C'$, то (кн. 5, пред. 9) $BC : B'C' = OB : O'B'$. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 1) треугольники OBC и $O'B'C'$ также подобны. Точно также легко доказать, что и треугольники OCD, ODE, . . подобны треугольникамъ $O'C'D'$, $O'D'E'$, . . .

Такъ построенныя точки O и O' называются *соотвѣтственными*, какъ и точки A и A', B и B', . . .

Если многоугольникъ $A'B'C'D'E'$ нанесемъ на многоугольникъ $ABCDE$, такъ чтобы точка O' совмѣстилась съ точкою O и чтобы прямая $O'A'$ совмѣстилась съ прямою OA, то, очевидно, и прямыя $O'B'$, $O'C'$, . . ., совмѣстятся съ прямыми OB, OC, . . . Такимъ образомъ многоугольникъ $A'B'C'D'E'$ приметъ положеніе $abcde$. Въ такомъ относительномъ положеніи многоугольники $ABCDE$ и $abcde$ называются *гомотетическими.*

Если многоугольникъ $abcde$ поворотимъ въ плоскости на $2d$ около точки O, то онъ останется гомотетическимъ, но противуположнаго направленія, т. е. сходственныя стороны будутъ составлять между собою уголъ$=2d$.

Такъ какъ точку O относительно многоугольника $ABCDE$ мы взяли произвольно на плоскости, то очевидно такихъ точекъ какъ O и O' есть безчисленное множество. Всѣ онѣ называются соотвѣтственными и вмѣстѣ съ вершинами, данныхъ подобныхъ многоугольниковъ, составляютъ, то что называютъ *подобными системами.*

Если бы въ многоугольникѣ $ABCDE$ мы взяли за точку O одну изъ его вершинъ, то получили бы 20 предложеніе этой книги.

Теперь можно опредѣлить: что такое подобныя системы точекъ на плоскости?

Если каждой точкѣ одной системы соотвѣтствуетъ одна точка другой системы и при томъ такъ, что треугольникъ, образуемый какими нибудь тремя точками первой системы, подобенъ треугольнику, образуемому тремя соотвѣтственными точками второй системы, то такія двѣ системы точекъ называются *подобными.*

Подобія двухъ системъ точекъ могутъ *быть одинаковыми* и *симметричными.*

Предлож. с. Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою, какъ сходственныя стороны.

Доказат. Если многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ подобны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'},$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 12) мы имѣемъ:

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'C'+E'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Но $AB+BC+CD+DE+EA$ есть периметръ P перваго многоугольника, а $A'B'+$ $+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'$ есть периметръ P' втораго многоугольника, слѣдовательно:

$$P : P' = AB : A'B'.$$

или

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Правильные многоугольники. Правильнымъ многоугольникомъ называется такой, въ которомъ всѣ стороны и углы равны между собою.

Мы видѣли (кн. 4, пред. 5, . . . 16), что около правильнаго многоугольника можно описать и вписать въ него кругъ.

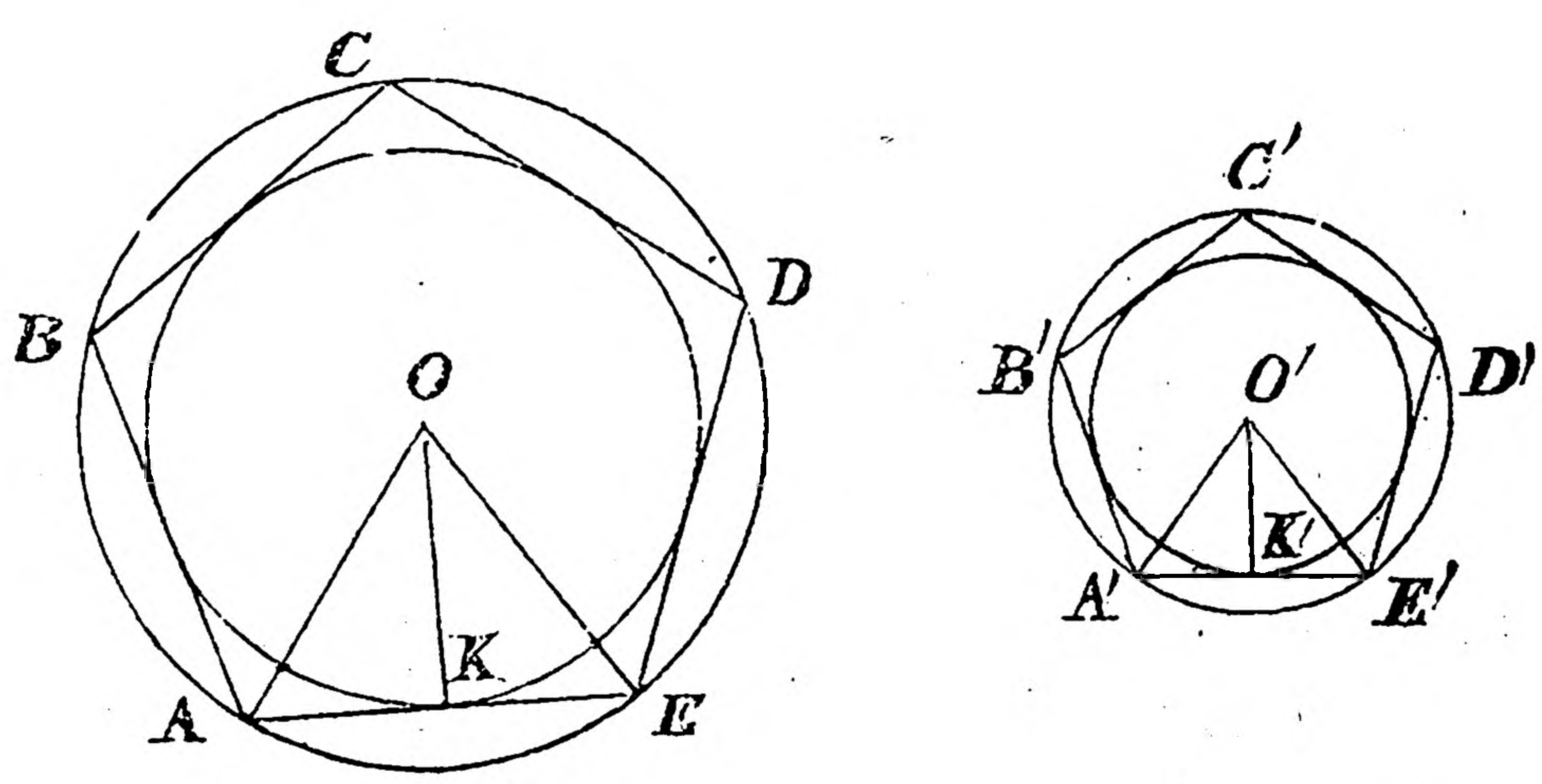
Предлож. d. Два правильные многоугольника съ одинаковымъ числомъ сторонъ подобны; периметры такихъ многоугольниковъ относятся между собою, какъ радіусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ, а площади ихъ относятся между собою, какъ квадраты радіусовъ круговъ вписанныхъ, или описанныхъ (фиг. 246).

Доказат. 1) Пусть данные многоугольники будутъ $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$. Такъ какъ стороны перваго равны между собою и стороны втораго равны между собою, то, очевидно, стороны одного пропорціональны сторонамъ другаго, т. е.:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'},$$

остается только показать, что углы одного многоугольника равны угламъ другаго.

Фиг. 246.



Для этого опишемъ около обоихъ многоугольниковъ круги O и O'. Такъ какъ стороны каждаго многоугольника равны между собою, то каждая изъ сторонъ, какъ въ одномъ такъ и въ другомъ многоугольникѣ, стягиваетъ одну и туже часть окружности въ обоихъ описанныхъ кругахъ. Слѣдовательно дуга BAE составляетъ такую же часть окружности O, какую дуга $B'A'E'$ составляетъ часть окружности O'. Откуда видимъ, что и остальныя части $BCDE$ и $B'C'D'E'$ окружностей O и O' составляютъ одинаковыя части цѣлыхъ окружностей. Слѣдовательно углы BAE и $B'A'E'$ (кн. 3, пред 22) составляютъ одинаковую часть двухъ прямыхъ угловъ, слѣдовательно $\angle BAE = \angle B'A'E'$.

Слѣдовательно правильные многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ подобны.

2) Если многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ подобны, то мы имѣемъ:

$$P : P' = AE : A'E',$$

и

$$\text{площ.}ABCDE : \text{площ.}A'B'C'D'E' = \square AE : \square A'E'.$$

Но легко видѣть, что $\triangle ABE$ подобенъ $\triangle A'B'E'$, слѣдовательно:

$$AE : A'E' = OE : O'E' = OK : O'K'$$

или если означимъ чрезъ R и r, и R' и r' радіусы круговъ описанныхъ и вписанныхъ, то будемъ имѣть:

$$AE : A'E' = R : R = r : r',$$

откуда:

$$P : P' = R : R' = r : r'.$$

3) Такъ какъ изъ пропорціи:

$$AE : A'E' = R : R' = r : r',$$

мы имѣемъ:

$$\square AE : \square A'E' = \square R : \square R' = \square r : \square r'$$

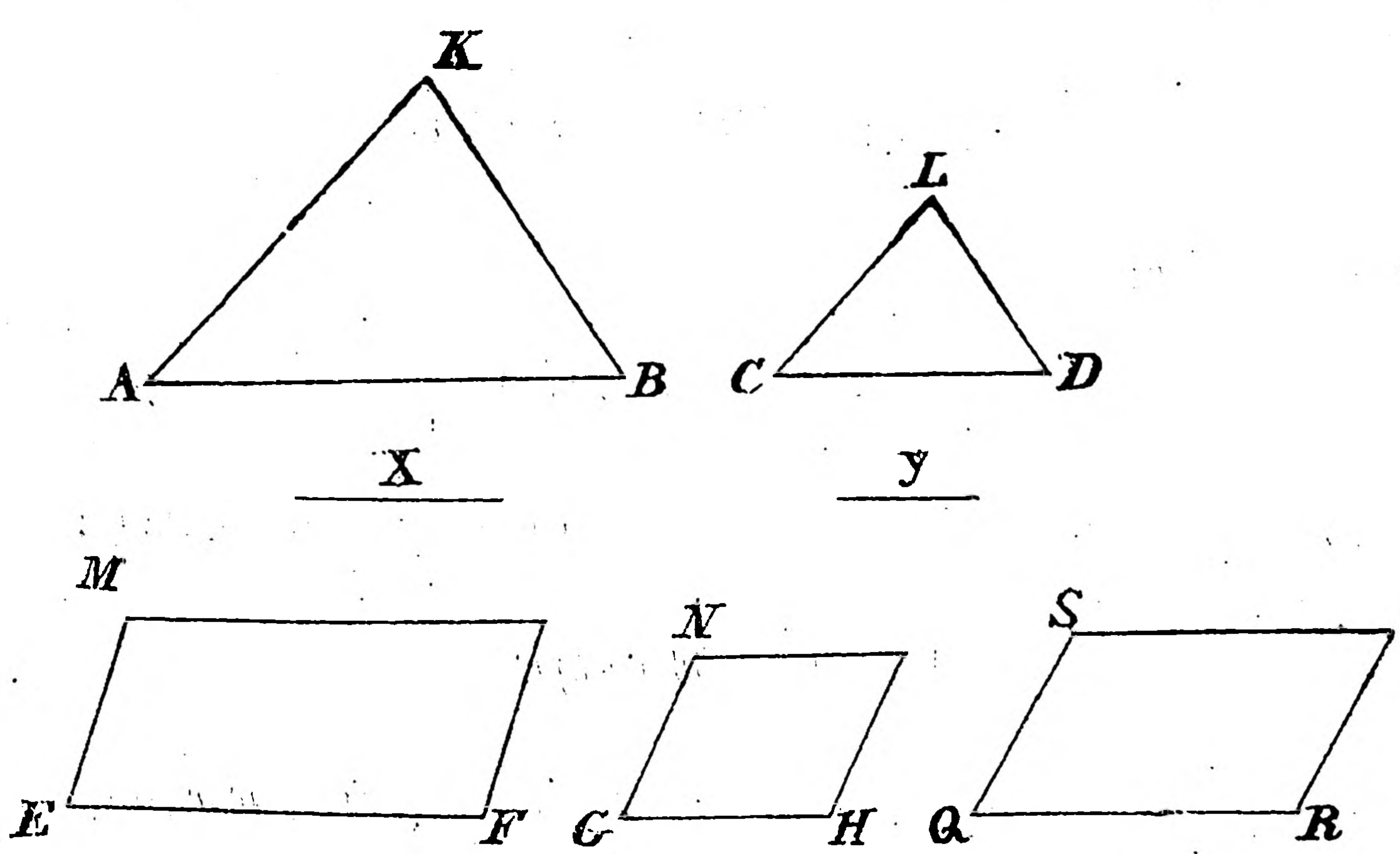
то соображаясь съ предъидущимъ найдемъ:

$$\text{площ.} ABCDE : \text{площ.} A'B'C'D'E' = \square R : \square R' = \square r : \square r'.$$

Предложеніе 22. Если четыре прямыя линіи пропорціональны, то многоугольники подобные и подобно на нихъ построенные будутъ также пропорціональны, и обратно, если многоугольники подобные и подобно построенные на четырехъ прямыхъ пропорціональны, то и четыре прямыя линіи пропорціональны (фиг. 247).

Доказат. 1) Пусть четыре пропорціональныя линіи будутъ AB, CD, EF, GH, т. е. пусть:

Фиг. 247.



$$AB : CD = EF : GH.$$

Построимъ на прямыхъ AB и CD подобныя и подобно расположенныя фигуры KAB и LCD (кн. 6, пред. 18), а на прямыхъ EF и GH

построимъ подобныя и подобно расположенныя фигуры MF и NH. Я говорю, что:

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH.$$

Построимъ къ AB и CD третью пропорціональную X, а къ EF и GH третью пропорціональною Y (кн. 6, пред. 11), т. е.:

$$AB : CD = CD : X \quad , \quad EF : GH = GH : Y,$$

слѣдовательно:

$$CD : X = GH : Y,$$

откуда (кн. 5, пред. 22):

$$AB : X = EF : Y.$$

Но (кн. 6, пред. 20, слѣд. 1):

$$AB : X = \triangle KAB : \triangle LCD$$

и

$$EF : Y = MF : NH,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH.$$

2) Пусть фигуры $\triangle KAB$, $\triangle LCD$, MF, NH будутъ пропорціональны, т. е.:

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH$$

Я говорю, что:

$$AB : CD = EF : GH.$$

Если бы эта пропорція не имѣла мѣста, то мы бы имѣли:

$$AB : CD = EF : QR,$$

гдѣ QR, есть четвертая пропорціональная къ AB, CD, EF (кн. 6, пред. 12). Если на прямой QR построимъ фигуру SR подобную и подобно расположенную фигурамъ MF и NH, то будемъ имѣть, какъ выше показали:

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : SR,$$

Слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$MF:SR=MF:NH,$$

откуда (кн. 5, пред. 9):

$$SR=NH.$$

Но такъ какъ фигура SR подобна фигурамъ MF и NH, то $QR=GH$, слѣдовательно (кн. 5, пред. 7):

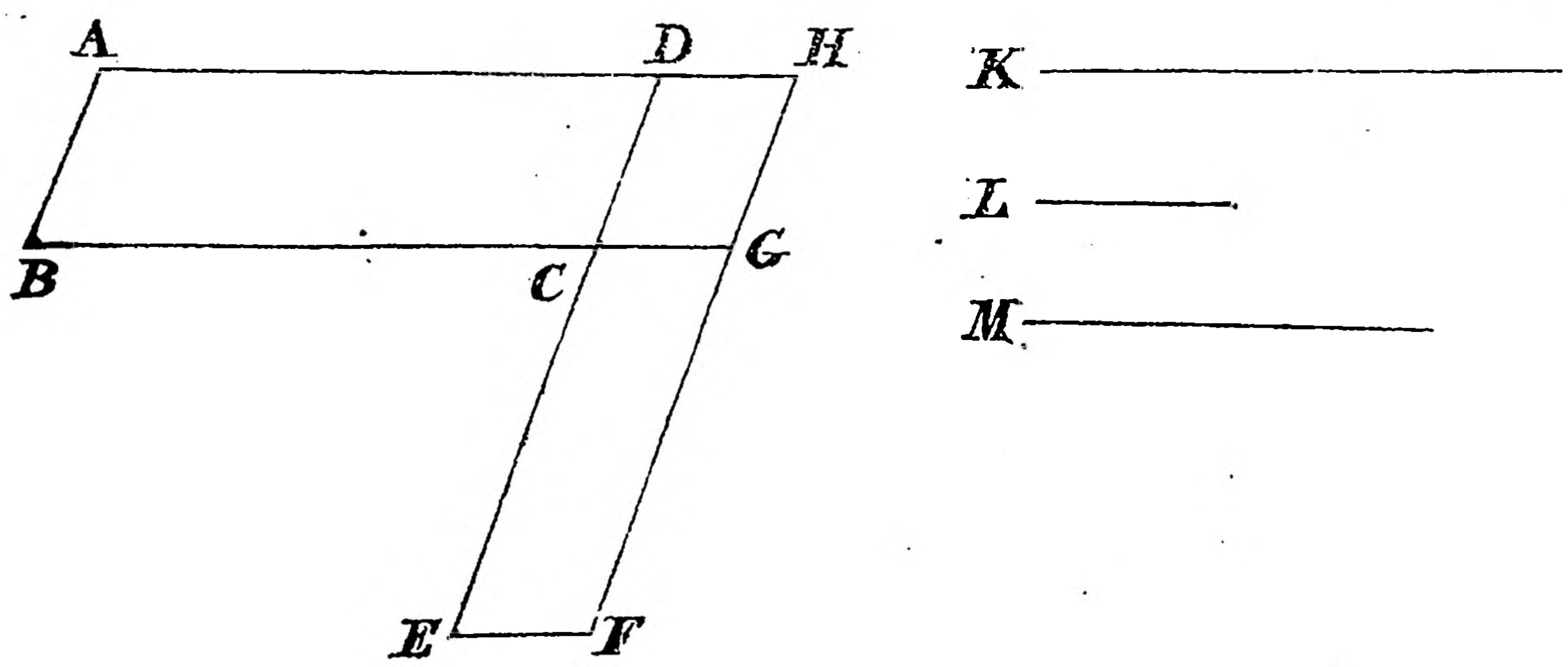
$$AB:CD=EF:GH.$$

Предложеніе 23. Отношеніе равноугольныхъ параллелограмовъ равно составному отношенію ихъ сторонъ (фиг. 248).

Доказат. Пусть равноугольные параллелограмы будутъ AC и CF, коихъ углы BCD и ECG равны. Я говорю, что:

$$AC:CF=\frac{BC}{GC}\cdot\frac{DC}{EC}.$$

Фиг. 248.



Помѣстимъ параллелограмы AC и CF такъ, чтобы стороны BC и GC составляли одну прямую линію BG, то стороны EC и DC будутъ также лежать на одной прямой ED (кн. 1, пред. 14). Построимъ параллелограмъ DG и возьмемъ какую нибудь прямую линію K. Построимъ прямыя линіи L и M, такъ чтобы (кн. 6, пред. 12):

$$BC:GC=K:L \quad \text{и} \quad DC:EC=L:M.$$

Отношеніе K къ M составлено изъ отношеній $K:L$ и $L:M$ (кн. 6, опред. 5), а эти послѣднія отношенія равны отношеніямъ: $BC:GC$ и $DC:EC$, слѣдовательно отношеніе $K:M$ равно составному отношенію изъ сторонъ параллелограмовъ.

Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AC:CH=BC:GC=K:L$$

и

$$CH:CF=DC:EC=L:M$$

слѣдовательно:

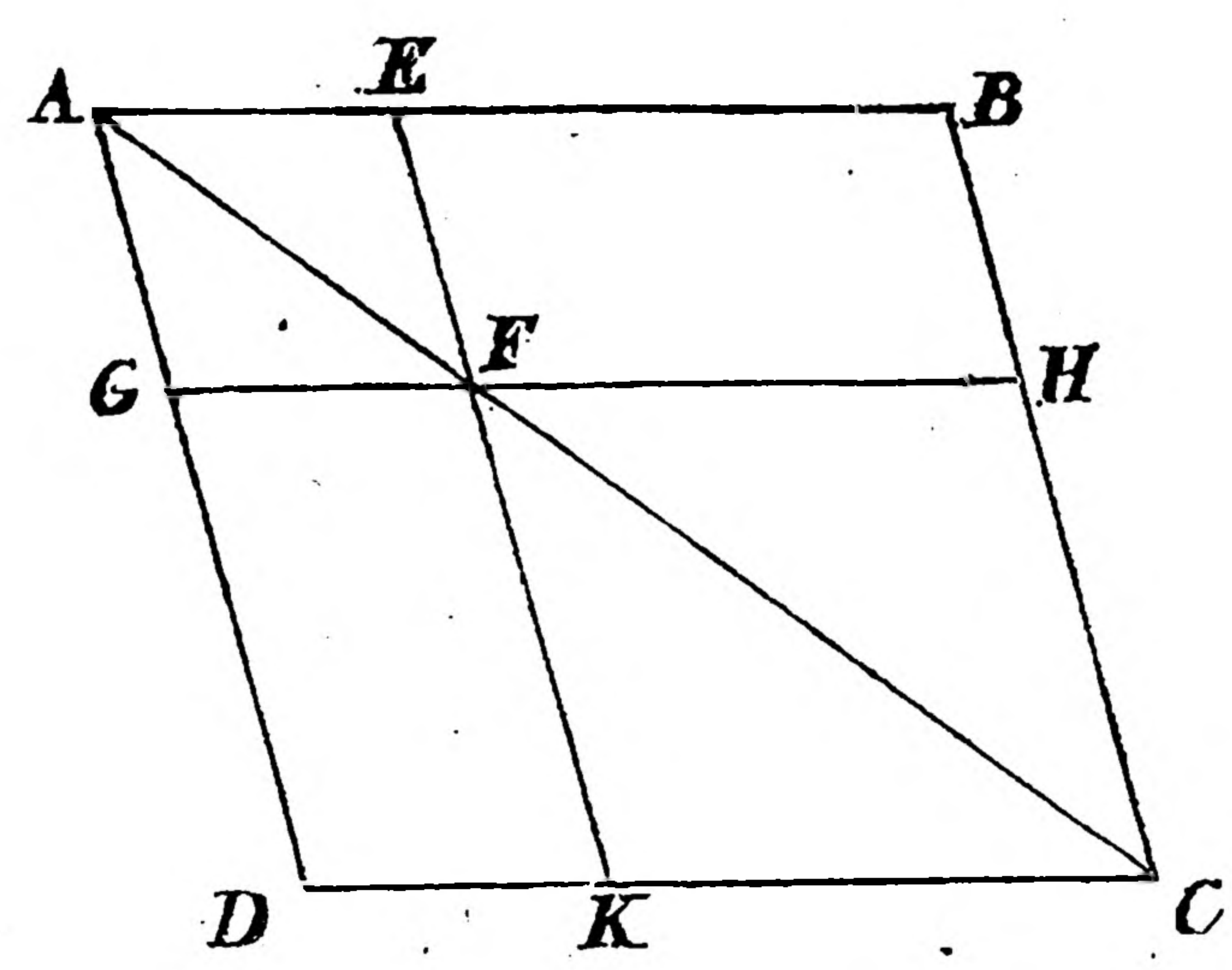
$$AC:CF=\frac{BC}{GC}\cdot\frac{DC}{EC}.$$

Примѣч 18. Это предложеніе можно выразить слѣдующимъ образомъ: площади двухъ равноугольныхъ параллелограмовъ относятся между собою, какъ произведенія изъ сторонъ, заключающихъ равные углы, или такъ какъ треугольники составляютъ половины параллелограмовъ, то площади треугольниковъ, имѣющихъ по равному углу, относятся между собою какъ произведенія изъ сторонъ, заключающихъ равные углы.

Предложеніе 24. Параллелограмы, построенные на діагонали параллелограма, подобны цѣлому параллелограму и подобны между собою (фиг. 249).

Доказат. Пусть $ABCD$ будетъ параллелограмъ, коего діагональ есть AC, и пусть на этой діагонали будутъ построенны параллелограмы EG и HK. Я говорю, что эти параллелограмы подобны цѣлому $ABCD$ и подобны между собою.

Фиг. 249.



Такъ какъ $CD \parallel HG$, то $\angle ADC=\angle AGH$ (кн. 1, пред. 29), точно также $BC \parallel EK$, то $\angle ABC=\angle AEK$. Каждый изъ угловъ BCD, EFG равенъ противуположному углу DAB, слѣдовательно они равны и между собою. Въ треугольникахъ ABC и AEF уголъ EAF общій, $\angle ABC=$ $=\angle AEF$, слѣдовательно они равноугольны, а если равноугольны, то (кн. 6 пред. 4):

$$AB:BC=AE:EF.$$

Но въ параллелограмѣ противуположныя стороны равны, слѣдовательно (кн. 5, пред. 7):

$$AB : AD = AE : AG \quad \text{и} \quad DC : BC = GF : EF$$

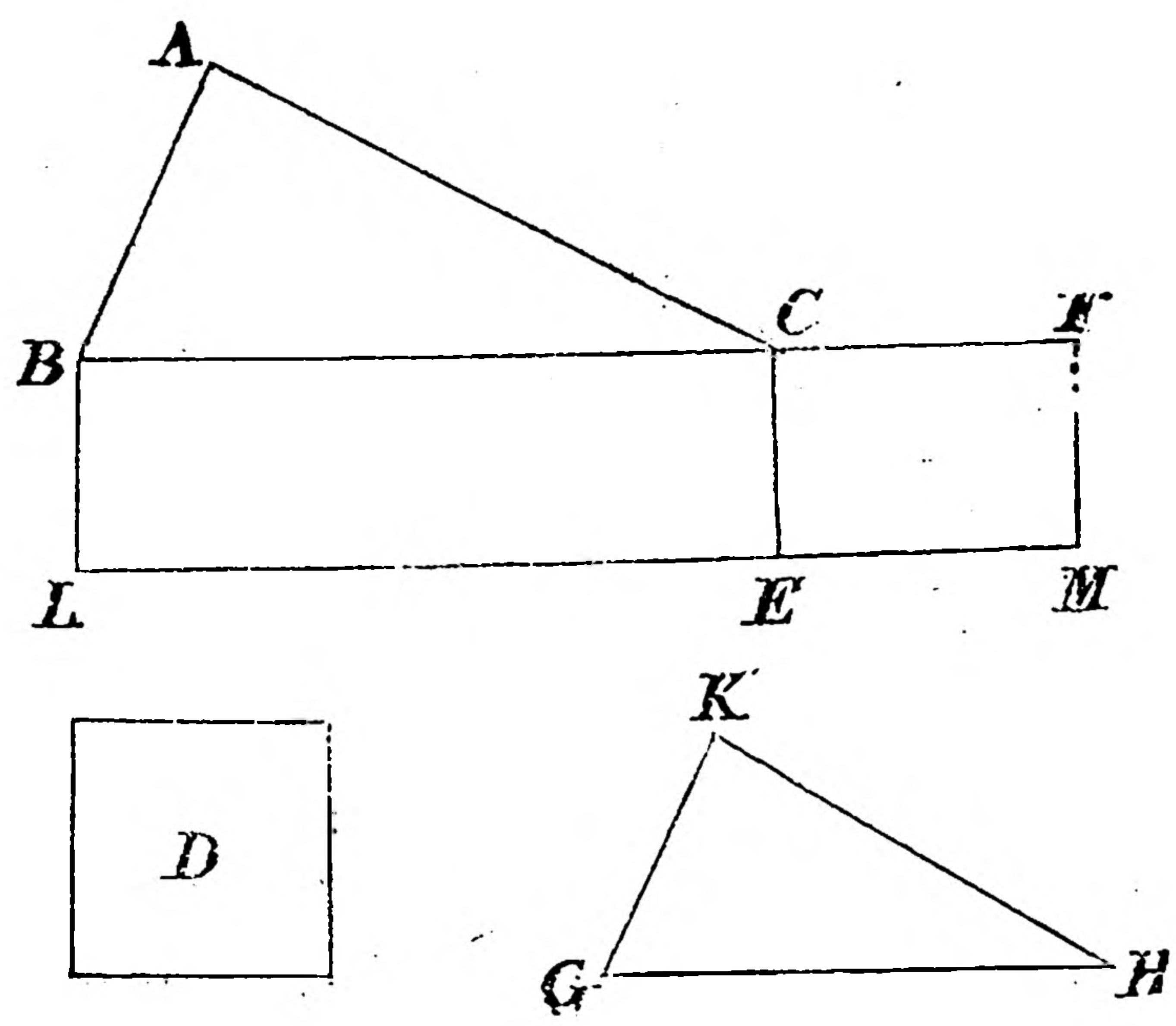
$$CD : AD = FG : AG.$$

Изъ этого видимъ, что стороны въ параллелограмахъ $ABCD$ и $AEFG$, заключающія равные углы, пропорціональны, слѣдовательно (кн. 6, опред. 1) параллелограмы подобны. По той же причинѣ параллелограмъ $ABCD$ подобенъ параллелограму $FHCK$, но каждый изъ параллелограмовъ $AEFG$ и $FHCK$ подобенъ цѣлому $ABCD$, слѣдовательно они подобны и между собою (кн. 6, пред. 21).

Предложеніе 25. Построить многоугольникъ подобный данному и равный другому данному (фиг. 250)?

Рѣшеніе. Пусть ABC будетъ многоугольникъ, которому искомый долженъ быть подобенъ, а D многоугольникъ, которому искомый долженъ быть равенъ.

Фиг. 250.



Если на прямой BC построимъ параллелограмъ $BE = \triangle ABC$ (кн. 1, пред. 44), а на прямой CE подъ угломъ $FCE = \angle CBL$ построимъ параллелограмъ $EF = D$ (кн. 1, пред. 45), то BC и CF, LE и EM лежатъ на одной прямой линіи (кн. 1, пред. 14). Построимъ средне-пропорціональную GH между BC и CF, на ней построимъ треугольникъ KGH подобный треугольнику ABC (кн. 6, пред. 18). Этотъ треугольникъ и будетъ искомый.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$BC : GH = GH : CF,$$

то (кн. 6, пред. 20, слѣд. 2) мы имѣемъ:

$$BC : CF = \triangle ABC : \triangle KGH.$$

Но (кн. 6, пред. 1):

$$BC : CF = BE : EF,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

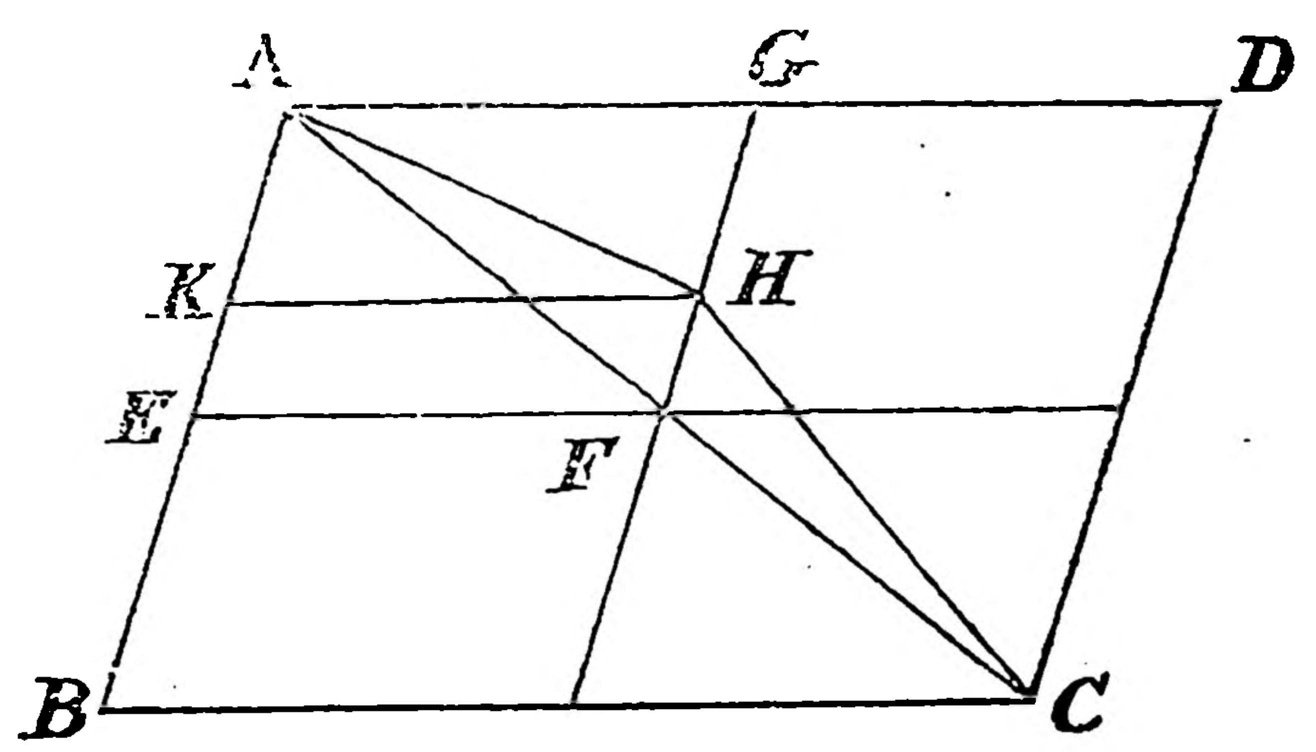
$$\triangle ABC : \triangle KGH = BE : EF.$$

Но такъ какъ по построенію мы имѣемъ $\triangle ABC = BE$, то (кн. 5, пред. 14) $\triangle KGH$, подобный $\triangle ABC$, равенъ $EF = D$.

Предложеніе 26. Если два параллелограма подобны и подобно расположенные имѣютъ общій уголъ, то они лежатъ на одной діагонали (фиг. 251).

Доказат. Въ параллелограмѣ $ABCD$ помѣщенъ параллелограмъ AF, подобный и подобно расположенный параллелограму $ABCD$ и имѣющій съ нимъ общій уголъ GAE. Я говорю, что діагональ AF пройдетъ чрезъ точку C.

Фиг. 251.



Если бы діагональ AC не прошла чрезъ точку F, то она пройдетъ чрезъ какую нибудь точку H на прямой FG. Чрезъ точку H проведемъ $KH \parallel AD$. Такъ какъ параллелограмы $ABCD$ и $AKHG$ лежатъ на одной діагонали, то они будутъ подобны (кн. 6, пред. 24), слѣдовательно:

$$AD : AB = AG : AK.$$

Но параллелограмы $ABCD$ и $AEFG$ подобны по условію, слѣдовательно мы имѣемъ также:

$$AD : AB = AG : AE,$$

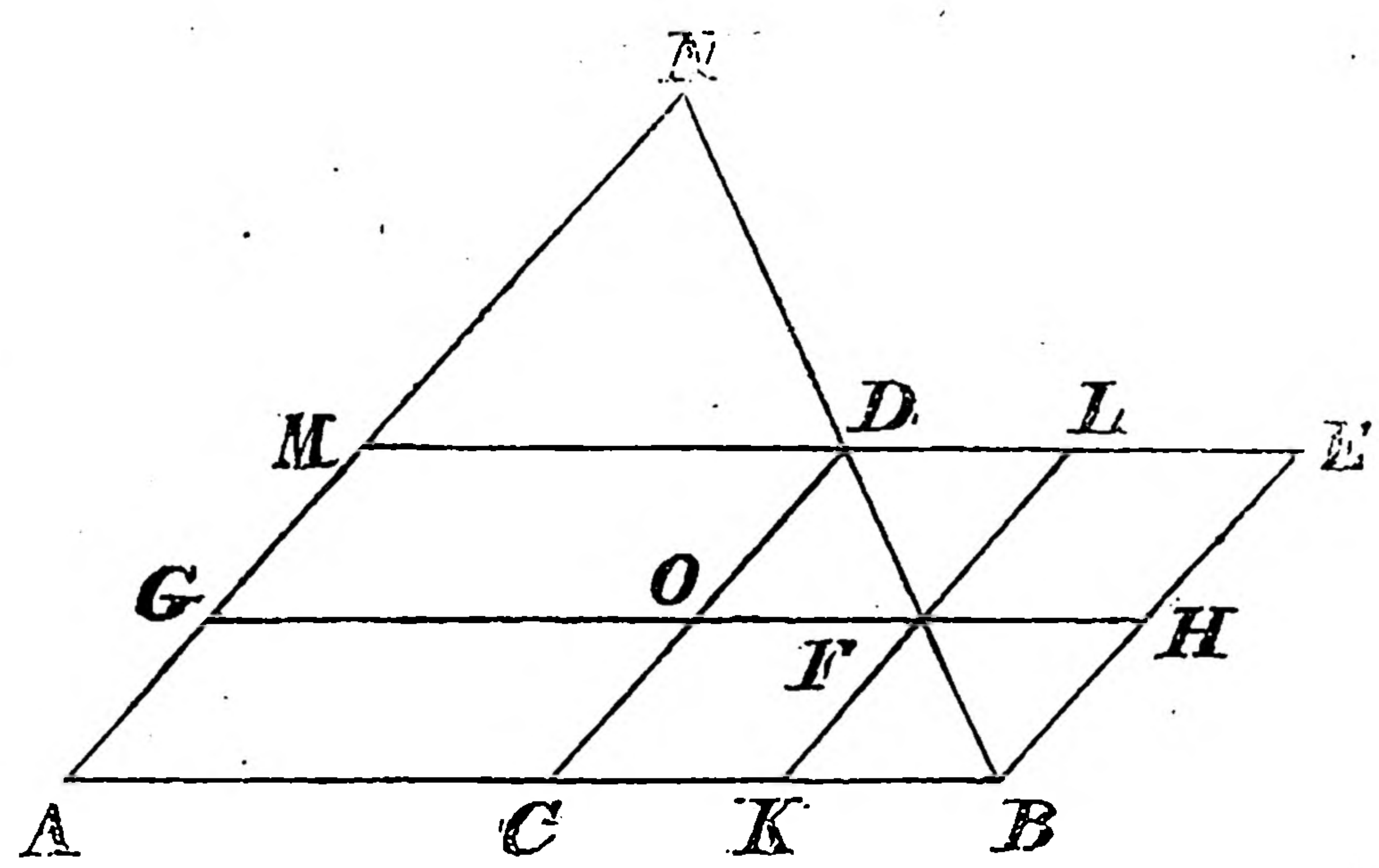
Изъ этихъ двухъ пропорцій видимъ (кн. 5, пред. 9), что $AE = AK$, что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно діагональ AC не можетъ не пройти чрезъ точку F.

Слѣдствіе. Точно также можно показать, что если два параллелограма подобные и подобно расположенные имѣютъ *противуположные* углы въ вершинѣ, то ихъ діагонали составляютъ одну прямую линію.

Предложеніе 27. Изъ всѣхъ параллелограмовъ, которые можно вписать въ данный треугольникъ, *наибольшій* есть тотъ, котораго основаніе есть половина одной изъ сторонъ треугольника (фиг. 252).

Доказат. Пусть ABN будетъ данный треугольникъ, $AC=\frac{1}{2}AB$ и $ACDM$ параллелограмъ, вписанный въ треугольникъ. Пусть $AKFG$ будетъ другой, вписанный въ треугольникъ, параллелограмъ; я говорю, что $AD>AF$.

Фиг. 252.



Построимъ параллелограмъ AE и продолжимъ стороны GF и KF до встрѣчи со сторонами параллелограма AE въ точкахъ H и L.

Такъ какъ $AC=CB$, то $AD=CE$ и $AO=CH$ (кн. 1, пред. 36), но параллелограмы CF и FE суть дополненія параллелограмовъ OL и KH, слѣдовательно $CF=FE$ (кн. 1, пред. 43), откуда весь параллелограмъ AF=гномону LBC. Но параллелограмъ $CE>$гномона LBC, слѣдовательно параллелограмъ $AD=CE>AF$. Точно также можно показать, что параллелограмъ AD больше какого угодно другаго параллелограма, вписаннаго въ треугольникѣ ANB.

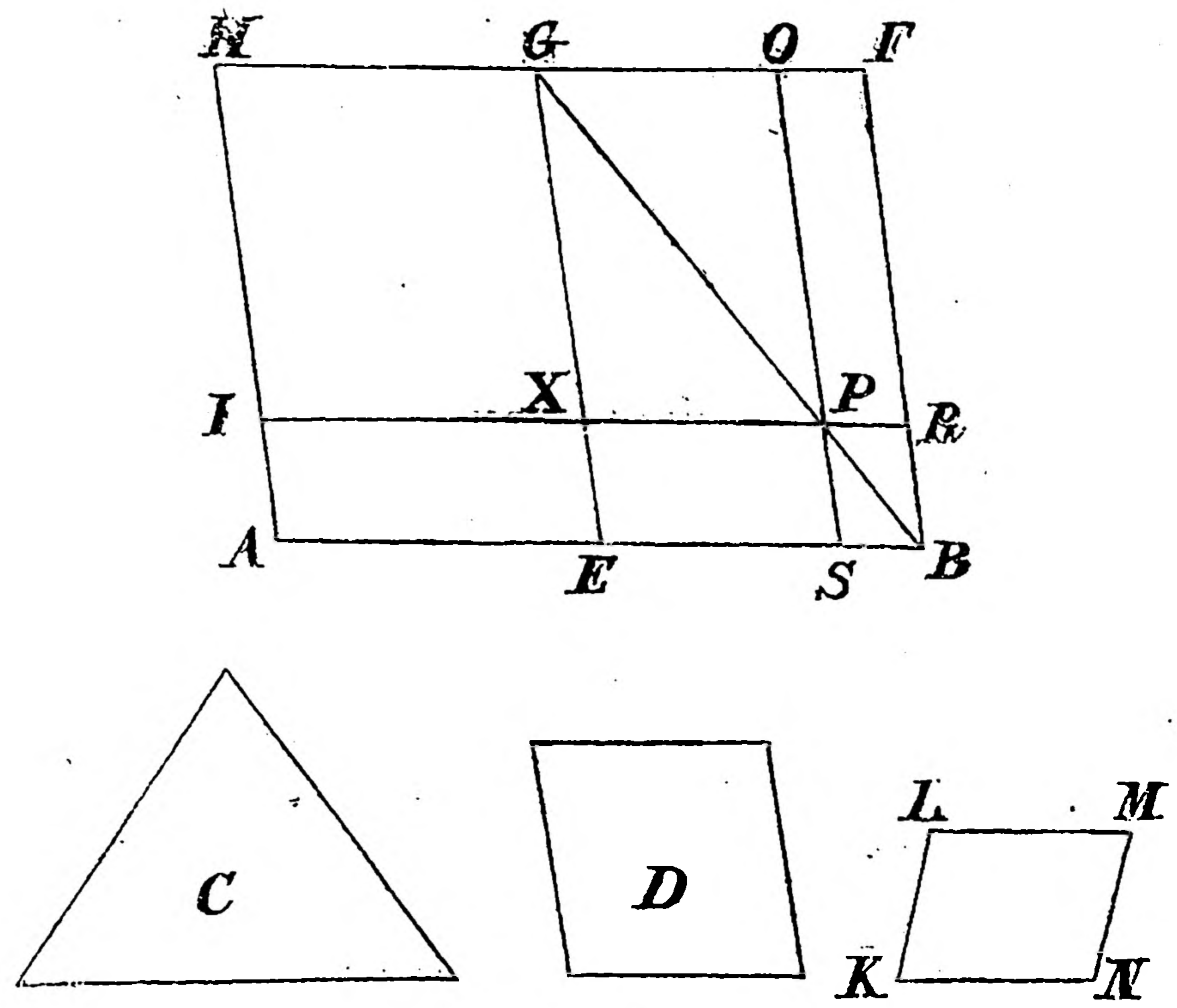
Примѣч. 19. Это предложеніе выражено Евклидомъ въ другой формѣ, но содержаніе предложенія тоже.

Предложеніе 28. Данную прямую линію раздѣлить на такія двѣ части, чтобы изъ двухъ параллелограмовъ, одинаковой высоты, построенныхъ на нихъ, одинъ былъ равенъ данному многоугольнику, а другой подобенъ данному параллелограму (фиг. 253)?

Рѣшеніе. Пусть AB будетъ данная прямая, D данный параллелограмъ и C данный многоугольникъ, который не больше параллелограма подобнаго D, построеннаго на половинѣ AB.

Раздѣлимъ прямую AB въ точкѣ E пополамъ и на EB построимъ (кн. 6, пред 18) параллелограмъ $EBFG$ подобный и подобно расположенный параллелограму D. Дополнимъ его параллелограмомъ AG. Параллелограмъ AG будетъ или равенъ C, или больше его. Если $AG=C$, то задача и рѣшена, т. е. искомая точка на прямой AB будетъ E.

Фиг. 253.



Но если параллелограмъ AG не равенъ C, то HE будетъ больше C, и какъ $HE=GB$, то и $GB>C$.

Построимъ (кн. 6, пред. 25) параллелограмъ KM, равный избытку параллелограма GB надъ C, при томъ подобный и подобно расположенный D. Но параллелограмъ D подобенъ GB, слѣдовательно KM будетъ подобенъ (кн. 6, пред. 21) GB. Пусть прямая KL будетъ сторона, соотвѣтственная сторонѣ EG, а LM сторона, соотвѣтственная GF.

Но такъ какъ параллелограмъ GB равенъ суммѣ C и KM, то $GB>KM$, слѣдовательно прямая $EG>KL$ и $GF>LM$. Возьмемъ $XG=KL$ и $GO=LM$ построимъ параллелограмъ $XGOP$. Очевидно параллелограмъ GP равенъ и подобенъ KM, но KM подобенъ GB, слѣдовательно GP подобенъ GB, по этой причинѣ (кн. 6, пред. 26) ихъ діагонали составляютъ одну прямую линію. Пусть эта діагональ будетъ GPB, если продолжимъ XP и OP, то пусть онѣ встрѣтятъ стороны AH, BF и AB въ точкахъ I, R и S.

Такъ какъ $GB=C+KM$ и $GP=KM$, то гномонъ $OBE=C$ и какъ $OR=XS$ (кн. 1, пред. 43), то, прибавляя по PB, найдемъ, что $OB=XB$. Но $XB=IE$, такъ какъ $AE=EB$, слѣдовательно $IE=OB$. Прибавляя (кн. 1, акс. 1) по XS, найдемъ что IS будетъ равенъ цѣлому гномону OBE, но мы показали выше, что гномонъ $OBE=C$, слѣдовательно и $IS=C$. Откуда видимъ, что прямая AB въ точкѣ S раздѣлена на требуемыя двѣ части.

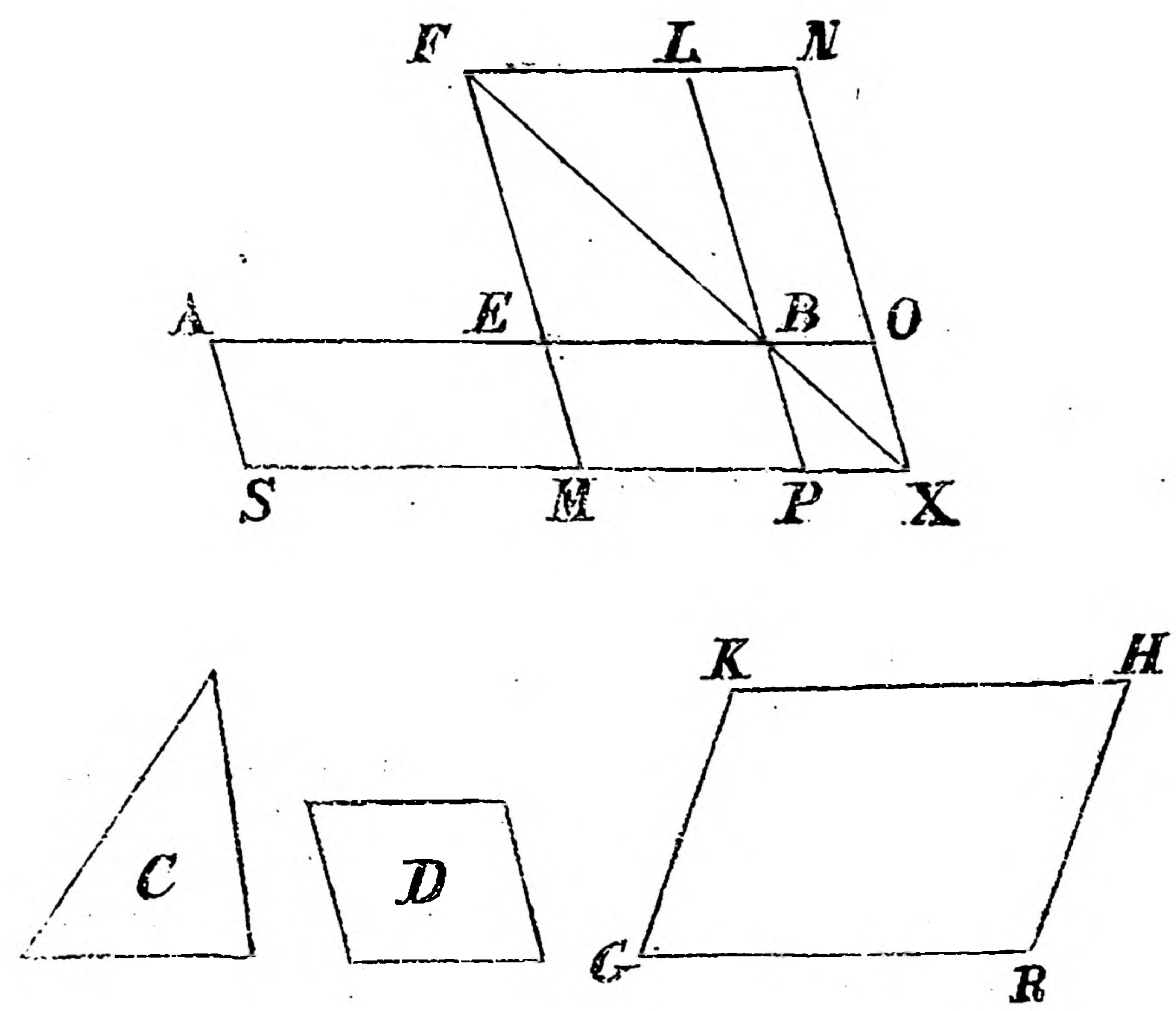
Примѣч. 20. Объ этомъ предложеніи надобно сказать тоже, что сказано въ 19 примѣчаніи.

Вслѣдствіе предъидущаго предложенія, данный многоугольникъ не долженъ быть больше подобнаго параллелограма, построеннаго на половинѣ данной прямой.

Предложеніе 29. Продолжить данную прямую такъ, чтобы на цѣлой прямой съ продолженіемъ и на продолженной части можно было построить два параллелограма равной высоты, изъ коихъ одинъ былъ бы равенъ данному многоугольнику, а другой подобенъ данному параллелограму (фиг. 254)?

Доказат. Пусть AB будетъ данная прямая, C данный многоугольникъ и D данный параллелограмъ. Раздѣлимъ прямую AB въ точкѣ E пополамъ и на EB построимъ параллелограмъ, подобный и подобно расположенный параллелограму D (кн. 6, пред. 18). Построимъ (кн. 6, пред. 25) параллелограмъ GH, равный суммѣ фигуръ FB и C и подобный D, параллелограмъ GH будетъ подобенъ FB (кн. 6, пред. 21).

Фиг. 254.



Пусть KH и HR будутъ стороны, соотвѣтственныя сторонамъ FL и FE. Такъ какъ параллелограмъ GH больше параллелограма FB, то прямая KH будетъ больше FL, а HR больше FE. Продолжимъ FL и FE, сдѣлаемъ $FLN=KH$, а $FEM=HR$ и построимъ параллелограмъ MN. Параллелограмъ MN равенъ и подобенъ GH, но GH подобенъ FB, слѣдовательно (кн. 6, пред. 20) параллелограмы FB и MN имѣютъ общую діагональ. Проведемъ эту діагональ и дополнимъ фигуру.

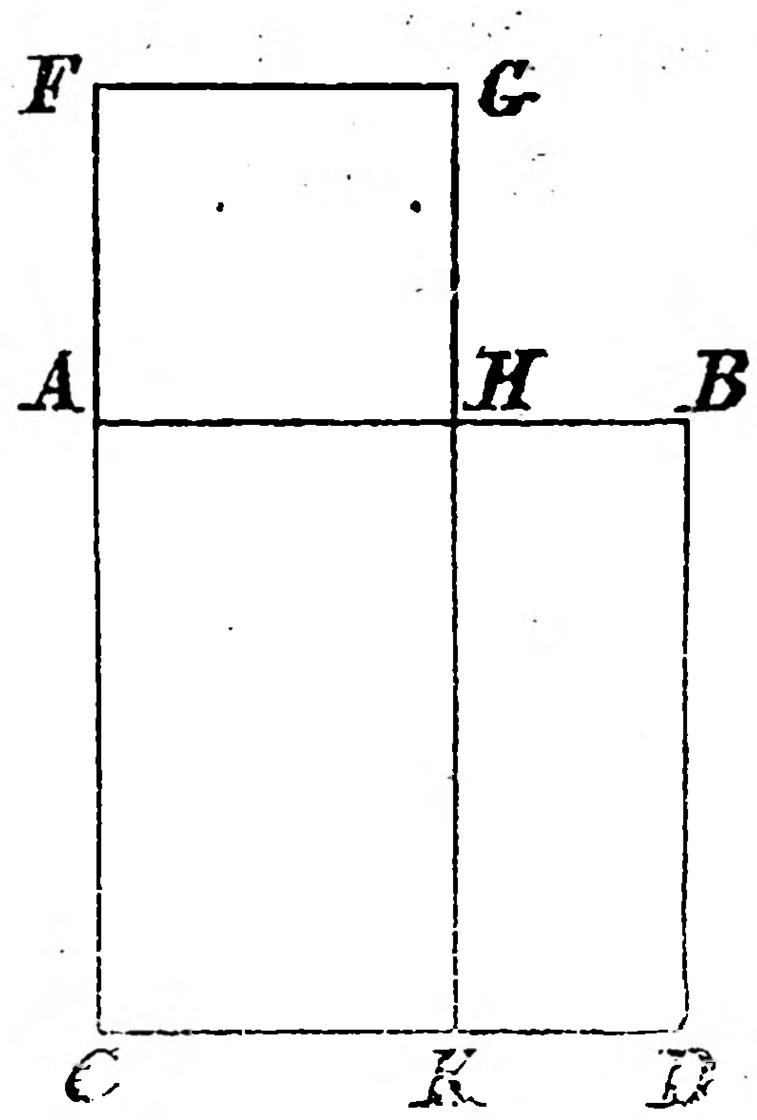
Такъ какъ $GH=EL+C$ и $GH=MN$, то и $MN=EL+C$. Отнимая по EL мы найдемъ, что гномонъ $LXM=C$. Но прямая $AE=EB$, слѣдовательно и параллелограмъ $AM=MB$, т. е. $AM=LO$ (кн. 1, пред. 43). Прибавляя по EX получимъ, что $AX=LXM$, но гномонъ $LXM=C$, слѣдовательно $AX=C$. Откуда видимъ, что искомое продолженіе прямой AB есть BO.

Примѣч. 21. Тоже замѣчаніе, что и 19.

Предложеніе 30. Раздѣлить данную прямую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (фиг. 255)?

Рѣшеніе. Построимъ на данной прямой AB квадратъ BC (кн. 1, пред. 46), а на продолженной прямой AC построимъ параллелограмъ CG, равный квадрату BC и притомъ такъ, чтобы параллелограмъ AG былъ подобенъ квадрату BC (кн. 6, пред. 29).

Фиг. 255.



Такъ какъ BC есть квадратъ, то подобный ему параллелограмъ AG есть также квадратъ. По построенію $BC=CG$, отнимая по CH найдемъ (кн. 1, акс. 3) $KB=AG$. Но KB и AG суть равноугольные параллелограмы, слѣдовательно (кн. 6, пред. 14) стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, т. е. мы имѣемъ:

$$KH:HG=AH:HB$$

но

$$KH=AC=AB \text{ и } HG=AH,$$

слѣдовательно:

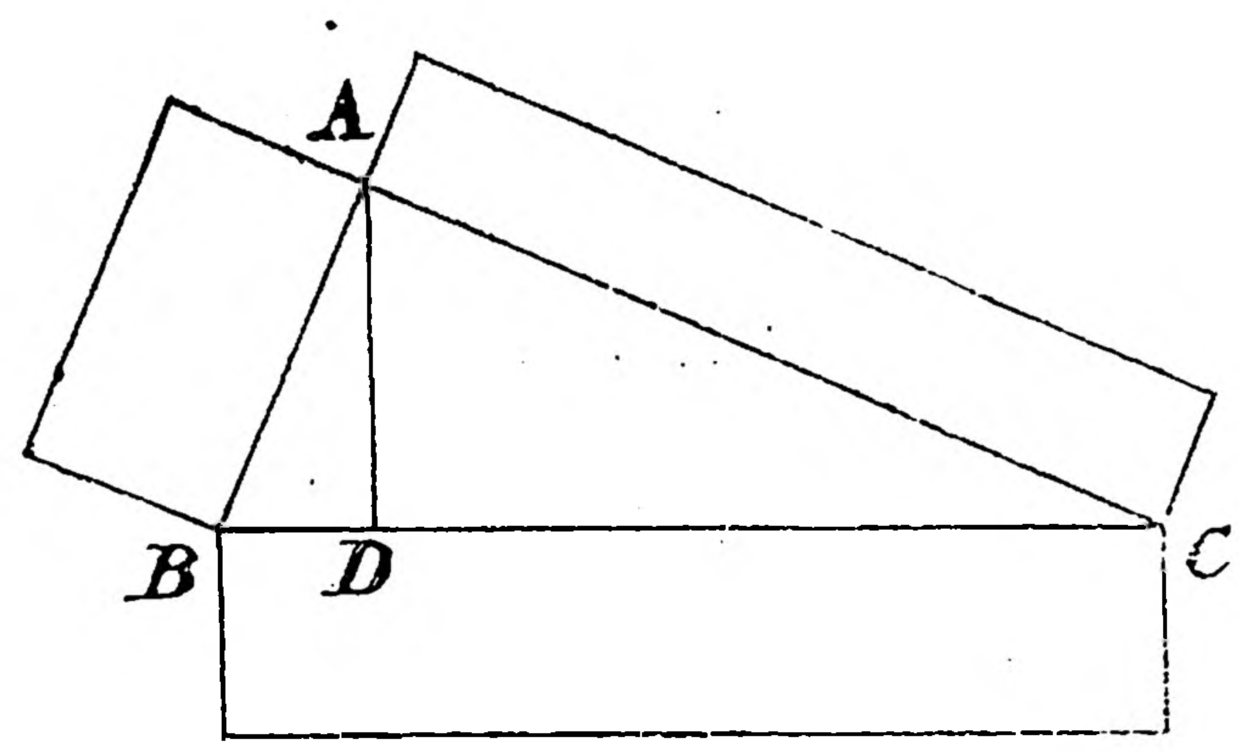
$$AB:AH=AH:HB.$$

Но $AB>AH$, слѣдовательно $AH>HB$, откуда видимъ, что прямая AB въ точкѣ H раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (кн. 6, опред. 3).

Предложеніе 31. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, какая нибудь фигура, построенная на гипотенузѣ, равна суммѣ фигуръ, подобныхъ и подобно расположенныхъ, построенныхъ на катетахъ (фиг. 256).

Доказат. Пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ уголъ BAC прямой. Я говорю, что фигура, построенная на BC, будетъ равна суммѣ фигуръ, построенныхъ на AB и AC, подобныхъ и подобно расположенныхъ фигурѣ, построенной на BC.

Фиг. 256.



Изъ точки A опустимъ на гипотенузу перпендикуляръ AD (кн. 1, пред. 12), то треугольники ABD и ADC будутъ подобны цѣлому ABC и подобны между собою (кн. 6, пред. 8). Изъ подобія треугольниковъ ABC и ABD мы имѣемъ:

$$BC : AB = AB : BD.$$

Такъ какъ три линіи BC, AB, BD пропорціональны, то (кн. 6, пред. 20, слѣд.) первая будетъ такъ относиться къ третьей, какъ фигура, построенная на первой, относится къ подобной и подобно расположенной фигурѣ, построенной на второй, т. е.

$$BC : BD = \text{фиг. на } BC : \text{фиг. на } AB.$$

По той же причинѣ:

$$BC : DC = \text{фиг. на } BC : \text{фиг. на } AC.$$

Откуда (кн. 5, пред. 24):

$$BC : BD + DC = \text{фиг. на } BC : \text{фиг. на } AB + \text{фиг. на } AC$$

но $BC = BD + DC$, слѣдовательно:

$$\text{фиг. на } BC = \text{фиг. на } AB + \text{фиг. на } AC.$$

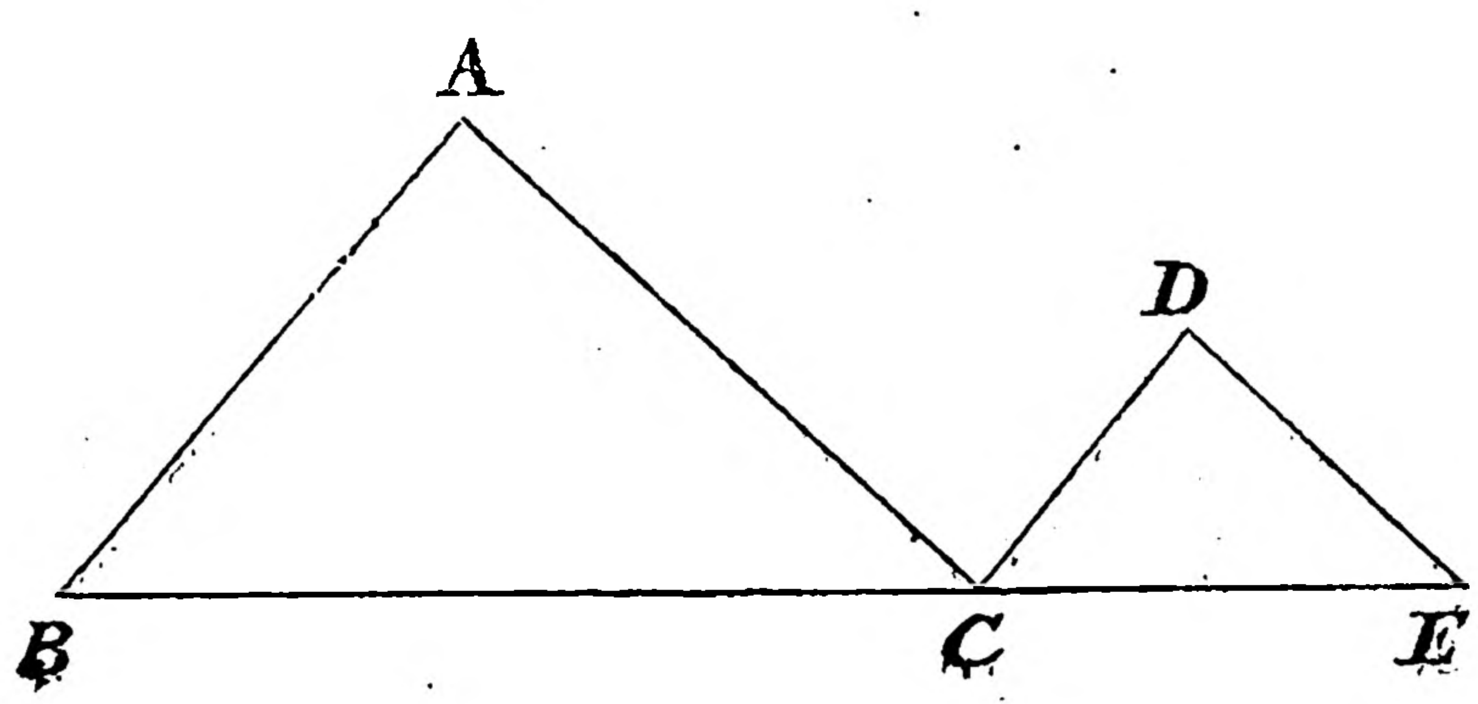
Предложеніе 32. Если двѣ стороны одного треугольника пропорціональны двумъ сторонамъ другаго треугольника и если ихъ вершины такъ соединены въ одной точкѣ, что соотвѣтственныя стороны параллельны, то остальныя стороны будутъ составлять одну прямую линію (фиг. 257).

Доказат. Пусть два треугольника ABC и DCE имѣютъ общую вершину C и стороны BA и AC пропорціональны сторонамъ CD и DE, т. е.

$$BA:AC=CD:DE$$

и $BA \parallel CD$, а $AC \parallel DE$. Я говорю, что прямыя BC и CE составляютъ одну прямую линію BE.

Фиг. 257.



Такъ какъ $BA \parallel CD$, то $\angle BAC=\angle ACD$ (кн. 1, пред. 29); по той же причинѣ $\angle CDE=\angle ACD$, слѣдовательно $\angle BAC=\angle CDE$. Но въ треугольникахъ ABC и DCE $\angle A=\angle D$ и эти углы, по условію, заключены между пропорціональными сторонами, слѣдовательно треугольники будутъ равноугольны (кн. 6, пред. 6), откуда $\angle ABC=\angle DCE$. Но мы также показали, что $\angle ACD=\angle BAC$, слѣдовательно цѣлый уголъ $\angle ACE=\angle ABC+\angle BAC$; прибавляя же по углу ACB, найдемъ, что:

$$\angle ACE+\angle ACB=\angle BAC+\angle ACB+\angle ABC.$$

Но

$$\angle BAC+\angle ACB+\angle ABC=2d,$$

слѣдовательно и

$$\angle ACE+\angle ACB=2d,$$

а потому (кн. 1, пред. 24) прямыя BC и CE составляютъ одну прямую линію.

Примѣч. 22. Это предложеніе нигдѣ не прилагается и кромѣ того оно не точно. Въ самомъ дѣлѣ, продолжимъ сторону ED такъ, чтобы продолженіе DF было равно ED и соединимъ F съ C. Полученный треугольникъ CDF удовлетворяетъ предложенію Евклида точно такъ же, какъ и треугольникъ DCE, но CF и CB не составляютъ одной прямой линіи. Чтобы предложеніе было точно, необходимо прибавить, что основанія должны лежать на соотвѣтственныхъ сторонахъ обѣихъ параллельныхъ. Основанія CF и CB не лежатъ на соотвѣтственныхъ сторонахъ параллельныхъ AB и CD, поэтому треугольникъ CDF не удовлетворяетъ условію и долженъ быть выключенъ.

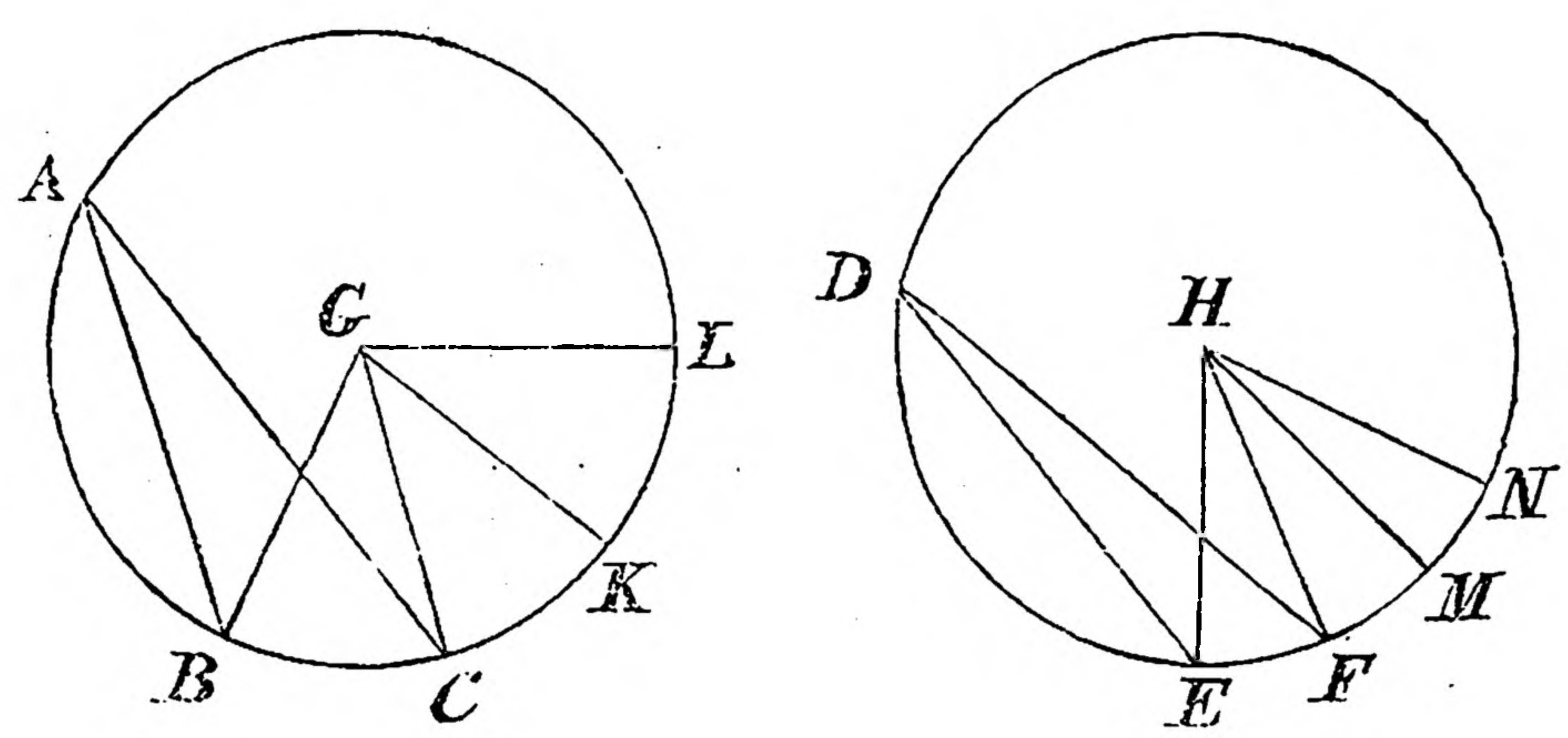
Предложеніе 33. Въ двухъ равныхъ кругахъ, или въ одномъ кругѣ углы, имѣющіе вершины свои на окружностяхъ или въ центрахъ, имѣютъ между собою такое же отношеніе, какъ и стягиваемыя ими дуги; тоже отношеніе имѣютъ между собою и секторы.

Доказат. 1) Пусть въ равныхъ кругахъ, ABC и DEF, будутъ углы BGC и EHF, имѣющіе вершины въ центрахъ G и H, и углы BAC и EDF углы, имѣющіе свои вершины на окружностяхъ (фиг. 258). Я говорю, что:

$$\text{дуг.}BC : \text{дуг.}EF = \angle BGC : \angle EHF$$

$$\angle BAC : \angle EDF = \text{сек.}BGC : \text{сек.}EHF.$$

Фиг. 258.



Возьмемъ какое угодно число дугъ KC, KL,... равныхъ дугѣ BC и также точно возьмемъ сколько угодно дугъ FM, MN,... равныхъ дугѣ EF и проведемъ прямыя GK, GL,... HM, HN,... Такъ какъ дуги BC, CK, KL равны между собою, то и углы BGC, CGK, KGL также равны между собою (кн. 3, пред. 27), слѣдовательно какой кратности дуга LB дуги BC, такой кратности уголъ BGL будетъ угла BGC; по той же причинѣ дуга NE будетъ такой же кратности дуги EF, какой кратности уголъ EHN угла EHF. И если дуга $BL \lesseqgtr$ дуги EN, то $\angle BGL \lesseqgtr \angle EHN$, слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$\text{дуг.}BC : \text{дуг.}EF = \angle BGC : \angle EHF.$$

Но углы BGC и EHF вдвое больше угловъ BAC и EDF (кн. 3, пред. 20), слѣдовательно (кн. 5, пред. 15):

$$\angle BGC : \angle EHF = \angle BAC : \angle EDF,$$

откуда:

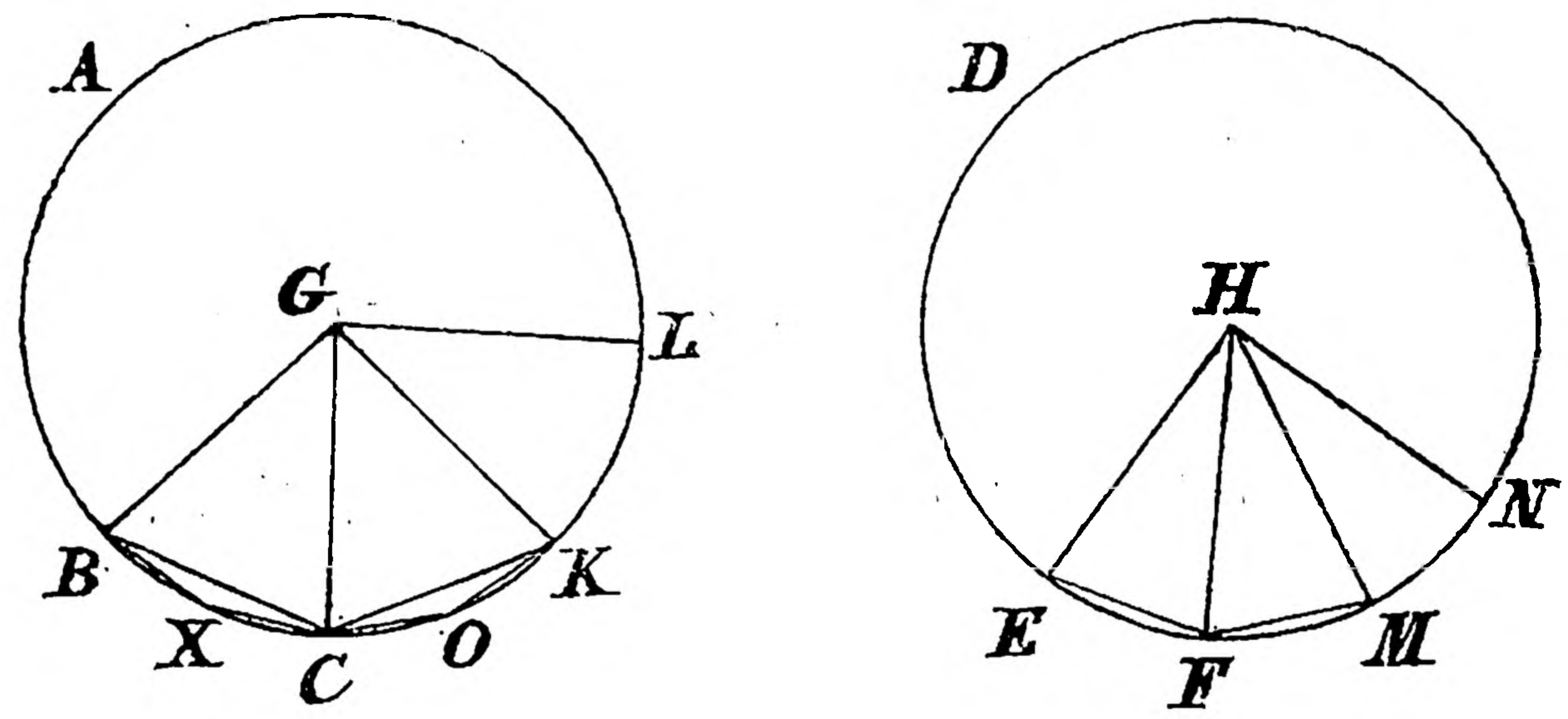
$$\text{дуг.}BC : \text{дуг.}EF = \angle BAC : \angle EDF.$$

2) Я говорю еще, что:

$$\text{дуг.}BC : \text{дуг.}EF = \text{сек.}BGC : \text{сек.}EHF.$$

Соединимъ B съ C и C съ K и возьмемъ на дугахъ BC и CK точки X и O, проведемъ хорды BX, XC, CO, OK (фиг. 259).

Фиг. 259.



Такъ какъ въ треугольникахъ BGC и CGK сторона GC общая, $GB = GK$ (кн. 1, опред. 15) и $\angle BGC = \angle CGK$, то $\triangle BGC = \triangle CGK$ (кн. 1, пред. 26). Изъ равенства треугольниковъ мы имѣемъ хорд.BC = хорд.CK, слѣдовательно (кн. 3, пред. 28) дуг.BC = дуг.CK. Такъ какъ дуги BC и CK равны, то и дуги, дополняющія ихъ до цѣлой окружности, будутъ также равны, слѣдовательно $\angle BXC = \angle COK$ (кн. 3, пред. 27) и сегментъ BXC подобенъ сегменту COK (кн. 3, опред. 2); но эти сегменты лежатъ на равныхъ хордахъ BC и CK, слѣдовательно (кн. 3, пред. 24) сег.BXC = сег.COK; но треугольники BGC и CGK равны, слѣдовательно и

$$\text{сек.}BGC = \text{сек.}CGK.$$

По той же причинѣ:

$$\text{сек.}KGL = \text{сек.}CGK,$$

слѣдовательно секторы BGC, CGK, KGL равны между собою. Точно также и секторы HEF, HFM, HMN равны между собою. Слѣдовательно какой кратности дуга BL дуги BC, такой кратности будетъ секторъ BGL сектора BGC; по той же причинѣ, какой кратности дуга NE дуги EF, такой же будетъ кратности секторъ EHN сектора EHF. Откуда видимъ, что если:

$$\text{дуг.}BL \lesseqgtr \text{дуг.}EN,$$

то

$$\text{сек.}BGL \lesseqgtr \text{сек.}EHN$$

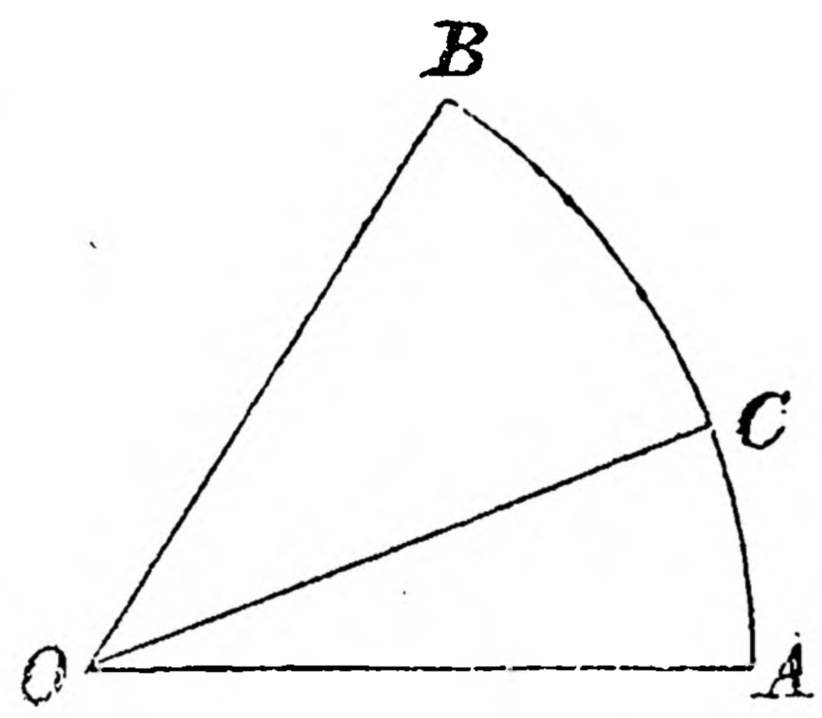
слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$\text{дуг.}BC : \text{дуг.}EF = \text{сек.}BGC : \text{сек.}EHF.$$

Примѣч. 23. Настоящее предложеніе можно доказать еще на основаніи опредѣленія пропорціональности, изложеннаго въ примѣчаніи 5, книги 5.

Пусть данные два угла будутъ AOB и AOC (фиг. 260), изъ общей ихъ вершины O, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ опишемъ дугу ACB, раздѣлимъ дугу, напримѣръ,

Фиг. 260.



AC, на произвольное число n равныхъ частей и точки дѣленія соединимъ съ центромъ O прямыми линіями, (кн. 3, пред. 27) уголъ AOC раздѣлится также на n равныхъ частей.

Если теперь возьмемъ одно изъ дѣленій дуги AC и будемъ его намѣчать отъ точки C по дугѣ BC, то вообще мы найдемъ такое число m, что:

$$\frac{m}{n}\,\text{дуг.}AC \leqq \text{дуг.}\ AB < \frac{m+1}{n}\,\text{дуг.}AC.$$

Очевидно что мы будемъ также имѣть:

$$\frac{m}{n}\angle AOC \leqq \angle AOB < \frac{m+1}{n}\angle AOC.$$

Такъ какъ эти неравенства существуютъ при какомъ угодно числѣ n, то мы имѣемъ (кн. 5, прим. 4).

$$\text{дуг.}AB : \text{дуг.}AC = \angle AOB : \angle AOC.$$

т. е. *мѣра дуги AB, когда дуга AC принята за единицу, равна мѣрѣ угла AOB, когда уголъ AOC принятъ за единицу.* Поэтому часто говорятъ неправильно; что уголъ AOB измѣряется дугою AB, вмѣсто того чтобы сказать, что дуга AB и уголъ AOB имѣютъ одну мѣру.

Въ доказательствѣ этого предложенія уголъ BGL можетъ быть какимъ угодно кратнымъ угла BGC (фиг. 259), слѣдовательно можетъ быть больше, на сколько угодно, прямаго угла. Слѣдовательно здѣсь неявно, Евклидъ оставляетъ ограниченіе, что разсматриваемые въ Геометріи углы всегда меньше двухъ прямыхъ.

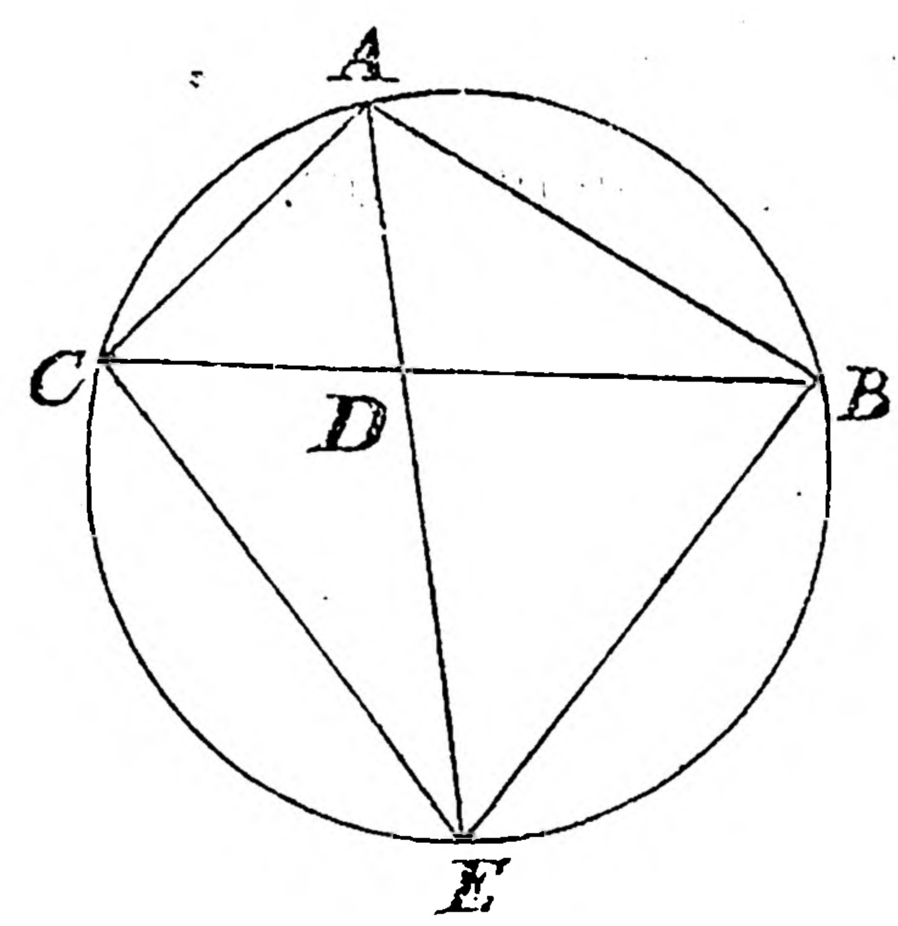
Слѣдующія три предложенія прибавлены Симсономъ, изъ нихъ третье, самое важное, встрѣчается у Птоломея въ *Μεγάλη Σύνταξις*.

Предлож. α. Если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ раздѣленъ пополамъ и продолжимъ равнодѣлящую до встрѣчи съ противулежащей стороной, то прямоугольникъ, построенный изъ сторонъ взятаго угла, будетъ равенъ прямоугольнику, построенному изъ отрѣзковъ основанія вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на равнодѣлящей уголъ (фиг. 261).

Доказат. Пусть ABC будетъ треугольникъ, коего уголъ BAC раздѣленъ прямою AD пополамъ. Я говорю, что прямоугольникъ, построенный изъ сторонъ AB и AC, равенъ прямоугольнику изъ отрѣзковъ BD и DC съ квадратомъ, построеннымъ на AD, т. е.:

$$AB \,.\, AC = BD \,.\, DC + \square AD.$$

Фиг. 261.



Около даннаго треугольника ABC опишемъ кругъ (кн. 4, пред. 5) и продолжимъ равнодѣлящую AD до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ E, соединимъ C съ E.

Такъ какъ $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle ABD = \angle AEC$ (кн. 3, пред. 21), то треугольники ABD и AEC равноугольны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$BA : AD = EA : AC,$$

а слѣдовательно прямоугольникъ изъ AB и AC равенъ прямоугольнику изъ AD и EA (кн. 6, пред. 16), т. е.:

$$AB \,.\, AC = AD \,.\, AE,$$

или

$$AB \,.\, AC = DE \,.\, AD + \square AD,$$

но (кн. 3, пред. 35):

$$DE \,.\, AD = BD \,.\, DC,$$

слѣдовательно:

$$AB \,.\, AC = BD \,.\, DC + \square AD.$$

Предлож. b. Если изъ вершины какого нибудь угла треугольника опустимъ перпендикуляръ на противулежащую сторону, то прямоугольникъ изъ сторонъ взятаго угла будетъ равенъ прямоугольнику изъ перпендикуляра и діаметра круга, описаннаго около треугольника (фиг. 262):

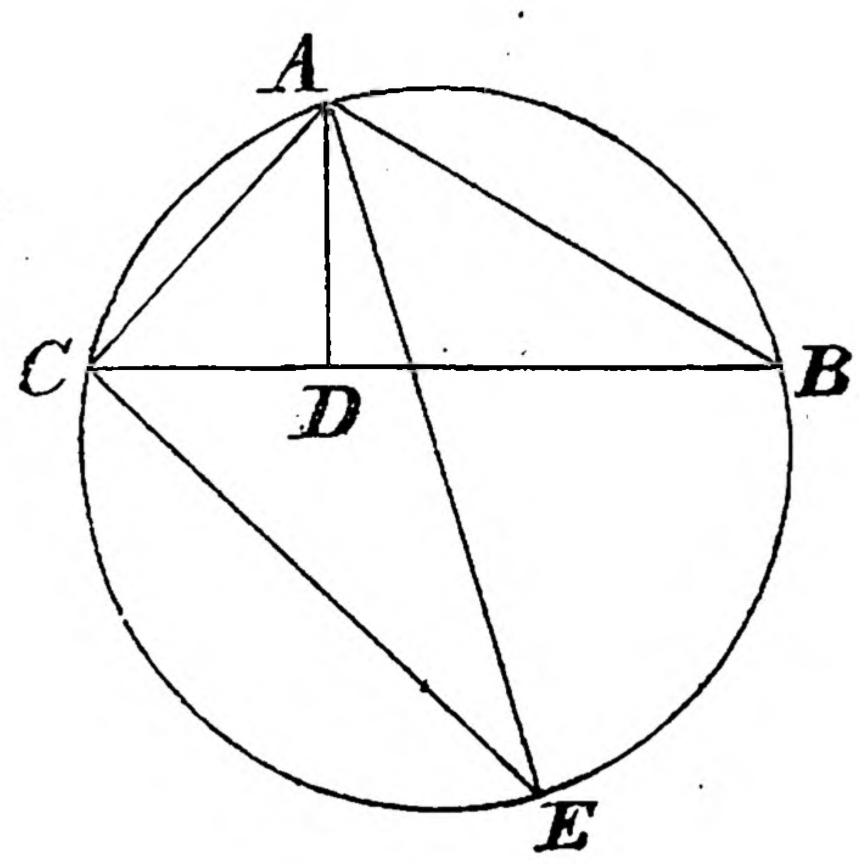
Доказат. Пусть изъ вершины угла BAC треугольника ABC опущенъ перпендикуляръ AD на сторону BC. Я говорю, что:

$$AB \,.\, AC = AD \,.\, AE.$$

Такъ какъ прямой уголъ $BDA = \angle ECA$ (кн. 3, пред. 31). AE есть діаметръ, и

$\angle ABD = \angle AEC$, какъ вписанные въ одинъ и тотъ же сегментъ, то треугольники ABD и AEC равноугольны, а если равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):

Фиг. 262.



$$AB : AD = AE : AC,$$

откуда:

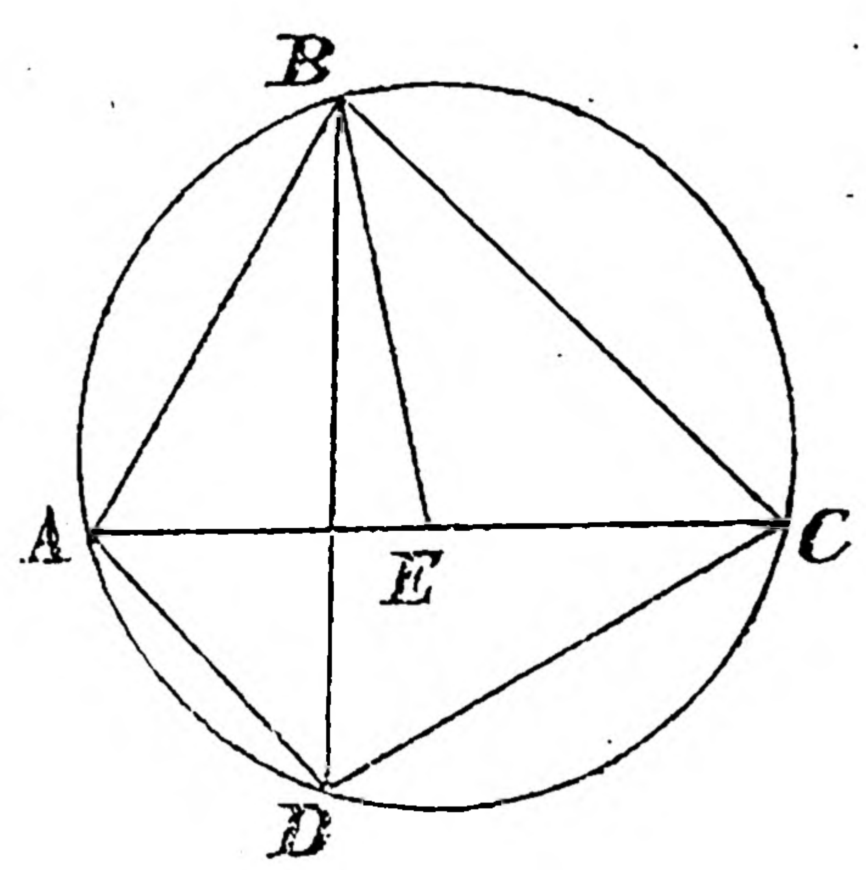
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

Предлож. c. Если, какой нибудь, четыреугольникъ вписанъ въ кругъ, то прямоугольникъ изъ діагоналей равенъ суммѣ прямоугольниковъ изъ противулежащихъ сторонъ (фиг. 263).

Доказат. Пусть $ABCD$ вписанный въ кругъ четыреугольникъ, проведемъ діагонали AC и BD. Я говорю, что:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC.$$

Фиг. 263.



Построимъ $\angle ABE = \angle DBC$ (кн. 1, пред. 23) и отнимемъ по углу EBD, то (кн. 1, акс. 2) $\angle ABD = \angle EBC$; но уголъ $BDA = \angle BCE$ (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно треугольники ABD и BCE равноугольны, а если эти треугольники равноугольны, то:

$$BD : AD = BC : CE,$$

откуда прям. $BD \cdot CE =$ прям. $AD \cdot BC$ (кн. 6, пред. 16). Уголъ $ABE = \angle DBC$ и $\angle BAE = \angle BDC$ (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно треугольники ABE и BCD равноугольны, а если они равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):

$$BD : DC = BA : AE$$

откуда:

$$\text{прям.}BA \,.\, DC = \text{прям.}BD \,.\, AE.$$

Но мы доказали, что прям. $BC \,.\, AD = \text{прям.}BD \,.\, CE$, слѣдовательно:

$$\text{прям.}BC \,.\, AD + \text{прям.}BA \,.\, DC = \text{прям.}BD \,.\, CE + \text{прям.}BD \,.\, AE$$

т. е.:

$$\text{прям.}BD \,.\, AC = \text{прям.}BC \,.\, AD + \text{прям.}BA \,.\, DC.$$

ПРИБАВЛЕНІЯ.

I. О многоугольникахъ.

Евклидъ въ четвертой книгѣ показалъ какъ построить правильные многоугольники въ кругѣ трехъ, четырехъ, пяти, шести и пятнадцати сторонъ, а мы въ шестомъ примѣчаніи, той же книги, замѣтили, что съ помощью построеній, данныхъ Евклидомъ, можно легко построить правильные многоугольники въ кругѣ 8, 10, 12, 16, 20, 24, 30, ... сторонъ. Въ настоящемъ прибавленіи я изложу подробнѣе свойства многоугольниковъ, которыя намъ послужатъ основаніемъ изложенія той части плоской геометріи, которая не находится у Евклида, именно: разысканіе числовой зависимости между радіусомъ и окружностью, между радіусомъ и площадью круга, задача извѣстная въ геометріи подъ именемъ *квадратуры круга.*

Пусть A_1, A_2, A_3, . . , A_m будутъ m точекъ, расположенныхъ, въ какомъ угодно порядкѣ, на плоскости.

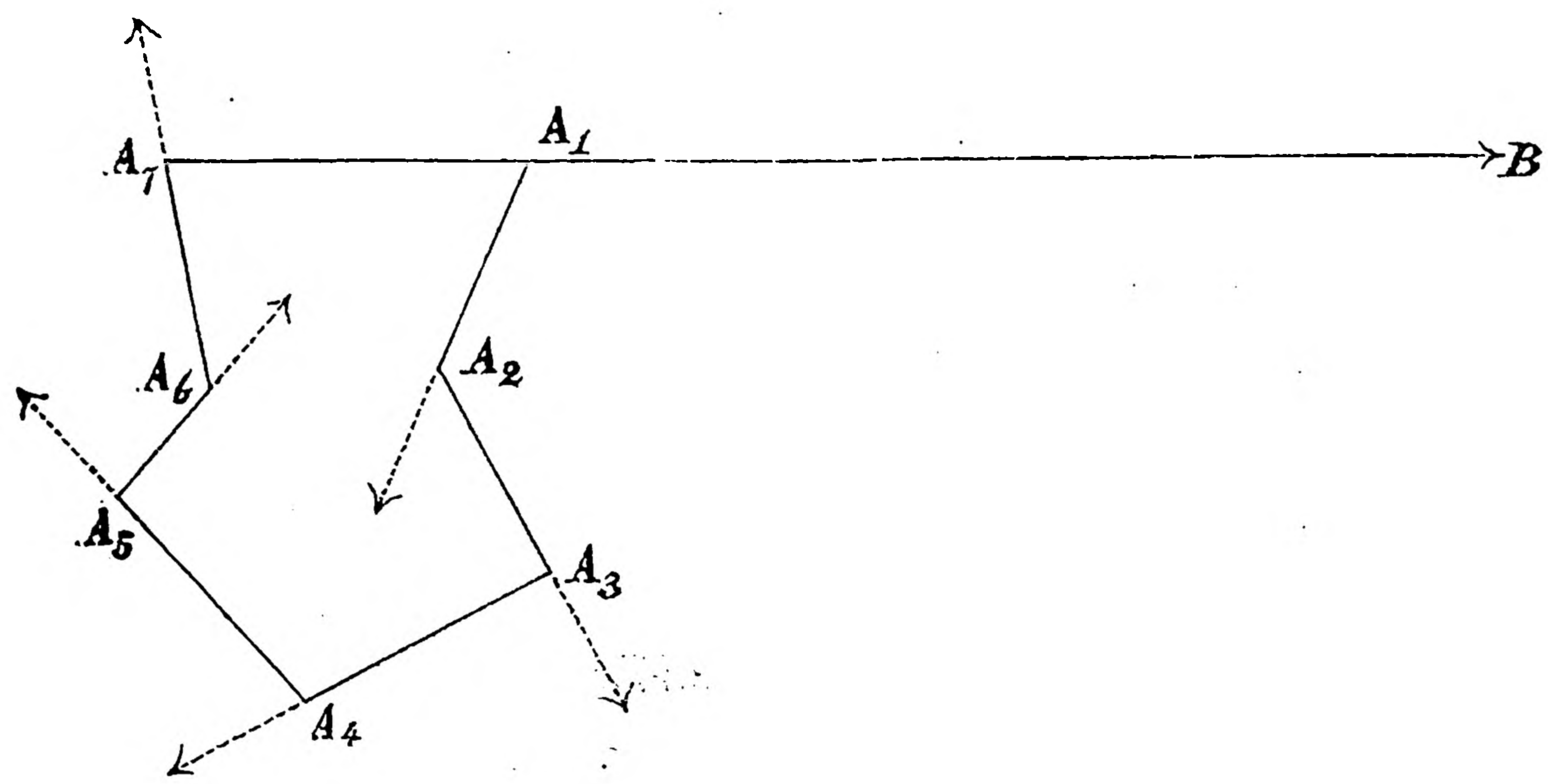
Многоугольникомъ вообще называютъ фигуру, образованную непрерывнымъ рядомъ прямыхъ A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, . . , съ условіемъ, чтобы фигура была замкнутая, т. е. чтобы послѣдняя прямая была A_mA_1.

Къ каждой изъ точекъ A, въ такой фигурѣ, примыкаютъ двѣ прямыя, которыя образуютъ въ этой точкѣ два угла, коихъ сумма равна $4d$. Какъ одни такъ и другіе, изъ этихъ угловъ, принадлежатъ многоугольнику, но какіе m, изъ этихъ $2m$ угловъ, считать за углы даннаго многоугольника, это, подъ извѣстнымъ условіемъ, остается совершенно произвольнымъ.

Вотъ какъ опредѣляются тѣ углы, которые принимаются за углы многоугольника.

Возьмемъ, напримѣръ, многоугольникъ $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ (фиг. 264), продолжимъ одну изъ его сторонъ, напримѣръ, A_2A_1, такъ чтобы продолженіе

Фиг. 264.



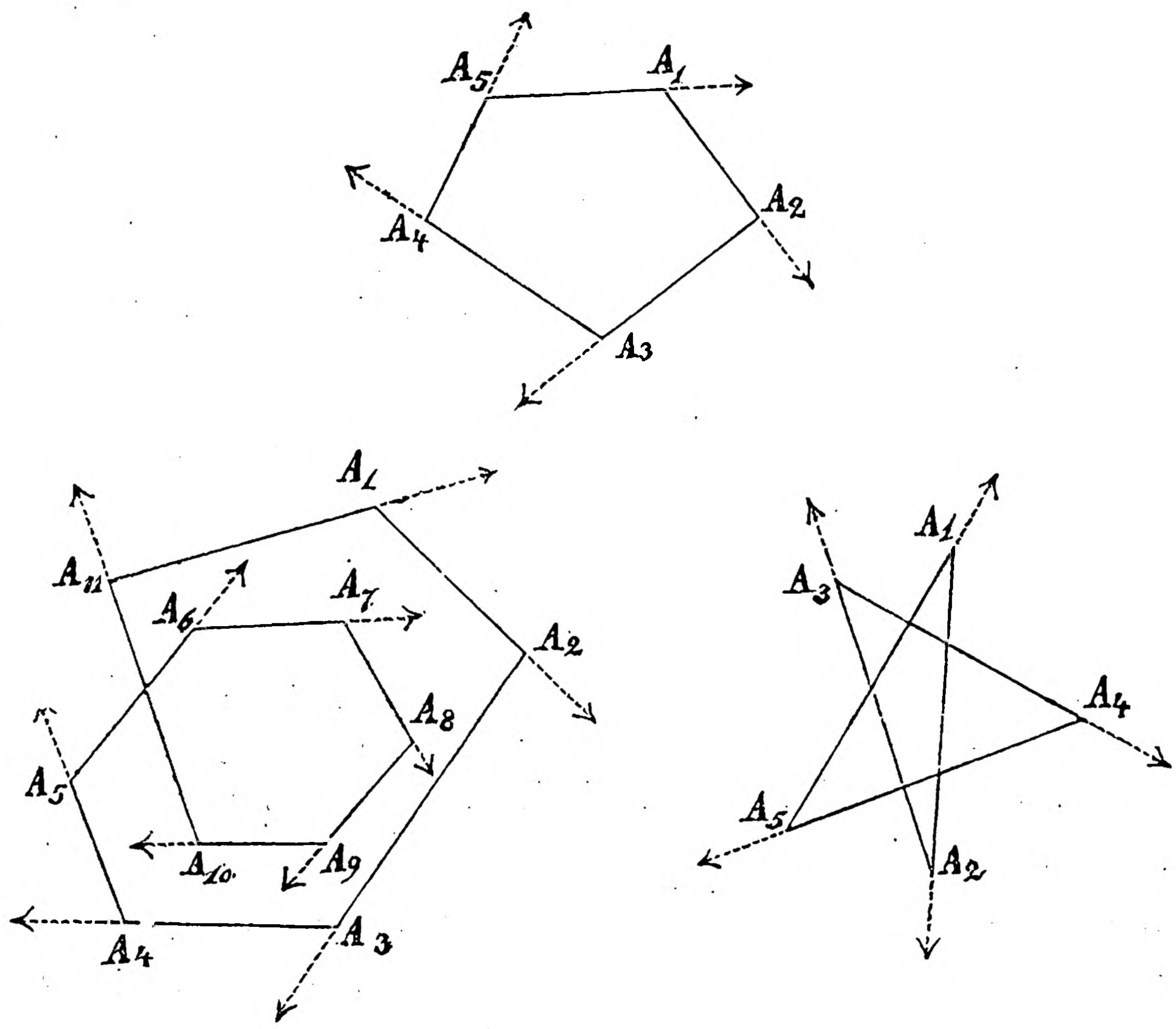
A_1B было равно всему периметру многоугольника. Станемъ на прямой A_1B лицемъ къ стрѣлкѣ и вообразимъ, что правая сторона прямой A_1B окрашена бѣлой краской, а лѣвая черной. Переломимъ прямую A_1B въ точкѣ A_1 и наклонимъ ее такъ, чтобы они прошли чрезъ точку A_2, переломимъ въ точкѣ A_2 и наклонимъ такъ чтобы она прошла чрезъ точку A_3 и будемъ продолжать подобнымъ образомъ до тѣхъ поръ, пока не замкнется многоугольникъ въ точкѣ A_1. Этимъ способомъ мы отдѣляемъ одну половину угловъ многоугольника отъ другой: одна изъ нихъ заключена между бѣлыми частями поломанной прямой A_1B, а другая между черными. Какъ тѣ, такъ и другіе суть углы многоугольника, но этимъ именемъ будемъ называть только ту половину изъ $2m$ угловъ, которой сумма будетъ меньше. Если сумму этихъ угловъ назовемъ чрезъ ω, то сумма другой половины будетъ очевидно $4md—\omega$.

Выпуклымъ многоугольникомъ называютъ такой, периметръ котораго прямая, проведенная въ произвольномъ направленіи, не можетъ пересѣчь болѣе какъ въ двухъ точкахъ. Но такое опредѣленіе во первыхъ не точно, а во 2-хъ тѣмъ неудобно, что требуетъ безчисленнаго числа пробъ, поэтому дали другое, именно: выпуклымъ многоугольникомъ называется такой, въ которомъ нѣтъ ни одного угла, въ выше сказанномъ смыслѣ, больше $2d$, т. е. въ которомъ всѣ углы *вогнуты* (кн. 1, прим. 5).

Въ такомъ многоугольникѣ прямая A_1B, ломаясь въ точкахъ A_1, A_2, A_3, . . наклоняется всегда въ одну сторону не возвращаясь назадъ, такъ что если чрезъ произвольно взятую точку O на плоскости будемъ проводить параллельныя тѣмъ направленіямъ, которыя принимаетъ прямая A_1B, ломаясь, то углы, которые они составляютъ съ первоначальнымъ направленіемъ, постоянно возрастаютъ.

Таковы многоугольники (фиг. 265).

Фиг. 265.



Относительно перваго многоугольника прямая около точки O, принимая направленія параллельныя сторонамъ многоугольника, сдѣлаетъ одинъ полный оборотъ, а относительно двухъ другихъ многоугольниковъ она сдѣлаетъ два полныхъ оборота, слѣдовательно, въ первомъ случаѣ, сдѣлаетъ уголъ въ $4d$, а во второмъ она сдѣлаетъ уголъ въ $8d$.

Изъ фигуръ втораго и третьяго многоугольника мы видимъ, что прямая можетъ пересѣчь ихъ периметръ болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ, а слѣдовательно, по первому опредѣленію, они не были бы выпуклые.

Напротивъ многоугольникъ (фиг. 264) не будетъ выпуклый, такъ какъ онъ неудовлетворяетъ условію опредѣленія, потому что прямая, ломаясь около точекъ A_1, A_2, A_3, . . . въ нѣкоторыхъ точкахъ, напримѣръ въ точкѣ A_2, возвращается назадъ.

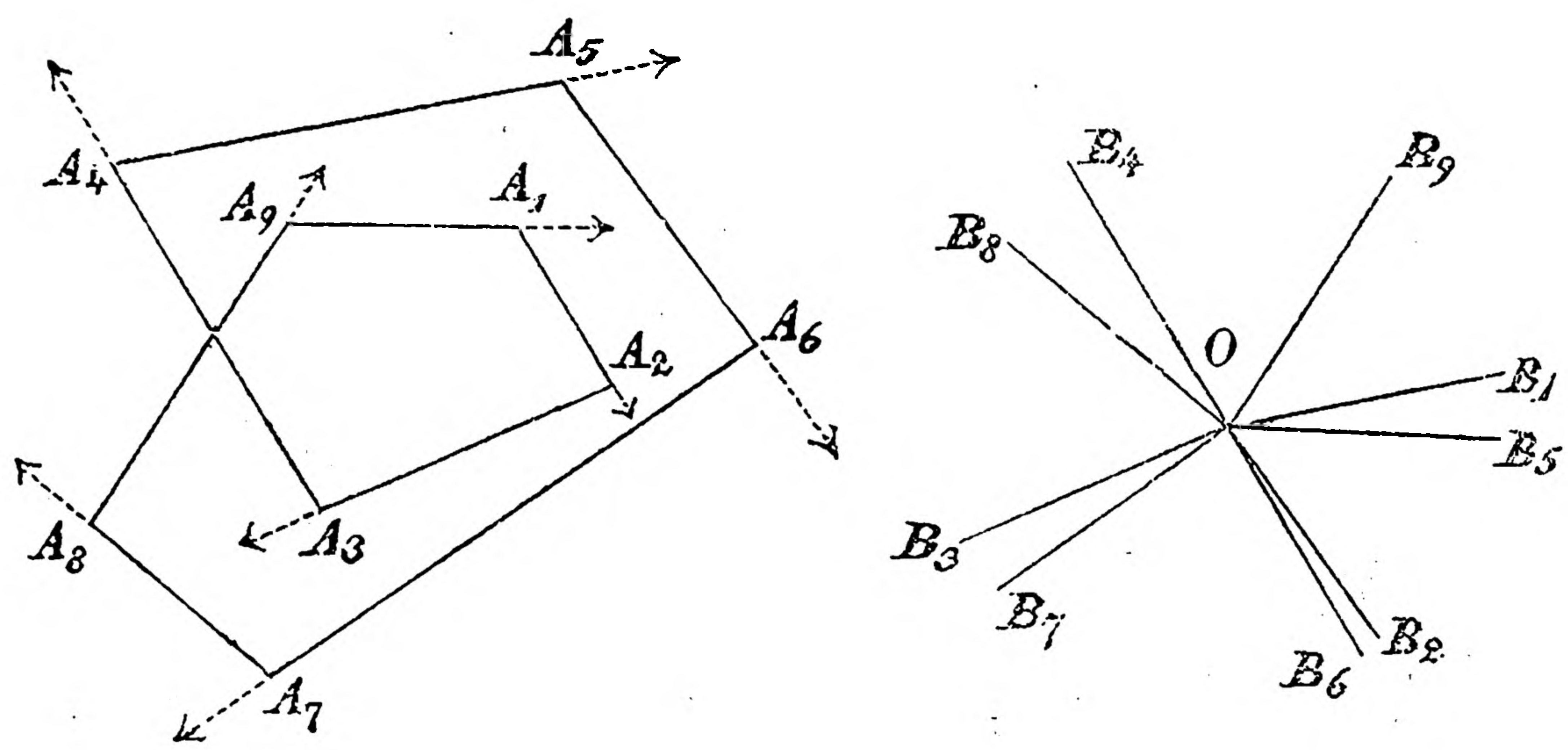
Въ выпуклыхъ многоугольникахъ тѣ углы, которые мы назвали выше вообще *углами многоугольника* и изъ которыхъ каждый меньше $2d$, мы будемъ называть *внутренними*, а остальные *внѣшними*.

Теперь мы исключительно будемъ заниматься только выпуклыми многоугольниками.

Предложеніе 1. Если въ выпукломъ многоугольникѣ продолжимъ стороны въ одномъ направленіи, то сумма угловъ, которые эти продолженія образуютъ, съ прилежащими сторонами, равна $4dh$, гдѣ h есть число полныхъ оборотовъ, которые сдѣлаетъ прямая, проходящая чрезъ какую нибудь точку на плоскости, принимая послѣдовательно положенія параллельныя всѣмъ сторонамъ многоугольника (фиг. 266).

Доказат. Пусть данный выпуклый многоугольникъ будетъ $A_1A_2 \ldots A_9$,

Фиг. 266.



продолжимъ стороны A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, . . по направленію стрѣлокъ. Я говорю, что сумма внѣшнихъ угловъ при точкахъ A_1, A_2, A_3, . . A_9 равна $4d.2$ при двухъ оборотахъ и $4d.h$ при h оборотахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ произвольно взятую точку O въ плоскости многоугольника проведемъ прямыя OB_1, OB_2, OB_3, . . , параллельныя сторонамъ A_1A_9, A_2A_1, A_3A_2, . . , то мы будемъ имѣть:

$$\angle A_1 = \angle B_1OB_2\,,\ \ \angle A_2 = \angle B_2OB_3\,,\ \ldots$$

Но прямая OB_1 дѣлаетъ два (h) полныхъ оборота, когда возвращается въ первоначальное положеніе, OB_1, слѣдовательно сумма всѣхъ угловъ B_1OB_2, B_2OB_3, . . равна $4d.2$ ($4d.h$).

Теперь легко показать чему равна сумма внутреннихъ угловъ во всякомъ выпукломъ многоугольникѣ.

Предложеніе 2. Во всякомъ выпукломъ многоугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$ взятымъ столько разъ, сколько сторонъ безъ удвоеннаго число полныхъ оборотовъ, которые дѣлаетъ периметръ многоугольника, чтобы возвратиться въ точку исхода.

Доказат. Пусть данный многоугольникъ будетъ имѣть m сторонъ и пусть периметръ его дѣлаетъ h оборотовъ, чтобы замкнуться. Я говорю, что сумма внутреннихъ угловъ равна $2d(m-2h)$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ каждой вершинѣ многоугольника A_1A_2 . . (ф. 266), напримѣръ въ A_1, $\angle A_2A_1A_9 + \angle A_1 = 2d$, слѣдовательно, при всѣхъ вершинахъ сумма этихъ угловъ будетъ равна $2md$. Если отъ этой суммы отнимемъ сумму угловъ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ которая, какъ мы выше видѣли равна $4dh$, то найдемъ, что сумма S_1 всѣхъ внутреннихъ угловъ многоугольника будетъ равна:

$$S_1 = 2d\,(m-2h).$$

Слѣдствіе 1. Такъ какъ въ каждой вершинѣ многоугольника сумма угловъ равна $4d$, а при всѣхъ вершинахъ эта сумма будетъ $4md$, то отнимая отъ этой суммы сумму S_1 внутреннихъ угловъ многоугольника, получимъ сумму S_2 внѣшнихъ угловъ многоугольника:

$$S_2 = 2d\,(m+2h).$$

Слѣдствіе 2. Если $h=1$, т. е. если периметръ выпуклаго многоугольника состоитъ изъ одного оборота, то мы получимъ извѣстныя выраженія для S_1 и S_2:

$$S_1 = 2d\,(m-2), \qquad S_2 = 2d\,(m+2).$$

Слѣдствіе 3. Если въ выраженіи:

$$S_1 = 2d\,(m-2h)$$

$m-2h=1$, слѣдовательно число сторонъ будетъ $m=2h+1$, то $S_1=2d$, т. е. въ многоугольникахъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ $2h+1$, гдѣ h есть число оборотовъ периметра многоугольника, сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$. Изъ этого видимъ, что не въ одномъ треугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$, она равна $2d$ и во всѣхъ многоугольникахъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ, полученныхъ, полагая въ выраженіи $m=2h+1$, $h=1, 2, 3, 4, \ldots$

Если $h=1$, то имѣемъ треугольникъ.

Если $h=2$, то мы имѣемъ пятиугольникъ, коего периметръ дѣлаетъ два оборота.

Если $h=3$, то мы имѣемъ семиугольникъ, коего периметръ дѣлаетъ три оборота и т. д.

Слѣдствіе 4. Если въ выраженіи:

$$S_1 = 2d\,(m-2h)$$

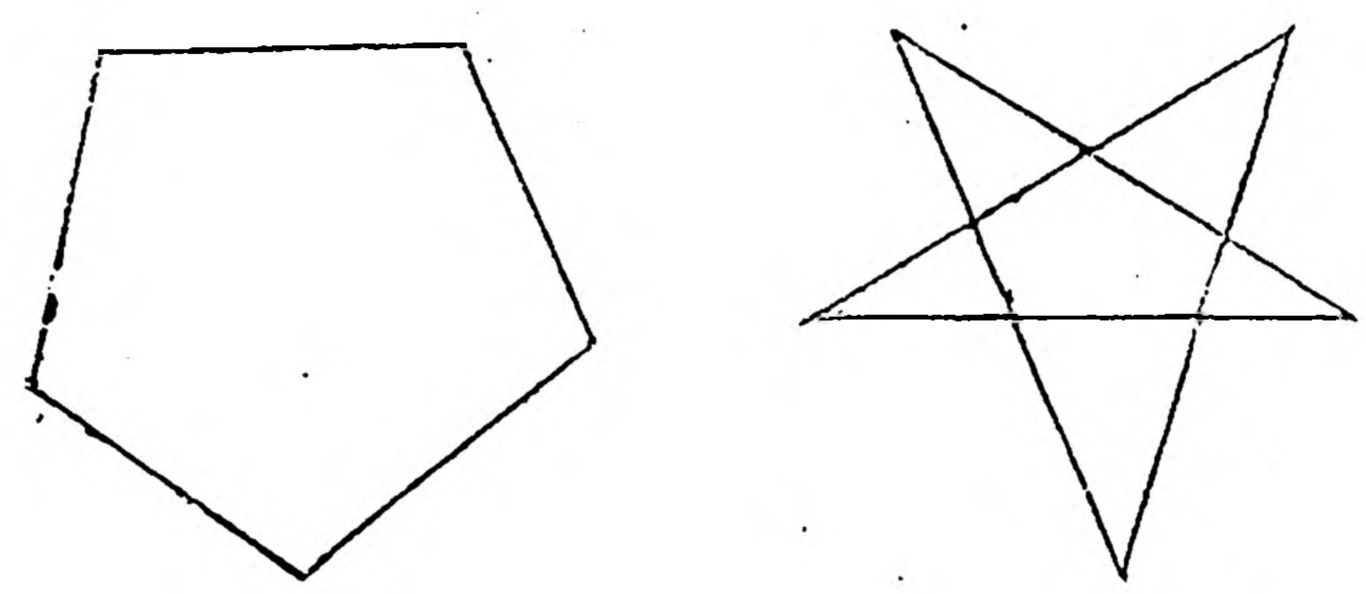
$m-2h=2$, слѣдовательно число сторонъ будетъ $m=2h+2$, то $S_1=4d$. Изъ этого видимъ, что не въ одномъ четыреугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ равна $4d$, она равна $4d$ и во всѣхъ многоугольникахъ съ четнымъ числомъ сторонъ, полученныхъ, полагая $h=1, 2, 3, 4 \ldots$

Если $h=1$, то мы имѣемъ четыреугольникъ.

Если $h=2$, то имѣемъ шестиугольникъ, коего периметръ дѣлаетъ два оборота и т. д.

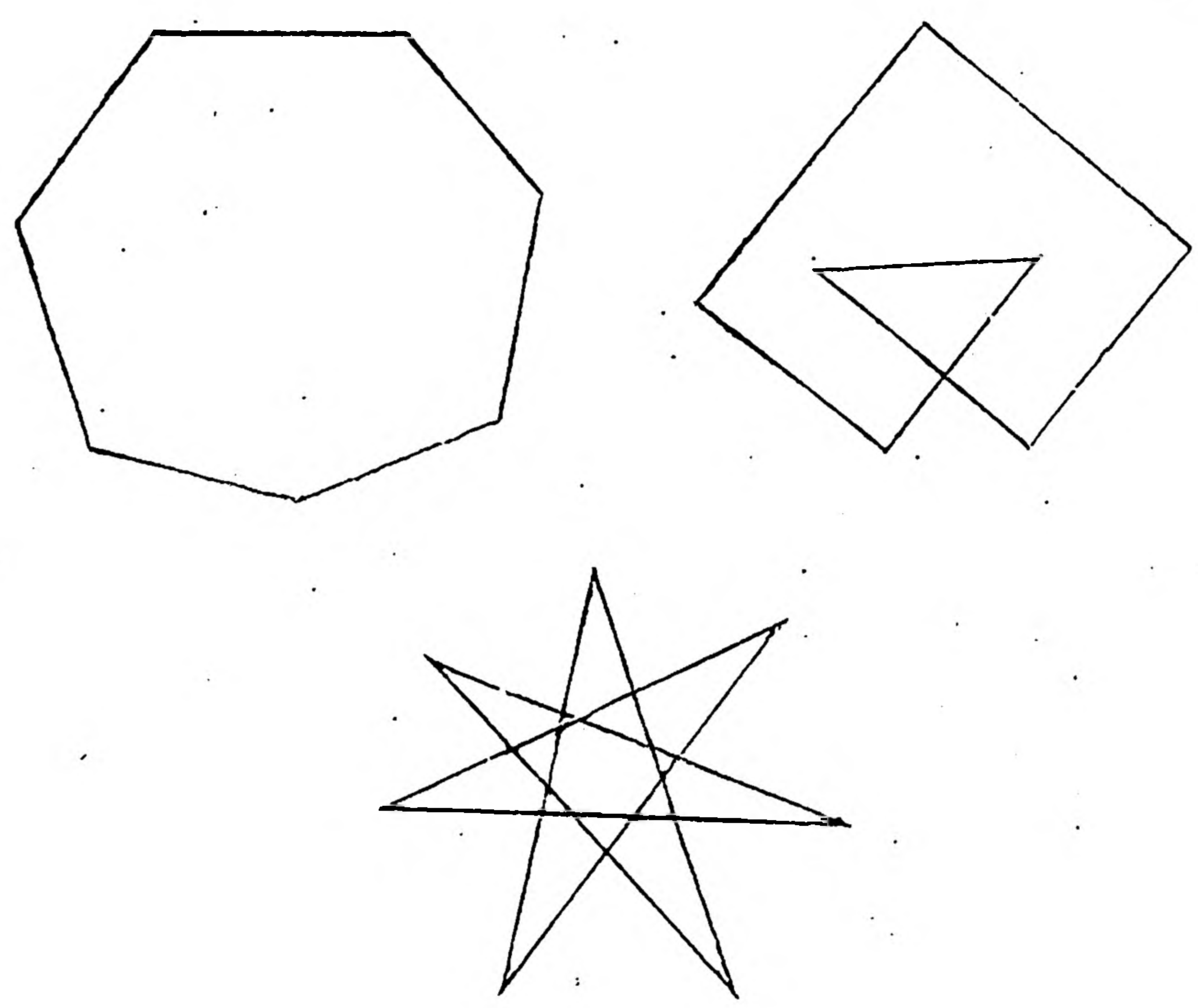
Слѣдствіе 5. Изъ выраженія $S_1=2d(m-2h)$ легко видѣть, что есть только два рода выпуклыхъ пятиугольниковъ. Во всѣхъ пятиугольникахъ перваго рода сумма внутреннихъ угловъ равна $6d$, периметръ ихъ дѣлаетъ одинъ оборотъ, а во всѣхъ пятиугольникахъ втораго рода сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$, периметръ ихъ дѣлаетъ два оборота (фиг. 267).

Фиг. 267.



Изъ того же выраженія видно, что есть три рода семиугольниковъ: къ первому роду принадлежатъ такіе, въ которыхъ сумма $S_1=10d$, ихъ периметръ дѣлаетъ одинъ оборотъ, ко второму принадлежатъ такіе, въ которыхъ $S_1=6d$, ихъ периметръ дѣлаетъ два оборота, наконецъ къ третьему роду принадлежатъ такіе, въ которыхъ $S_1=2d$, ихъ периметръ дѣлаетъ три оборота (фиг. 268).

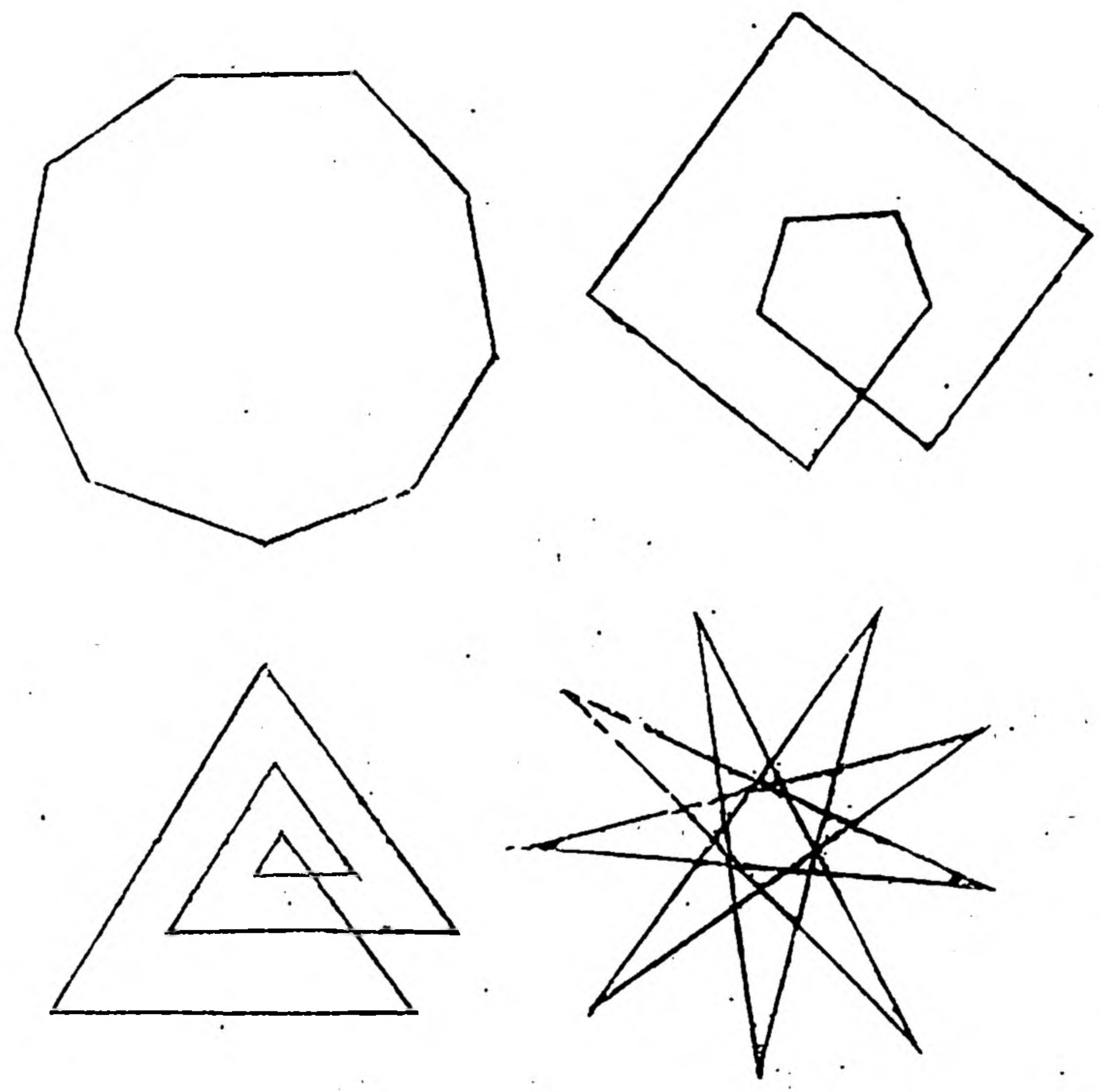
Фиг. 268.



Девятиугольниковъ есть четыре рода (фиг. 269):

1-й родъ,	$S_1=14d$,	число оборотовъ	$h=1$
2-й „	$S_1=10d$,	„ „	$h=2$
3-й „	$S_1=6d$,	„ „	$h=3$
4-й „	$S_1=2d$,	„ „	$h=4$.

Фиг. 269.



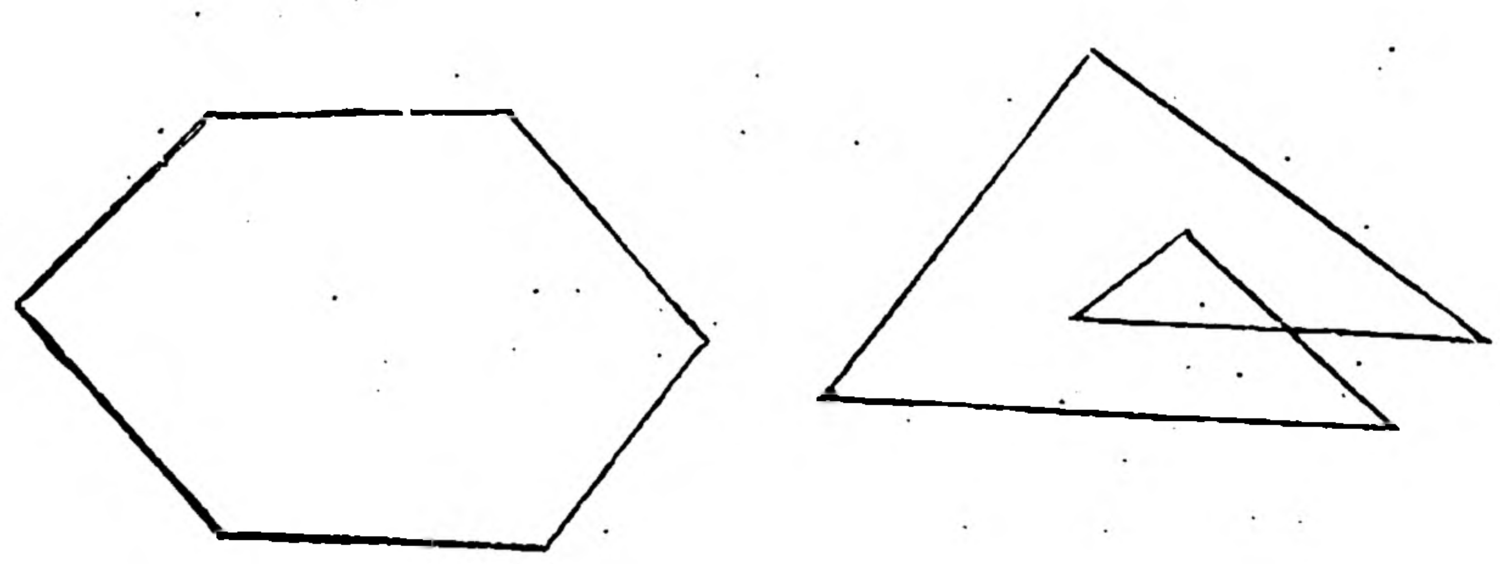
Легко видѣть, что есть пять родовъ одиннадцатиугольниковъ и т. д. Вообще если число m есть нечетное, то давая числу h всѣ значенія отъ 1 до $\frac{m-1}{2}$ включительно, получимъ всѣ роды многоугольниковъ, имѣющихъ m сторонъ, слѣдовательно такихъ родовъ есть $\frac{m-1}{2}$.

Четыреугольниковъ есть только одинъ родъ, въ нихъ $S_1=4d$.

Шестиугольниковъ есть два рода (фиг. 270):

1-й родъ, $S_1=8d$, число оборотовъ $h=1$,
2-й » $S_1=4d$, „ „ $h=2$.

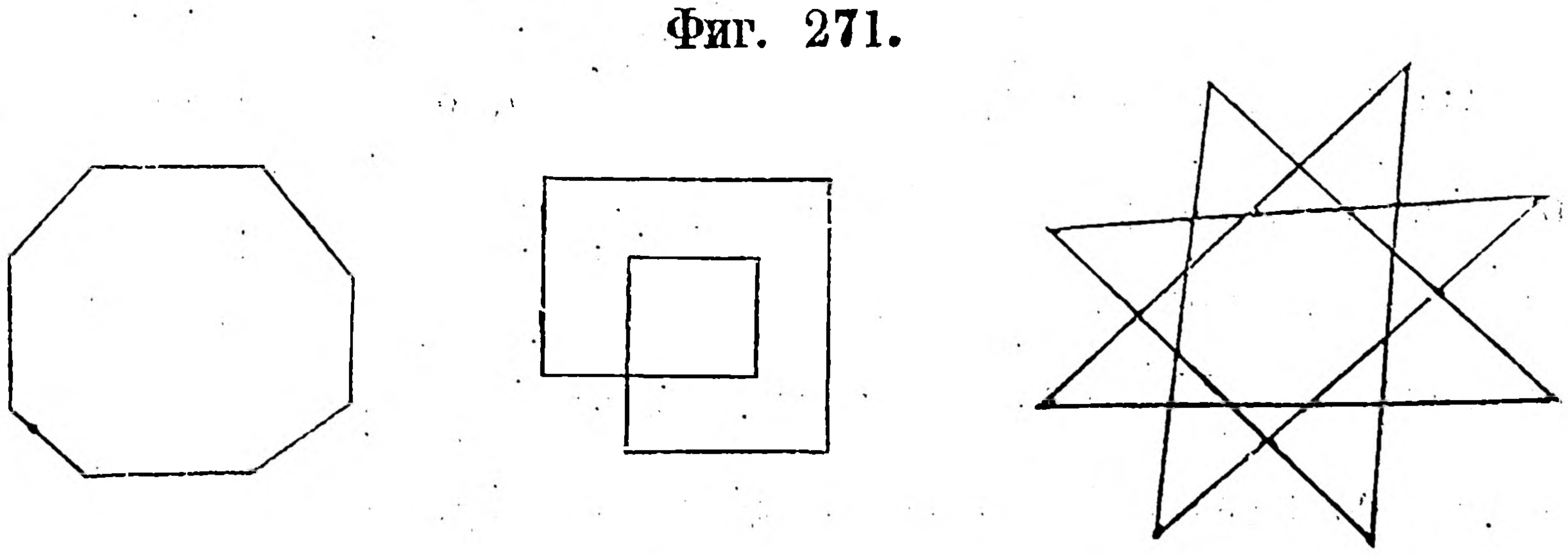
Фиг. 270.



Восьмиугольниковъ есть три рода (фиг. 271):

1-й родъ, $S_1=12d$, число оборотовъ $h=1$,
2-й „ $S_1=8d$, „ „ $h=2$
3-й „ $S_1=4d$, „ „ $h=3$

Фиг. 271.



и т. д.

Если m есть число четное, то давая числу h всѣ значенія отъ 1 до $\frac{m-2}{2}$ включительно мы получимъ всѣ роды многоугольниковъ, имѣющихъ m сторонъ, слѣдовательно такихъ родовъ есть $\frac{m-2}{2}$.

II. Правильные многоугольники.

Между выпуклыми многоугольниками особеннаго вниманія заслуживаютъ *правильные*, которыми мы теперь и займемся.

Пусть окружность круга будетъ раздѣлена на m равныхъ частей. Начиная съ какой нибудь точки дѣленія, поставимъ, послѣдовательно, на точкахъ дѣленія, нумера 1, 2, 3, 4, . . , m. Если проведемъ между послѣдовательными точками дѣленія прямыя, т. е. соединимъ 1 съ 2, 2 съ 3, 3 съ 4, и т. д., то получимъ первый выпуклый m сторонній правильный многоугольникъ.

Возьмемъ теперь, какое нибудь число h меньше отъ m и взаимно-простое съ нимъ. Начиная съ точки 1 соединимъ, послѣдовательно по h m-хъ частей окружности хордами. Такъ какъ h есть число взаимно простое съ m, т. е. не имѣетъ съ нимъ общей мѣры, то возвратиться въ точку исхода 1, не иначе возможно, какъ только пройдя чрезъ всѣ m точекъ. Такимъ образомъ образуется правильный, также выпуклый многоугольникъ, имѣющій m сторонъ и m угловъ: 1, 2, 3, . . , m. Очевидно, что это будетъ тотъ-же самый многоугольникъ, который мы построимъ, если будемъ соединять хордами по $m-h$ m-хъ частей окружности. Точно также если возьмемъ, какое нибудь, другое число $g<m$ и взаимно простое съ нимъ то, соединяя по g m-хъ частей окружности построимъ другой правильный многоугольникъ, имѣющій m сторонъ и m угловъ 1, 2, 3, . . , m. Соединяя по $m-g$ m-хъ частей окружности, построимъ тотъ-же многоугольникъ и т. д.

Изъ этого видно, что можно построить столько правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ m сторонъ, сколько есть чиселъ меньшихъ числа m и взаимно-простыхъ съ нимъ. Но такъ какъ многоугольникъ, построенный, соединяя по h m-хъ частей окружности, есть въ тоже время и многоугольникъ построенный, соединяя по $m-h$ m-хъ частей окружности, то слѣдовательно можно построить правильныхъ многоугольниковъ столько, сколько есть чиселъ взаимно-простыхъ съ m отъ 0 до $\frac{m-1}{2}$.

Если m есть число простое, то число правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ m сторонъ, очевидно, будетъ $\frac{m-1}{2}$.

Мы выше видѣли, что число родовъ многоугольниковъ выпуклыхъ, имѣющихъ m сторонъ есть или $\frac{m-1}{2}$ или $\frac{m-2}{2}$, смотря потому будетъ-ли число m нечетное или четное.

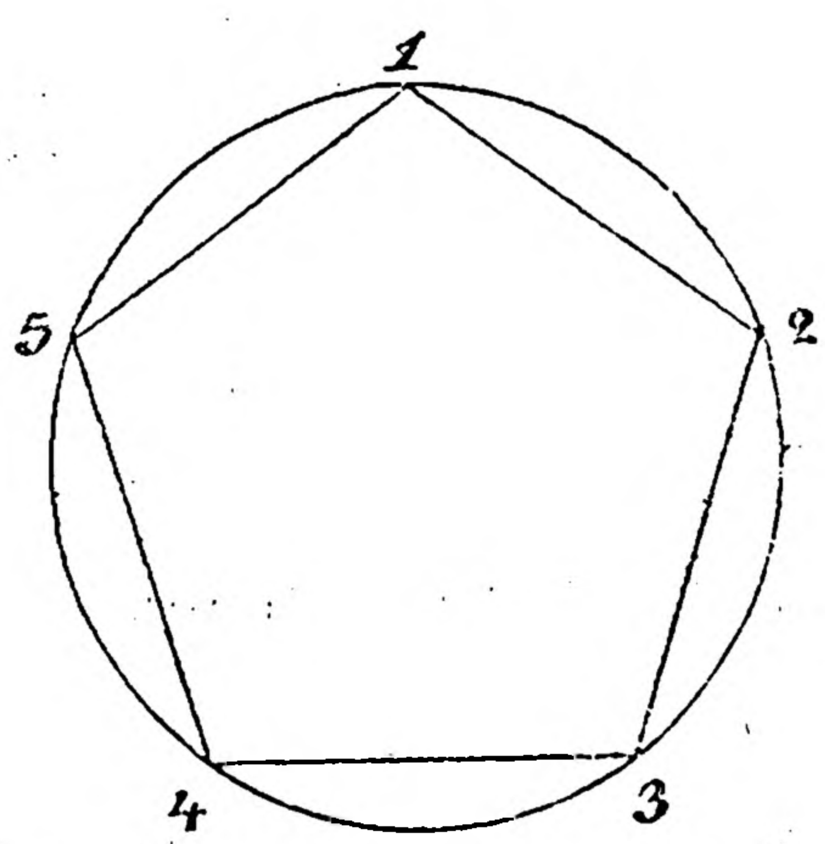
Правильныхъ же выпуклыхъ многоугольниковъ, имѣющихъ m сторонъ, будетъ столько родовъ, сколько есть чиселъ въ ряду 1, 2, 3, . . , $\frac{m-1}{2}$ взаимно-простыхъ съ m.

Изъ всего сказаннаго выше видимъ, что правильныхъ треугольниковъ есть одинъ. Въ немъ сумма угловъ равна $2d$.

Правильныхъ пятиугольниковъ есть два, такъ какъ въ этомъ случаѣ, число $\frac{m-1}{2}=2$.

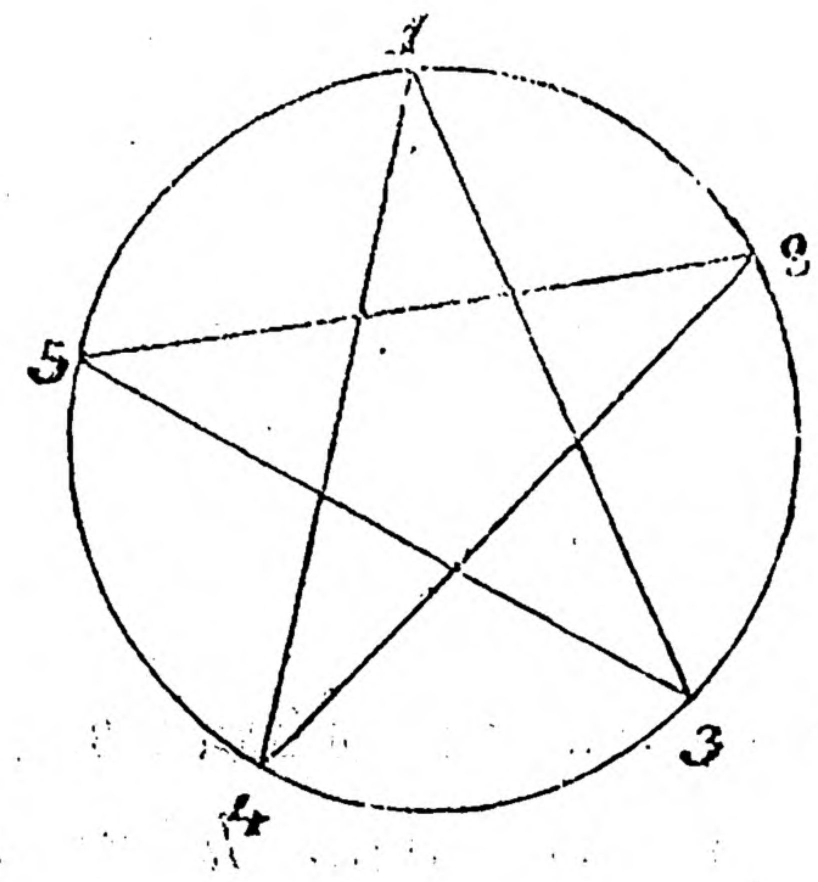
Первый правильный пятиугольникъ получится когда, раздѣливъ окружность на пять равныхъ частей, мы соединимъ нумера 1 съ 2, 2 съ 3, 3 съ 4, 4 съ 5 и 5 съ 1 (фиг. 272). Это обыкновенный правильный пятиугольникъ, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ равна $6d$.

Фиг. 272.



Другой правильный пятиугольникъ мы получимъ, когда соединимъ нумера 1 съ 3, 3 съ 5, 5 съ 2, 2 съ 4 и 4 съ 1. Это будетъ *звѣздный пятиугольникъ*. Въ немъ периметръ дѣлаетъ два полныхъ оборота, прежде чѣмъ онъ возвратится въ точку исхода, слѣдовательно въ немъ $h=2$, а поэтому сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$, какъ и въ треугольникѣ (фиг. 273).

Фиг. 273.

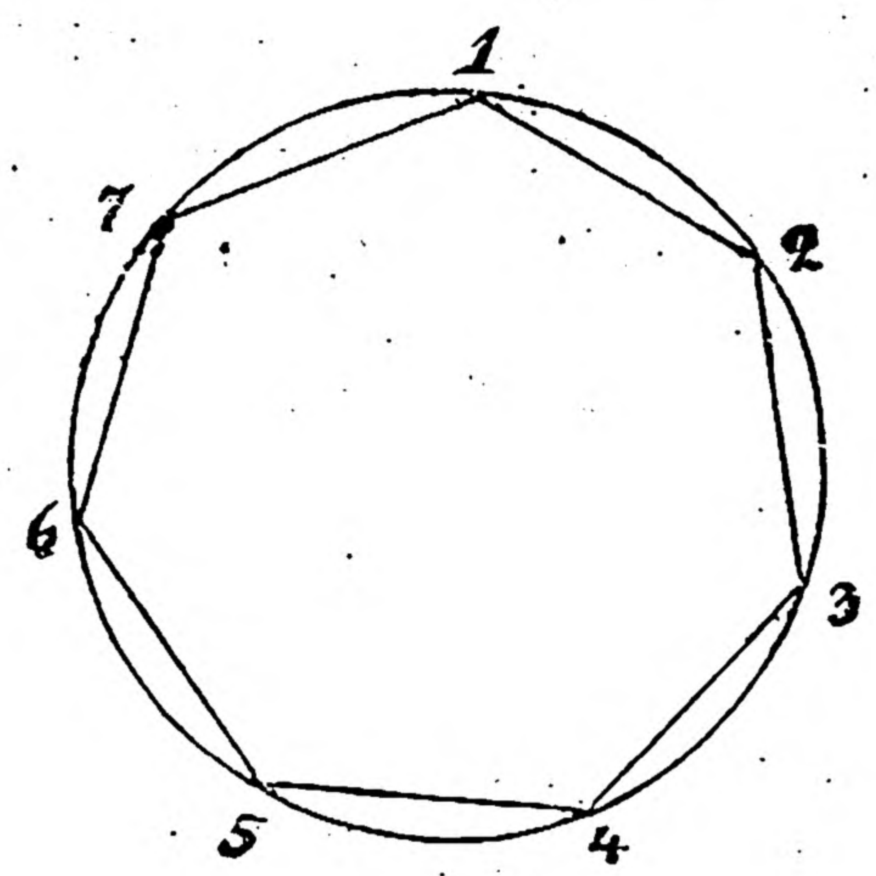


Въ первомъ пятиугольникѣ первая сторона стягиваетъ дугу равную $\frac{1}{5}$ окружности, а во второмъ она стягиваетъ $\frac{1}{5}$ двухъ окружностей.

Правильныхъ семиугольниковъ есть три, такъ какъ въ этомъ случаѣ, число $\frac{m-1}{2}=3.$

Первый правильный семиугольникъ получится, когда, раздѣливъ окружность на семь равныхъ частей, соединимъ нумера 1 съ 2, 2 съ 3, 3 съ 4, 4 съ 5, 5 съ 6, 6 съ 7 и 7 съ 1. Это обыкновенный правильный выпуклый семиугольникъ (фиг. 274).

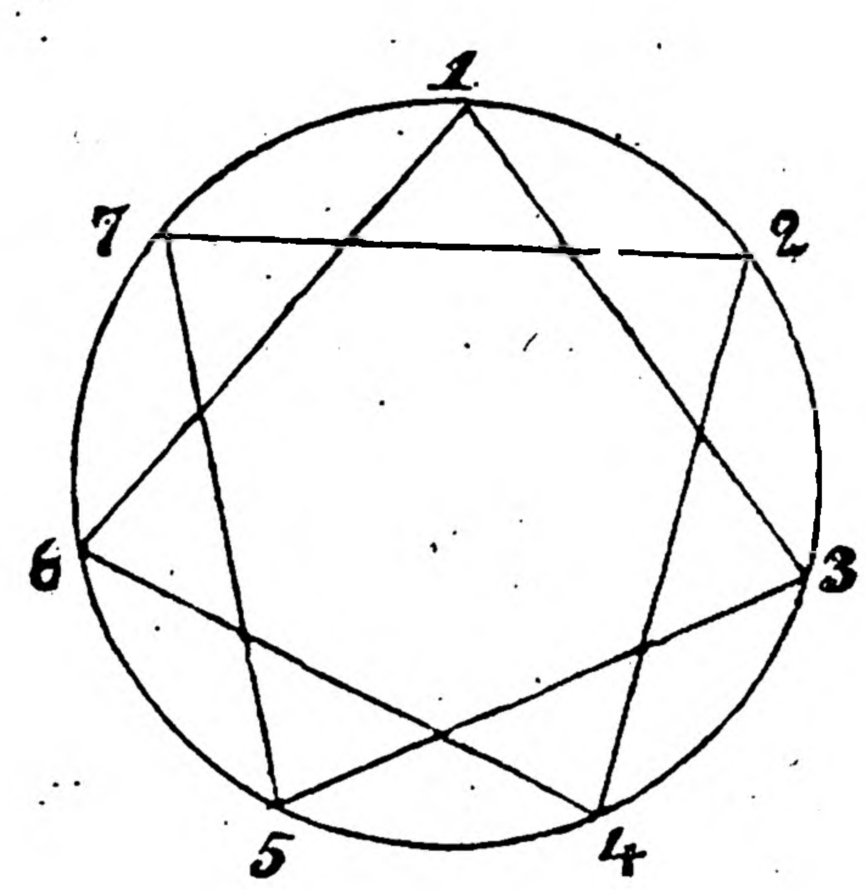
Фиг. 274.



Сумма угловъ въ такомъ многоугольникѣ, какъ извѣстно изъ формулы $2d\,(n-2)$, равна $10d$.

Второй правильный семиугольникъ получится, когда мы соединимъ нумера 1 съ 3, 3 съ 5, 5 съ 7, 7 съ 2, 2 съ 4, 4 съ 6, 6 съ 1 (фиг. 275).

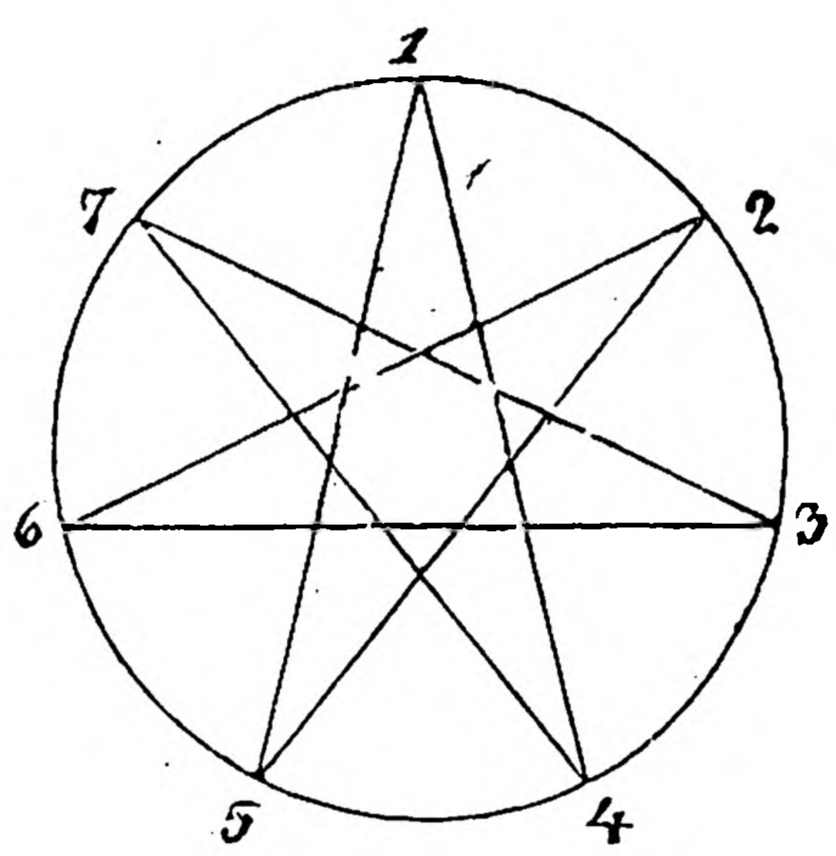
Фиг. 275.



Периметръ этого многоугольника дѣлаетъ два оборота, чтобы возвратиться въ точку исхода, слѣдовательно $h=2$, а поэтому изъ выраженія $2d\,(m-2h)$ мы найдемъ, что сумма внутреннихъ угловъ будетъ равна $6d$.

Третій правильный семиугольникъ, получимъ, если соединимъ нумера 1 съ 4, 4 съ 7, 7 съ 3, 3 съ 6, 6 съ 2, 2 съ 5, 5 съ 1.

Фиг. 276.



Периметръ этого семиугольника дѣлаетъ три полныхъ оборота, чтобы возвратиться въ точку исхода, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ $h=3$, а поэтому изъ выраженія $2d\,(m-2h)$ найдемъ, что сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$, какъ и въ треугольникѣ.

Такъ какъ чиселъ меньшихъ девяти и взаимно простыхъ съ нимъ есть 6, то правильныхъ девятиугольниковъ будетъ числомъ 3.

Чиселъ меньшихъ и взаимно-простыхъ съ числомъ 15 есть 8, слѣдовательно правильныхъ пятнадцатиугольниковъ есть 4.

Легко показать, что между правильными многоугольниками съ нечетнымъ числомъ сторонъ есть всегда такой, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ равна $2d$, какъ и въ треугольникѣ.

Предложеніе 3. Между правильными многоугольниками съ нечетнымъ числомъ сторонъ есть всегда одинъ, въ которомъ сумма угловъ равна $2d$.

Доказат. Чтобы сумма угловъ въ многоугольникѣ съ нечетнымъ числомъ сторонъ была равна $2d$, необходимо, чтобы въ выраженіи $2d(m-2h)$, гдѣ m есть число нечетное, $m-2h=1$. Опредѣляя h изъ этого уравненія, найдемъ, что $h=\frac{m-1}{2}$. Но если m есть число нечетное, то легко видѣть, что $\frac{m-1}{2}$ есть число взаимно-простое съ m, а если $\frac{m-1}{2}$ есть число взаимно-простое съ m, то существуетъ правильный многоугольникъ, имѣющій m сторонъ и въ коемъ сумма угловъ равна $2d$.

Слѣдовательно есть правильные многоугольники 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, . . сторонъ, въ которыхъ сумма угловъ равна $2d$.

Перейдемъ къ многоугольникамъ съ четнымъ числомъ сторонъ.

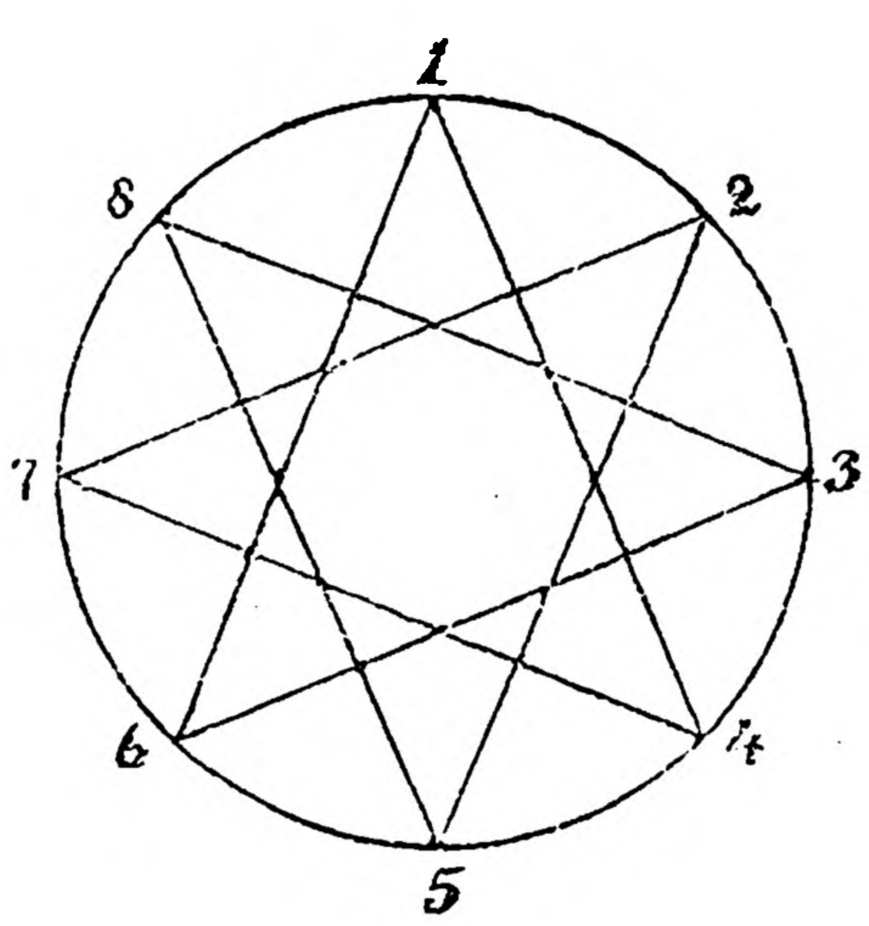
Во первыхъ замѣтимъ, что нѣтъ ни одного правильнаго многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ, въ которомъ бы сумма угловъ была равна $2d$. Это видно изъ формулы $2d\,(m-2h)$, въ которой, въ этомъ случаѣ, число $m-2h$ есть всегда четное.

Изъ формулы $2d(m-2h)$, полагая $m=4$, мы видимъ, что есть только одинъ правильный четыреугольникъ, такъ какъ h можетъ быть только равно единицѣ. Мы видѣли выше, что есть одинъ только родъ четыреугольниковъ и между ними одинъ правильный—это квадратъ. Мы видѣли также, что сумма угловъ во всякомъ четыреугольникѣ равна $4d$.

Такъ какъ чиселъ меньшихъ шести и взаимно-простыхъ съ нимъ есть два, то слѣдуетъ изъ выше сказаннаго, что есть только одинъ правильный шестиугольникъ, между тѣмъ какъ есть два рода выпуклыхъ шестиугольниковъ. Въ одномъ родѣ сумма угловъ равна $4d$, а въ другомъ эта сумма равна $8d$, къ этому послѣднему роду принадлежитъ и правильный шестиугольникъ въ которомъ сторона (кн. 4, пред. 15) равна радіусу описаннаго круга.

Мы видѣли, что выпуклыхъ восьмиугольниковъ есть три рода, а такъ какъ чиселъ меньшихъ восьми и взаимно-простыхъ съ нимъ есть четыре, то правильныхъ восьмиугольниковъ есть только два, въ одномъ обыкновенномъ, правильномъ восьмиугольникѣ сумма угловъ равна $12d$, а въ другомъ, звѣздномъ, который получимъ если соединимъ нумера 1 съ 4, 4 съ 7, 7 съ 2, 2 съ 5, 5 съ 8, 8 съ 3, 3 съ 6 и 6 съ 1, сумма угловъ равна $4d$, такъ какъ въ немъ периметръ дѣлаетъ три оборота, слѣдовательно $h=3$.

Фиг. 277.



Мы видѣли, что выпуклыхъ десятиугольниковъ есть четыре рода, и такъ какъ чиселъ меньшихъ десяти и взаимно-простыхъ съ нимъ есть четыре, то правильныхъ десятиугольниковъ есть всего два. Одинъ обыкновенный, въ которомъ сумма угловъ равна $16d$, и другой звѣздный, въ которомъ периметръ дѣлаетъ три оборота, слѣдовательно $h=3$, а поэтому сумма угловъ въ этомъ десятиугольникѣ равна $8d$.

Предложеніе 4. Между правильными многоугольниками съ четно-четнымъ числомъ сторонъ есть всегда такой въ которомъ сумма угловъ равна $4d$ и это найменьшая сумма угловъ въ такихъ многоугольникахъ. Въ многоугольникахъ же съ четно-нечетнымъ числомъ сторонъ наименьшая сумма угловъ будетъ $8d$.

Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, если число m есть четно-четное, т. е. имѣетъ форму такую $m=2^n.p$, то легко видѣть, что $\frac{m}{2}-1$ есть число взаимно-простое съ m, слѣдовательно, полагая $h=\frac{m}{2}-1$, изъ формулы $2d(m-2h)$, найдемъ, что сумма угловъ въ такомъ многоугольникѣ равна $4d$.

Если-же число m есть четно-нечетное, то число $\frac{m}{2}-2$ простое, слѣдовательно, полагая $h=\frac{m}{2}-2$, найдемъ, что сумма угловъ въ такихъ многоугольникахъ равна $8d$.

Изъ этого видимъ, что между правильными многоугольниками съ 4, 8, 12, 16, 20, 24, . . . сторонами есть всегда родъ въ которомъ сумма угловъ равна $4d$.

А между многоугольниками съ 6, 10, 14, 18, 22, 26, . . . сторонами есть всегда родъ, въ которомъ сумма угловъ равна $8d$.

О звѣздномъ пятиугольникѣ упоминается въ первый разъ у Боецiя, но есть данныя, по которымъ можно заключить, что онъ былъ уже извѣстенъ Пиѳагору. Въ XIII вѣкѣ Кампанусъ въ своихъ комментарiяхъ Евклида упоминаетъ о немъ.

Кирхеръ (Kircher) въ своей Arithmologia упоминаетъ о звѣздномъ пятиугольникѣ и разказываетъ при какихъ таинственныхъ обстоятельствахъ его употребляли. Парацельсъ, извѣстный химикъ XVI вѣка смотрѣлъ на звѣздный пятиугольникъ, какъ на эмблему здоровья! Только въ XIV вѣкѣ геометръ Брадвардини (Bradvardini)* обобщилъ теорiю звѣздныхъ многоугольниковъ, распространивъ ее на многоугольники съ большимъ числомъ сторонъ.

Въ этомъ сочиненiи онъ находитъ, что сумма угловъ въ звѣздномъ пятиугольникѣ, какъ и въ треугольникѣ, равна двумъ прямымъ угламъ и многiя другiя свойства.

Но истинный творецъ звѣздныхъ многоугольниковъ есть **Poinsot**, который далъ ихъ полную теорiю въ мемуарѣ: **Mémoire sur les polygones et les polyèdres.**

Вотъ все, что можно сказать вообще о многоугольникахъ, остается только вычислить стороны нѣкоторыхъ правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругѣ и показать числовую зависимость между стороною правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ и стороною также правильнаго многоугольника, но имѣющаго въ двое болѣе сторонъ.

---

* Въ сочиненiи Geometria speculativa Thome Bradvardini . . . Parisiis. 1496.

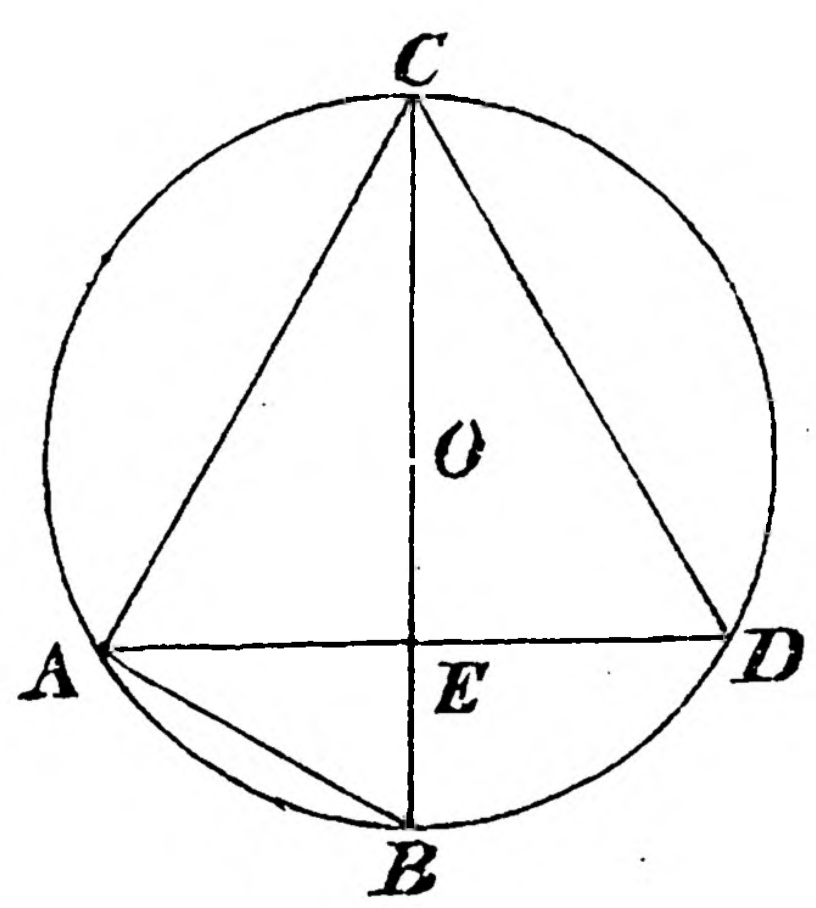
III. Числовыя выраженія для правильныхъ многоугольниковъ трехъ, четырехъ, пяти, шести, десяти сторонъ, вписанныхъ въ кругъ.

Евклидъ, въ 4-й книгѣ, въ 15 предложеніи, показалъ, что сторона правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна радіусу круга, который мы будемъ обозначать всегда чрезъ r.

Предложеніе 5. Опредѣлить сторону правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругъ, коего радіусъ есть r (фиг. 278)?

Рѣшеніе. Зная, что сторона правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна радіусу круга, легко опредѣлить сторону правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB будетъ сторона шестиугольника, вписаннаго въ кругъ O. Если проведемъ діаметръ BOC и соединимъ точку A съ C, то очевидно, хорда AC и будетъ сторона искомаго треугольника. Такъ какъ уголъ BAC есть прямой (кн. 3, пред. 31), то мы имѣемъ:

Фиг. 278.



$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

Но $AB=r$, $BC=2r$, слѣдовательно:

$$4r^2=r^2+AC^2,$$

откуда:

$$AC^2=3r^2,$$

Означая AC чрезъ x_3 и, извлекая квадратный корень, найдемъ:

$$x_3=r\sqrt{3}.$$

Предложеніе 6. Опредѣлить сторону квадрата, вписаннаго въ кругъ?

Рѣшеніе. Если въ кругѣ вписанъ квадратъ, то его діагональ равна діаметру круга $2r$, слѣдовательно сторона квадрата, которую означимъ чрезъ x_4, будетъ:

$$x_4=r\sqrt{2}.$$

Предложеніе 7. Опредѣлить сторону правильнаго десятиугольника и пятиугольника, вписанныхъ въ кругъ?

Рѣшеніе. Въ четвертой книгѣ Евклида (кн. 4, пред. 11) мы видѣли какъ построить въ кругѣ правильный пятиугольникъ, а въ примѣчаніи шестомъ, той же книги, показали какъ построить правильный десятиугольникъ и какая зависимость существуетъ между стороною десятиугольниками и радіусомъ круга, въ которомъ онъ вписанъ. Въ упомянутомъ примѣчаніи мы показали что сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Слѣдовательно, если сторону правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ есть r, означимъ чрезъ x_{10}, то мы будемъ имѣть:

$$r : x_{10} = x_{10} : r - x_{10}$$

откуда:

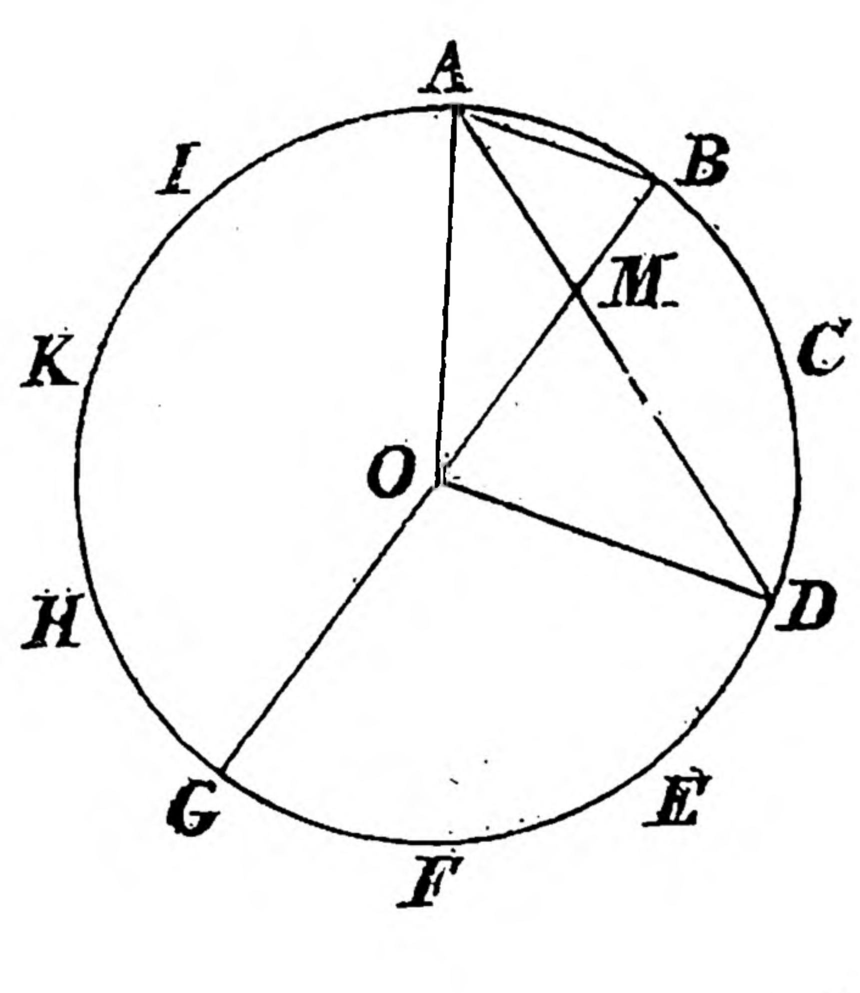
$$x_{10}^2 + r x_{10} - r^2 = 0, \qquad \text{(a)}$$

опредѣляя x_{10}, найдемъ:

$$x_{10} = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{и} \quad z_{10} = -r\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Легко показать, что первое выраженіе для x_{10} даетъ сторону обыкновеннаго правильнаго десятиугольника, а второе, взятое съ противнымъ знакомъ, даетъ сторону звѣзднаго десятиугольника. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что въ точкахъ $A, B, C, D, E, F, G, H, K, I$ окружность раздѣлена на десять равныхъ частей (фиг. 279). Слѣдовательно, если соединимъ точку A съ B, то получимъ сторону обыкновеннаго правильнаго десятиугольника, а если соединимъ A съ D, то, какъ мы видѣли выше, это будетъ сторона правильнаго звѣзднаго десятиугольника.

Фиг. 279.



Легко видѣть, что $\angle ABG = \angle AMB$, такъ какъ первый измѣряется половиною дуги $AIKHG$, а второй полусуммою дугъ AB и $GFED$, т. е.

оба измѣряются $\frac{1}{5}$ окружности. Слѣдовательно, въ треугольникѣ ABM, $AB=AM$. По той же причинѣ $\angle OMD=\angle MOD$, слѣдовательно, въ треугольникѣ OMD, $MD=OD$. Изъ этого видимъ, что $MD=AB=OD-AM$. Если чрезъ x_{10} и z_{10} означимъ стороны обоихъ правильныхъ десятиугольниковъ, то, замѣчая что $MD=r$, найдемъ:

$$z_{10}-x_{10}=r. \tag{b}$$

Легко также видѣть, что треугольники OAM и OAD подобны, такъ какъ $\angle OAD$ есть общій для обоихъ, $\angle AOB=\angle ADO$, потому что оба измѣряются $\frac{1}{10}$ окружности, слѣдовательно:

$$AD\,.\,AM=OA^2$$

или

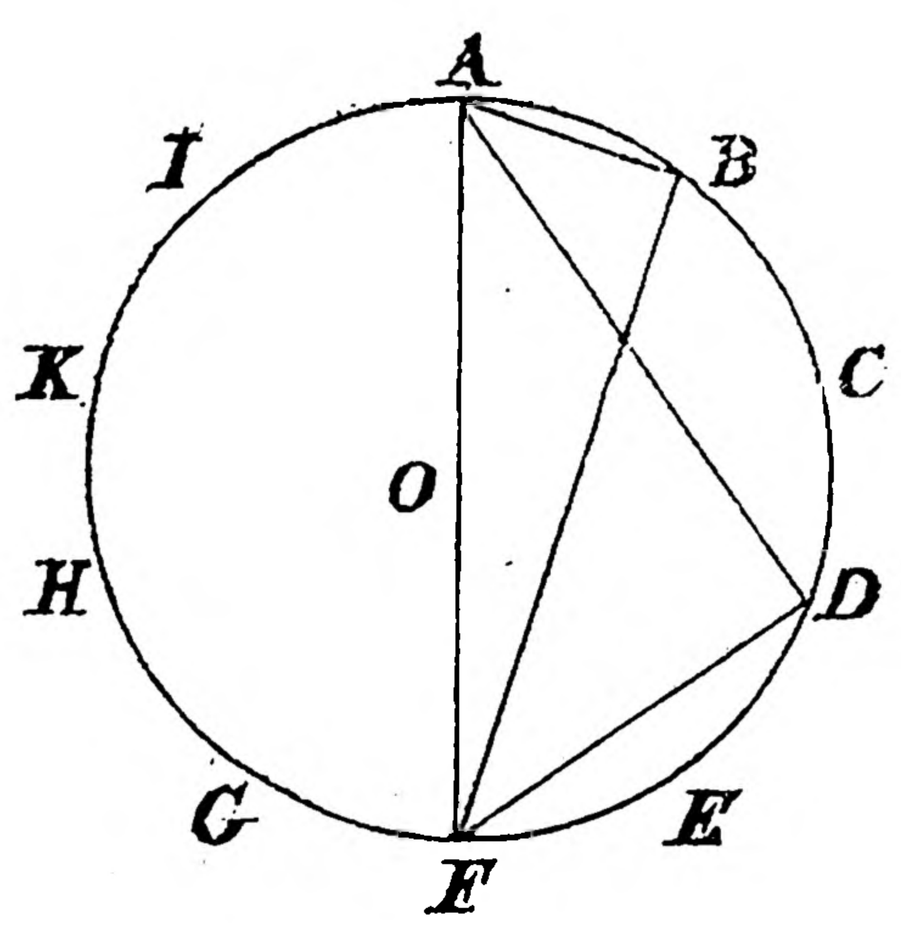
$$z_{10}\,.\,x_{10}=r^2. \tag{c}$$

Изъ уравненій (b) и (c) мы, легко получимъ квадратное уравненіе, коего корни будутъ равны корнямъ уравненія (a), но съ противными знаками. Слѣдовательно стороны обоихъ десятиугольниковъ будутъ:

$$x_{10}=r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad z_{10}=r\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Если окружность раздѣлить на десять равныхъ частей, то, соединяя хордами по двѣ части, получимъ обыкновенный правильный пятиугольникъ, а соединяя по четыре получимъ звѣздный правильный пятиугольникъ. Слѣдовательно, AB, DF, BF суть стороны десятиугольника, пятиугольника выпуклаго и пятиугольника звѣзднаго (фиг. 280).

Фиг. 280.



Если обозначимъ, какъ и выше, стороны обоихъ пятиугольниковъ чрезъ x_5, z_5, стороны обоихъ десятиугольниковъ чрезъ x_{10}, z_{10}, то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ADF и ABF мы найдемъ:

$$x_5^2=4r^2-z_{10}^2=r^2+(3r^2-z_{10}^2)$$

$$z_5^2=4r^2-x_{10}^2=r^2+(3r^2-x_{10}^2).$$

Но мы выше видѣли, что:

$$z_{10}-x_{10}=r, \qquad z_{10}x_{10}=r^2$$

изъ этихъ уравненій, возвышая первое въ квадратъ и складывая съ удвоеннымъ вторымъ, найдемъ:

$$x_5^2=r^2+x_{10}^2, \qquad z_5^2=r^2+z_{10}^2.$$

Изъ этихъ выраженій мы видимъ, *что сторона правильнаго выпуклаго пятиугольника есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть радіусъ круга и сторона выпуклаго десятиугольника; а сторона правильнаго звѣзднаго пятиугольника есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть радіусъ круга и сторона правильнаго звѣзднаго десятиугольника.*

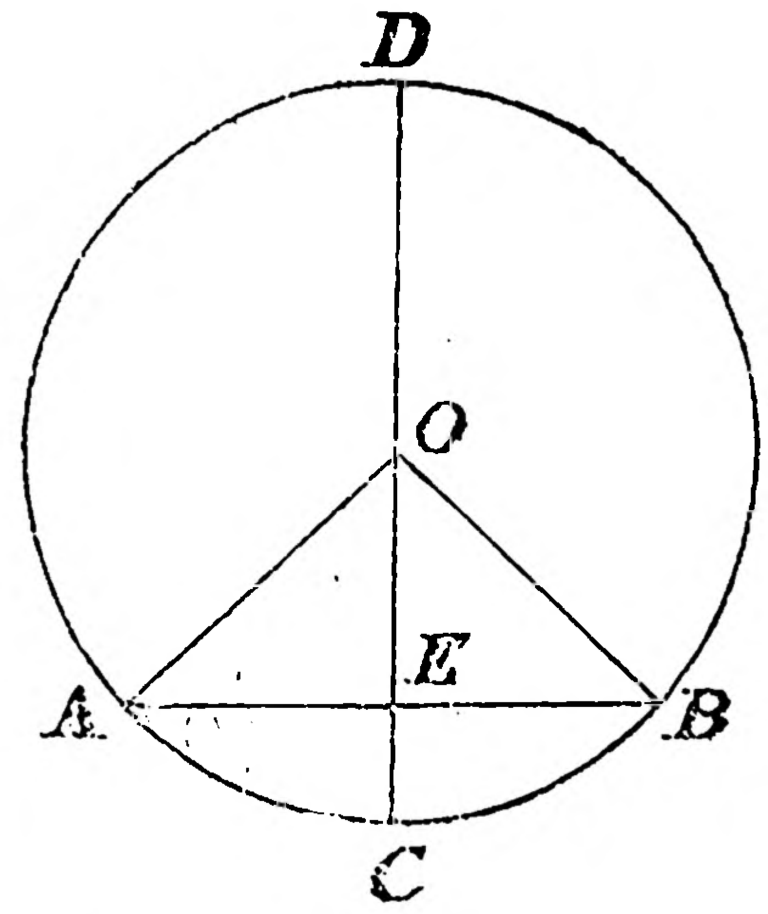
Замѣщая въ предъидущихъ уравненіяхъ x_{10} и z_{10} ихъ величинами, найденными выше, получимъ:

$$x_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \qquad z_5=\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Легко также опредѣлить числовое выраженіе стороны правильнаго пятьнадцатиугольника, но она для насъ не имѣетъ значенія.

Предложеніе 8. По данной сторонѣ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, опредѣлить его апоѳему (фиг. 281)?

Фиг. 281.



Рѣшеніе. Пусть $AB=a$ будетъ сторона правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ O. Опустимъ изъ центра O на сторону AB перпендикуляръ OE. Этотъ перпендикуляръ и будетъ искомая апоѳема. Означимъ его чрезъ q.

Перпендикуляръ OE дѣлитъ сторону AB пополамъ (кн. 3, пред. 3), слѣдовательно $AE=\frac{1}{2}a$. AOE есть прямоугольный треугольникъ, слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$AO^2=AE^2+OE^2,$$

но $AO=r$, $AE=\frac{1}{2}a$, $OE=q$, слѣдовательно:

$$r^2=q^2+\frac{a^2}{4},$$

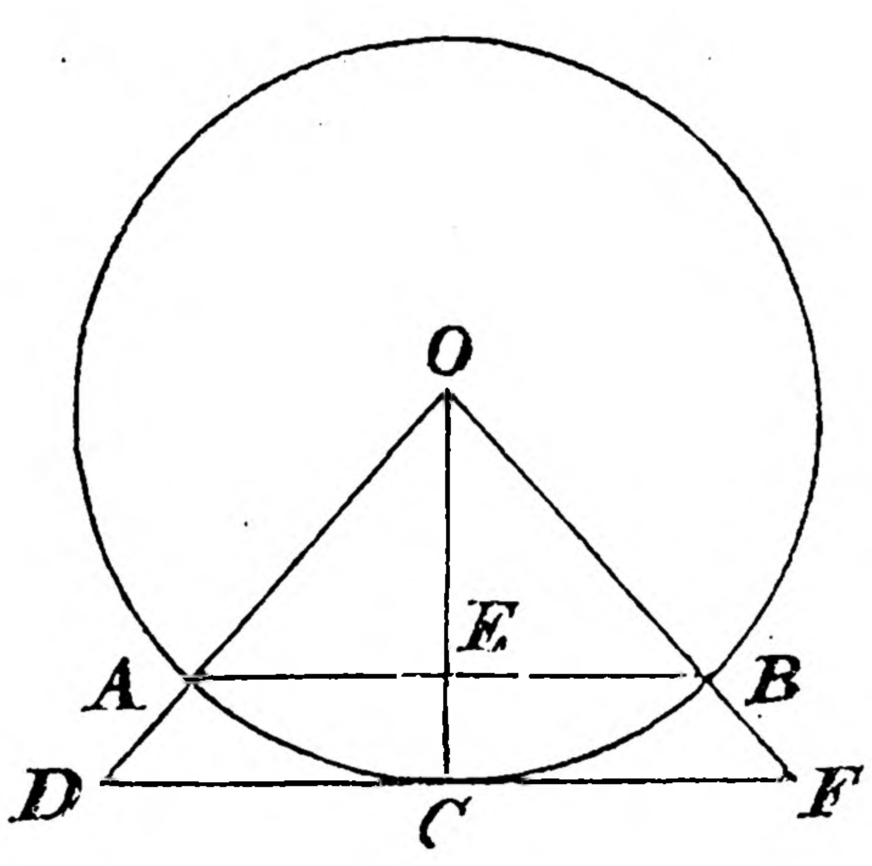
откуда:

$$q=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2} \tag{1}$$

Предложеніе 9. По данной сторонѣ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить сторону правильнаго многоугольника, описаннаго около круга и имѣющаго тоже число сторонъ (фиг. 282)?

Рѣшеніе. Пусть $AB=a$ есть сторона правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ O. Опустимъ изъ центра O перпендикуляръ OE на сторону AB и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ C. Изъ точки C возставимъ перпендикуляръ DF и продолжимъ его до встрѣчи въ точкахъ D и F съ прямыми, соединяющими центръ O съ точками A и B. Легко видѣть, что DF и будетъ искомая сторона. Остается опредѣлить числовое выраженіе стороны DF.

Фиг. 282.



Такъ какъ треугольники DOF и AOB равноугольные, по построенію, то мы имѣемъ:

$$DF:AB=OC:OE.$$

Но $AB=a$, $OC=r$, $OE=q=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2}$, слѣдовательно:

$$DF:a=r:\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2},$$

откуда:

$$DF=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

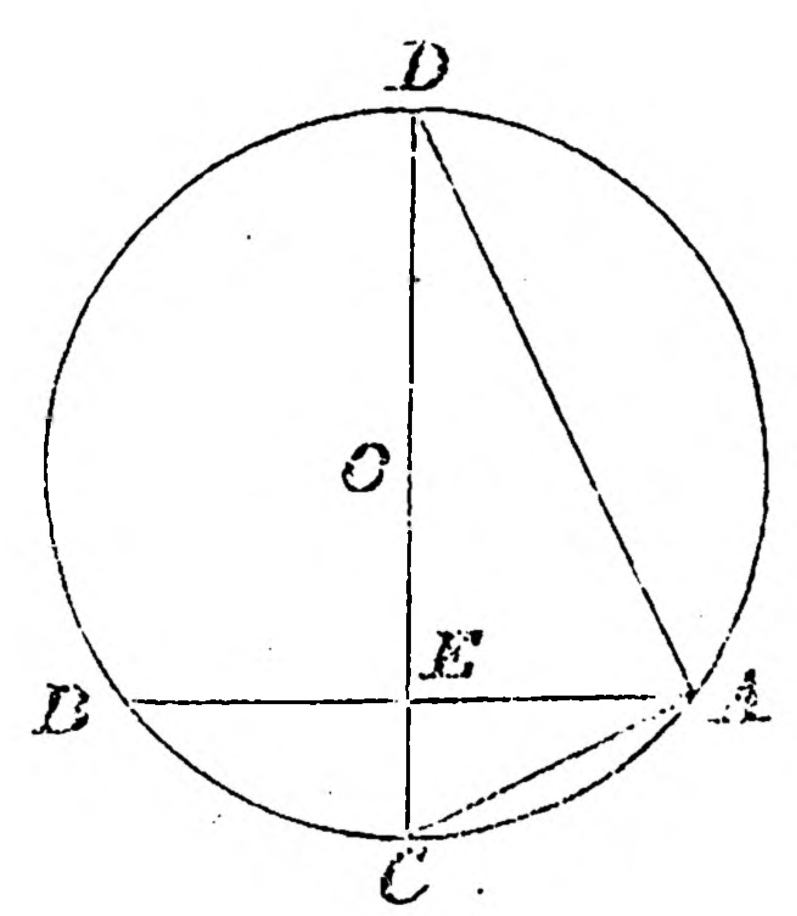
Примѣръ. Если бы AB была сторона треугольника, то $a=r\sqrt{3}$, подставляя эту величину вмѣсто a въ предъидущее выраженіе, найдемъ, что сторона правильнаго треугольника, описаннаго около круга, равна $2r\sqrt{3}$, что мы уже видѣли выше.

Если $a=r$, т. е. если правильный многоугольникъ будетъ шестиугольникъ, то предъидущее выраженіе даетъ $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ и т. д.

Предложеніе 10. По данной сторонѣ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, опредѣлить сторону правильнаго многоугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ, но имѣющаго вдвое болѣе сторонъ (фиг. 283)?

Рѣшеніе. Пусть $AB=a$ будетъ сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, вписаннаго въ кругъ O. Если изъ центра O опустимъ перпендикуляръ OE на сторону AB и продолжимъ его въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ C и D, то, соединяя точку A съ C, хорда AC и будетъ искомая сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго $2n$ сторонъ.

Фиг. 283.



Соединимъ A съ D, то (кн. 6, пред. 8) AC будетъ средне-пропорціональная между діаметромъ $2r$ и отрѣзкомъ $CE=r-OE$.

Слѣдовательно:

$$AC^2=2r(r-OE).$$

Но OE есть апоѳема правильнаго многоугольника, коего сторона есть a, слѣдовательно $OE=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2}$, откуда:

$$AC^2=2r\,(r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2}),$$

или

$$AC=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}\,. \qquad \text{(d)}$$

Примѣръ. Если $a=r\sqrt{3}$, то изъ этой формулы получимъ $AC=r$; если $a=r$, то изъ этой формулы получимъ сторону двѣнадцатиугольника, которая и будетъ:

$$x_{12}=\sqrt{2r^2-r^2\sqrt{3}}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

Если положимъ $a=r\sqrt{2}$, то получимъ сторону правильнаго восьмиугольника именно:

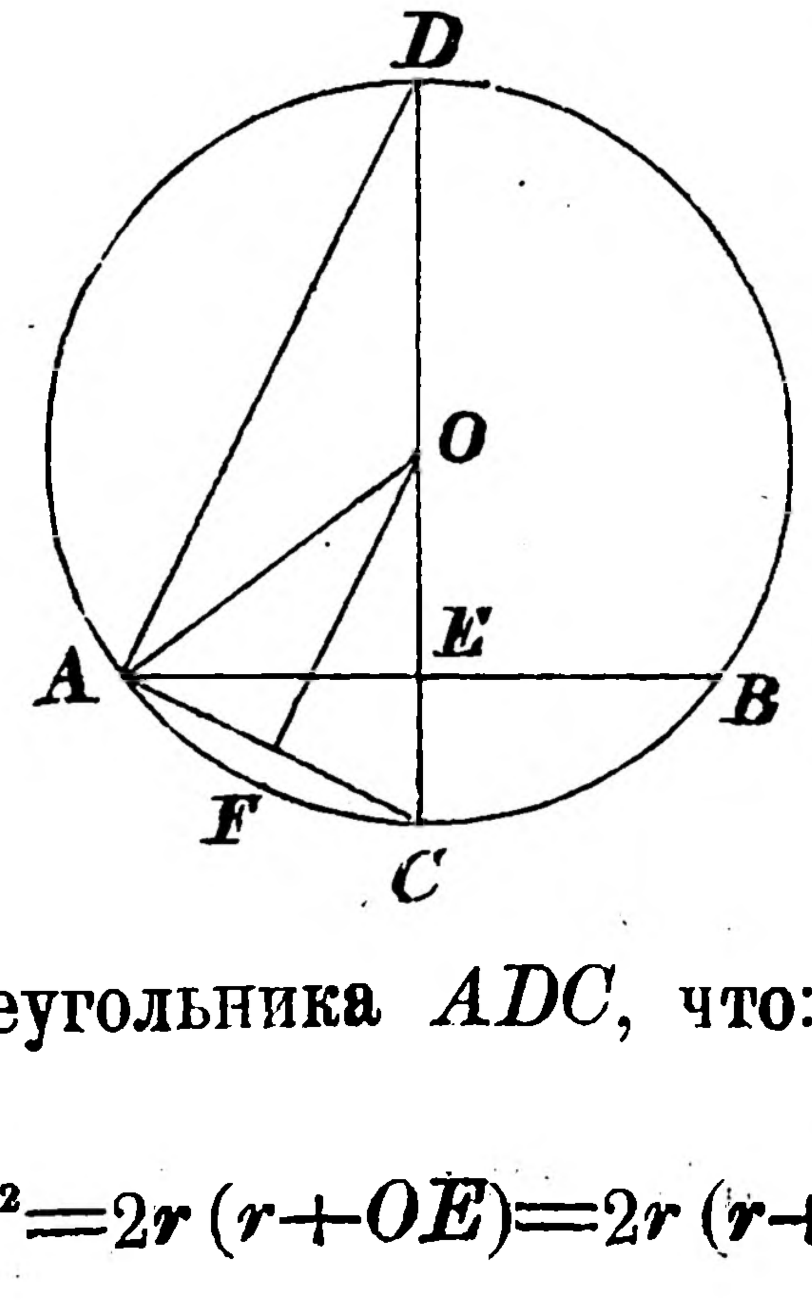
$$x_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

и т. д.

Предложеніе 11. По данной апоѳемѣ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить апоѳему правильнаго многоугольника, вписаннаго въ томъ же кругѣ, но имѣющаго вдвое болѣе сторонъ (фиг. 284)?

Рѣшеніе. Пусть $AB=a$ будетъ сторона правильнаго многоугольника, $OE=q$ апоѳема того же многоугольника. Если апоѳему OE продолжимъ въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ C и D, и соединимъ точки A и C, то AC будетъ сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ, а перпендикуляръ OF будетъ искомая апоѳема.

Фиг. 284.



Легко видѣть изъ треугольника ADC, что:

$$AD^2=2r\,(r+OE)=2r\,(r+q);$$

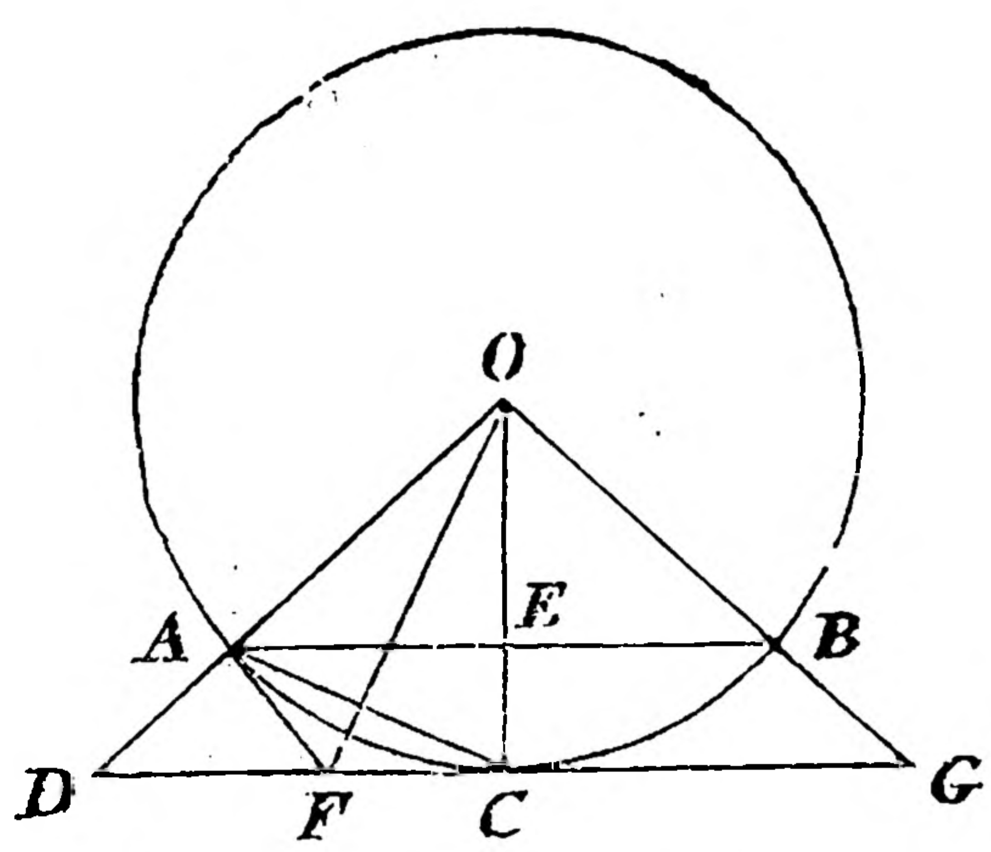
но $AD=2OF$ (кн. 6, пред. 3), слѣдовательно:

$$2OF^2=r(r+q) \quad \text{или} \quad OF=\sqrt{\frac{1}{2}r(r+q)}.$$

Предложеніе 12. Даны площади p_n и p_{2n} правильныхъ, вписанныхъ въ кругъ, многоугольниковъ, съ n и $2n$ числомъ сторонъ и P_n и P_{2n}, площади правильныхъ, описанныхъ около того же круга многоугольниковъ, съ тѣмъ же числомъ сторонъ, найти зависимость между площадями p_n, p_{2n}, P_n, P_{2n} (фиг. 285)?

Рѣшеніе. Пусть AB будетъ сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, $OA=r$ радіусъ, то AC будетъ сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго $2n$ сторонъ.

Фиг. 285.



Очевидно мы имѣемъ:

$$\triangle AOE=\frac{p_n}{2n}, \qquad \triangle COD=\frac{P_n}{2n}$$

$$\triangle AOC=\frac{p_{2n}}{2n}, \qquad AFCO=\frac{P_{2n}}{2n}$$

$$\triangle ADF=\frac{P_n-P_{2n}}{2n}, \qquad \triangle AFC=\frac{P_{2n}-p_{2n}}{2n}.$$

Треугольники AOE и AOC имѣютъ одну высоту, а основанія ихъ лежатъ на одной прямой OC, слѣдовательно (кн. 6, пред. 1).

$$\triangle AOE:\triangle AOC=OE:OC=OA:OD=\triangle AOC:\triangle DOC$$

или

$$\triangle AOE:\triangle AOC=\triangle AOC:DOC$$

откуда:

$$\triangle AOC^2=\triangle AOE\,.\,\triangle DOC,$$

подставляя предъидущія выраженія для площадей треугольниковъ, найдемъ:

$$p_{2n}^2 = p_n P_n .$$

Треугольники **DAF** и **FAC** имѣютъ равныя высоты и основанія лежащія на одной прямой DC, даютъ:

$$\triangle DAF : \triangle FAC = DF : FC = \triangle DOF : \triangle FOC =$$

$$= \triangle DOF : \triangle AOF = OD : OA = \triangle DOC : \triangle AOC$$

или

$$P_n - P_{2n} : P_{2n} - p_{2n} = P_n : p_{2n} ,$$

откуда, найдемъ:

$$\frac{2}{P_{2n}} = \frac{1}{p_{2n}} + \frac{1}{P_n} .$$

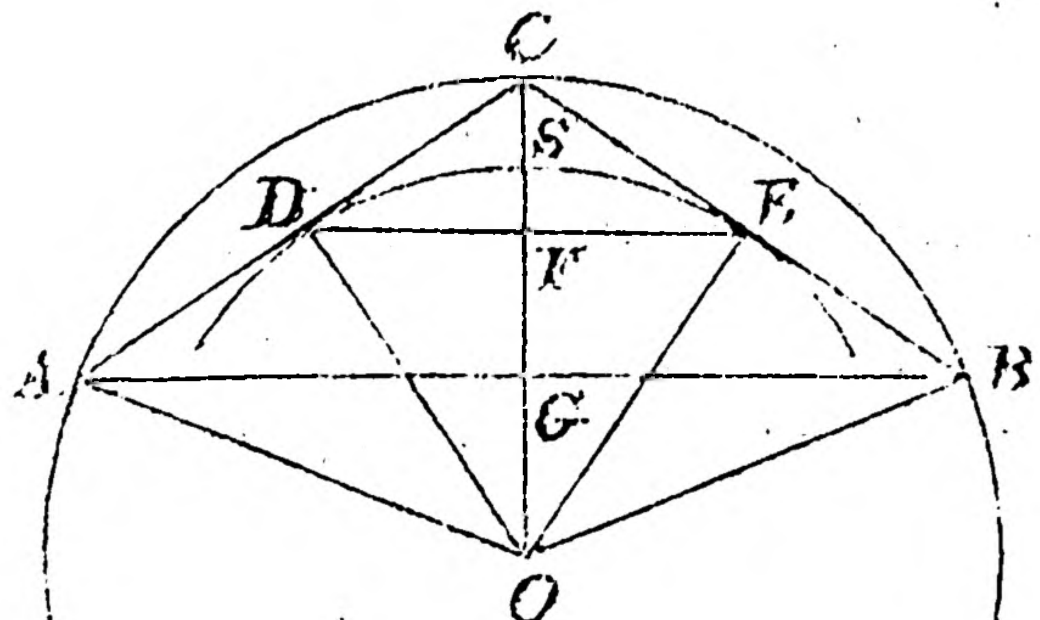
Предложеніе 13. По данному радіусу r и апоѳемѣ q правильнаго многоугольника, найти радіусъ r_1 и апоѳему q_1 правильнаго многоугольника, имѣющаго периметръ, равный данному, но двойное число сторонъ (фиг. 286)?

Рѣшеніе. Пусть AB будетъ сторона даннаго многоугольника, O центръ круга, въ который вписанъ многоугольникъ. Если изъ центра O опустимъ перпендикуляръ OG на сторону AB и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ C, то будемъ имѣть:

$$OC = r, \quad OG = q.$$

Проведемъ хорды AC и BC и соединимъ средины D и E этихъ хордъ, прямою DE. Очевидно прямая DE, параллельная AB и равная половинѣ этой послѣдней, будетъ сторона правильнаго многоугольника,

Фиг. 286.



имѣющаго периметръ, равный периметру даннаго, но съ удвоеннымъ числомъ сторонъ.

Такъ какъ $\angle DOE = \frac{1}{2}\angle AOB$, то центръ O будетъ и центромъ новаго многоугольника и мы будемъ имѣть:

$$OD = r_1, \quad OF = q_1.$$

Изъ построенія видно, что точка F есть средина CG, слѣдовательно $OF = \frac{1}{2}(OG + OC)$, или:

$$q_1 = \frac{1}{2}(r + q). \tag{1}$$

Кромѣ этого изъ прямоугольнаго треугольника ODC мы найдемъ $OD^2 = OC \cdot OF$ (кн. 6, пред. 8) или:

$$r_1 = \sqrt{rq_1}. \tag{2}$$

Два выраженія (1) и (2) вполнѣ рѣшають нашу задачу, первая даетъ q_1, а вторая затѣмъ опредѣляетъ r_1.

Слѣдствіе. Изъ построенія видно, что $OF > OG$, а $OD < OC$. Слѣдовательно, *когда отъ правильнаго многоугольника переходимъ къ правильному-же, имѣющему тотъ же периметръ, но съ удвоеннымъ числомъ сторонъ, то апоѳема увеличивается, а радіусъ уменьшается.*

Легко при этомъ показать, что разность $r_1 - q_1 < \frac{1}{4}(r - q)$. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ точки O, какъ изъ центра радіусомъ OD опишемъ дугу DSC, то видно, что:

$$r_1 - q_1 = SF \quad \text{и} \quad r - q = CG = 2CF.$$

Остается показать, что SF меньше половины CF. Для этого замѣтимъ, что уголъ SDE и уголъ SDC равны, такъ какъ оба измѣряются половинами равныхъ дугъ DS и ES. Если эти углы равны, то (кн. 6, пред. 3):

$$DF : DC = SF : SC,$$

но $DF < DC$, слѣдовательно и $SF < SC < \frac{1}{4}CG$.

Предложеніе 14. Найти зависимость между периметрами p и P двухъ правильныхъ подобныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго и периметрами p_1 и P_1 правильныхъ многоугольниковъ, но съ удвоеннымъ числомъ сторонъ (фиг. 286)?

Рѣшеніе. Мы видѣли (кн. 6, примѣч. 17, пред. d), что периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ ихъ стороны или апоѳемы, поэтому мы имѣемъ:

$$\frac{p}{P}=\frac{OG}{OC}, \qquad \frac{p_1}{P_1}=\frac{OD}{OC}=\frac{OF}{OD},$$

откуда:

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}}=\frac{OG}{\frac{1}{P}} \quad \text{и} \quad \frac{OD}{\frac{1}{p_1}}=\frac{OF}{\frac{1}{P_1}}.$$

Но изъ подобія треугольниковъ мы имѣемъ:

$$\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{AG}=\frac{p_1}{p} \quad \text{или} \quad \frac{OC}{\frac{1}{p}}=\frac{OD}{\frac{1}{p_1}},$$

слѣдовательно:

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}}=\frac{OG}{\frac{1}{P}}=\frac{OD}{\frac{1}{p_1}}=\frac{OF}{\frac{1}{P_1}}.$$

Но предложеніе 13 даетъ:

$$OF=\frac{1}{2}(OC+OG) \quad \text{и} \quad OD=\sqrt{OC\,.\,OF},$$

слѣдовательно:

$$\frac{2}{P_1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{P} \qquad \frac{1}{p_1}=\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P_1}}.$$

Эти формулы даютъ возможность вычислить, по даннымъ периметрамъ p и P правильныхъ многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго въ кругъ, периметры p_1 и P_1 правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, съ двойнымъ числомъ сторонъ.

IV. Измѣреніе круга.

Послѣ прямой линіи самая простая, всѣмъ извѣстная, кривая линія есть кругъ. Евклидъ въ третьей и четвертой книгѣ своихъ *Началъ* изложилъ всѣ главныя свойства круга, но въ этомъ сочиненіи мы не находимъ измѣренія круга, хотя эта задача, въ то время, была уже изслѣдована довольно обстоятельно. Поэтому многіе геометры думали, что эта часть сочиненія Евклида утеряна. Такое мнѣніе несправедливо потому, что измѣреніе круга требуетъ началъ, отличныхъ отъ тѣхъ, которыя положены Евклидомъ въ основаніе своего сочиненія.

Безъ сомнѣнія, какъ только первыя геометрическія истины были облечены въ логическую форму, измѣрены прямолинейныя фигуры, то сейчасъ же были сдѣланы и попытки измѣрить простѣйшую изъ кривыхъ линій—кругъ.

Радіусъ въ кругѣ есть, всегда величина данная—измѣренная; требуется:

1) По данному радіусу круга построить окружность, т. е. найти сколько разъ радіусъ или діаметръ круга содержится въ окружности?

2) По данному радіусу круга построить квадратъ, коего площадь равна площади круга, или найти сколько разъ квадратъ, построенный на радіусѣ, содержится въ площади круга, или построить квадратъ, коего площадь была бы равна площади круга? Эти двѣ задачи такъ связаны между собою, что рѣшеніе одной изъ нихъ даетъ рѣшеніе другой. Древніе геометры сначала пытались рѣшить эту задачу въ смыслѣ втораго предложенія, поэтому она была извѣстна подъ именемъ *квадратуры круга*.

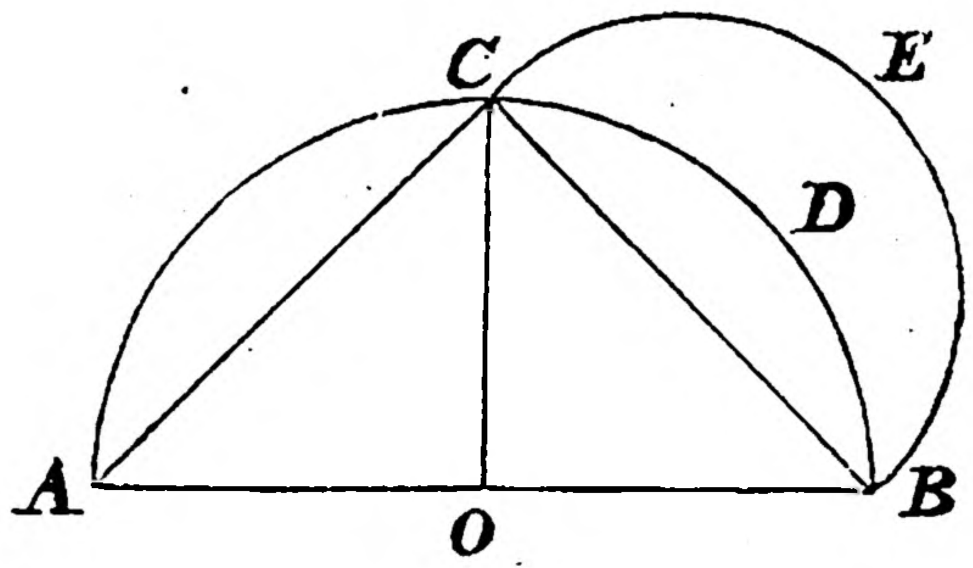
Анаксагоръ, умершій въ 430 г. до Р. Х., былъ первый изъ геометровъ, который занимался квадратурой круга. Посаженный въ тюрьму за безбожіе, онъ написалъ тамъ цѣлое сочиненіе о квадратурѣ круга, которое до насъ не дошло. Доказывалъ-ли онъ въ этомъ сочиненіи, что онъ рѣшилъ эту задачу, какъ это случалось часто съ искателями квадратуры круга, или онъ показывалъ какія трудности представляетъ эта задача, неизвѣстно. Судя впрочемъ по отзыву Платона, можно думать, что сочиненіе было написано въ послѣднемъ смыслѣ.

Вѣроятно съ этихъ поръ этой задачей занимаются весьма усердно, такъ какъ знаменитый комикъ Аристофанъ уже въ комедіи своей Птицы смѣется надъ искателями квадратуры круга. Онъ выводитъ на сцену знаменитаго геометра Метона и влагаетъ въ его уста безсмысленную фразу: „я тебѣ сдѣлаю квадратный кругъ“ съ которою онъ обращается къ Пистетеросу.

Почти въ тоже время *Гиппократъ Хіосскій* занимался той же задачей и хотя задачи не рѣшилъ, но при этомъ сдѣлалъ весьма замѣчательное открытіе, именно онъ построилъ квадратъ равный *мениску* (μηνίσκος) или *луночкѣ*, т. е. площади, ограниченной двумя дугами неравныхъ круговъ. Это открытіе дѣйствительно замѣчательное, такъ какъ уже въ то время начали думать, что построить квадратъ, который бы былъ равенъ площади, ограниченной кривыми линіями, невозможно. Вотъ какъ объ этомъ разсказываетъ Симпликій, приводя выписки изъ Эвдема, греческій текстъ которыхъ находится только въ изданіи: Simplicii Comment. in octo Aristotelis Psysicae auscultationis libros. Venetiis, 1526, ap. Aldum Manutium fol. 12, sqq.

На прямой AB, какъ на діаметрѣ (фиг. 287), построимъ полукругъ ACB, изъ средины O прямой AB, т. е. изъ центра круга, возставимъ перпендикуляръ OC къ діаметру AB и соединимъ точку C съ B. прямая CB будетъ сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ, а треугольникъ ACB будетъ половина этого квадрата; на прямой CB, какъ на діаметрѣ, опишемъ еще полукругъ CEB.

Фиг. 287.

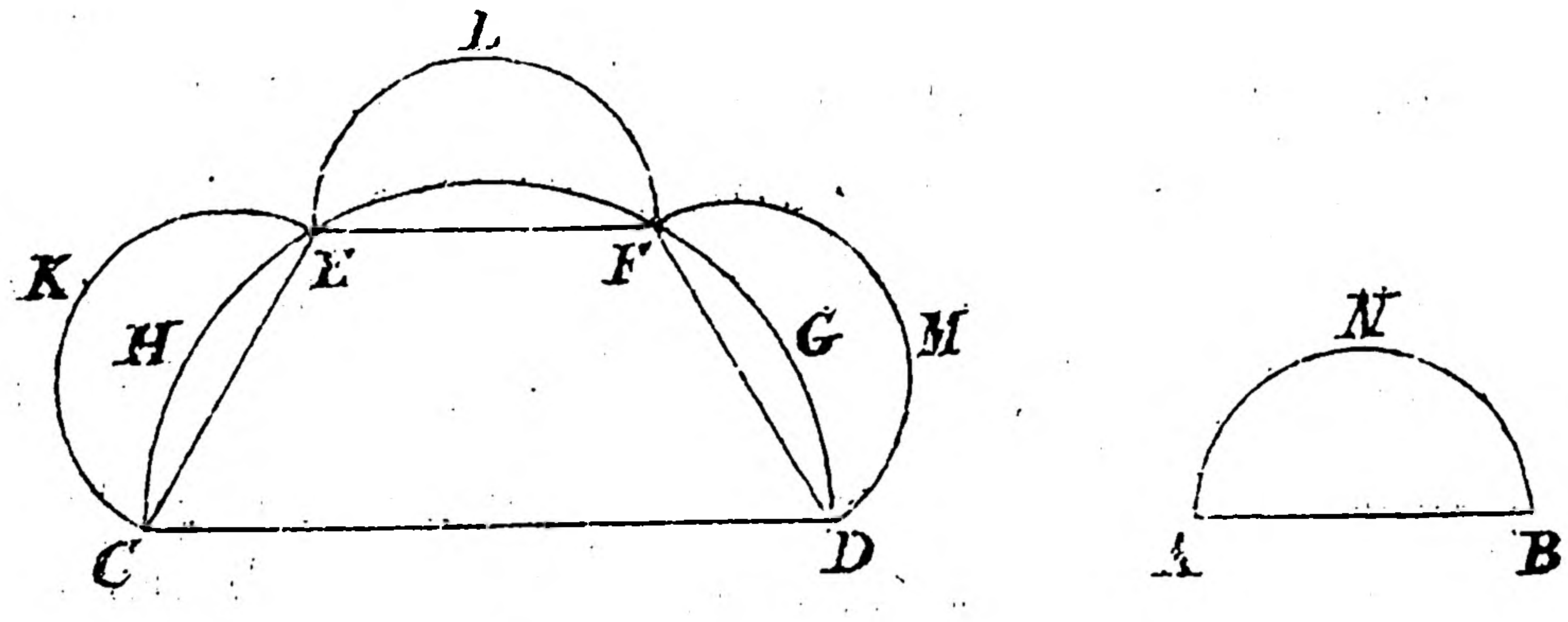


Такъ какъ $\square AB = \square AC + \square BC = 2\square AC$ (кн. 1, пред. 47), а площади круговъ относятся между собою какъ квадраты изъ ихъ діаметровъ (кн. 6, примѣч. 17, пред. d), то слѣдуетъ изъ этого, что площадь полукруга ACB равна удвоенной площади полукруга CEB. Но секторъ OCB есть четверть окружности или половина половины, слѣдовательно секторъ OCB равенъ площади полукруга CEB. Отымая отъ этихъ равныхъ величинъ общій имъ сегментъ CDB, найдемъ, что треугольникъ COB равенъ луночкѣ $CDBE$. Наконецъ можно построить квадратъ, коего площадь будетъ равна площади треугольника COB, и слѣдовательно, будетъ равна и площади луночки $CDBE$.

Далѣе греческій текстъ, въ упомянутомъ выше сочиненіи, неясенъ и по всему видно измѣненъ, но въ настоящее время возстановленъ Бретшнейдеромъ въ сочиненіи: Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.

Вотъ въ чемъ дѣло. Гиппократъ, найдя квадратуру луночки, думалъ найти квадратуру круга слѣдующимъ образомъ:

На прямой AB, какъ на діаметрѣ (фиг. 288), построимъ полукругъ, возьФиг. 288.



мемъ $CD = 2AB$ и, какъ на діаметрѣ, построимъ полукругъ на CD, въ полукругъ этотъ впишемъ шестиугольникъ, коего стороны CE, EF, FD будутъ, очевидно, равны прямой AB, на сторонахъ CE, EF, FD построимъ полукруги CKE, ELF, FMD, которые будутъ равны полукругу построенному на AB.

Такъ какъ полукруги CKE, ELF, FMD, ANB всѣ равны, то сумма ихъ равна четырежды взятому полукругу ANB. Но $CD=2AB$, а площади круговъ относятся какъ квадраты діаметровъ, слѣдовательно полукругъ $CEFD : ANB = 4 : 1$, т. е. полукругъ $CEFD = 4ANB$ или полукругъ $CEFD$ равенъ суммѣ трехъ полукруговъ CKE, ELF, FMD и полукруга ANB, если отымемъ три сегмента CHE, EPF и FGD общіе, какъ полукругу $CEFD$, такъ и полукругамъ CKE, ELF, FMD, то найдемъ, что площадь трапеціи $CEFD$ равна площадямъ трехъ луночекъ съ площадью полукруга ANB, слѣдовательно площадь полукруга ANB равна площади трапеціи $CEFD$ безъ трехъ луночекъ $CKEH$, $ELFP$, $FMDG$; но мы можемъ построить квадратъ, коего площадь равна суммѣ площадей трехъ луночекъ, слѣдовательно, площадь круга, построеннаго на AB, какъ на діаметрѣ, равна удвоенной разности двухъ прямолинейныхъ площадей, именно трапеціи $CEFD$ и площади квадрата равнаго суммѣ площадей трехъ выше упомянутыхъ луночекъ. Но такъ какъ эта послѣдняя прямолинейная площадь можетъ быть обращена въ квадратъ, то площадь этого квадрата и будетъ равна площади круга ANB.

Далѣе Эвдемъ замѣчаетъ, что хотя это остроумно, но невѣрно и показываетъ почему. Лакруа, въ своемъ изданіи: **Histoire des recherches sur la quadrature du cercle par Montucla**, говоритъ, что, не смотря на свидѣтельство историковъ, онъ не вѣритъ, чтобы такой геометръ какъ Гиппократъ впалъ въ такую грубую ошибку и при этомъ даетъ довольно странное объясненіе, что Гиппократъ хотѣлъ указать только какъ было бы возможно найти квадратуру круга. Аристотель упоминаетъ еще о двухъ геометрахъ, занимавшихся квадратурой круга.

Брисонъ (Βρύσωνος), утверждалъ, что площадь круга есть среднепропорціональная между площадями вписаннаго и описаннаго квадратовъ, но это очевидная нелѣпость, такъ какъ между площадями, вписаннаго и описаннаго около круга квадратовъ, средне-пропорціональная есть площадь восьмиугольника и вообще между площадями правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, средне-пропорціональная есть площадь вписаннаго многоугольника съ удвоеннымъ числомъ сторонъ.

Антифонъ разсматривалъ кругъ какъ многоугольникъ, состоящій изъ безчисленнаго числа сторонъ, т. е. вписывалъ сначала квадратъ въ кругъ, затѣмъ восьмиугольникъ и т. д., все удваивая число сторонъ и говоритъ, что такую операцію надо продолжать до тѣхъ поръ пока площадь многоугольника не исчерпаетъ всю площадь круга, потомъ онъ дѣлаетъ слѣдующее заключеніе: что такъ какъ каждому вписанному многоугольнику можно построить равный квадратъ, то слѣдовательно можно построить квадратъ, коего площадь будетъ равна площади круга.

Деностратъ былъ первый изъ геометровъ, который нашелъ квадратуру круга правильнымъ теоретическимъ построеніемъ, воспользовавшись кривою, построенною Гиппіасомъ, которая носитъ названіе *квадратриксы*. Но построить ту точку кривой, которая даетъ квадратуру круга представляетъ такія же трудности, какъ и сама квадратура круга.

Это почти все то что мы знаемъ о квадратурѣ круга до Архимеда.

Быть не можетъ, чтобы такой чисто теоретическій умъ, какъ Архимедовъ не пробовалъ рѣшить задачу квадратуры круга геометрическимъ построеніемъ и безъ сомнѣнія, что только послѣ того какъ онъ убѣдился въ трудности и почти невозможности достигнуть полнаго рѣшенія задачи, онъ берется за нее съ практической стороны. Замѣчательно, что до Архимеда ни одинъ изъ геометровъ, занимавшихся квадратурой круга, не показалъ преближеннаго отношенія окружности круга къ радіусу, или площади круга къ квадрату построенному на радіусѣ. По крайней мѣрѣ ни одинъ изъ историковъ и геометровъ объ этомъ не упоминаетъ, но англійскіе ученые въ Индіи нашли, въ одномъ изъ сочиненій Браминовъ подъ заглавіемъ Аіенъ Акбери (Ayeen Akbery), отношеніе окружности къ діаметру, выраженное числами $3927:1250=3{,}1416$ вѣрное до одной десятитысячной и которое считается древнѣе Архимедовскаго.

Евтокій говоритъ, что Архимедъ предпринялъ такое вычисленіе въ виду практическаго примѣненія, и дѣйствительно онъ выполнилъ, въ этомъ отношеніи, свою задачу въ совершенствѣ, пріемъ его изящный, и числа полученныя, въ практическомъ отношеніи, не оставляютъ желать ничего лучшаго.

Изслѣдованія свои Архимедъ изложилъ въ маленькомъ сочиненіи Κύκλου μέτρησις и достигъ слѣдующихъ результатовъ:

1) Площадь круга равна площади прямоугольнаго треугольника, коего одинъ катетъ равенъ длинѣ окружности круга, а другой равенъ радіусу круга.

2) Площадь круга относится къ площади квадрата, построеннаго на діаметрѣ, почти какъ $11:14$.

3) Окружность круга меньше трехъ діаметровъ и $\frac{1}{7}$ этого діаметра и больше трехъ діаметровъ и $\frac{10}{71}$ того-же діаметра, откуда слѣдуетъ, что окружность не много разниться отъ перваго изъ этихъ предѣловъ, т. е., что она почти равна $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ діаметра. Это приближеніе самое точное изъ тѣхъ, которыя выражаются наименьшимъ числомъ цифръ.

Почти всѣ знаютъ, что Архимедъ опредѣлилъ отношеніе окружности къ діаметру, но не многимъ извѣстны его изслѣдованія, поэтому я изложу здѣсь дословно его маленькое сочиненіе Κύκλου μέτρησις, съ нѣкоторыми поясненіями и прибавленіемъ двухъ началъ, изъ его же сочиненія Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, на которыя онъ ссылается, кромѣ этого буду ссылаться еще на два предложенія Евклида: 1-е десятой и 2-е двѣнадцатой книги.

Два упомянутыя выше начала Архимеда суть слѣдующія.

1) Прямая линія есть кратчайшая изъ всѣхъ тѣхъ линій, которыя имѣютъ съ нею однѣ и тѣ-же концы.

2) Двѣ кривыя линіи, лежащія въ одной плоскости и имѣющія одни и тѣ-же концы, не равны, если обѣ выпуклы въ одну и ту же сторону и если одна вся заключена другою и прямою, имѣющую однѣ и тѣ-же концы съ этой послѣдней, или наконецъ, если одна заключена только частью другой, а остальная часть общая обѣимъ, то заключенная линія будетъ кратчайшая.

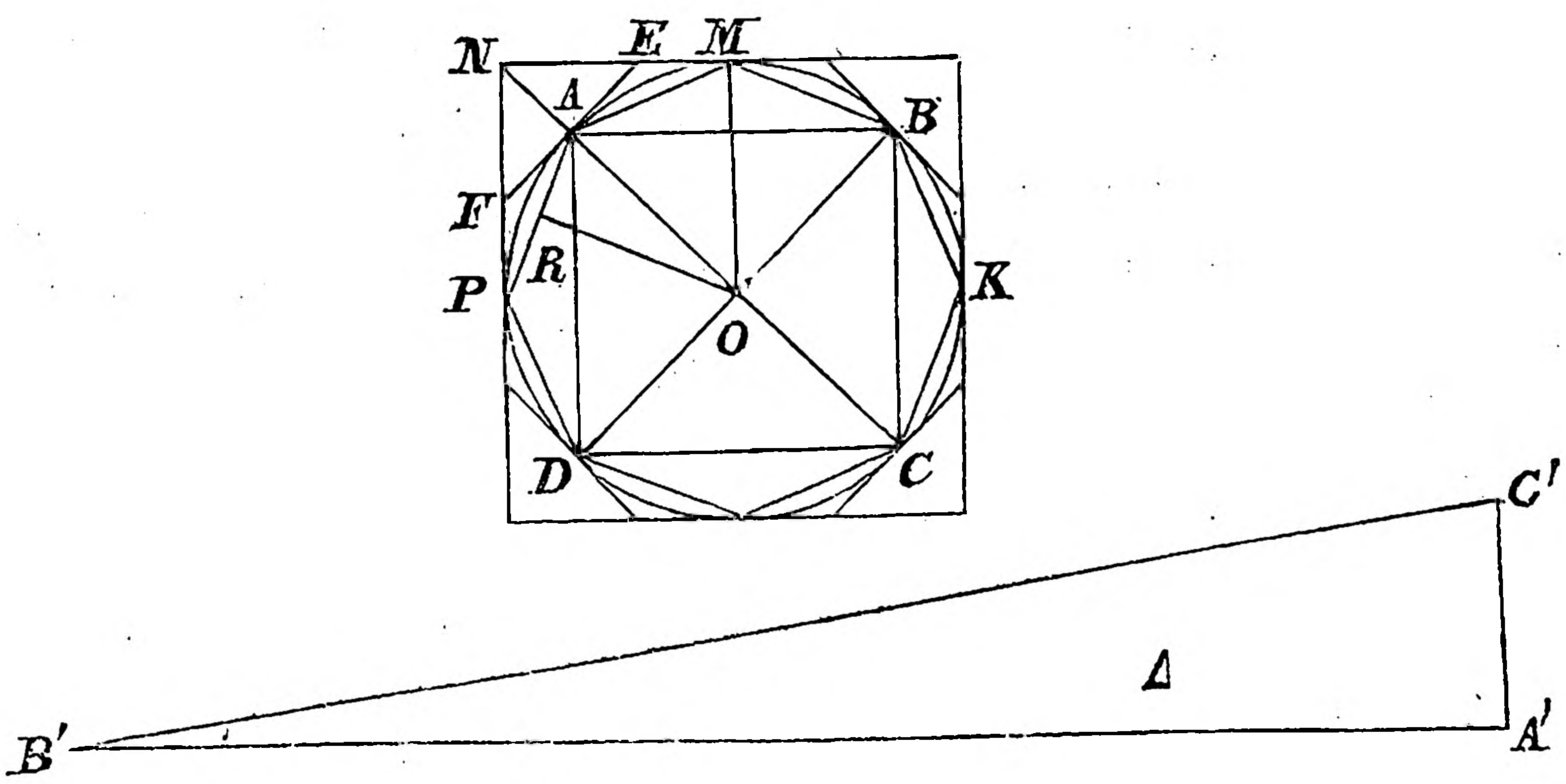
VI. Объ измѣреніи круга.

Κύκλου μέτρησις.

Предложеніе 1. Площадь всякаго круга равна площади прямоугольнаго треугольника, коего одинъ изъ катетовъ равенъ окружности круга, а другой радіусу круга (фиг. 289).

Доказат. Пусть данный кругъ будетъ O, а треугольникъ, коего одинъ катетъ * $A'B'$ равенъ окружности круга O, а другой $A'C'$ радіусу круга, назовемъ $\triangle$.

Фиг. 289.



Положимъ, если это возможно, что площадь круга O, которую назовемъ чрезъ Π, больше площади, построеннаго треугольника $\triangle$, т. е. пусть

* Слово катетъ не употреблялось, а Архимедъ употребляетъ фразу: ἡ περὶ τὴν ὀρθήν.

$\Pi = \triangle + \varepsilon$, гдѣ ε есть избытокъ площади круга надъ площадью треугольника.

Впишемъ въ кругъ O квадратъ (кн. 4, пред. 6) $ABCD$, и будемъ дѣлить дуги пополамъ до тѣхъ поръ пока сумма сегментовъ, т. е. разность между площадью круга и вписаннаго многоугольника, не сдѣлается меньше ε (кн. 12, пред. 2). Тогда мы будемъ имѣть правильный, вписанный въ кругъ, многоугольникъ, коего площадь будетъ больше площади треугольника $\triangle$. Изъ центра круга O опустимъ перпендикуляръ OR на сторону, построеннаго, какъ сказано выше, многоугольника. Перпендикуляръ OR, очевидно меньше радіуса круга. Периметръ многоугольника меньше окружности по второму началу, слѣдовательно площадь многоугольника будетъ меньше площади треугольника $\triangle$, что противурѣчитъ сдѣланному построенію.

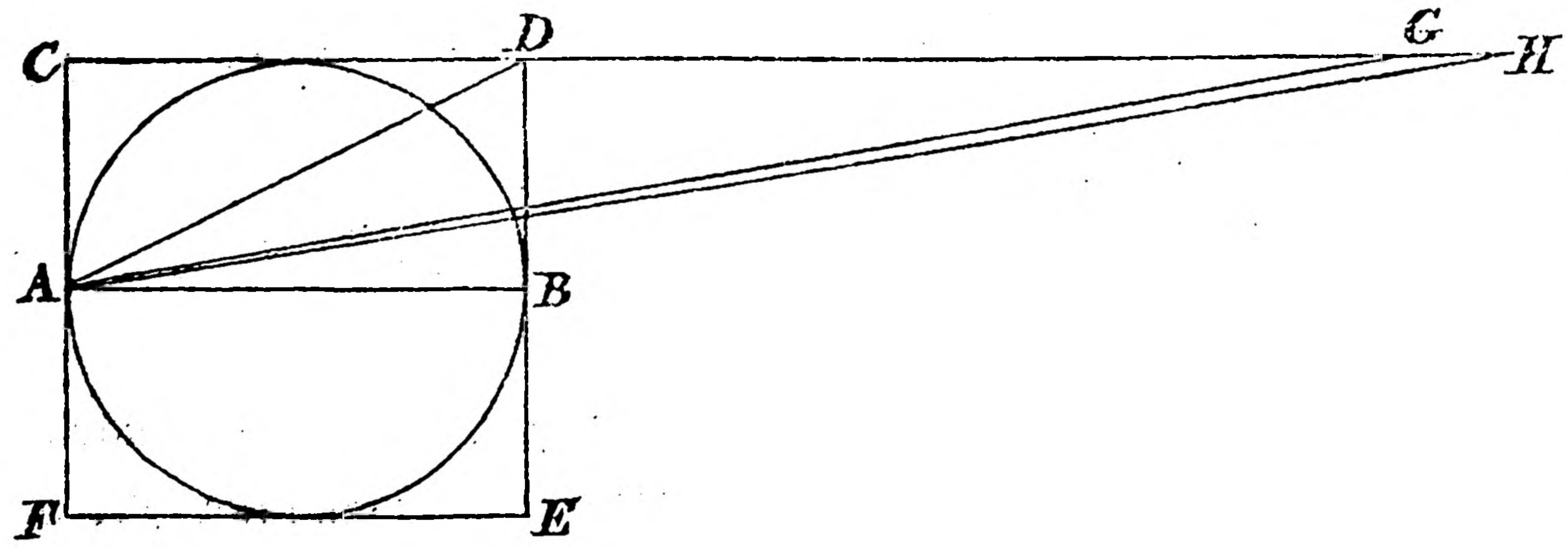
Положимъ, что площадь Π круга O меньше площади треугольника $\triangle$, т. е. пусть $\Pi + \varepsilon = \triangle$, ε есть избытокъ площади $\triangle$ надъ площадью Π.

Опишемъ около круга O квадратъ (кн. 4, пред. 7) и раздѣлимъ дуги PM, AK,... пополамъ и чрезъ точки дѣленія проведемъ касательныя къ кругу. Такъ какъ уголъ NAE прямой, то $NE > AE = EM$, слѣдовательно $\triangle FNE$ больше половины фигуры $NPAMN$. Продолжимъ такое построеніе пока сумма прямолинейныхъ фигуръ, подобныхъ фигурѣ $PFEM$ не сдѣлается меньше ε (кн. 12, пред. 2), тогда, очевидно, сумма фигуръ, заключенныхъ, напримѣръ, между дугою AP и касательными AF и PF, тѣмъ болѣе, будетъ меньше ε. Слѣдовательно, многоугольникъ $FEBKCDP$ будетъ меньше треугольника $\triangle$, что не сообразно, такъ какъ периметръ многоугольника больше окружности (кн. 2, пред. 2), а апоѳема его равна радіусу круга.

И такъ площадь треугольника $\triangle$ не можетъ быть ни больше ни меньше площади круга O, слѣдовательно она ей равна.

Предложеніе 2. Площадь всякаго круга относится къ площади квадрата, построеннаго на діаметрѣ, почти какъ 11 къ 14 (фиг. 290).

Фиг. 290.



Доказат. Пусть діаметръ, даннаго круга, будетъ AB. Опишемъ около этого круга квадратъ $CDEF$.

Продолжимъ сторону CD квадрата такъ, чтобы продолженіе DG было равно удвоенному CD, а GH было равно одной седьмой CD.

Треугольники ACG и ACD имѣютъ одну высоту, слѣдовательно:

$$\triangle ACG : \triangle ACD = 21 : 7,$$

по той же причинѣ:

$$\triangle ACD : \triangle AGH = 7 : 1$$

и

$$\triangle ACH : \triangle ACD = 22 : 7.$$

Но $\square\, CD = 4ACD$, слѣдовательно:

$$\triangle ACH : \square CD = 22 : 28$$

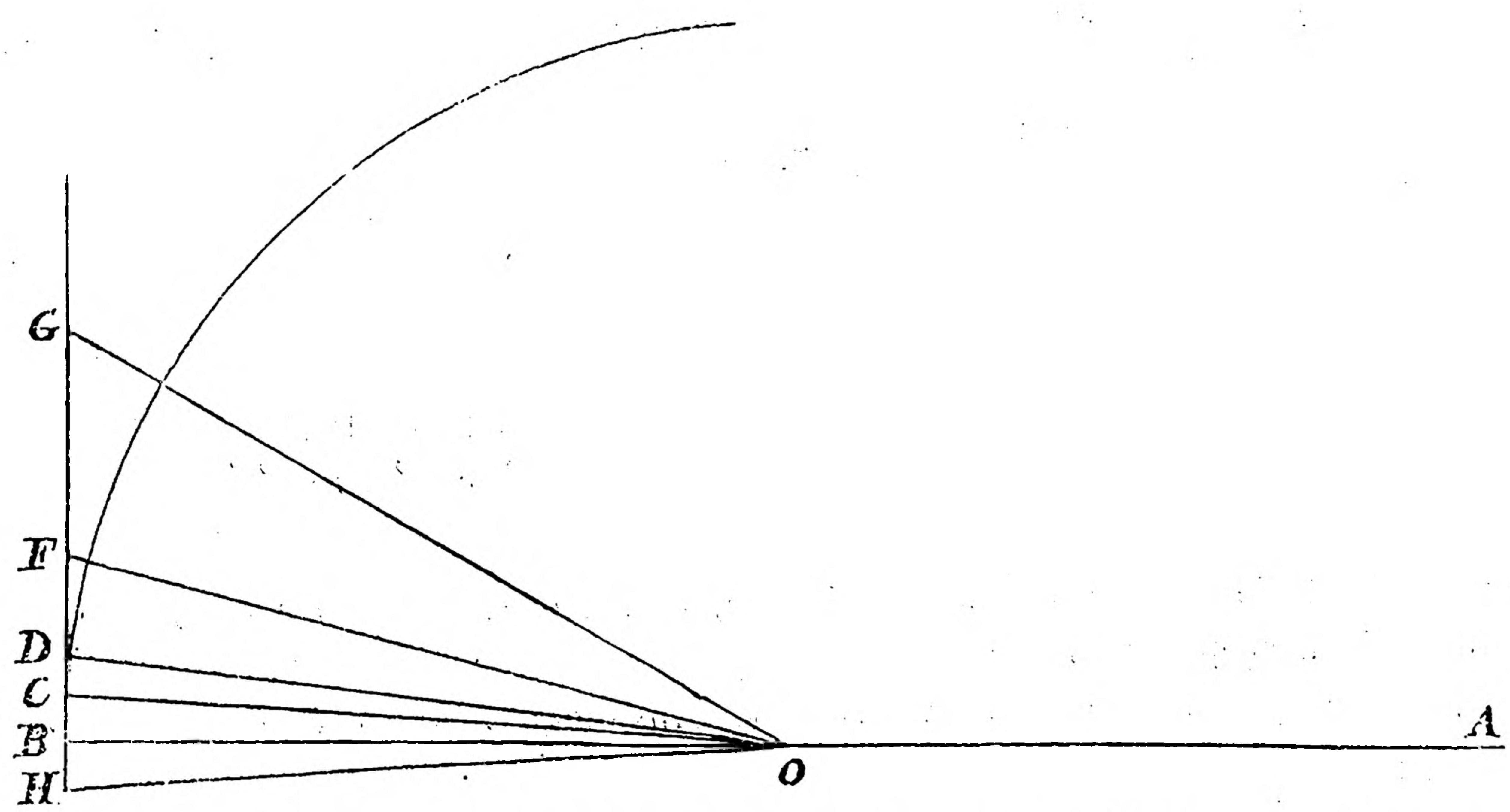
или

$$\triangle ACH : \square CD = 11 : 14.$$

Ниже мы покажемъ, что прямая CH почти равна окружности круга, слѣдовательно, площадь прямоугольнаго треугольника ACH, въ которомъ одинъ катетъ равенъ окружности круга, а другой радіусу его, равна площади круга (пред. 1). Слѣдовательно площадь круга относится къ площади квадрата CE почти какъ $11 : 14$.

Предложеніе 3. Окружность всякаго круга равна тремъ діаметрамъ съ частью діаметра, которая меньше одной седьмой этого діаметра и больше $\frac{10}{71}$ того же діаметра (фиг. 291).

Фиг. 291.



Доказат. Пусть AB будетъ діаметръ круга, а O его центръ. Проведемъ касательную BG, построимъ уголъ $\angle BOG = \frac{1}{3} d$.

Прямая OG будетъ относится къ прямой BG какъ 306 къ 153, т. е.:

$$OG:BG=306:153$$

а отношеніе OB къ BG будетъ больше отношенія 265 къ 153, т. е.:

$$\frac{OB}{BG}>\frac{265}{153}.$$

Примѣч. а). Такъ какъ уголъ $BOG=\frac{1}{3}d$, то извѣстно, что $BG=\frac{1}{2}OG$, а $OB=BG\sqrt{3}$, т. е.:

$$\frac{OG}{BG}=\frac{2}{1},\quad \frac{OB}{BG}=\sqrt{3}.$$

Съ перваго раза кажется страннымъ, почему Архимедъ, вмѣсто отношенія $\frac{2}{1}$, взялъ отношеніе $\frac{306}{153}$, но здѣсь то и видна необыкновенная, для того времени, проницательность. Сколько намъ извѣстно въ то время корни извлекались ощупью, не было особенныхъ правилъ, по крайней мѣрѣ, намъ не переданы тѣ правила, которыми древніе руководствовались при извлеченіи корней; а Архимедъ не оставилъ подробностей своихъ вычисленій.

Чтобы получить неравенство:

$$\frac{OB}{BG}>\frac{265}{153}.$$

Архимеду необходимо было извлечь квадратный корень изъ 3 и найти его приближенную величину съ *недостаткомъ*. Какимъ образомъ онъ нашелъ предъидущую дробь? какъ нашелъ приближеніе корня $\sqrt{3}$? неизвѣстно, но эта дробь есть простѣйшая и вмѣстѣ съ тѣмъ ближайшая къ $\sqrt{3}$ изъ всѣхъ тѣхъ, которыя выражаются тремя знаками.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\sqrt{3}$ обратимъ въ непрерывную дробь, то получимъ дробь:

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\dots}}}}$$

послѣдовательныя приближенія, которой будутъ:

$$1,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ \frac{265}{153},\ \frac{362}{209},\ \frac{989}{507},\ \frac{1351}{780},\ \dots$$

первое приближеніе меньше $\sqrt{3}$, второе больше, третье опять меньше и т. д., какъ извѣстно изъ теоріи непрерывныхъ дробей.

Девятое приближеніе, есть то, которое Архимедъ и взялъ за приближенную величину $\sqrt{3}$.

Теперь дѣлается ясно почему Архимедъ взялъ отношеніе:

$$OG:BG=306:153.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{265}{153}$ есть приближенная величина $\sqrt{3}=\frac{OB}{BG}$, слѣдовательно, если положить $BG=153$, то прямая OG будетъ равна 306, такъ какъ мы видѣли, что $OG=2BG$.

Раздѣлимъ уголъ BOG прямою OF пополамъ, то (кн. 6, пред. 3) мы будемъ имѣть:

$$OG:OB=FG:BF$$

откуда:

$$OG+OB:OB=FG+BF:BF$$

или

$$OG+OB:BG=OB:BF.$$

Такъ какъ $OB>265$, то:

$$\frac{OB}{BF}>\frac{571}{153}.$$

Слѣдовательно отношеніе квадрата OF къ квадрату BF больше отношенія 349450 къ 23409, а отношеніе OF къ BF больше отношенія $591\frac{1}{8}$ къ 153.

Примѣч. b). Мы видѣли, что:

$$\frac{OB}{BF}>\frac{571}{153},$$

слѣдовательно, если прямая $BF=153$, то $OB>571$. Возвышая въ квадратъ предъидущее неравенство мы имѣемъ:

$$\frac{OB^2}{BF^2}>\frac{571^2}{153^2},$$

придавая къ обѣимъ частямъ по единицѣ, найдемъ:

$$\frac{OB^2+BF^2}{BF^2}>\frac{571^2+153^2}{153^2},$$

или

$$\frac{OF^2}{BF^2}>\frac{571^2+153^2}{153^2}$$

или

$$\frac{OF^2}{BF^2}>\frac{349450}{23409}$$

извлекая квадратный корень, найдемъ наконецъ:

$$\frac{OF}{BF}>\frac{591\frac{1}{8}}{153},$$

какъ было сказано выше.

Раздѣлимъ уголъ BOF, прямою OE*, пополамъ, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{OB}{BE} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{OE}{BE} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Примѣч. c). Такъ какъ въ треугольникѣ BOF уголъ BOF раздѣленъ пополамъ, то мы имѣемъ:

$$OF : OB = EF : BE,$$

откуда:

$$OF + OB : OB = EF + BE : BE$$

или

$$\frac{OF+OB}{BF} = \frac{OB}{BE},$$

но мы выше видѣли, что:

$$\frac{OF}{BF} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} \quad \text{и} \quad \frac{OB}{BF} > \frac{571}{153},$$

слѣдовательно:

$$\frac{OB}{BE} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Откуда:

$$\frac{OB^2}{BE^2} > \frac{1350534\frac{33}{64}}{23409},$$

придавая по единицѣ къ обѣимъ частямъ, и дѣлая приведеніе, найдемъ:

$$\frac{OB^2+BE^2}{BE^2} = \frac{OE^2}{BE^2} > \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409},$$

извлекая квадратный корень, получимъ:

$$\frac{OE}{BE} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Раздѣлимъ уголъ EOB прямою OD пополамъ, то отношеніе OB къ BD будетъ больше отношенія $2334\frac{1}{4}$ къ 153, т. е.:

$$\frac{OB}{BD} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

слѣдовательно отношеніе:

$$\frac{OD}{BD} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

---

* Прямая OE на фиг. 291 пропущена.

Примѣч. d). Этотъ результатъ, какъ и слѣдующій, получается тѣмъ же процессомъ, какимъ показанно въ примѣчаніяхъ (b) и (c).

Раздѣлимъ наконецъ уголъ BOD прямою OC пополамъ, то отношеніе:

$$\frac{OB}{BC} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

Такъ какъ уголъ GOB, равный третьей части прямаго угла, былъ раздѣленъ четыре раза пополамъ, то уголъ COB составляетъ сорокъ восьмую часть прямаго угла. Построимъ уголъ $BOH = \angle BOC$ и продолжимъ GB до встрѣчи съ прямою OH въ точкѣ H, то уголъ COH будетъ составлять одну двадцать четвертую часть прямаго угла. Слѣдовательно, прямая CH будетъ сторона правильнаго, описаннаго около круга O, девяностошестиугольника.

Мы выше показали, что:

$$\frac{OB}{CB} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

и какъ $AB = 2OB$, а $CH = 2CB$, то:

$$\frac{AB}{CH} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

Откуда заключаемъ, помножая знаменателей въ обѣихъ частяхъ предъидущаго неравенства на 96, что:

$$\frac{AB}{96 . CH} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$$

т. е. отношеніе діаметра AB круга O къ периметру девяностошестиугольника больше предъидущей дроби.

Слѣдовательно:

$$\frac{96 . HC}{AB} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}$$

но знаменатель предъидущей дроби содержится въ числителѣ три раза съ остаткомъ $667\frac{1}{2}$ и этотъ остатокъ меньше седьмой части числа $4673\frac{1}{2}$, слѣдовательно периметръ описаннаго многоугольника содержитъ въ себѣ трижды діаметръ съ частью того же діаметра, меньшею одной седьмой. Слѣдовательно тѣмъ болѣе окружность круга меньше три раза взятаго діаметра увеличеннаго одной седьмой этого діаметра.

Примѣч. e). Седьмая часть числа $4673\frac{1}{2}$ есть $667\frac{9}{14} > 667\frac{1}{2}$. Слѣдовательно:

$$\text{Перим. 96 угол.} < 3\tfrac{1}{7}\text{ діам.}$$

а тѣмъ болѣе:

$$\text{Окруж.} < 3\tfrac{1}{7}\text{ діам.}$$

Найдя, такимъ образомъ, большій предѣлъ окружности круга, Архимедъ находитъ и меньшій предѣлъ слѣдующимъ образомъ.

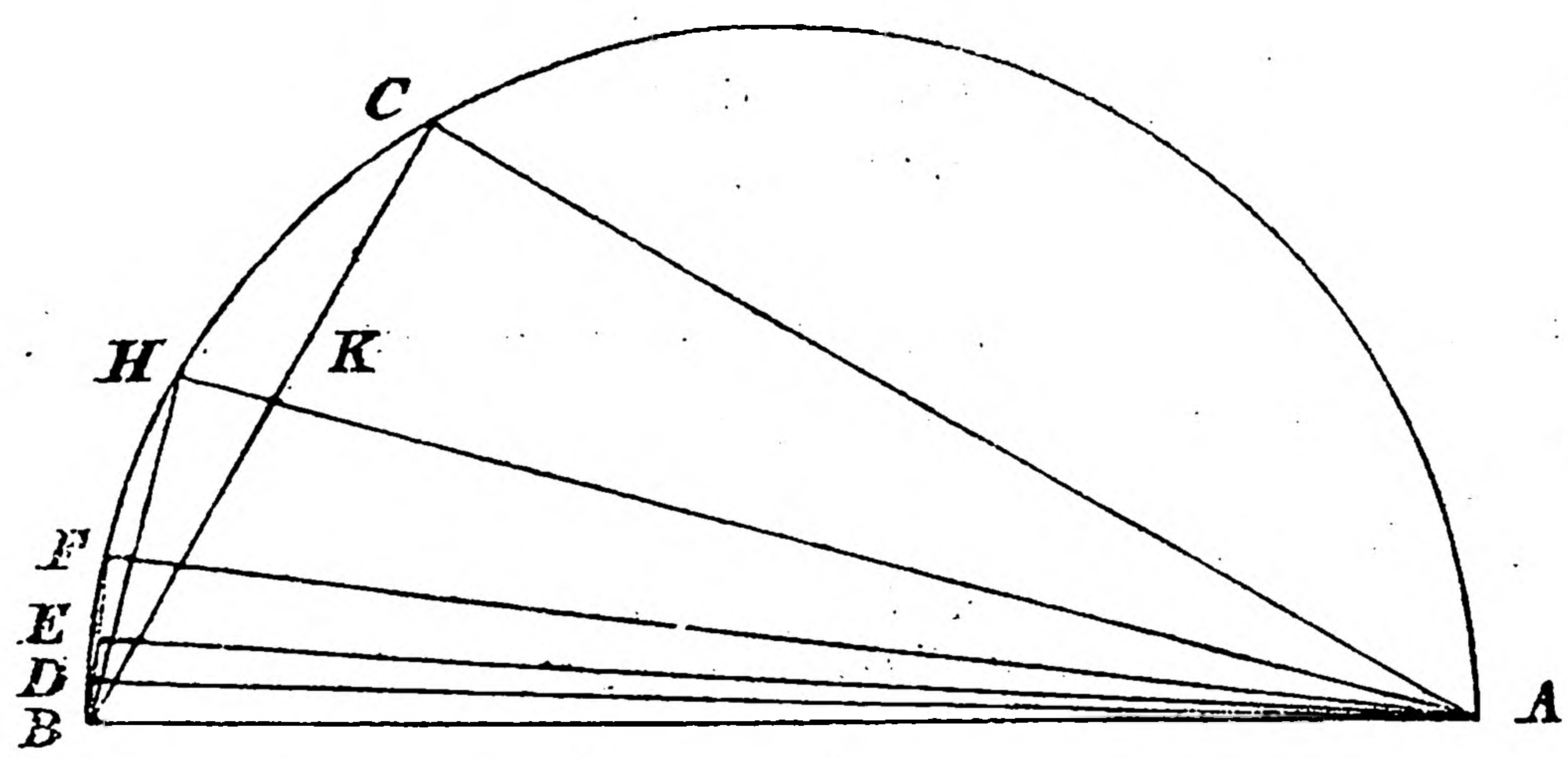
Пусть будетъ кругъ, коего діаметръ есть AB. Пусть уголъ CAB будетъ $=\frac{1}{3}d$, то отношеніе AC къ CB будетъ меньше отношенія 1351 къ 780, т. е.:

$$\frac{AC}{CB} < \frac{1351}{780}$$

а отношеніе AB къ BC будетъ равно отношенію 1560 къ 780, т. е.:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}.$$

Фиг. 292.



Примѣч. f). Такъ какъ уголъ $CAB = \frac{1}{3}d$, то:

$$\frac{AC}{CB} = \sqrt{3}$$

это отношеніе есть cotg 30°. Архимедъ беретъ за $\sqrt{3}$ послѣднее изъ приближеній, написанныхъ въ примѣчаніи (a), это приближеніе больше $\sqrt{3}$, слѣдовательно, мы имѣемъ неравенство:

$$\frac{AC}{CB} < \frac{1351}{780}.$$

Если сторона $CB=780$, то очевидно что $AB=1560$.

Удивительно, что Архимедъ, не зная ни десятичныхъ дробей, ни непрерывныхъ, беретъ и здѣсь самое простое изъ большихъ для $\sqrt{3}$ приближеній, но какимъ образомъ онъ вычислялъ эти приближенія неизвѣстно.

Раздѣлимъ уголъ CAB прямою AH пополамъ, точку встрѣчи этой прямой съ окружностью соединимъ съ точкою B.

Такъ какъ $\angle CAH = \angle HBC = \angle HAB$ и уголъ AHB общій треугольникамъ ABH и HBK, то эти треугольники подобны, слѣдовательно:

$$AH : BH = BH : HK = AB : BK.$$

Но мы имѣемъ еще (кн. 6, пред. 6):

$$AB : BK = AB + AC : BC,$$

слѣдовательно:

$$AB + AC : BC = AH : BH$$

или

$$\frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{BH}.$$

Выше мы нашли, что:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1570}{780}, \quad \frac{AC}{BC} < \frac{1351}{780},$$

слѣдовательно:

$$\frac{AH}{BH} < \frac{2911}{780}.$$

откуда:

$$\frac{AB}{BH} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Примѣч. g). Возвышая въ квадратъ обѣ части предъидущаго неравенства и придавая къ обѣимъ частямъ по единицѣ, получимъ:

$$\frac{AH^2 + BH^2}{BH^2} = \frac{AB^2}{BH^2} < \frac{2911^2 + 780^2}{780^2}$$

или

$$\frac{AB^2}{BH^2} < \frac{9082321}{780}$$

а извлекая квадратный корень, найдемъ:

$$\frac{AB}{BH} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Раздѣлимъ уголъ BAH прямою AF пополамъ, то найдемъ, что:

$$\frac{AF}{BF} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780}.$$

или

$$\frac{AF}{BF} < \frac{1823}{240}$$

такъ какъ помножая числителя и знаменателя этой послѣдней дроби на $\frac{13}{4}$ получимъ первую.

Изъ послѣдняго неравенства, точно также какъ было сдѣлано выше, получимъ:

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

Раздѣлимъ еще уголъ FAB прямою AE пополамъ, то найдемъ, что:

$$\frac{AE}{BE} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240}$$

или

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1007}{66}$$

такъ какъ, помножая числителя и знаменателя этой послѣдней дроби $\frac{40}{11}$, найдемъ первую. Слѣдовательно:

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

Раздѣлимъ наконецъ уголъ EAB прямою AD пополамъ, то получимъ, что:

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

а

$$\frac{AB}{DB} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

Изъ этого послѣдняго имѣемъ:

$$\frac{BD}{AB} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$$

Помножая обѣ части этого неравенства на 96, найдемъ:

$$\frac{96 \,.\, BD}{AB} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$$

т. е. отношеніе периметра девяностошестиугольника къ діаметру больше отношенія:

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}.$$

Но числитель предъидущей дроби содержитъ знаменатель три раза съ остаткомъ большимъ отъ $\frac{10}{71}$ числа $2017\frac{1}{4}$. Слѣдовательно периметръ 96-ти угольника, вписаннаго въ кругѣ, въ три раза больше взятаго діаметра съ $\frac{10}{71}$ частью того-же діаметра. Слѣдовательно, тѣмъ болѣе окружность круга въ три раза больше взятаго діаметра съ $\frac{10}{71}$ частью того-же діаметра.

Слѣдовательно окружность круга равна три раза взятому діаметру круга съ частью того же діаметра, которая больше $\frac{10}{71}$ и меньше $\frac{10}{70}$ частей того-же діаметра.

Примѣч. h). Изъ этого видимъ, что Архимедъ, для того чтобы отнять у софистовъ возможность возражать противъ его вычисленій, гдѣ приходилось нѣсколько разъ извлекать по приближенію квадратные корни, ведетъ свои вычисленія такъ, чтобы всегда имѣть одно число больше описаннаго периметра, а другое меньше вписаннаго и находить такимъ образомъ два предѣла $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{10}{70}$, между которыми лежитъ величина окружности круга. Онъ принялъ большій предѣлъ $3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ за приближенное отношеніе окружности къ діаметру. Погрѣшность, дѣлаемая при этомъ, меньше разности предѣловъ, т. е. меньше $\frac{1}{497}$. Такое приближеніе больше чѣмъ достаточно въ практическихъ приложеніяхъ. Это все то, что заключаетъ книга Архимеда.

Евтокій въ своихъ комментаріяхъ Архимеда Ευτοκιου ασκαλωνιτου εις τα αρχιμηδους περὶ σφαιρας καὶ κυλἰνδρου καὶ τἀ ἄλλα υπομνήματα, говоритъ, что Аполлоній Перигейскій, въ утерянномъ сочиненіи Ωκυτοβοος, вычислилъ отношеніе окружности къ діаметру съ большимъ приближеніемъ. Что значить слово Ωκυτοβοος неизвѣстно. Галлей думаетъ, что это должно быть Ωκυτοκιος, т. е. вычислять быстро большія числа.

Кромѣ Аполлонія Евтокій упоминаетъ еще о Филонѣ Кидарскомъ, который еще ближе подошелъ, въ своихъ вычисленіяхъ, къ окружности.

Это и все, что мы знаемъ о квадратурѣ круга у древнихъ.

Діофантомъ Александрійскимъ, жившимъ въ IV-мъ вѣкѣ, какъ полагаютъ въ царствованіи Юліана, заканчивается блестящій періодъ математическаго развитія и вообще всѣхъ наукъ; затѣмъ наступаетъ періодъ религіозныхъ споровъ, повлекшій за собою гоненія на языческую философію. Только отъ времени до времени являются комментаторы древнихъ авторовъ каковы: Проклъ въ 485 году, Маринусъ изъ Неаполя, Евтокій въ царствованіе Юстиніана, Антеминусъ въ 534 году, Филопонусъ, Дидимъ, Калькентеросъ, Пселлусъ и друг.

Съ IX-го вѣка греческая наука переходитъ къ Арабамъ, большая часть греческихъ твореній переводится на арабскій языкъ и комментируются арабскими учеными, а Европа, въ это время, впадаетъ въ такое невѣжество, что греческія творенія, если и были извѣстны, то только въ арабскихъ переводахъ.

Какъ въ оригинальныхъ сочиненіяхъ арабскихъ авторовъ, такъ и въ ихъ комментаріяхъ на греческія сочиненія мы не находимъ ничего замѣчательнаго относительно квадратуры круга; задача эта является на сцену только съ возрожденіемъ наукъ въ Европѣ, съ половины XV-го вѣка, когда Регіомонтанусъ (**Regiomontanus**)* взялся возражать знаменитому въ то время кардиналу Куза (**Cusa**) противъ его квадратуры. Николай Куза, умершій въ 1464 году, былъ одинъ изъ тѣхъ людей, съ независимымъ умомъ, которые приготовили возрожденіе наукъ въ Европѣ. Онъ первый возобновилъ задачу квадратуры круга и для вычисленія радіуса онъ употребилъ формулу:

$$r = \frac{p}{2n \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

гдѣ n есть число сторонъ правильнаго многоугольника, p периметръ его, а r радіусъ круга. Это выраженіе не можетъ служить основаніемъ доказательства несоизмѣримости окружности съ діаметромъ. Въ своемъ возраженіи Регіомонтанусъ опредѣлилъ немного точнѣе чѣмъ Архимедъ отношеніе окружности къ діаметру.

Петръ Меций (**Metius**), жившій въ началѣ XVI-го вѣка, былъ первый, опредѣлившій весьма значительное приближеніе окружности къ діаметру $\frac{355}{113}$, которое, выраженное въ десятичныхъ частяхъ, начинаетъ разниться только съ седьмой десятичной цифры отъ настоящаго, именно:

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

а настоящее 3,14159265 . . . .

* Настоящее имя его Johann Müller; онъ род. въ 1446 г. въ деревнѣ Koesberg или Koenigsberg около Кобурга. Отсюда и произошло названіе Regiomontanus.

Нѣкоторые писатели приписываютъ это замѣчательное отношеніе окружности къ діаметру Адріану Мецію, сыну Петра, но это неправильно.

Віетъ (Viéte 1540—1603 г.), нашелъ замѣчательное выраженіе для отношенія площади квадрата вписаннаго въ кругъ, къ площади круга, коего діаметръ равенъ единицѣ, именно:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\ldots \text{до } \infty,$$

такъ, что площадь круга будетъ равна единицѣ, раздѣленной на:

$$2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\ldots\infty$$

Віетъ нашелъ, такимъ образомъ, приближеніе:

$$3{,}1415926535+\varepsilon$$

вѣрное до одиннадцати цифръ; ε есть погрѣшность, которая меньше единицы послѣдняго разряда.

Выраженіе свое Віетъ вывелъ, разсматривая кругъ какъ многоугольникъ съ безчисленнымъ числомъ сторонъ.

Съ этихъ поръ геометры, не находя точнаго рѣшенія квадратуры, стараются вычислить отношеніе окружности къ діаметру все точнѣе и точнѣе. За Віетомъ слѣдуетъ Адріанъ Романусъ (**Van Roomen** 1561—1615 г.), вычислившій сторону полигона, имѣющаго:

$$1073741824=2^{30}$$

сторонъ и получившій, такимъ образомъ, 16 цифръ для отношенія окружности къ діаметру:

$$3{,}141592653589793.$$

Съ этихъ поръ это число, т. е. отношеніе окружности къ діаметру означается греческою буквою π, начало слова περιφερεία.

Лудольфъ изъ Кельна (**Ludolph van Ceulen**, 1539—1610 г.), современникъ Романуса, даетъ еще большее приближеніе, состоящее изъ 36 цифръ.

$$3{,}14159265358979323846264338327950288.$$

Окружность круга заключается между этимъ числомъ и числомъ, увеличеннымъ единицей. Лудольфъ вычислилъ это приближеніе слѣдующимъ образомъ: онъ положилъ радіусъ круга равнымъ единицѣ съ 75-ю нулями и вычислилъ стороны, начиная съ стороны вписаннаго квадрата, до стороны правильнаго многоугольника, имѣющаго:

$$36893488147419103232=2^{65},$$

сторонъ, затѣмъ вычислилъ сторону правильнаго описаннаго многоугольника съ тѣмъ же числомъ сторонъ, сравнилъ периметры этихъ многоугольниковъ и нашелъ, что они имѣютъ 36 общихъ первыхъ цифръ, откуда онъ заключилъ, что эти 36 первыхъ цифръ выражаютъ окружность, съ погрѣшностью меньше единицы. Надобно удивлятся терпѣнію и усидчивости Лудольфа, потому что едвали можно найти работу болѣе скучную и однообразную; въ ней мы не находимъ ни метода, ни пріемовъ, упрощающихъ вычисленія. Какъ ни скучна была работа Лудольфа, но нашелся патеръ Гримбергеръ (**Grimberger**), который провѣрилъ всѣ вычисленія Лудольфа и нашелъ, что они вѣрны.

Снелліусъ (**Willebrod Snellius** съ 1591—1626 г.), занимаясь квадратурой круга, нашелъ двѣ теоремы, которыя даютъ предѣлы окружности болѣе тѣсные, нежели вписанные и описанные многоугольники. Эти двѣ теоремы сокращаютъ на половину вычисленія, чтобы получить отношеніе $\frac{22}{7}$. Архимедъ долженъ былъ, какъ мы выше видѣли, употребить 96-ти вписанный и описанный многоугольникъ. Снелліусъ, зная только сторону шестиугольника, съ помощью своихъ теоремъ, даетъ тоже приближеніе, а 96-тиугольникъ ему даетъ приближеніе 3,1415926. Затѣмъ онъ провѣряетъ приближеніе Лудольфа съ помощью многоугольника, который далъ бы Лудольфу только 17 десятичныхъ знаковъ, а съ помощью приближенія Лудольфа онъ могъ получить приближеніе съ 75 знаками.

Снелліусъ еще вычислилъ предѣлы окружности, которые даютъ вписанные и описанные многоугольники, начиная съ 80-ти угольника до $5242880=2^{46}$ угольника, такъ, что если бы кто нибудь предложилъ ложное отношеніе окружности къ діаметру, то обращая его въ десятичную дробь, легко, изъ ниже слѣдующей таблицы, видѣть ниже или выше какого предѣла лежитъ предложенное число.

Число сторонъ.	Перим. вписан. многоуг.	Перим. описан. многоуг.
80	3,140	3,143
160	3,141	3,142
320	3,1415	3,1417
640	3,1415	3,1416
1280	3,14158	3,14160
2560	3,141591	3,141594
5120	3,1415928	3,1415930
10240	3,14159260	3,14159274
20480	3,14159264	3,14159268
40960	3,14159265	3,14159266
81920	3,141592652	3,141592655
163840	3,1415926533	3,1415926540
327680	3,1415926535	3,1415926537
655360	3,14159265357	3,14159265361
1310720	3,14159253586	3,141592653596
2621440	3,14159253589	3,141592653591
5242880	3,1415926535896	3,1415926535902

Занимаясь тѣмъ же предметомъ Гюгенсъ (**M. Huygens** 1629—1695) далеко оставилъ древнихъ и Снелліуса; онъ, съ своей стороны, нашелъ двѣ теоремы, которыя даютъ такіе два предѣла, что достаточно вычислить сторону шестидесятиугольника, чтобы получить 10 вѣрныхъ знаковъ.

Кромѣ этого Гюгенсъ нашелъ еще слѣдующую теорему: что всегда можно опредѣлить прямолинейную фигуру, которая уравновѣшиваетъ, будучи повѣшена извѣстнымъ образомъ на вѣсахъ, сегментъ круга. Если бы центръ тяжести круга всего сегмента былъ извѣстенъ, то изъ этой теоремы вытекала бы квадратура круга, но въ томъ-то и дѣло, что этотъ центръ есть таже квадратура.

Одинъ изъ самыхъ замѣчательныхъ искателей квадратуры круга былъ Грегуаръ де Сентъ-Венсентъ (**Grégoire de Saint—Vincent**, 1584—1667); изслѣдованія его относительно квадратуры круга привели его къ многимъ, весьма замѣчательнымъ результатамъ, но его квадратура, какъ и всѣхъ подобныхъ искателей, оказалась ложною. Изслѣдованія эти выходятъ за предѣлы элементарной геометріи, поэтому я объ нихъ здѣсь и не стану говорить.

Упомяну еще, что Брункеръ (Brouncker 1620—1684) нашелъ, принимая площадь вписаннаго квадрата въ кругѣ за единицу, что площадь круга равна слѣдующему выраженію:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ldots}}}}}}$$

которое получило тогда же названіе *непрерывной дроби.*

Послѣ столькихъ усилій отыскать квадратуру круга естественно долженъ былъ явится вопросъ: возможно-ли рѣшить эту задачу? Первый изъ геометровъ изслѣдовавшій задачу квадратуры круга въ этомъ направленіи былъ Яковъ Грегори (Jacques Gregory), за нимъ Ньютонъ (Newton), но ихъ доказательства, какъ и нѣкоторыхъ другихъ геометровъ, находятъ неудовлетворительными. Замѣчу еще, что Ламбертъ въ Memoires de Berlin за 1761 годъ показалъ что π или отношеніе окружности къ діаметру есть число несоизмѣримое, а Лежандръ показалъ что и π^2 есть также число несоизмѣримое. Если обратить вниманіе на число знаменитыхъ геометровъ, занимавшихся квадратурой кругъ, какъ въ одномъ направленіи такъ и въ другомъ, то вѣроятность дѣлается весьма значительною, что квадратура невозможна. Замѣтимъ при этомъ, что еслибы она и была возможна, то рѣшеніе этой задачи важнаго значенія въ геометріи не имѣетъ, а потому Парижская академія въ 1775 году напечатала въ Mémoires de l'Academie слѣдующее заявленіе:

L'Académie a pris, cette année, la resolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpetuel.

Послѣ этого краткаго историческаго очерка квадратуры круга я изложу, какимъ образомъ нынѣшніе геометры, воспользовавшись трудами своихъ предшественниковъ, отыскиваютъ отношеніе окружности къ діаметру и находятъ площадь круга.

Мы видѣли, что Архимедъ, и прежде его, другіе геометры разсматривали кругъ и вообще кривыя линіи, какъ предѣлъ, вписанныхъ или описанныхъ, многоугольниковъ, коихъ число сторонъ можетъ неопредѣленно возрастать, а величина ихъ неопредѣленно убывать. Но этотъ пріемъ древними не былъ возведенъ въ методъ изслѣдованія, какъ онъ возведенъ у насъ въ два метода, въ сущности составляющіе одинъ, *методъ безконечно-малыхъ* и *методъ предѣловъ.*

VII. Методъ предѣловъ.

Когда древніе геометры приступили къ измѣренію кривыхъ линій и площадей ограниченныхъ кривыми линіями, то первая, безъ сомнѣнія, мысль, и самая естественная, была замѣнить кривыя линіи и криволинейныя площади другими простѣйшими, которыя они успѣли уже измѣрять, т. е. фигурами прямолинейными и притомъ выбранными извѣстнымъ образомъ, именно: чтобы ихъ величина оставалась *неопредѣленною*, т. е. могла бы быть то больше, то меньше, и, увеличиваясь или уменьшаясь, могла-бы такъ приблизиться къ даннымъ величинамъ, что разность между сими послѣдними и выбранными—простѣйшими могла бы сдѣлаться *менѣе всякой данной величины.*

Величина, которая, въ продолженіи изслѣдованія, не имѣетъ опредѣленнаго числоваго значенія, а можетъ быть то больше, то меньше, однимъ словомъ, которая можетъ получить безчисленное множество значеній, называется *величиною перемѣнною.* Напримѣръ, хорда въ кругѣ есть величина перемѣнная, такъ какъ она можетъ имѣть всѣ числовыя значенія отъ нуля до діаметра.

Таже величина, которая, въ продолженіи изслѣдованія не измѣняется, т. е. имѣетъ одно только числовое значеніе, называется *постоянною.* Напримѣръ, діаметръ круга, окружность суть величины постоянныя.

Перемѣнная величина можетъ увеличиваться или уменьшаться безпредѣльно, т. е. можетъ получить всевозможныя числовыя значенія отъ нуля до безконечности, т. е. можетъ сдѣлаться и менѣе и болѣе всякой данной величины. Но если перемѣнная величина, увеличиваясь или уменьшаясь неопредѣленно, приближается къ извѣстной опредѣленной величинѣ такъ, что разность между ними можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины, но нулемъ сдѣлаться никогда не можетъ по свойству перемѣнной и постоянной, то постоянная величина, къ которой стремится перемѣнная называется *предѣломъ* перемѣнной.

Предѣлъ перемѣнной, которая можетъ, уменьшаясь, сдѣлаться менѣе всякой данной величины, есть *нуль.* Напримѣръ дробь $\frac{1}{n}$ съ увеличеніемъ числа n неопредѣленно уменьшается, но нулемъ сдѣлаться не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ, если данная величина была 0,1, то перемѣнная $\frac{1}{n}$ можетъ сдѣлаться меньше 0,1, если положить $n=100$. Если данная величина есть 0,01, то перемѣнная $\frac{1}{n}$ будетъ меньше 0,01, если положить $n=1000$ и т. д., но, при неопредѣленномъ возрастанiи числа n, перемѣнная $\frac{1}{n}$ нулемъ, очевидно, сдѣлаться не можетъ. Евклидъ въ первомъ предложенiи десятой книги доказываетъ, что если даны двѣ величины, изъ коихъ одна какая угодно малая, то всегда отъ другой можно отнять такую ея часть, что остатокъ будетъ меньше другой данной. Это предложенiе Евклида одно изъ самыхъ важныхъ, такъ какъ оно служитъ основанiемъ метода предѣловъ (кн. 10, пред. 1).

Перемѣнная величина, которой данная должна быть предѣломъ, выбирается такъ, чтобы она удовлетворяла слѣдующимъ условiямъ:

1) Чтобы, по своему свойству, она могла получить безчисленное множество значенiй и чтобы каждое изъ этихъ значенiй, въ извѣстный моментъ, могло быть опредѣлено или измѣренно.

2) Чтобы разность между предѣломъ и перемѣнной величиной могла сдѣлаться менѣе всякой данной величины.

Если на кривой линiи возьмемъ нѣсколько точекъ и соединимъ эти точки прямыми линiями, то получимъ ломанную линiю вписанную въ кривую. Если теперь, между взятыми точками на кривой, возьмемъ другiя точки и соединимъ, эти послѣднiя, съ предъидущими, то получимъ другую ломанную, которая лежитъ ближе къ кривой. Продолжая подобное построенiе мы будемъ получать ломанныя линiи, которыя будутъ все ближе и ближе подходить къ кривой, по мѣрѣ возрастанiя числа сторонъ, которыхъ величина вмѣстѣ съ тѣмъ убываетъ. При неопредѣленномъ возрастанiи числа сторонъ ломанная линiя приближается неопредѣленно къ кривой такъ, что кривую разсматриваютъ какъ предѣлъ ломанной вписанной.

Если чрезъ точки взятыя на кривой проведемъ къ ней касательныя, то онѣ, пересѣкаясь, образуютъ ломанную, которая при неопредѣленномъ возрастанiи числа точекъ взятыхъ на кривой, неопредѣленно приближается къ кривой, такъ что кривую можно разсматривать и какъ предѣлъ описанной ломанной линiи.

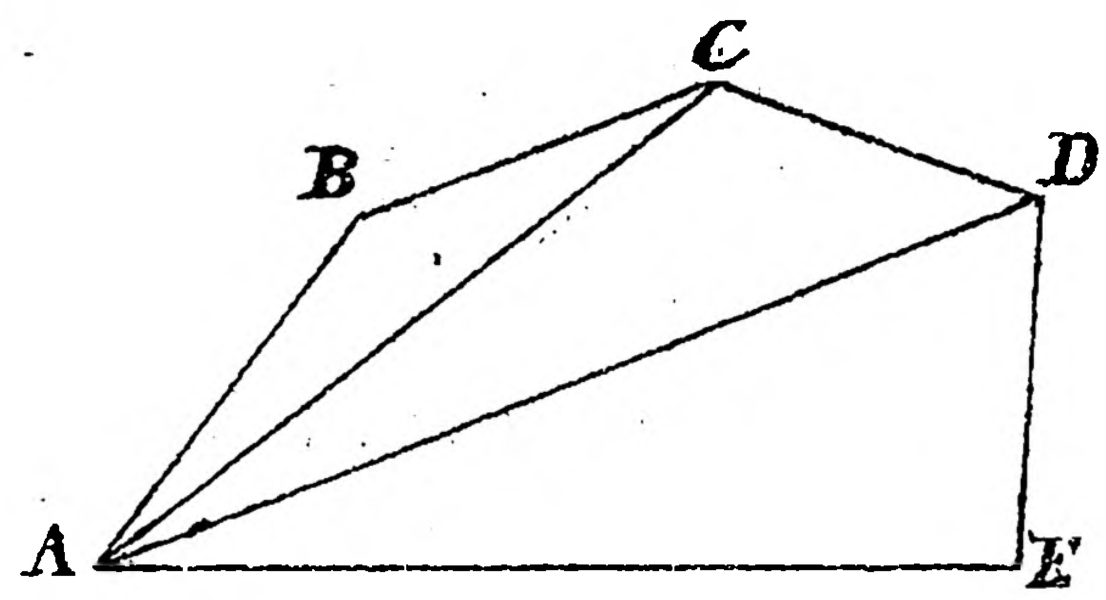
Предложенiе 15. Ломанная линiя, имѣющая одни концы съ прямою, больше этой послѣдней (фиг. 293).

Доказат. Пусть данная прямая будетъ AE, а ломанная $ABCDE$, я говорю, что:

$$AE<AB+BC+CD+DE.$$

Соединимъ точку A съ точками C и D, то будемъ имѣть слѣдующія неравенства (кн. 1, пред. 20):

Фиг. 293.



$$AE < AD + DE$$

$$AD < AC + CD$$

$$AC < AB + BC.$$

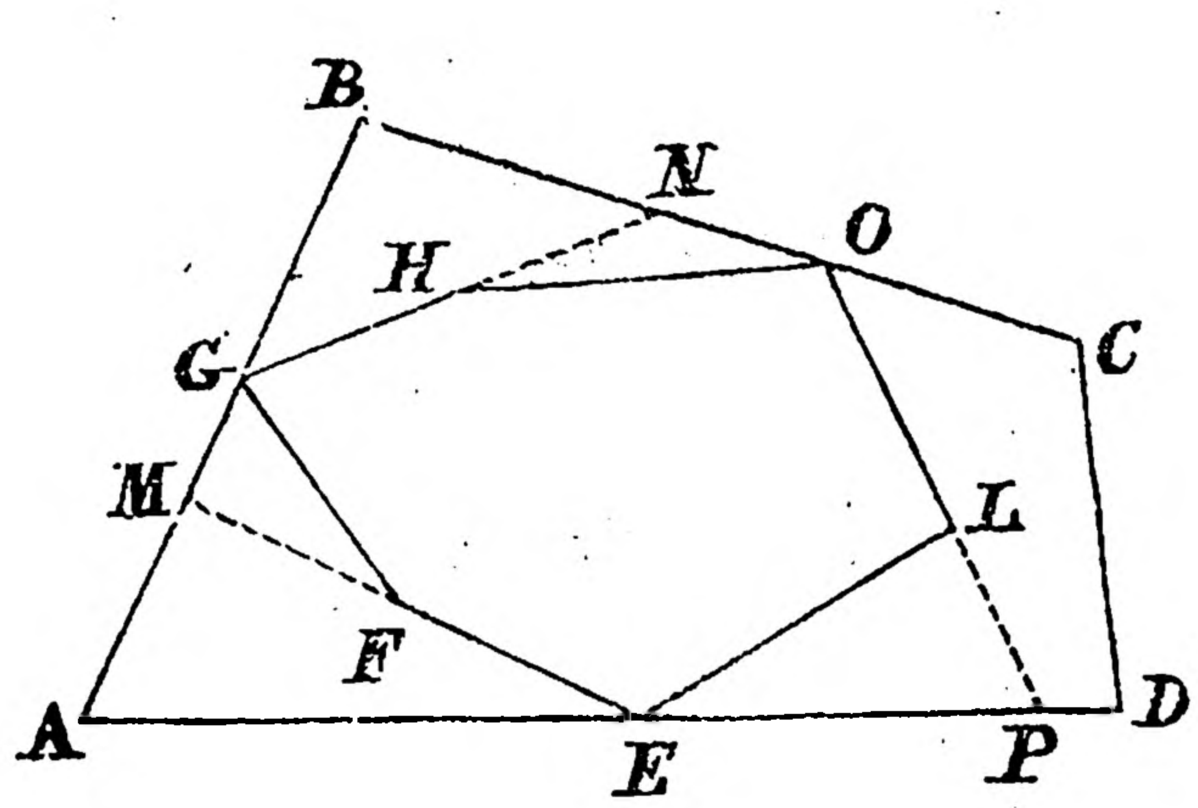
Складывая, получимъ:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

Это послѣднее неравенство существуетъ, каковы бы ни были число и малость сторонъ ломанной линіи, а слѣдовательно и предѣлъ ломанной—кривая линія, имѣющая одни концы съ прямою, болѣе сей послѣдней.

Предложеніе 16. Замкнутая выпуклая ломанная линія, ограниченная со всѣхъ сторонъ также выпуклой ломанной меньше этой послѣдней (фиг. 294).

Фиг. 294.



Доказат. Пусть $ABCD$ будетъ ломанная, ограничивающая со всѣхъ сторонъ ломанную $EFGHOL$, я говорю, что:

$$AB + BC + CD + DA > EF + FG + GH + HO + OL + LE.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ слѣдующія неравенства (кн. 1, пред. 20):

$$AE+AM>EF+FM.$$

$$FM+MG>FG,$$

$$GB+BN>GH+HN,$$

$$HN+NO>HO$$

$$OC+CD+DP>OL+LP$$

$$LP+PE>LE,$$

складывая и выбрасывая общіе члены, найдемъ:

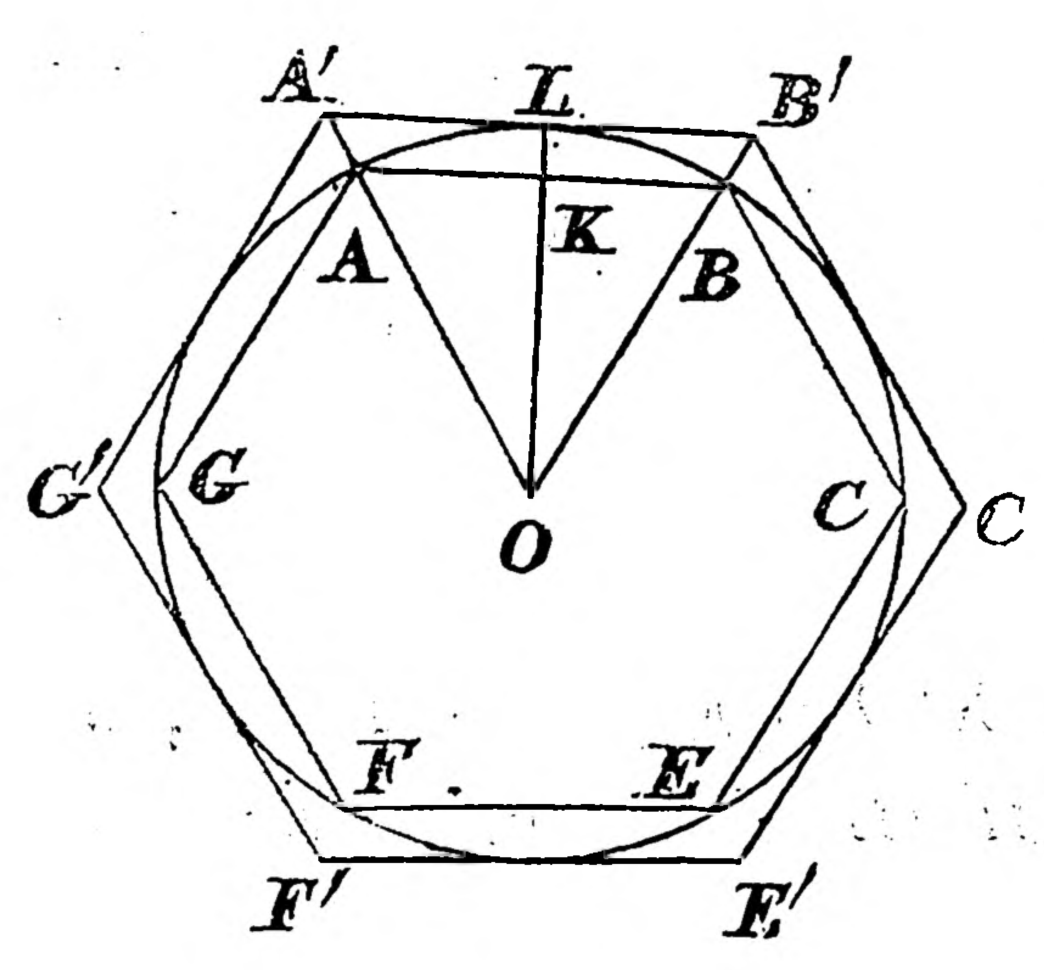
$$AB+BC+CD+DA>EF+FG+GH+HO+OL+LE.$$

Это послѣднее неравенство существуетъ какое бы нибыло число и малость сторонъ двухъ выпуклыхъ ломанныхъ линій, слѣдовательно, если одна изъ нихъ или обѣ будутъ кривыя линіи, то ограничивающая всегда больше ограниченной.

Предложеніе 17. Окружность круга есть предѣлъ какъ вписаннаго такъ и описаннаго многоугольниковъ (фиг. 295).

Доказат. Впишемъ въ кругъ и опишемъ около него правильные, для простоты, многоугольники, нроизвольнаго числа сторонъ, положимъ n. Затѣмъ удвоимъ число сторонъ какъ вписаннаго такъ и описаннаго многоугольника и будемъ продолжать такое дѣйствіе неопредѣленно: я говорю, что оба периметра, вписанный увеличиваясь, а описанный уменьшаясь неопредѣленно, приближаются къ окружности. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $ABCDE$.... будетъ периметръ вписаннаго, а $A'B'C'D'E'$..... периметръ описаннаго многоугольника, первый будетъ меньше окружности, а второй больше (пред. 16).

Фиг. 295.



Такъ какъ эти многоугольники подобны, то периметры ихъ относятся между собою (кн. 6, прим. 17, пред. d), какъ ихъ апоѳемы, но апоѳема вписаннаго есть OK, а описаннаго есть радіусъ круга, слѣдовательно:

$$P:p=r:OK.$$

Въ многоугольникѣ величина сторонъ неопредѣленно уменьшается съ неопредѣленнымъ увеличеніемъ ихъ числа, слѣдовательно, неопредѣленно уменьшается и разность $r-OK=KL$, будучи меньше стороны AL, какъ видно изъ треугольника AKL, въ которомъ $AL>KL$. Если KL стремится къ нулю, то OK неопредѣленно приближается къ r, слѣдовательно, неопредѣленно сближаются и периметры P и p, какъ видно изъ предъидущей пропорціи. Но p меньше, а P больше окружности круга (пред. 16), слѣдовательно оба они неопредѣленно приближаются къ окружности, одинъ увеличиваясь, а другой уменьшаясь, поэтому окружность круга есть ихъ общій предѣлъ.

Предложеніе 18. Площадь круга есть предѣлъ площадей какъ вписаннаго такъ и описаннаго многоугольниковъ (фиг. 295).

Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, многоугольники $ABCDEFG$ и $A'B'C'D'E'F'G'$ подобны, слѣдовательно (кн. 6, примѣч. 17, пред. d), площади ихъ относятся между собою какъ квадраты апоѳемъ, но апоѳема вписаннаго многоугольника есть OK (см. фиг. 295), а описаннаго есть радіусъ круга, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\frac{\text{Пл.}\, A'B'\ldots F'G'}{\text{Пл.}\, AB\ldots FG}=\frac{r^2}{OK^2}$$

но мы выше показали (пред. 17), что съ увеличеніемъ числа сторонъ, OK неопредѣленно приближается къ r, слѣдовательно, какъ видно изъ предъидущей пропорціи, и площадь многоугольника $A'B'\ldots F'G'$ неопредѣленно приближается къ площади многоугольника $AB\ldots FG$. Но площадь круга меньше первой и больше второй, слѣдовательно она есть ихъ общій предѣлъ.

Показавъ, что окружность круга и площадь его можно разсматривать какъ предѣлы величинъ болѣе простыхъ, которыхъ величина можетъ быть всегда опредѣлена, я изложу основныя предложенія методы предѣловъ.

Предложеніе 19: Если двѣ перемѣнныя величины, оставаясь равными, стремятся къ извѣстнымъ предѣламъ, то и предѣлы этихъ перемѣнныхъ также равны.

Доказат. Пусть A и B суть предѣлы равныхъ перемѣнныхъ, то эти перемѣнныя можно написать въ формѣ:

$$A+x \quad \text{и} \quad B+y,$$

гдѣ x и y суть перемѣнныя, неопредѣленныя величины, имѣющія предѣломъ нуль.

По условію мы всегда имѣемъ:

$$A+x=B+y$$

откуда:

$$A-B=y-x$$

Первая часть $A-B$ этого уравненія есть величина постоянная, а вторая $y-x$ есть величина перемѣнная, и притомъ неопредѣленно уменьшающаяся, что не иначе возможно какъ только тогда, когда мы имѣемъ постоянно $x=y$, т. е. когда $A=B$.

Предложеніе 20. Если двѣ перемѣнныя величины, сохраняя между собою постоянное отношеніе, стремятся къ извѣстнымъ предѣламъ, то и эти предѣлы имѣютъ между собою тоже отношеніе.

Доказат. Пусть предѣлы перемѣнныхъ будутъ A и B, то сами перемѣнныя будутъ $A+x$ и $B+y$. По условію мы имѣемъ:

$$\frac{A+x}{B+y}=a,$$

гдѣ a есть величина постоянная.

Это уравненіе можно написать такъ:

$$A-Ba=ay-x,$$

въ этомъ послѣднемъ уравненіи первая часть есть величина постоянная, а вторая перемѣнная, неопредѣленно уменьшающаяся, а это возможно только тогда, когда $ay-x=0$, т. е. когда:

$$\frac{A}{B}=a,$$

Методъ предѣловъ. Когда хотятъ найти зависимость между величинами, которыя не легко сравниваются, то находятъ такія простѣйшія величины, которыя бы можно было легко сравнивать и которыхъ бы данныя, для сравненія величины, были предѣлами. Если такія простѣйшія величины найдутся, то задача относительно данныхъ величинъ рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ, зависимость между найденными простѣйшими выражается, въ большей части случаевъ, уравненіемъ, въ которомъ обѣ части суть перемѣнныя величины, имѣющія извѣстные предѣлы, слѣдовательно въ силу предложенія (19) это уравненіе существуетъ и между предѣлами взятыхъ простѣйшихъ величинъ.

Приложимъ сказанное къ кругу.

Предложенie 21. Окружности двухъ круговъ относятся между собою какъ ихъ радiусы.

Доказат. Пусть r и r_1 будутъ радiусы, а O и O_1 длина окружностей. Впишемъ въ обѣ эти окружности правильные многоугольники съ однимъ и тѣмъ же числомъ сторонъ. Пусть P и P_1 будутъ периметры этихъ многоугольниковъ, то мы будемъ имѣть (кн. 6, примѣч. 17, пред. d):

$$\frac{P}{P_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Эта пропорцiя имѣетъ мѣсто какое бы ни было число сторонъ вписанныхъ многоугольниковъ, но, съ увеличенiемъ числа сторонъ многоугольниковъ, периметры ихъ стремятся къ своимъ предѣламъ O и O_1, слѣдовательно (пред. 20) таже пропорцiя будетъ имѣть мѣсто и между предѣлами, т. е. мы будемъ имѣть:

$$\frac{O}{O_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Слѣдствiе. Предъидущую пропорцiю можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{O}{r}=\frac{O_1}{r_1} \quad \text{или} \quad \frac{O}{2r}=\frac{O_1}{2r_1},$$

изъ которой видно, *что отношенiе окружности къ дiаметру есть постоянное число для всѣхъ круговъ.* Это число назвали, какъ мы видѣли уже выше, чрезъ π, т. е. мы всегда имѣемъ для всѣхъ круговъ.

$$\frac{O}{2r}=\pi, \quad \text{или} \quad O=2\pi r.$$

Предложенie 22. Площади двухъ круговъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радiусовъ.

Доказат. Пусть r и r_1 будутъ радiусы, а Π и Π_1 площади круговъ. Впишемъ въ оба круга правильные многоугольники съ однимъ и тѣмъ же числомъ сторонъ и означимъ площади этихъ многоугольниковъ чрезъ P и P_1, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{P}{P_1}=\frac{r^2}{r_1^2}$$

Эта пропорцiя будетъ имѣть мѣсто какое бы нибыло число сторонъ вписанныхъ многоугольниковъ, но, съ увеличенiемъ числа сторонъ многоугольниковъ ихъ площади стремятся къ площадямъ круговъ, которыя суть ихъ предѣлы, слѣдовательно мы будемъ имѣть (пред. 20):

$$\frac{П}{П_1}=\frac{r^2}{r_1^2}$$

т. е. *площади двухъ круговъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радіусовъ.*

Слѣдствіе. Если предъидущую пропорцію напишемъ въ формѣ:

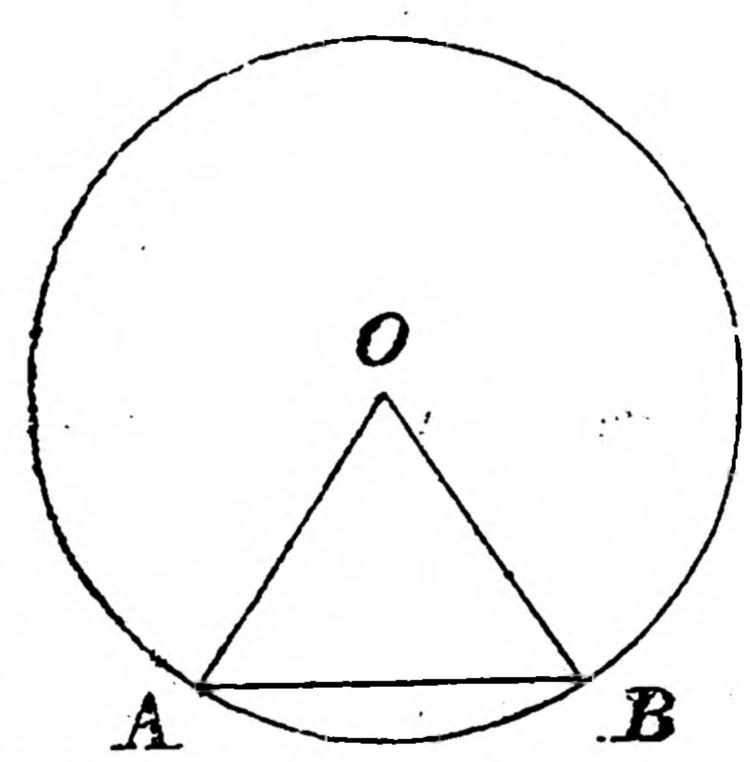
$$\frac{П}{r^2}=\frac{П_1}{r_1^2},$$

то видимъ, *что отношеніе площади круга къ площади квадрата, построеннаго на радіусъ, есть число постоянное.*

Легко показать, что отношеніе $\frac{П}{r^2}$ есть ничто иное какъ π. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что площадь круга (прибав. VI, пред. 1) равна площади прямоугольнаго треугольника коего одинъ катетъ равенъ окружности, а другой радіусу круга, но окружность круга равна $2\pi r$, слѣдовательно площадь круга будетъ равна πr^2. Откуда $\frac{П}{r^2}=\pi$,

Предложеніе 23. Площадь сектора равна дугѣ сектора, умноженной на половину радіуса (фиг. 296).

Фиг. 296.



Доказат. Мы видѣли (кн. 6, пред. 33), что площади двухъ секторовъ относятся между собою какъ соотвѣтствующія дуги, слѣдовательно:

$$\text{Площ. круг.} : \text{Площ. сек.} = \text{Ок.} : \text{дуг. } AB$$

или

$$\pi r^2 : \text{Площ. сек.} = 2\pi r : \text{дуг. } AB,$$

откуда:

$$\text{Площ. сек.} = \text{дуг. } AB \cdot \frac{r}{2}.$$

Остается теперь показать какими способами новые геометры вычислили приближенное отношеніе окружности къ діаметру. Такихъ способовъ есть нѣсколько, изъ коихъ главные суть слѣдующіе: *способъ периметровъ, способъ изопериметровъ и способъ площадей.*

1. *Способъ периметровъ.* Этотъ способъ употребилъ, какъ мы видѣли, Архимедъ, онъ самый простой и самый естественный, хотя ведетъ къ довольно сложнымъ ариѳметическимъ вычисленіямъ. Новые геометры, не прибавили къ нему ничего особеннаго, приложили только свои болѣе совершенные ариѳметическіе и алгебраическіе пріемы.

Мы выше видѣли, что окружность есть предѣлъ, къ которому стремятся, съ увеличеніемъ числа сторонъ, правильные вписанные и описанные многоугольники, одинъ увеличиваясь, а другой уменьшаясь. Слѣдовательно, вычисляя периметры такихъ многоугольниковъ все съ большимъ и большимъ числомъ сторонъ мы получимъ рядъ чиселъ попарно, между каждою парою которыхъ будетъ заключаться числовая величина окружности.

Если r есть радіусъ даннаго круга, а a_n есть сторона правильнаго вписаннаго многоугольника съ n сторонами, то стороны a_{2n} и A_{2n} вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ съ удвоеннымъ числомъ сторонъ будутъ:

$$a_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a_n^2}}\,,\quad A_{2n}=\frac{2ra_{2n}}{\sqrt{4r^2-a_{2n}^2}}$$

Принимая радіусъ круга за единицу, предъидущія формулы сдѣлаются:

$$a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}\,,\quad A_{2n}=\frac{2a_{2n}}{\sqrt{4-a_{2n}^2}}\,. \tag{1}$$

Если радіусъ круга равенъ единицѣ, то окружность будетъ 2π, слѣдовательно число π будетъ всегда заключаться между полупериметрами вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ. Такъ какъ сторона вписаннаго шестиугольника равна радіусу круга, то его полупериметръ есть 3, а какъ сторона описаннаго квадрата равна діаметру круга, то его полупериметръ равенъ, 4, слѣдовательно число π больше 3 и меньше 4, т. е. $3<\pi<4$.

Полагая для краткости:

$$u_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{4-a_n^2}\,,\qquad u_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{4-a_{2n}^2}\,,\qquad u_3=\tfrac{1}{2}\sqrt{4-a_{4n}^2}\,,\ \ldots$$

и замѣчая, что $a_6=1$, найдемъ:

$$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}},\qquad A_{12}=\frac{a_{12}}{u_1}\qquad 2\pi\begin{matrix}>12a_{12}\\<12A_{12}\end{matrix}$$

$$a_{24}=\sqrt{2-2u_1^2}\,,\qquad A_{24}=\frac{a_{24}}{u_2}\,,\qquad 2\pi \begin{matrix}>24a_{24}\\<24A_{24}\end{matrix}$$

$$a_{48}=\sqrt{2-2u_2}\,,\qquad A_{48}=\frac{a_{48}}{u_3}\,,\qquad 2\pi \begin{matrix}>48a_{48}\\<48A_{48}\end{matrix}$$

и т. д.

Такимъ образомъ, начиная съ шестиугольника, мы можемъ вычислить послѣдовательно периметры вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ съ 12, 24, 48, 96, и т. д. сторонами. Между парою такихъ периметровъ лежитъ всегда число 2π или окружность круга, коего радіусъ=1. Если возьмемъ $\sqrt{3}=1{,}732050807568877$ *, то найдемъ послѣдовательно:

a_{12}	$=0{,}517638090205$	$12\,a_{12}$	$=6{,}2116571$
u_1	$=0{,}965925826289$	$12A_{12}$	$=6{,}4307806$
a_{24}	$=0{,}261052384440$	$24\,a_{24}$	$=6{,}2652572$
u_2	$=0{,}991444861374$	$24A_{24}$	$=6{,}3193199$
a_{48}	$=0{,}130806258460$	$48\,a_{48}$	$=6{,}2787004$
u_3	$=0{,}997858923234$	$48A_{48}$	$=6{,}2921724$
a_{96}	$=0{,}065438165643$	$96\,a_{96}$	$=6{,}2820639$
u_4	$=0{,}999464587476$	$96A_{96}$	$=6{,}2854292$
a_{192}	$=0{,}032723463253$	$192\,a_{192}$	$=6{,}2829049$
u_5	$=0{,}999866137909$	$192A_{192}$	$=6{,}2837461$
a_{384}	$=0{,}016362279208$	$384\,a_{384}$	$=6{,}2831152$
u_6	$=0{,}999966535917$	$384A_{384}$	$=6{,}2833260$
a_{768}	$=0{,}008181208052$	$768\,a_{768}$	$=6{,}2831678$
u_7	$=0{,}999991633444$	$768A_{768}$	$=6{,}2832203$
a_{1536}	$=0{,}004090612582$	$1536\,a_{1536}$	$=6{,}2831809$
u_8	$=0{,}999997908359$	$1536A_{1536}$	$=6{,}2831941$
a_{3072}	$=0{,}002045307361$	$3072\,a_{3072}$	$=6{,}2831842$
u_9	$=0{,}999999477089$	$3072A_{3072}$	$=6{,}2831875$
a_{6144}	$=0{,}001022653814$	$6144\,a_{6144}$	$=6{,}2831850$
u_{10}	$=0{,}999999869272$	$6144A_{6144}$	$=6{,}2831858$
a_{12288}	$=0{,}000511326924$	$12288\,a_{12288}$	$=6{,}2831852$
u_{11}	$=0{,}999999967318$	$12288A_{12288}$	$=6{,}2831854$

* Mémoires de l'Academie des Sciences, 1747, pag. 443.

Если разсмотримъ периметры вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, то увидимъ, что по мѣрѣ возрастанія числа сторонъ периметры имѣютъ все болѣе и болѣе общихъ десятичныхъ знаковъ, такъ что периметры—12288 угольниковъ отличаются только седьмой десятичной цифрой, слѣдовательно первыя семь цифръ общія обоимъ периметрамъ принадлежать, очевидно, окружности, т. е. число 6,283185 выражаетъ приближенное числовое значеніе окружности, когда радіусъ=1, съ погрѣшностью меньшею одной милліонной радіуса.

Если возьмемъ среднѣе число между периметрами вписаннаго и описаннаго 12288-угольниковъ, то получимъ число 6,2831853, которое выражаетъ окружность вѣрно включительно до послѣдней цифры, т. е. мы имѣемъ:

$$2\pi=6,2831853$$

откуда:

$$\pi=3,1415926$$

съ погрѣшностью меньшею 0,000001.

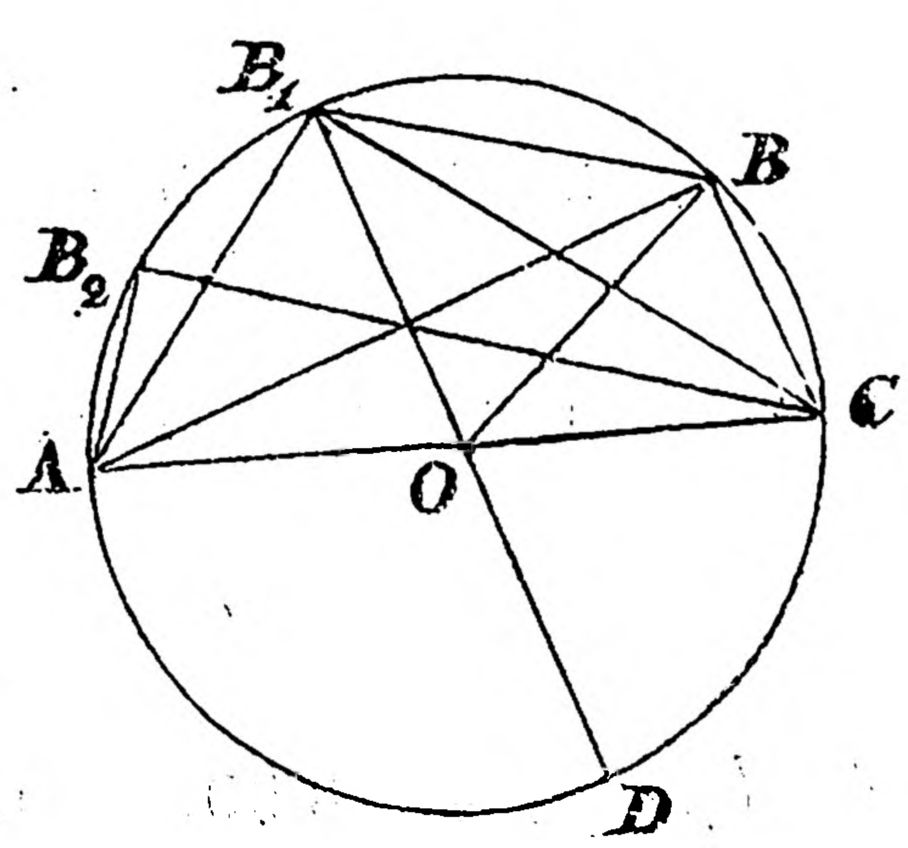
Если окружность круга примемъ за единицу, то изъ формулы Ок.$=2\pi r$ найдемъ:

$$2r=\frac{1}{\pi}=0,31803099$$

число, выражающее діаметръ круга, коего окружность=1.

Можно уменьшить въ двое число извлеченій корней, вычисляя вмѣсто сторонъ многоугольниковъ хорды BC и B_1C дугъ, дополняющихъ дуги AB, AB_1, до полуокружности (фиг. 297).

Фиг. 297.



Въ самомъ дѣлѣ, пусть $AB=a_n$, $AB_1=a_{2n}$, $AB_2=a_{4n}$, $BC=b_n$ $B_1C=b_{2n}$, $B_2C=b_{4n}$ и $AC=2$, то мы найдемъ:

$$b_n=\sqrt{4-a_n^2},\qquad b_{2n}=\sqrt{4-a_{2n}^2}$$

и какъ $a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$, то:

$$a_{2n}=\sqrt{2-b_n}\,, \qquad a_{2n}^2=2-b_n$$

если вмѣсто a_{2n}^2 подставимъ его предъидущее выраженіе въ выраженіе для b_{2n}, то получимъ:

$$b_{2n}=\sqrt{2+b_n}\,.$$

Точно также найдемъ:

$$b_{4n}=\sqrt{2+b_{2n}}$$

и т. д.

Полагая $a_n=1$ найдемъ $b_n=\sqrt{3}=1{,}7320508075$. Очевидно въ этомъ случаѣ $a_n=a_6$, а b_n, b_{2n}, b_{4n}, будутъ хорды соотвѣтствующія многоугольникамъ съ 12, 24, 48 и т. д. сторонами. Если ихъ означимъ чрезъ b_6, b_{12}, b_{24} и т. д., то найдемъ:

$$b_{12}=\sqrt{2+1{,}7320508075}=1{,}9318516525$$

$$b_{24}=\sqrt{2+1{,}9318516525}=1{,}9828897227$$

$$b_{48}=\sqrt{2+1{,}9828897227}=1{,}9957178465$$

$$b_{96}=\sqrt{2+1{,}9957178465}=1{,}9989291749$$

$$b_{192}=\sqrt{2+1{,}9989291749}=1{,}9997322758$$

$$b_{384}=\sqrt{2+1{,}9997322758}=1{,}9999330678$$

$$b_{768}=\sqrt{2+1{,}9999330678}=\sqrt{3{,}9999330678}$$

откуда наконецъ:

$$a_{768}=\sqrt{4-b_{768}^2}=\sqrt{4-3{,}9999330678}=$$

$$=\sqrt{0{,}0000669322}=0{,}00818121.$$

Умножая это послѣднее число на 768, получимъ периметръ 768 угольника вписаннаго, затѣмъ найдемъ периметръ 768 угольника описаннаго, откуда, какъ было сдѣлано выше, опредѣлимъ π съ извѣстнымъ приближеніемъ.

Способъ периметровъ можетъ быть измѣненъ слѣдующимъ образомъ:

Если означимъ чрезъ p_1 и P_1 периметры двухъ правильныхъ многоугольниковъ p_1 вписаннаго, а P_1 описаннаго, а чрезъ p_2 и P_2 также периметры вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, но съ двойнымъ числомъ сторонъ, то какъ мы видѣли выше, будемъ имѣть что:

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{p_1}\right), \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{\sqrt{P_2 p_1}}, \tag{1}$$

слѣдовательно, числа:

$$\frac{1}{P_1}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{P_4}, \frac{1}{p_4}, \ldots \tag{2}$$

начиная съ третьяго, суть поперемѣнно средне-ариѳметическія и средне-геометрическія между двумя предшествующими каждому изъ нихъ.

Если числа:

$$\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_4}, \ldots,$$

означимъ чрезъ:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

а числа:

$$\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_4}, \ldots.$$

чрезъ:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

то рядъ (2) сдѣлается:

$$a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, u_3, \ldots, a_n, u_n, \ldots \tag{3}$$

а формулы (1) вообще будутъ:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + u_{n-1}), \qquad u_n = \sqrt{a_n u_{n-1}}.$$

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$, возрастая неопредѣленно, остаются всегда $<\frac{1}{Ок}$ а числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$, уменьшаясь неопредѣленно, остаются $>\frac{1}{Ок}$, т. е. число $\frac{1}{Ок}$ будетъ всегда заключаться между двумя послѣдовательными числами ряда (3).

Но мы видѣли, что каждая изъ разностей u_2-a_2, $u_3-a_3, \ldots, u_n-a_n$ меньше одной четверти непосредственно своей предъидущей (приб. 3, пред. 13), слѣдовательно:

$$u_n-a_n<\frac{u_1-a_1}{4^{n-1}},$$

откуда видимъ, что разность u_n-a_n съ возрастаніемъ числа n убываетъ неопредѣленно.

Если возьмемъ кругъ, коего радіусъ$=\frac{1}{2}$, то мы будемъ имѣть $\frac{1}{\pi}=\frac{1}{Ok}$, т. е. $\frac{1}{\pi}$ будетъ предѣлъ ряда, составленнаго изъ чиселъ обратныхъ периметрамъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, коихъ число сторонъ возрастаетъ все удваиваясь. Если теперь возьмемъ периметры квадратовъ описаннаго и вписаннаго, то найдемъ, что:

$$\frac{1}{P_1}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{p_1}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

и если еще замѣтимъ, что $\frac{1}{4}$ есть средне-ариѳметическое между 0 и $\frac{1}{2}$, а $\frac{\sqrt{2}}{4}$ есть средне-геометрическое между тѣми же числами, то будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 24. Число $\frac{1}{\pi}$ есть предѣлъ къ которому стремятся члены ряда построеннаго слѣдующимъ образомъ: начиная съ 0 и $\frac{1}{2}$ составляютъ попеременно то средне-ариѳметическое, то средне-геометрическое изъ двухъ непосредственно предшествующихъ членовъ.

Если, начиная съ 0 и $\frac{1}{2}$, составимъ такой рядъ, то найдемъ:

Число сторонъ.	Апоѳемы:	Радіусы:
4	a_1=0,2500000	u_1=0,3535534
8	a_2=0,3017767	u_2=0,3266407
16	a_3=0,3142087	u_3=0,3203644
32	a_4=0,3162867	u_4=0,3188217
64	a_5=0,3180541	u_5=0,3184377
128	a_6=0,3182459	u_6=0,3183418

$\frac{1}{\pi}$ заключается между числами a_6 и u_6 и какъ эти два числа имѣютъ по три общихъ десятичныхъ знаковъ, то $\frac{1}{\pi}$ вычислено вѣрно до 0,001, т. е. съ погрѣшностью меньшею 0,001 можно принять:

$$\frac{1}{\pi}=0,318.$$

Откуда $\pi=\frac{1}{0,318}=3,142$ вѣрно до одной сотой, т. е. $\pi=3,14$ съ погрѣшностью меньшею 0,01.

Легко видѣть, что погрѣшность, сдѣланная въ вычисленіи $\frac{1}{\pi}$, будетъ въ десять разъ меньше погрѣшности π. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что приближенная величина π есть $\pi-\alpha$, то $\frac{1}{\pi-\alpha}=\frac{1}{\pi}+\frac{\alpha}{\pi^2}+\ldots$, слѣдовательно погрѣшность при вычисленіи $\frac{1}{\pi}$ будетъ меньше $\frac{\alpha}{\pi^2}$, если ее назовемъ чрезъ β, то:

$$\beta<\frac{\alpha}{\pi^2} \quad \text{или} \quad \alpha<\pi^2\beta$$

но $\pi>3$ и <4, слѣдовательно тѣмъ болѣе $\alpha<10\beta$. Откуда видимъ, что, вычисливъ $\frac{1}{\pi}$ до $m+1$—ой десятичной цифры, мы въ π можемъ только разсчитывать на m десятичныхъ знаковъ.

2. *Способъ изопериметровъ.* Положимъ, что окружность круга $Ок.=2$, то изъ формулы $Ок.=2\pi r$, мы будемъ имѣть:

$$\pi=\frac{1}{r} \quad \text{или} \quad r=\frac{1}{\pi},$$

т. е. число $\frac{1}{\pi}$ есть радіусъ круга, коего окружность равна 2. Слѣдовательно апоѳема a и радіусъ u, всякаго правильнаго многоугольника, коего периметръ равенъ 2, суть приближенныя величины $\frac{1}{\pi}$, изъ коихъ первая меньше, а вторая больше, такъ какъ окружность, вписанная въ такой многоугольникъ меньше 2, а описанная больше 2, слѣдовательно ихъ радіусы a и u должны заключать между собою радіусъ r, окружности равной 2, т. е. число $\frac{1}{\pi}$.

Возьмемъ квадратъ, коего сторона$=\frac{1}{2}$, его периметръ будетъ$=2$, а апоѳема $a_1=\frac{1}{4}$, а его радіусъ, т. е. половина діагонали $u_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Въ пред. 13 мы видѣли, что если a_{n-1} и u_{n-1} суть апоѳема и радіусъ, какого нибудь правильнаго многоугольника, а a_n и u_n суть апоѳема и радіусъ правильнаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ, но коего периметръ равенъ периметру предъидущаго многоугольника, то:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+u_{n-1}) \quad u_n = \sqrt{a_n u_{n-1}}$$

Съ помощью этихъ формулъ мы построимъ рядъ:

$$a_1,\ u_1,\ a_2,\ u_2,\ a_3,\ u_3,\ \ldots,\ a_n,\ u_n,\ \ldots$$

тождественный съ рядомъ (3) пред. 23, если начнемъ съ $a_1 = \frac{1}{4}$, $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, но только въ этомъ послѣднемъ рядѣ (α) $a_1, a_2, a_3, \ldots$ суть апоѳемы, а $u_1, u_2, u_3, \ldots$ суть радіусы правильныхъ изопериметрическихъ многоугольниковъ, между тѣмъ, какъ въ рядѣ (3) $a_1, a_2, \ldots$ суть числа обратныя периметрамъ описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, а $u_1, u_2, \ldots$ числа обратныя периметрамъ вписанныхъ.

3. *Способъ площадей.* Въ пред. 12 мы видѣли, что если p_n и P_n суть площади правильныхъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ съ n сторонами, а p_{2n} и P_{2n} площади правильныхъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, но съ двоичнымъ числомъ сторонъ, то мы имѣемъ:

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_{2n}} + \frac{1}{P_n}\right) \tag{1}$$

или

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_n} \quad \text{и} \quad P_{2n} = \frac{2p\ \ P_n}{P_n + p_{2n}}. \tag{2}$$

Такъ какъ площадь круга, коего радіусъ есть r есть πr^2, то положивъ $r=1$ мы найдемъ что пл. кр.$=\pi$. Но площадь правильнаго, вписаннаго въ кругъ, многоугольника меньше площади круга, а площадь описаннаго больше, слѣдовательно число π лежитъ между площадями вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ около круга, коего радіусъ$=1$. Слѣдовательно, если съ помощью формулъ (1) и (2) будемъ вычислять площади многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, коихъ число сторонъ возрастаетъ удваиваясь, то будемъ имѣть два приближенія числа π одно больше а другое меньше, общія цыфры этихъ приближеній будутъ принадлежать числу π.

Если формулы (1) напишемъ въ формѣ:

$$\frac{1}{p_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{p_n P_n}}, \qquad \frac{1}{P_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_{2n}}+\frac{1}{P_n}\right) \tag{3}$$

и построимъ вписанный и описанный квадраты въ кругѣ, то найдемъ, что площадь вписаннаго будетъ$=2$, а описаннаго будетъ$=4$. Означимъ площадь вписаннаго квадрата чрезъ p_1, а описаннаго чрезъ P_1, то:

$$p_1=2, \qquad P_1=4,$$

откуда:

$$\frac{1}{p_1}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{P_1}=\frac{1}{4},$$

слѣдовательно, если чрезъ p_2 означимъ площадь вписаннаго восьмиугольника, то найдемъ изъ (3):

$$\frac{1}{p_2}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Если положимъ $\frac{1}{P_2}=a_1=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{p_2}=r_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$, то получимъ изъ формулъ (3) рядъ чиселъ:

$$a_1,\ r_1,\ a_2,\ r_2,\ a_3,\ r_3,\ .\ .\ .\ ,\ a_n,\ r_n,\ .\ .\ . \tag{4}$$

найденныхъ выше, между каждою парою которыхъ лежитъ число $\frac{1}{\pi}$.

Мы видимъ также, что разъ числа ряда (4) представляютъ обратныя числа периметрамъ вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, другой разъ, эти числа суть апоѳемы и радіусы изопериметрическихъ многоугольниковъ, и третій разъ онѣ суть числа, обратныя площадямъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, слѣдовательно различные по мысли пріемы въ сущности ничѣмъ не отличаются между собою.

Лежандръ для вычисленія π употребилъ формулы (2):

$$p_{2n}=\sqrt{p_n P_n} \qquad P_{2n}=\frac{2p_n P_n}{P_n+p_{2n}}.$$

Полагая радіусъ круга$=1$, площади квадратовъ вписаннаго и описаннаго, какъ мы видѣли, будутъ 2 и 4, слѣдовательно, площади p_8 и P_8 вписаннаго и описаннаго восьмиугольниковъ будутъ:

$$p_8=\sqrt{8}=2{,}828427, \qquad P_8=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3{,}3187085,$$

изъ этихъ послѣднихъ значеній найдемъ площади вписаннаго и описаннаго шестьнадцатиугольниковъ и т. д.

Вотъ таблица до 32768-угольниковъ вписанныхъ и описанныхъ:

Число сторонъ.	Многоуг. вписанный.	Многоуг. описанный.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512.	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

изъ этихъ таблицъ видимъ, что площадь круга или π будетъ$=3{,}1415926$ съ погрѣшностью меньше 0,0000001.

Изъ этого видимъ, что вычисленіе π, кромѣ ариѳметическихъ трудностей, другихъ не представляетъ. Геометры старались по возможности сократить ариѳметическія вычисленія и въ этомъ отношеніи достигли слѣдующихъ результатовъ, которые пренадлежатъ Снелліусу и Гюгенсу:

Изъ послѣдней таблицы видимъ, что для вѣрныхъ семи десятичныхъ знаковъ π надобно вычислить площади многоугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ отъ 4 до 32768 сторонъ, Снелліусъ и Гюгенсъ дали формулы, по которымъ для полученія вѣрныхъ семи десятичныхъ знаковъ надобно вычислять площади или периметры съ гораздо меньшимъ числомъ сторонъ.

Предложеніе 25. Если $p_1, p_2, p_3, \ldots$ суть площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, коихъ число сторонъ возрастаетъ удваиваясь, а $P_1, P_2, P_3, \ldots$, площади такихъ же многоугольниковъ описанныхъ, то:

$$p_3-p_2>\frac{p_2-p_1}{4}\qquad P_1-P_3>\frac{p_2-p_1}{2},$$

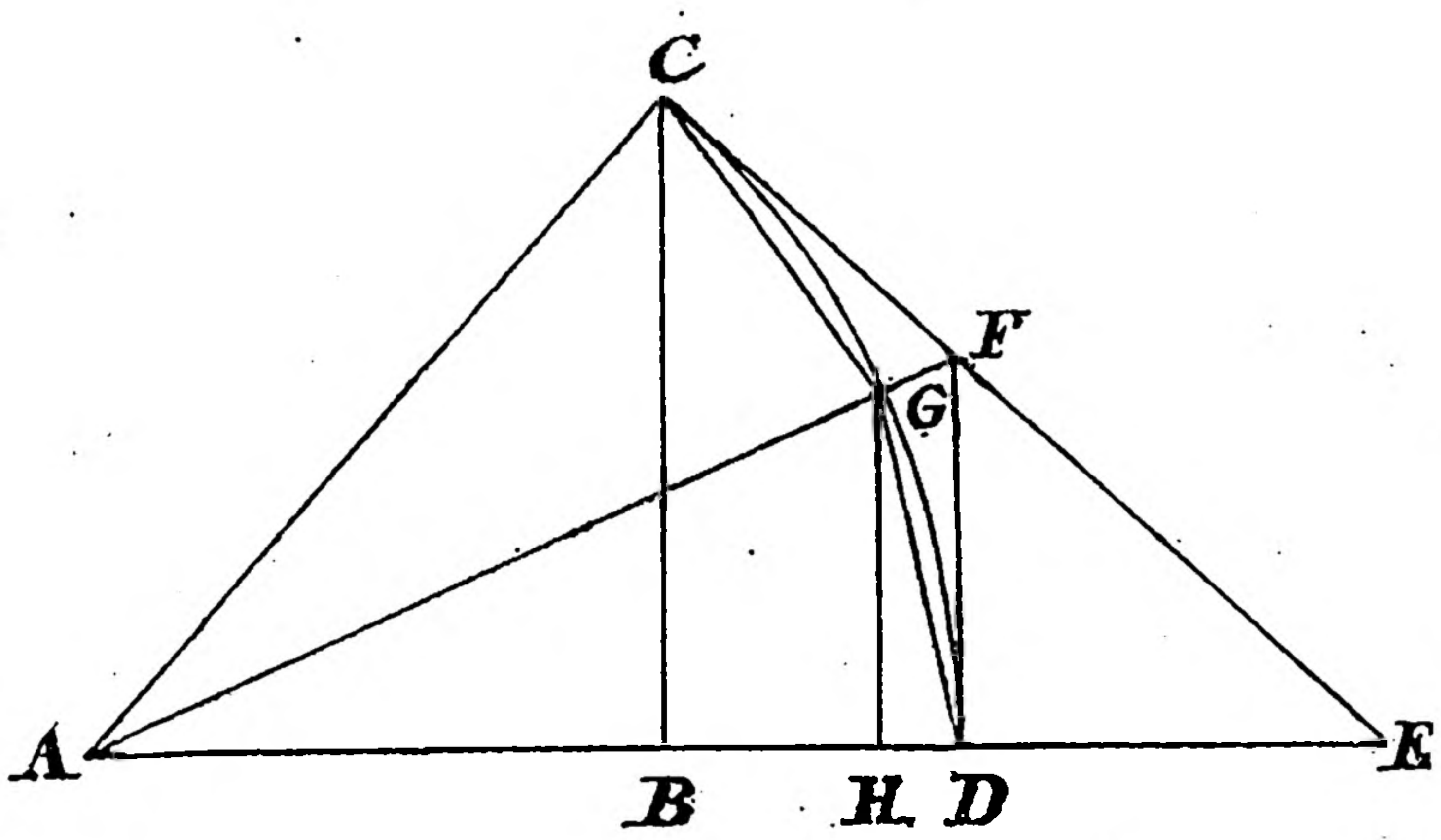
$$p_2+\frac{p_2-p_1}{3}<\text{Кр.}<P_1-\frac{P_1-p_1}{3}.$$

гдѣ Кр. есть площадь круга (фиг. 298).

Доказат. Пусть секторъ DAC будетъ $2n$-ая часть круга, углы CBA, ACE, FDA пусть будутъ прямые и точка G пусть будетъ средина дуги DC, то мы, очевидно, имѣемъ:

$$BDC=\frac{p_2-p_1}{2n},\quad DGC=\frac{p_3-p_2}{2n},\quad DEF=\frac{P_1-P_2}{2n}.$$

Фиг. 298.



Проведемъ $HG \parallel DF$, то $\triangle HDG$ равенъ и подобенъ половинѣ $\triangle DGC$. Кромѣ этого мы имѣемъ:

$$\frac{\triangle HDG}{\triangle BDC}=\frac{HD}{BD}\cdot\frac{HG}{BC}.$$

Но мы имѣемъ:

$$\frac{HD}{BD}=\frac{DG^2}{DC^2}>\frac{1}{4},$$

такъ какъ $\frac{DG}{DC}>\frac{1}{2}$; далѣе $\frac{HG}{BC}>\frac{1}{2}$, потому что $\frac{HG}{DC}=\frac{1}{2}$ и $\frac{DC}{BC}>1$, слѣдовательно:

$$\frac{\triangle HDG}{\triangle BDC}>\frac{1}{8}$$

или

$$\frac{\triangle DGC}{\triangle BDC}>\frac{1}{4}$$

т. е.:

$$p_3-p_2>\frac{p_2-p_1}{4}.$$

Замѣчая, что $CF=FD<FE$, мы имѣемъ:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle BEC}=\frac{FE^2}{CE^2}>\frac{1}{4},$$

$$\frac{\triangle BEC}{\triangle BDC}=\frac{BE}{BD}=\frac{CE}{CF}>2,$$

откуда, перемножая, получимъ:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle BDC}>\frac{1}{2}$$

т. е.:

$$P_1-P_2>\frac{p_2-p_1}{2}.$$

Такъ какъ по мѣрѣ возрастанія числа сторонъ многоугольниковъ площади ихъ приближаются неопредѣленно къ площади круга, то $p\infty$ и $P\infty$ не будутъ отличатся отъ круга и мы получимъ:

$$\begin{aligned}
&p_2-p_1 && = p_2-p_1\\
&p_3-p_2 && >\frac{1}{4}(p_2-p_1)\\
&p_4-p_3>\frac{1}{4}(p_3-p_2) && >\frac{1}{16}(p_2-p_1)\\
&p_5-p_4>\frac{1}{4}(p_4-p_3) && >\frac{1}{64}(p_2-p_1)
\end{aligned}$$

. . . .

Складывая эти неравенства и замѣчая что $p\infty=$Кр., а $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{4}{3}$, найдемъ:

$$\text{Кр.}-p_1>\frac{4}{3}(p_2-p_1).$$

Изъ неравенствъ:

$$P_1-P_2>\frac{1}{2}(p_2-p_1)$$

$$P_2-P_3>\frac{1}{2}(p_3-p_2)$$

$$P_3-P_4>\frac{1}{2}(p_4-p_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

складывая найдемъ:

$$P_1-\text{Кр.}>\frac{1}{2}(\text{Кр.}-p_1)$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по Кр.$-p_1$, получимъ:

$$P_1-p_1>\frac{3}{2}(\text{Кр.}-p_1),\quad \text{Кр.}-p_1<\frac{2}{3}(P_1-p_1).$$

Слѣдовательно:

$$\frac{4}{3}(p_2-p_1)<\text{Кр.}-p_1<\frac{2}{3}(P_1-p_1)$$

или

$$\text{Кр.}>p_2+\frac{p_2-p_1}{3}$$

$$\text{Кр.}<P_1-\frac{P_1-p_1}{3} \qquad (\text{a}')$$

Если означимъ чрезъ p_1', p_2', . . , P_1', P_2', . . , периметры многоугольниковъ коихъ площади мы означили чрезъ p_1, p_2, . . . , P_1, P_2, . . . , то будемъ имѣть:

$$p_2=\frac{1}{2}p_1'r,\qquad P_1=\frac{1}{2}P_1'r,\quad \text{Кр.}=\frac{1}{2}\text{Ок.}\,r$$

Вторая и третья изъ этихъ формулъ очевидны, а первая получится, замѣчая, что:

$$ADGC=\triangle GAD+\triangle AGC=\frac{1}{2}AG\,.\,DC.$$

Если формулы (a′) измѣнимъ въ

$$\text{Кр.}>p_3+\frac{p_3-p_2}{3}$$

$$\text{Кр.}<P_2-\frac{P_2-p_2}{3}$$

а p_3, p_2, P_2, Кр. замѣнимъ ихъ выраженіями $p_3=\frac{1}{2}p_2'r$, $p_2=\frac{1}{2}p_1'r$, $P_2=\frac{1}{2}P_2'r$, Кр.$=\frac{1}{2}$ Ок. r, то найдемъ, что:

$$\left.\begin{aligned}\text{Ок.}&>p_2'+\frac{p_2'-p_1'}{3}\\ \text{Ок.}&<P_2'-\frac{P_2'-p_1'}{3}\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{b}')$$

Формулы (a') и (b') значительно сокращаютъ вычисленія, такъ какъ онѣ даютъ болѣе тѣсные предѣлы.

Примѣръ 1. Изъ таблицы (стр. 332) мы видимъ, что надобно было вычислить площади многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго съ 32768 сторонами, чтобы получить вѣрныхъ семь десятичныхъ знаковъ, т. е. приближеніе до 0,0000001. По формуламъ же:

$$\text{Кр.}=\pi>p_2+\frac{p_2-p_1}{3}$$

$$\text{Кр.}=\pi<P_1-\frac{P_1-p_1}{3}$$

гдѣ $r=1$, слѣдовательно Кр.$=\pi$, достаточно вычислить площади многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго, только до 512 сторонъ, чтобы получить приближеніе до 0,000001, между тѣмъ какъ площади вписаннаго и описаннаго 512-угольниковъ даютъ приближеніе только до 0,001.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы вычислили площади вписаннаго и описаннаго 512-угольниковъ, то имѣемъ изъ таблицы (стр. 332):

$$p_2=3{,}1415138\,,$$
$$p_1=3{,}1412772\,,\qquad P_1=3{,}1417504,$$

откуда:

$$\frac{p_2-p_1}{3}=0{,}000788,\qquad \frac{P_1-p_1}{3}=0{,}0001577,$$

слѣдовательно:

$$\pi>3{,}1415926$$

$$\pi<3{,}1415927$$

вѣрно до 0,000001.

Примѣръ 2. Изъ таблицы (стр. 332) видимъ, что надобно было вычислить периметры вписаннаго и описаннаго 12288-угольниковъ, чтобы получить приближеніе до 0,000001, между тѣмъ по формуламъ:

$$\text{Ок.}=2\pi>p_2'-\frac{p_2'-p_1'}{3}$$

$$\text{Ок.}=2\pi<P_2'-\frac{P_2'-p_1'}{3}.$$

Достаточно вычислить периметры вписаннаго и описаннаго 384-угольника. Въ самомъ дѣлѣ, если мы вычислили периметры вписаннаго и описаннаго 384-угольниковъ, то мы изъ таблицы (стр. 324) имѣемъ:

$$p_2'=6{,}2831152,$$

$$p_1'=6{,}2829049, \qquad P_2'=6{,}2833260,$$

откуда:

$$\frac{p_2'-p_1'}{3}=0{,}0002103, \qquad \frac{P_2'-p_1'}{3}=0{,}0001403$$

слѣдовательно:

$$2\pi>6{,}2831853$$

$$2\pi<6{,}2831857,$$

откуда:

$$\pi=3{,}1415926$$

вѣрно до 0,0000001.

По способу изопериметровъ, какъ видно изъ таблицы (стр. 328), вычисливъ числа обратныя периметрамъ многоугольниковъ до 128-угольниковъ вписанныхъ и описанныхъ, мы получили для π приближеніе только до 0,01. Слѣдующій пріемъ, съ помощью той же таблицы, дастъ π вѣрно до 0,00001.

Въ шестой книгѣ въ 12-мъ примѣчаніи въ предложеніи с), мы показали, что если даны два числа a_n и u_n, то рядъ чиселъ, a_n, u_n, a_{n+1}, u_{n+1}, a_{n+2}, u_{n+2}, . . , полученный слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{a_n+u_n}{2}=a_{n+1}, \qquad \frac{u_n+a_{n+1}}{2}=u_{n+1}, \qquad \frac{a_{n+1}+u_{n+1}}{2}=a_{n+2}, \ldots$$

стремится къ числу:

$$a_n+\frac{2}{3}(u_n-a_n).$$

Въ томъ же примѣчаніи мы видѣли, что разность δ между средне-ариѳметическимъ и средне-геометрическимъ двухъ чиселъ a и b меньше $\frac{(a-b)^2}{8b}$.

Вспомнивъ это, возьмемъ рядъ (3) стр. 327:

$$a_1,\ u_1,\ a_2,\ u_2,\ a_3,\ u_3,\ \ldots,\ a_n,\ u_n,$$

въ этомъ ряду, члены a_2, a_3, a_4, . . суть средне-ариѳметическія числа непосредственно двухъ предъидущихъ, а члены u_2, u_3, u_4, . . суть средне-геометрическія числа также двухъ непосредственно предъидущихъ. Между каждою парою членовъ предъидущаго ряда лежитъ, какъ мы видѣли, число $\frac{1}{\pi}$ или члены этого ряда неопредѣленно приближаются къ $\frac{1}{\pi}$ изъ коихъ a_1, a_2, . . всегда $<\frac{1}{\pi}$, а u_1, u_2, . . всегда $>\frac{1}{\pi}$. Разность u_n-a_n съ возрастеніемъ числа n неопредѣленно убываетъ, такъ какъ мы видѣли что:

$$u_n-a_n<\frac{u_1-a_1}{4^{n-1}}.$$

Если желаемъ вычислить π вѣрно до m-ой десятичной цифры включительно, то мы должны вычислять члены ряда a_1, u_1, a_2, u_2, . . до тѣхъ поръ пока:

$$\delta<\frac{(u_n-a_n)^2}{8a_n}<\frac{1}{10^{m+1}},$$

тогда въ предѣлахъ этого приближенія мы можемъ средне-геометрическія числа u_{n+1}, u_{n+2}, . . замѣстить средне-ариѳметическими a_{n+1}, a_{n+2}, . . , слѣдовательно предѣлъ, къ которому стремятся члены a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, . . , будетъ:

$$\frac{1}{\pi}=a_n+\frac{2}{3}(u_n-a_n).$$

Примѣч. 1. Мы видѣли, что таблица (стр. 328) дала π только до 0,01 вѣрно, между тѣмъ какъ съ помощью предъидущаго свойства таже таблица даетъ π до 0,00001.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ таблицы мы имѣемъ:

$$\begin{array}{r} u_5=0,3184377 \\ a_5=0,3180541 \\ \hline u_5-a_5=0,0003836 \end{array}$$

слѣдовательно:

$$\frac{(u_5-a_5)^2}{8a_5}<\frac{(0,0004)^2}{8.0,318}<\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{10^7},$$

Слѣдовательно будемъ имѣть семь вѣрныхъ десятичныхъ знаковъ:

$$\frac{1}{\pi}=a_5+\tfrac{2}{3}(u_5-a_5)=0,3180541+0,0002557=0,3183098,$$

откуда:

$$\pi=3,141593$$

до 0,000001.

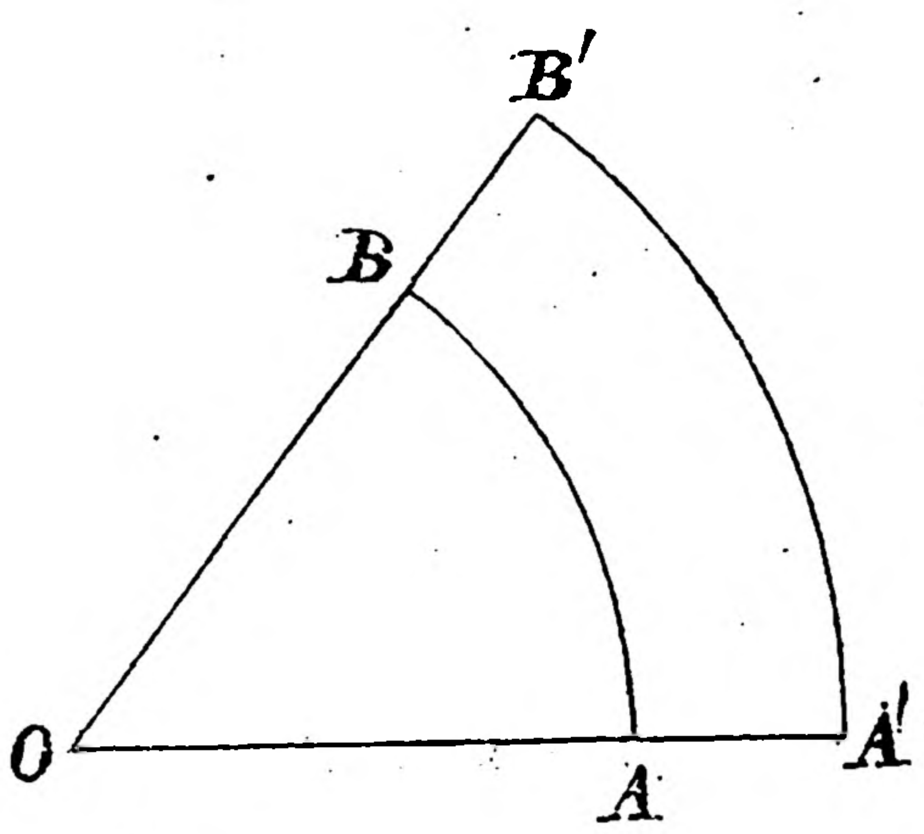
Это и все что можно сказать о способахъ, предложенныхъ геометрами для вычисленія приближеннаго отношенія окружности къ діаметру. Мнѣ кажется, что преподаватель элементарной геометріи въ нашихъ гимназіяхъ долженъ обратить особенное вниманіе воспитанниковъ на эти способы и вычисленія, такъ какъ это единственный примѣръ въ элементарной геометріи, гдѣ онъ можетъ развить способъ вычисленія величинъ по приближенію. Замѣчу при этомъ, что именно эта часть у насъ проходится весьма необстоятельно и какъ бы мимоходомъ, поэтому воспитанники не имѣютъ ни малѣйшаго понятія о приближеніяхъ.

Предложеніе 26. Двѣ дуги, соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ въ различныхъ кругахъ, пропорціональны радіусамъ круговъ. (фиг. 299).

Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, означимъ чрезъ s и s_1 длины дугъ, а чрезъ r и r_1 радіусы соотвѣтствующихъ круговъ. Такъ какъ углы въ одномъ и томъ же кругѣ пропорціональны дугамъ (кн. 6, пред. 33), то мы будемъ имѣть:

$$\frac{s}{2\pi r}=\frac{\angle AOB}{4d} \quad \text{и} \quad \frac{s_1}{2\pi r_1}=\frac{\angle A'OB'}{4d}$$

Фиг. 299.



гдѣ $OA=r$, $OA'=r_1$, дуг. $AB=s$, дуг.$A'B'=s_1$, но $\angle AOB=\angle A'OB'$, слѣдовательно:

$$\frac{s}{2\pi r}=\frac{s_1}{2\pi r_1},$$

откуда:

$$\frac{s}{s_1}=\frac{r}{r_1}.$$

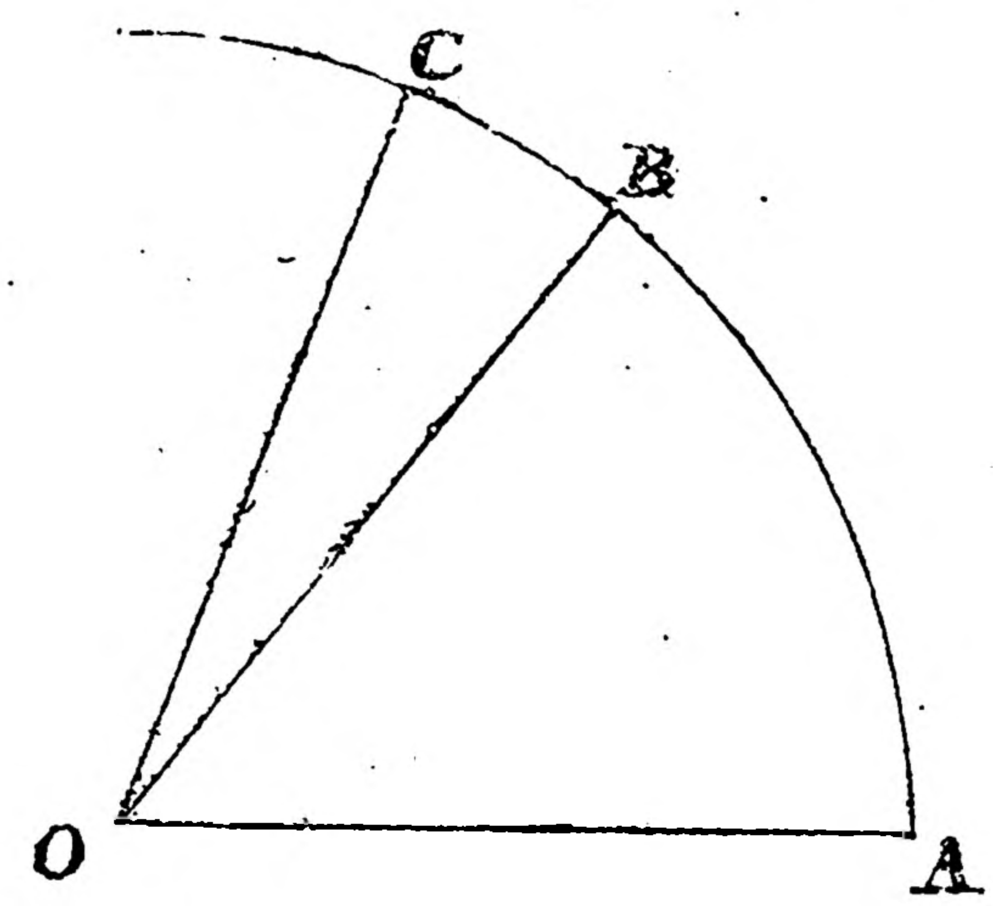
Возьмемъ уголъ AOB, и означимъ чрезъ ω число или мѣру угла, когда уголъ AOC примемъ за единицу (фиг. 300).

То мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 33):

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC}=\omega=\frac{s}{s_1}$$

гдѣ дуга $AB=s$, дуга $AC=s_1$, слѣдовательно:

Фиг. 300.



$$s=s_1\omega \tag{1}$$

Если за единицу угловъ возьмемъ уголъ, который соотвѣтствуетъ дугѣ равной радіусу круга, то $s_1=r$, слѣдовательно:

$$s=r.\omega \tag{2}$$

гдѣ ω есть число выражающее мѣру угла соотвѣтствующаго дугѣ s, когда за единицу угловъ принимается уголъ соотвѣтствующій дугѣ равной, по длинѣ, радіусу круга.

Если въ формулѣ (1) примемъ за единицу дугу s_1, соотвѣтствующую углу равному единицѣ, то будемъ имѣть:

$$s=\omega. \tag{3}$$

Если радіусъ круга примемъ за единицу, то формула (2) обращается въ (3).

Въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть:

$4d=2\pi=6{,}283184$, $2d=\pi=3{,}141592$, $d=\frac{\pi}{2}=1{,}570796$, $\frac{d}{2}=\frac{\pi}{4}$ и т. д.

Такова мѣра угловъ въ теоріи, въ практикѣ же всякую окружность дѣлятъ на 360 равныхъ частей, которыя называютъ *градусами*, слѣдовательно градусъ есть величина неопредѣленная и зависитъ отъ радіуса круга. Прямой уголъ заключаетъ 90 градусовъ, два прямыхъ 180, три прямыхъ 270 и четыре прямыхъ 360. Градусы означаютъ символомъ 25° или 25 градусовъ. Каждый градусъ дѣлятъ на 60 равныхъ частей, которыя называются *минутами* и изображаются такъ $31'$, т. е. 31 минута; наконецъ каждая минута дѣлится на 60 равныхъ частей, которыя называются *секундами* и означаются такъ $21''$, т. е. 21 секунда. Слѣдовательно 25°, $31'$, $21''$ будетъ обозначать уголъ въ 25 градусовъ, 31 минуту и 21 секунду.

КНИГА X.

Опредѣленія.

1. *Соизмѣримыми* величинами называются такія, которыя имѣютъ одну общую мѣру.

2. А *несоизмѣримыми* называются такія, которыя общей мѣры не имѣютъ.

3. Прямыя линіи называются *соизмѣримыми въ степени*, если построенные на нихъ квадраты измѣряются одною и той же площадью, т. е. имѣютъ общую мѣру.

Примѣч. 1. Подъ степенью (δύναμις) Евклидъ разумѣетъ только вторую степень.

4. А *несоизмѣримыми* въ *степени* называются такія прямыя, построенные на которыхъ квадраты не имѣютъ общей мѣры.

5. Съ произвольно взятою прямою существуетъ безчисленное множество другихъ прямыхъ соизмѣримыхъ или несоизмѣримыхъ съ нею и притомъ однѣ изъ нихъ соизмѣримы или несоизмѣримы какъ по длинѣ такъ и въ степени, а другія соизмѣримы только въ степени. Взятая прямая называется *раціональною* линіею (ῥητόν, ἄλογον).

6. *Раціональными* линіями называются также и тѣ, которыя соизмѣримы съ взятою прямою по длинѣ и въ степени, или только въ степени.

7. *Ирраціональными* прямыми называются такія, которыя несоизмѣримы съ взятою прямою.

8. Квадратъ построенный на взятой прямой называется *раціональнымъ*.

9. Площади соизмѣримыя съ этимъ квадратомъ называются также *раціональными*.

10. Площади несоизмѣримыя съ этимъ квадратомъ называются *ирраціональными*.

Примѣч. 2. Мы будемъ говорить, что прямая *квадратитъ* данную площадь, если построенный на ней квадратъ равенъ этой площади. Евклидъ употребляетъ для этого выженія глаголъ δύναϑαι (степенить). Мы будемъ еще говорить, что *прямая квадратитъ надъ другою прямою*, если квадратъ построенный на первой превосходитъ квадратъ, построеный на второй на извѣстную площадь. Эта послѣдняя площадь есть всегда квадратъ.

11. Если прямая квадратитъ ирраціональную площадь, то она называется *ирраціональною*. Если ирраціональная площадь есть квадратъ, то ирраціональная прямая есть его сторона, а если ирраціональная площадь есть какая нибудь фигура, то ирраціональная прямая есть сторона квадрата, площадь котораго равна площади ирраціональной фигуры.

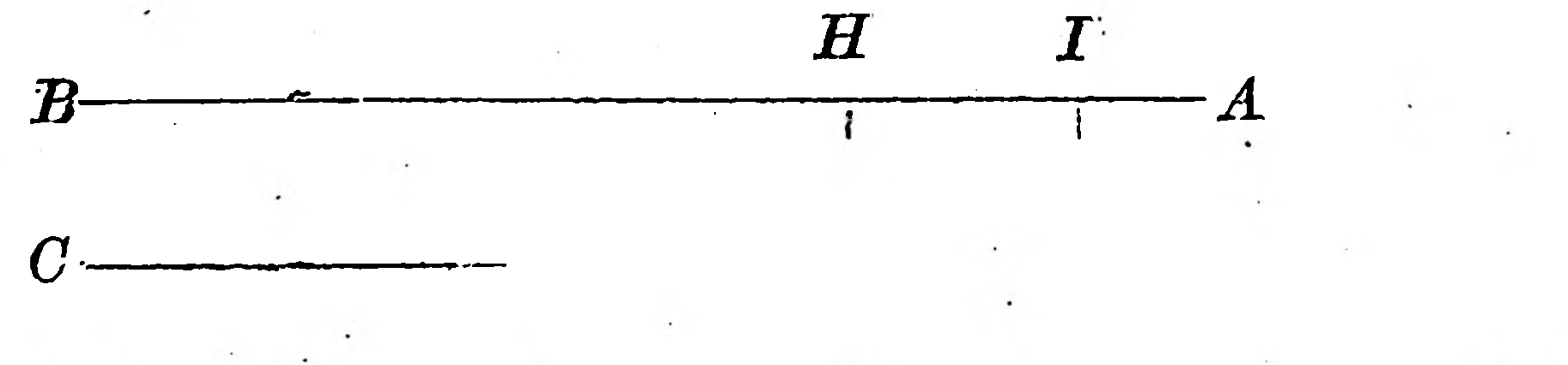
Предложенія.

Предложеніе 1. Если отъ данной величины AB отымемъ часть большую ея половины, а отъ остатка отымемъ его часть большую его половины и будемъ продолжать такое дѣйствіе неопредѣленно, то наконецъ получимъ такой остатокъ, который будетъ менѣе, какой угодно малой, данной величины C (фиг. 301).

Доказат. Возьмемъ величину $DE>AB$ и кратную величины C. Пусть части кратности будутъ $DF=FG=GE=C$.

Такъ какъ $DE>AB$, то, отымая отъ DE его часть $EG\leqq\frac{1}{2}DE$, а отъ AB, $BH\geqq\frac{1}{2}AB$, очевидно получимъ остатки HA и GD изъ коихъ $GD>HA$. Съ этими остатками поступимъ также какъ и съ величинами DE и AB, т. е. отъ GD отымемъ $GF\leqq\frac{1}{2}GD$, и отъ HA отымемъ $HI\geqq\frac{1}{2}HA$, то опять получимъ остатки IA и FD изъ коихъ $IA<FD$, но $FD=C$, слѣдовательно $IA<C$.

Фиг. 301.

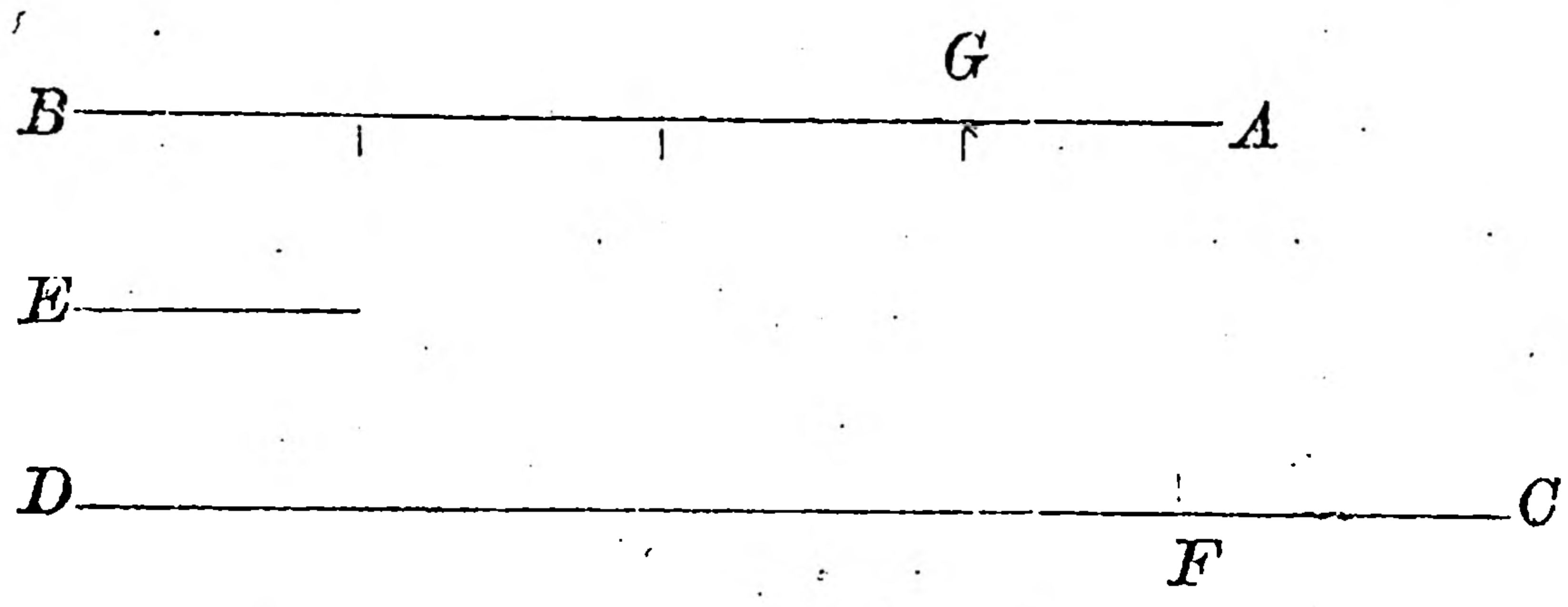


Предложеніе 2. Двѣ неравныя величины AB и CD будутъ несоизмѣримы, если отымая отъ большей меньшую, отъ меньшей первый остатокъ, отъ перваго остатка второй и т. д., никогда не получимъ такого остатка, который бы содержался безъ остатка въ непосредственно предъидущемъ остаткѣ (фиг. 302).

Доказат. Положимъ, что величины AB и CD соизмѣримы и пусть

E будетъ ихъ общая мѣра. Наложимъ меньшую изъ величинъ AB на CD столько разъ, чтобы остатокъ CF былъ меньше AB. Этотъ остатокъ CF наложимъ на AB, столько разъ, чтобы получить остатокъ $AG<FC$ и т. д. пока не получимъ остатокъ $AG<E$.

Фиг. 302.



Такъ какъ E измѣряетъ AB, а AB измѣряетъ DF, то E измѣряетъ DF, но E измѣряетъ и DC, слѣдовательно оно измѣряетъ и FC. E измѣряетъ FC, а FC измѣряетъ BG, слѣдовательно E измѣряетъ и AG. Но AG по условію меньше E, слѣдовательно невозможно, чтобы E измѣряло AG. Если это невозможно, то невозможно, чтобы величины AB и CD имѣли общую мѣру.

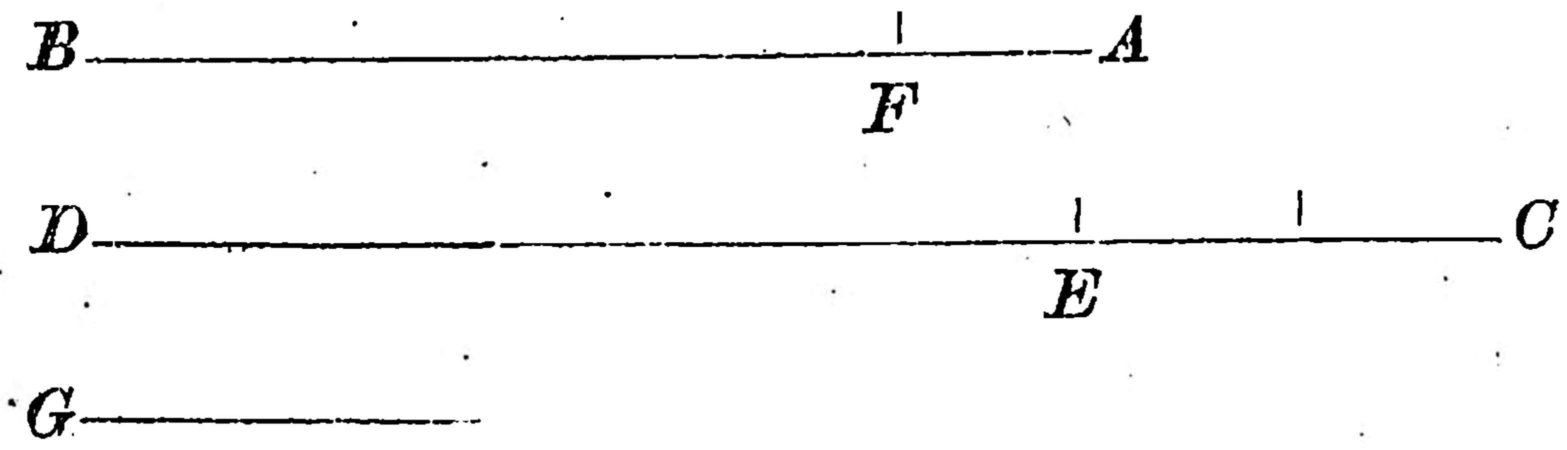
Предложеніе 3. Найти общую наибольшую мѣру двухъ данныхъ соизмѣримыхъ величинъ AB и CD (фиг. 303)?

Рѣшеніе. Случай 1. Если меньшая величина AB измѣряетъ большую CD, то она, какъ измѣряющая и сама себя, и есть общая мѣра; но она и наибольшая, такъ какъ величина большая отъ AB измѣрять ее не можетъ.

Случай 2. Если величина AB не измѣряетъ величины CD, то, такъ какъ онѣ соизмѣримы, отнимая отъ большей меньшую, отъ меньшей первый остатокъ и т. д. мы получимъ такой остатокъ, который измѣряетъ непосредственно предъидущій.

Пусть AB измѣряетъ DE и остатокъ $CE<AB$, а остатокъ CE пусть измѣряетъ BF и остатокъ $AF<CE$, наконецъ пусть AF содержится безъ остатка въ CE. Я говорю, что AF и будетъ общая наибольшая мѣра данныхъ величинъ AB и CD.

Фиг. 303.



Въ самомъ дѣлѣ, AF измѣряетъ EC, а EC измѣряетъ BF, слѣдовательно AF измѣряетъ BF, но AF измѣряетъ саму себя, слѣдовательно AF измѣряетъ и всю величину AB. Но AB измѣряетъ DE, слѣдовательно AF, измѣряя AB, измѣряетъ и DE. Но AF измѣряетъ и CE, слѣдовательно AF измѣряетъ и всю величину CD. Если AF измѣряетъ AB и CD, то она есть ихъ общая мѣра; я говорю, что она и наибольшая.

Для этого положимъ, что есть большая отъ AF общая мѣра G. Такъ какъ G измѣряетъ AB, а AB измѣряетъ DE, то и G измѣряетъ DE. Но G также измѣряетъ и CD, слѣдовательно оно измѣряетъ и CE. G измѣряетъ CE, а CE измѣряетъ BF, слѣдовательно G измѣряетъ BF, но G измѣряетъ AB, слѣдовательно оно измѣряетъ и остатокъ AF, т. е. большая величина G измѣряетъ меньшую AF, что невозможно. Слѣдовательно наибольшая общая мѣра величинъ AB и CD есть AF и другой большей быть не можетъ.

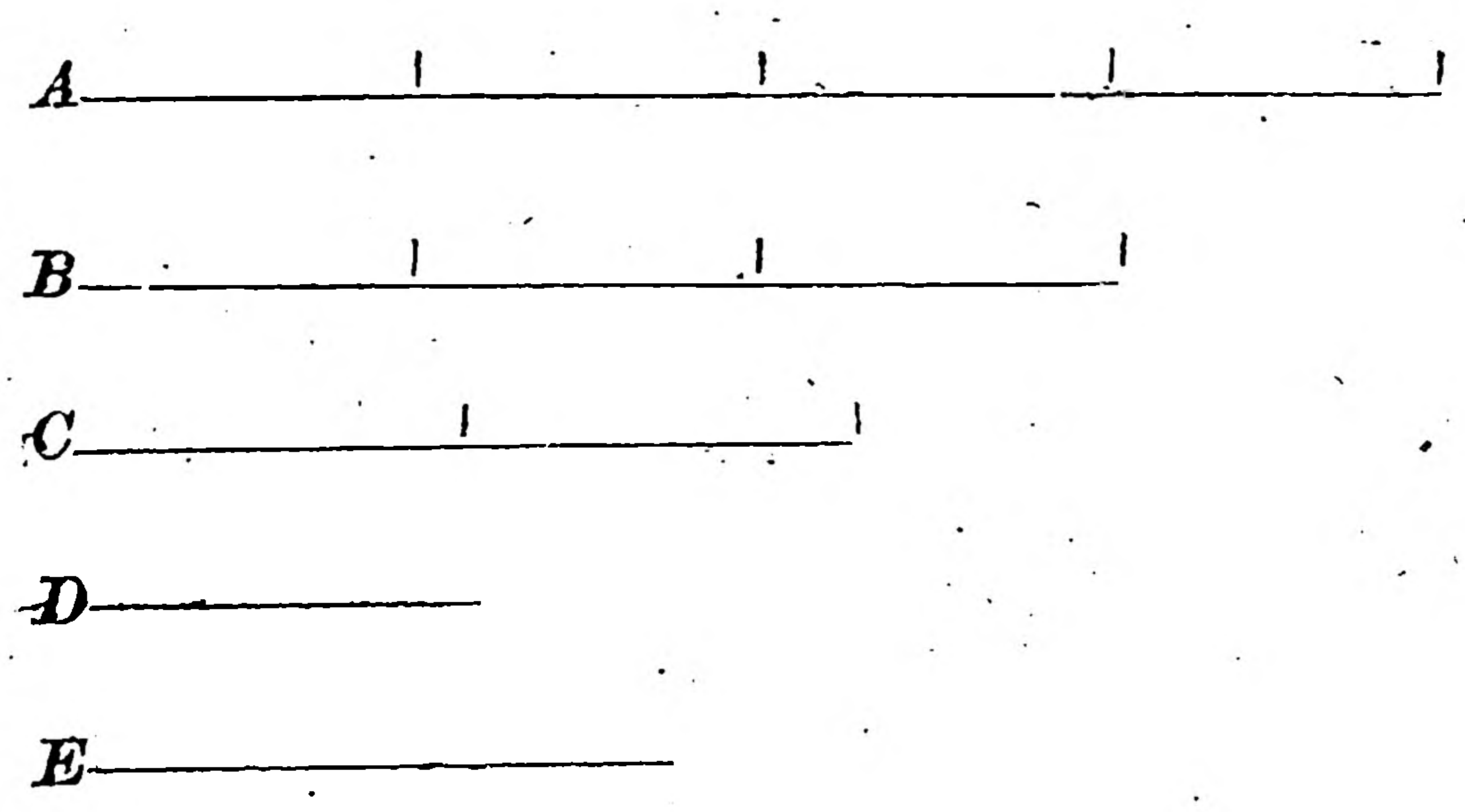
Слѣдствіе. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что величина, измѣряющая двѣ величины, измѣряетъ и ихъ наибольшую общую мѣру.

Предложеніе 4. Найти общую наибольшую мѣру трехъ данныхъ величинъ A, B, C (фиг. 304)?

Рѣшеніе. Найдемъ общую наибольшую мѣру величинъ A и B (кн. 10, пред. 3) и пусть она будетъ D.

Случай 1. Если D измѣряетъ и величину C, то очевидно, что D есть общая мѣра трехъ величинъ A, B, C; я говорю, что она и наибольшая. Въ самомъ дѣлѣ, пусть, если возможно, E будетъ еще большая общая мѣра. Такъ какъ E измѣряетъ величины A, B и C, то она измѣряетъ A и B, а слѣдовательно и величину D (кн. 10, пред. 3, слѣд.), откуда вытекаетъ, что большая E измѣряетъ меньшую D, что невозможно.

Фиг. 304.

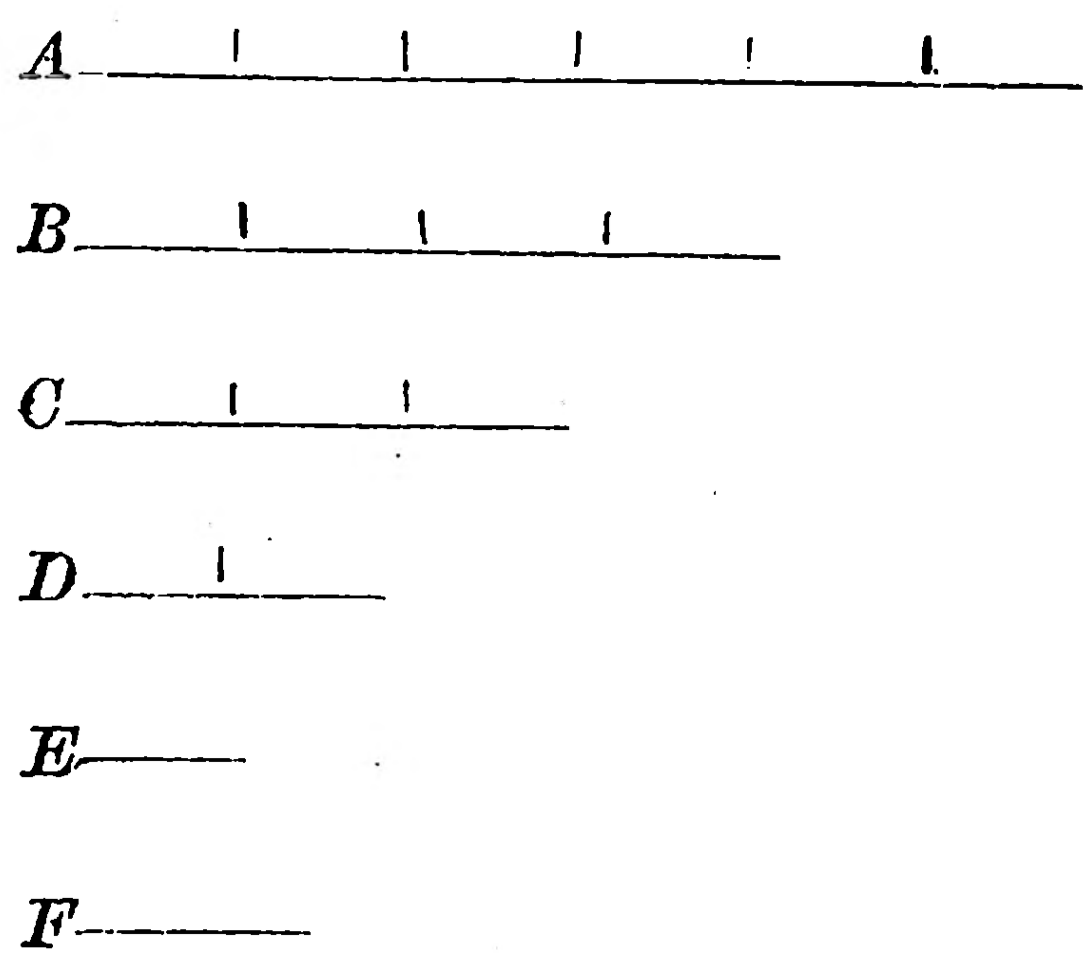


Случай 2. Если D не измѣряетъ величины C, то общая наибольшая мѣра E, величинъ C и D, будетъ общая наибольшая мѣра всѣхъ трехъ величинъ A, B, C.

Въ самомъ дѣлѣ, общая наибольшая мѣра величинъ A, B, C измѣряетъ величины A и B, слѣдовательно измѣряетъ и ихъ общую наибольшую мѣру D, но она измѣряетъ и C, слѣдовательно измѣряетъ C и D, которыя поэтому суть величины соизмѣримыя.

Такъ какъ E есть общая найбольшая мѣра величинъ C и D, то E измѣряетъ D, а D измѣряетъ A и B, слѣдовательно E измѣряетъ A, B и C и есть ихъ общая мѣра, я говорю, что она и найбольшая (фиг. 305).

Фиг. 305.



Если возможно, то пусть F будетъ еще большая общая мѣра. Такъ какъ величина F измѣряетъ A и B, то она измѣряетъ и D (кн. 10, пред. 3, слѣд.), а также и C, слѣдовательно C и D, а если F измѣряетъ C и D, то измѣряетъ и E, т. е. большая величина измѣряетъ меньшую, что невозможно. Слѣдовательно величины A, B, C другой общей найбольшей мѣры, исключая E, имѣть не могутъ.

Слѣдствіе. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что общая, измѣряющая три величины, мѣра измѣряетъ и найбольшую общую ихъ мѣру.

Точно также можно найти общую найбольшую мѣру большаго числа величинъ и приложить къ ней предъидущее слѣдствіе.

Предложеніе 5. Соизмѣримыя величины A и B относятся между собою какъ нѣкоторыя числа (фиг. 306).

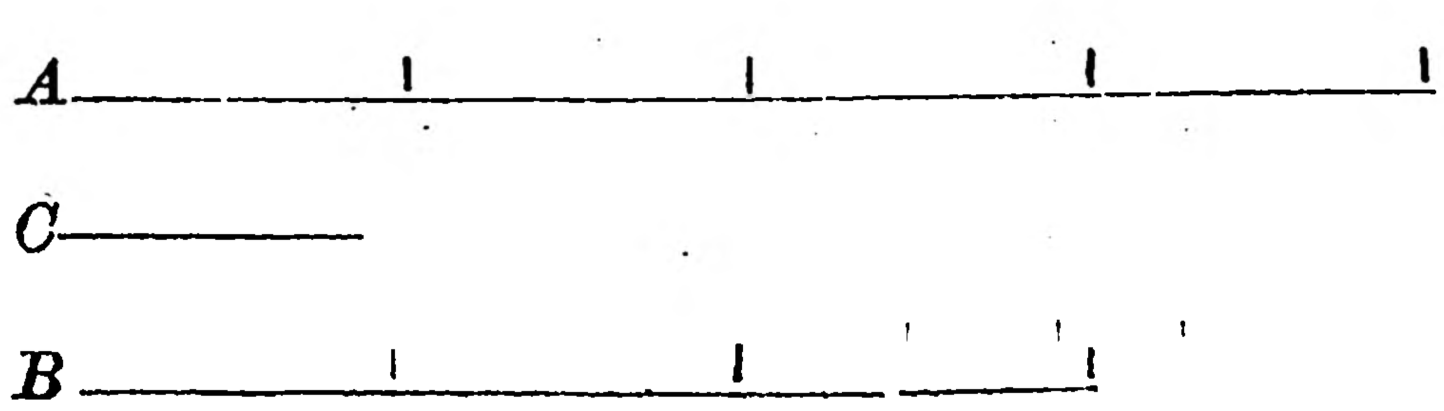
Доказат. Такъ какъ величины A и B соизмѣримы, то онѣ имѣютъ общую найбольшую мѣру, которая пусть будетъ C. Пусть C содержится въ A m разъ, а въ B n разъ, напримѣръ 4 раза въ A и 3 раза въ B, то мы будемъ имѣть:

$$A:C=m:1,\quad C:B=1:n,$$

откуда:

$$A:B=m:n.$$

Фиг. 306.



Примѣч. 3. Если C есть общая найбольшая мѣра величинъ A и B, то мы имѣемъ:

$$A = m.C \qquad B = n.C,$$

откуда, раздѣляя, получимъ:

$$A : B = m : n.$$

Предложеніе 6. Если величины A и B относятся между собою какъ числа m къ n, т. е. если $A : B = m : n$, то A и B соизмѣримы (фиг. 307).

Доказат. Раздѣлимъ величину A на столько равныхъ частей сколько единицъ въ числѣ m и назовемъ n-тую часть A чрезъ C. Составимъ изъ C такое кратное F, сколько единицъ въ числѣ n, то будемъ имѣть:

$$A : C = m : 1, \qquad C : F = 1 : n$$

откуда:

$$A : F = m : n$$

но по положенію:

$$A : B = m : n$$

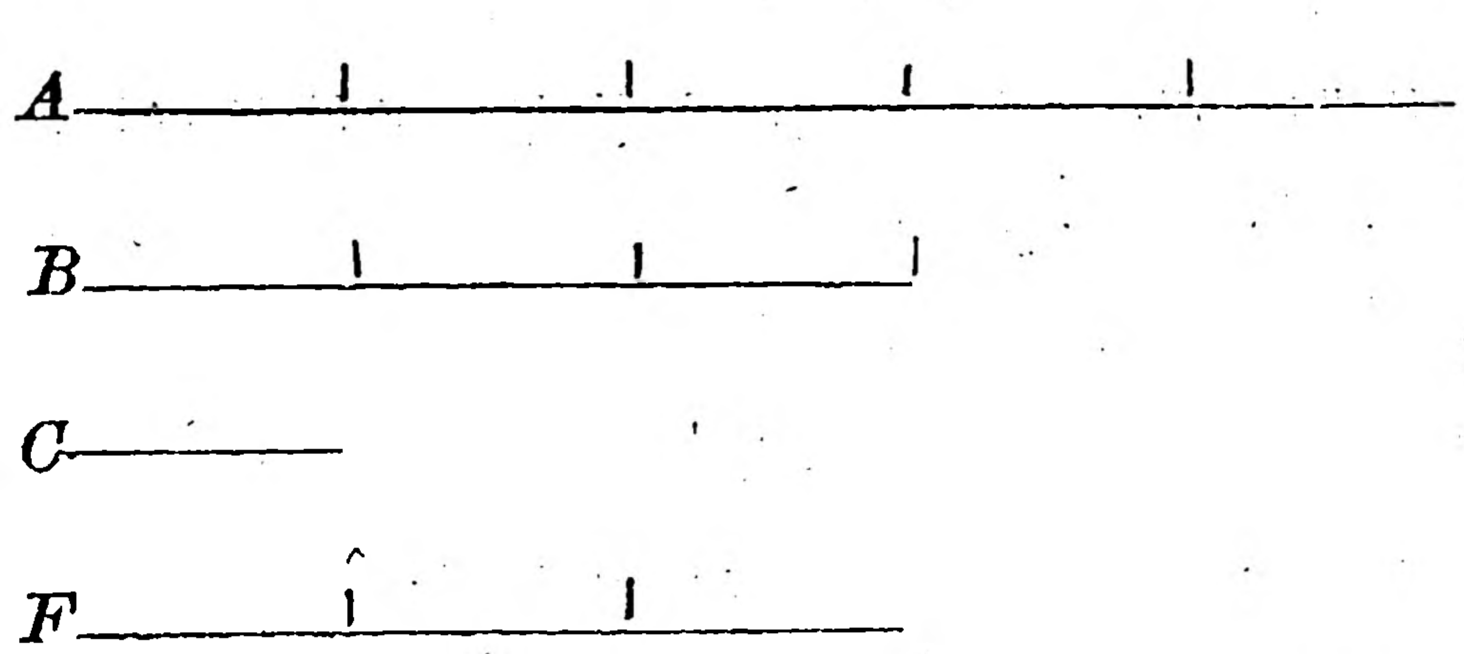
слѣдовательно:

$$A : F = A : B$$

откуда $B = F$ (кн. 5, пред. 9).

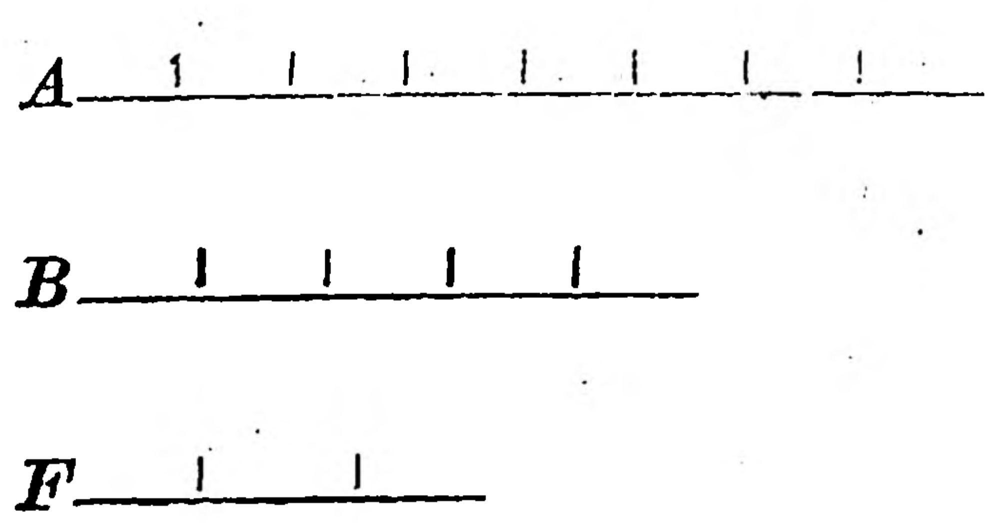
Но C измѣряетъ F, т. е. B, а также имѣряетъ и A, слѣдовательно величины A и B соизмѣримы.

Фиг. 307.



Слѣдствіе. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если даны два числа m и n и прямая линія A, то всегда можно найти другую прямую линіи F такую, что (фиг. 308):

Фиг. 308.



$$m : n = A : F.$$

Если теперь построимъ прямую B средне-пропорціональную между A и F, т. е., если:

$$A:B=B:F,$$

то фигура построенная на A относится къ подобной фигурѣ, построенной на B, какъ квадраты, построенные на A и B, т. е. (кн. 6, пред. 20):

$$\text{Фиг. } A:\text{Фиг. } B=\square A:\square B,$$

но $\square B=A.F$, слѣдовательно:

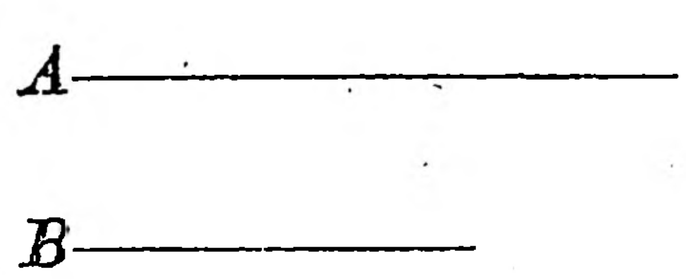
$$\text{Фиг. } A:\text{Фиг. } B=A:F,$$

или

$$\text{Фиг. } A:\text{Фиг. } B=m:n.$$

Предложеніе 7. Несоизмѣримыя величины A и B не могутъ относиться между собою какъ числа (фиг. 309).

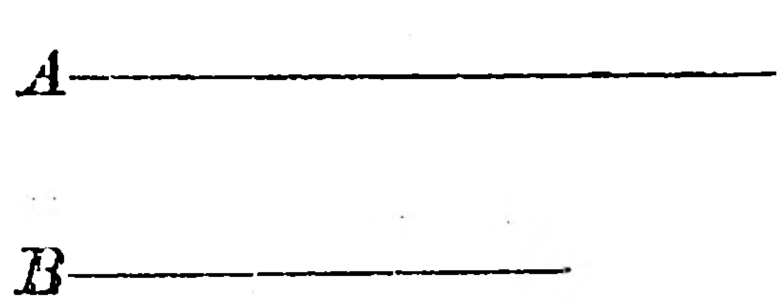
Фиг. 309.



Доказат. Если-бы величины A и B относились какъ числа, то (кн. 10, пред. 6) онѣ бы были соизмѣримы.

Предложеніе 8. Если величины A и B не относятся между собою какъ числа, то онѣ несоизмѣримы (фиг. 310).

Фиг. 310.

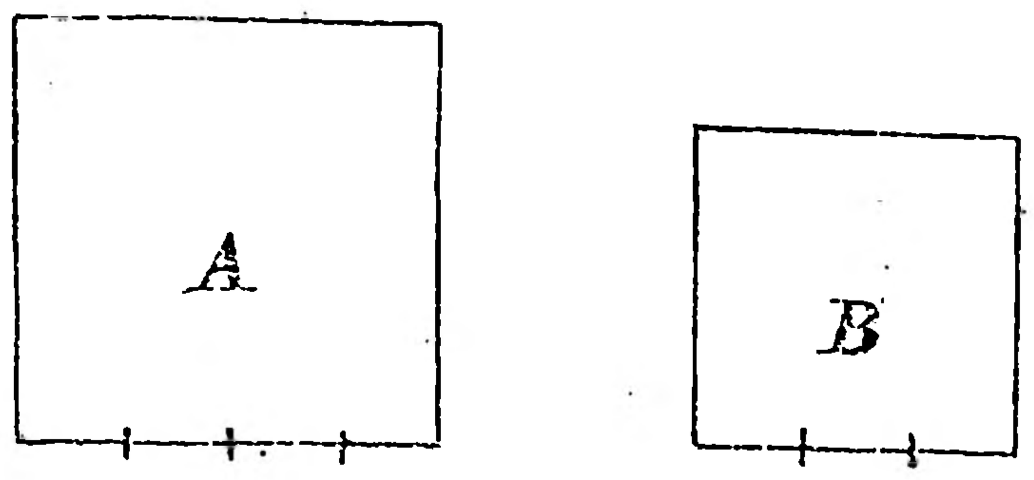


Доказат. Если бы A и B были величины соизмѣримыя, то онѣ относились бы между собою какъ числа (кн. 10, пред. 5).

Предложеніе 9. Квадраты, построенные на соизмѣримыхъ по длинѣ линіяхъ A и B, относятся между собою, какъ квадраты чиселъ, а квадраты, относящіеся между собою какъ квадратныя числа, имѣютъ стороны по длинѣ соизмѣримыя. Напротивъ, квадраты, построенные на несоизмѣримыхъ по длинѣ линіяхъ A и B, не могутъ относится между собою, какъ квадратныя числа, а квадраты, не относящіеся между собою какъ квадратныя числа имѣютъ стороны по длинѣ несоизмѣримыя (фиг. 311).

Доказат. 1. Такъ какъ по условію линіи A и B соизмѣримы, то (кн. 10, пред. 6) онѣ относятся между собою какъ нѣкоторыя числа m и n, т. е.:

Фиг. 311.



$$A : B = m : n.$$

Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 20):

$$\square A : \square B = 2\,(A : B)$$

и

$$\square m : \square n = 2\,(m : n)$$

слѣдовательно:

$$\square A : \square B = m^2 : n^2.$$

2. Положимъ теперь, что мы имѣемъ:

$$\square A : \square B = m^2 : n^2$$

Я говорю, что мы будемъ имѣть:

$$A : B = m : n.$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\square A : \square B = 2\,(A : B) \quad \text{и} \quad m^2 : n^2 = 2\,(m : n),$$

слѣдовательно:

$$A : B = m : n,$$

т. е. A и B соизмѣримы.

3. Если прямыя A и B по длинѣ несоизмѣримы, то квадраты, построенные на нихъ, не могутъ относиться между собою какъ квадратныя числа, въ противномъ случаѣ прямыя A и B были бы по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 9, случ. 1).

4. Если квадраты, построенные на прямыхъ A и B, не могутъ относиться между собою какъ квадратныя числа, то A и B будутъ несоизмѣримы, въ противномъ случаѣ онѣ бы относились между собою какъ квадратныя числа (кн. 10, пред. 9, случ. 2).

Слѣдствіе. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что всѣ соизмѣримыя по длинѣ прямыя линіи соизмѣримы и въ степени; но не всѣ соизмѣримыя линіи въ степени соизмѣримы и по длинѣ. Далѣе также видно, что не всѣ несоизмѣримыя по длинѣ линіи несоизмѣримы и въ степени; но всѣ несоизмѣримыя въ степени линіи несоизмѣримы и по длинѣ.

1. Квадраты соизмѣримыхъ по длинѣ линій относятся между собою какъ квадратныя числа, т. е. какъ числа, слѣдовательно они соизмѣримы (кн. 10, пред. 5).

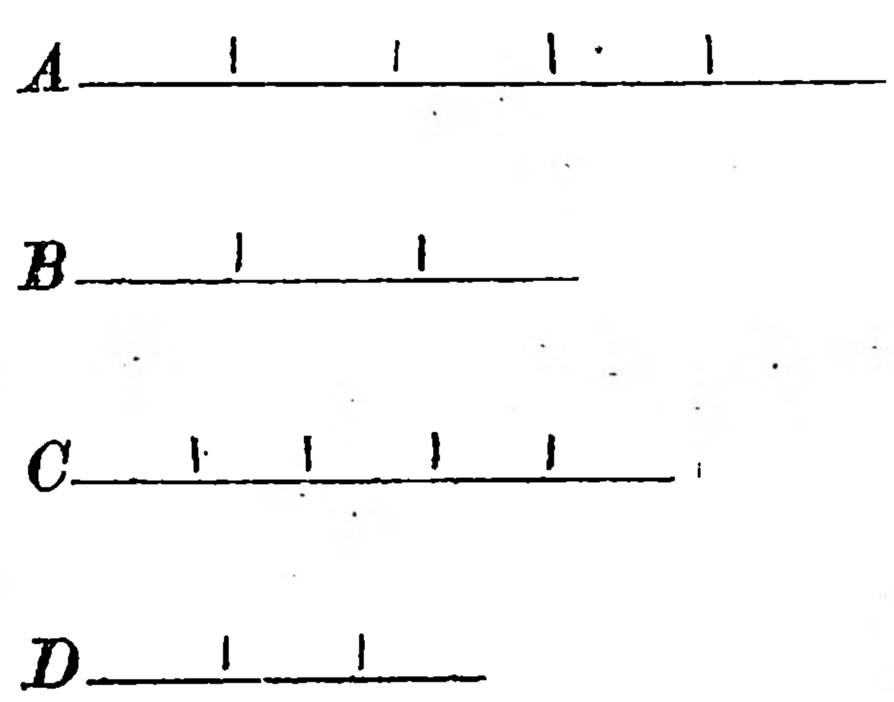
2. Если прямыя линіи соизмѣримы въ степени, то ихъ квадраты относятся между собою какъ числа (кн. 10, пред. 5), но эти числа могутъ быть или полные квадраты или просто какія нибудь числа. Въ первомъ случаѣ, прямыя какъ стороны квадратовъ будутъ по длинѣ соизмѣримы, а во второмъ случаѣ онѣ будутъ по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно соизмѣримыя въ степеии прямыя линіи, тогда только соизмѣримы и по длинѣ, когда ихъ квадраты относятся между собою какъ квадратныя числа.

3. Не всѣ несоизмѣримыя линіи по длинѣ несоизмѣримы и въ степени, такъ какъ прямыя линіи соизмѣримыя въ степени могутъ быть по длинѣ несоизмѣримы.

4. Всѣ несоизмѣримыя въ степени прямыя линіи несоизмѣримы и по длинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы онѣ были соизмѣримы по длинѣ, то онѣ были бы соизмѣримы и въ степени, что противурѣчитъ положенію.

Предложеніе 10. Если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ A, B, C, D первыя двѣ соизмѣримы, то и послѣднія будутъ соизмѣримы, а если первыя двѣ несоизмѣримы, то и послѣднія будутъ также несоизмѣримы (фиг. 312).

Фиг. 312.



Доказат. Если A и B соизмѣримы, то онѣ относятся между собою какъ числа (кн. 10, пред. 5), но мы имѣемъ:

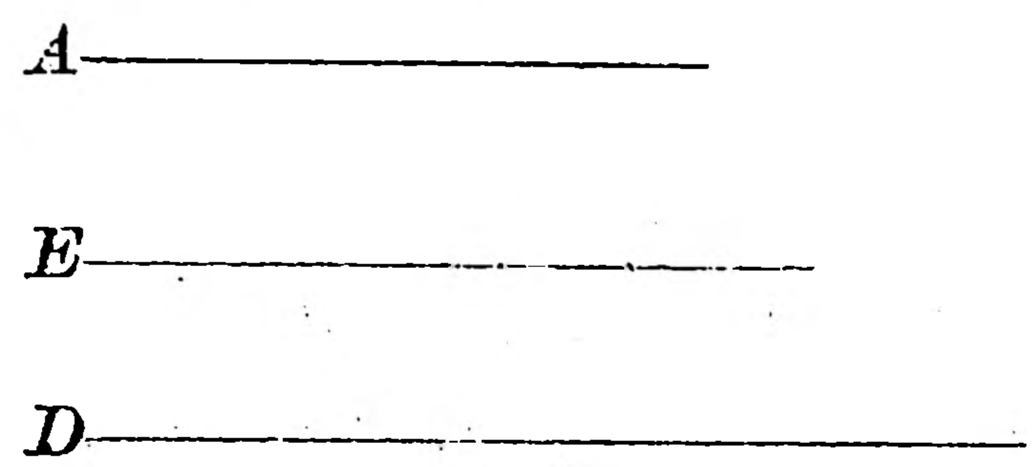
$$A:B=C:D$$

слѣдовательно и C и D относятся между собою, какъ тѣже числа (кн. 10, пред. 6), а слѣдовательно и онѣ соизмѣримы.

Но если A и B несоизмѣримы, то онѣ не могутъ относится между собою какъ числа (кн. 10, пред. 7), слѣдовательно не могутъ относиться между собою какъ числа и величины C и D, слѣдовательно онѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 8).

Предложеніе 11. По данной прямой линіи A найти двѣ другія, изъ коихъ одна была бы несоизмѣрима только по длинѣ, а другая и въ степени (фиг. 313)?

Фиг. 313.



Рѣшеніе 1. Возьмемъ два числа m и n, которыя не относятся между собою какъ квадратныя числа, слѣдовательно не суть числа подобныя; построимъ пропорцію:

$$m:n = \square A : \square D$$

я говорю, что A и D будутъ прямыя несоизмѣримыя только по длинѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$m:n = \square A : \square D$$

то $\square A$ и $\square D$ относятся между собою не какъ квадратныя числа, а просто какъ числа, слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) A и D несоизмѣримы.

2. Возьмемъ прямую E средне-пропорціональную между A и D, т. е., что:

$$A:E = E:D$$

я говорю, что прямая E будетъ несоизмѣрима съ A не только по длинѣ, но и въ степени.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$A:E = E:D$$

то (кн. 6, пред. 20):

$$A:D = \square A : \square E$$

слѣдовательно $\square A$ и $\square E$ относятся между собою, какъ несоизмѣримыя числа A и D, а поэтому A и E несоизмѣримы и въ степени.

Примѣч. 4. Составныя числа, т. е. числа разлагающіеся на множителя—Евклидъ называетъ *площадными* (ἐπίπεδοι) потому, что, будучи разложены на два множителя, могутъ выражать площадь фигуры. *Подобными* числами онъ называетъ такія, въ которыхъ множители пропорціональны. Напримѣръ, если число $A = m \cdot n$, а $B = p \cdot q$ и при этомъ мы имѣемъ:

$$m:n = p:q$$

то числа A и B подобны. Я говорю, что такія числа относятся между собою какъ квадратныя числа. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{A}{B}=\frac{m\,.\,n}{p\,.\,r}=\frac{m}{p}\,.\,\frac{n}{r}$$

но по условію мы имѣемъ:

$$\frac{m}{p}=\frac{n}{r}$$

слѣдовательно:

$$\frac{A}{B}=\frac{m^2}{p^2}=\frac{n^2}{r^2} \quad \text{и} \quad A\,.\,B=m^2\,.\,r^2=n^2p^2$$

Предложеніе 12. Если величины A и B порознь соизмѣримы съ величиною C, то онѣ соизмѣримы и между собою (фиг. 314).

Доказат. Такъ какъ A и C, B и C соизмѣримы, то онѣ относятся между собою какъ числа, поэтому пусть:

$$A:C=m:n \quad \text{и} \quad C:B=p:q \qquad (1)$$

Возьмемъ три числа r, s, t въ слѣдующей зависимости:

$$m:n=r:s \quad \text{и} \quad p:q=s:t$$

Такъ какъ:

$$A:C=m:n \quad \text{и} \quad m:n=r:s$$

то:

$$A:C=r:s$$

точно также мы найдемъ, что:

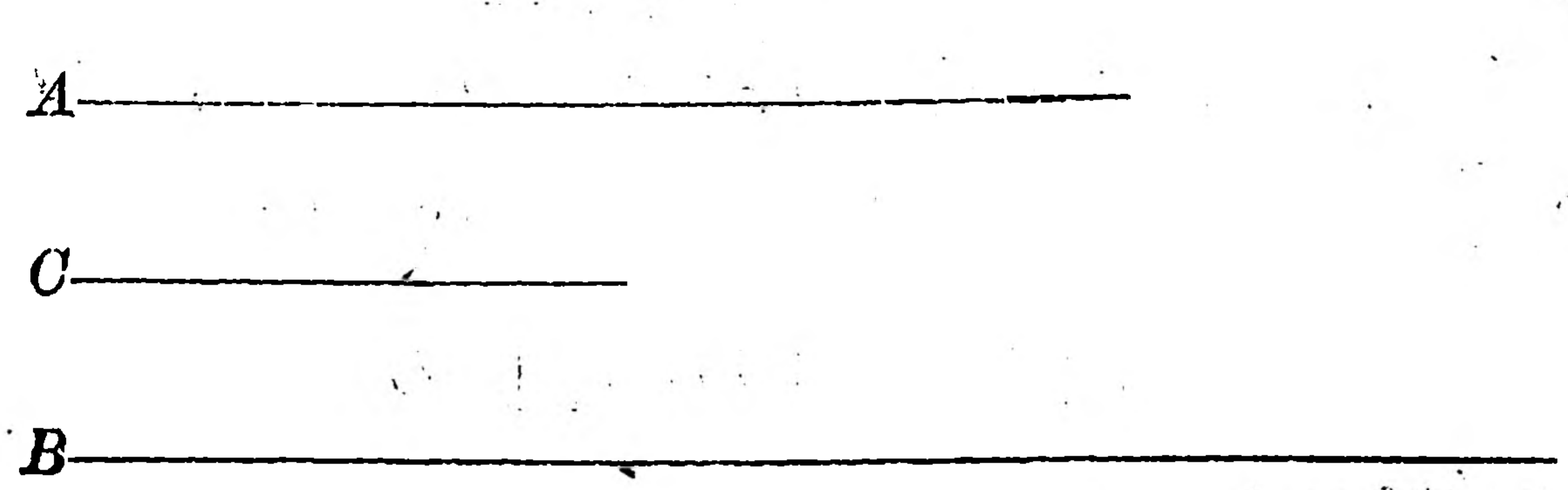
$$C:B=s:t$$

откуда:

$$A:B=r:t$$

слѣдовательно A и B относятся между собою какъ числа, поэтому онѣ соизмѣримы.

Фиг. 314.

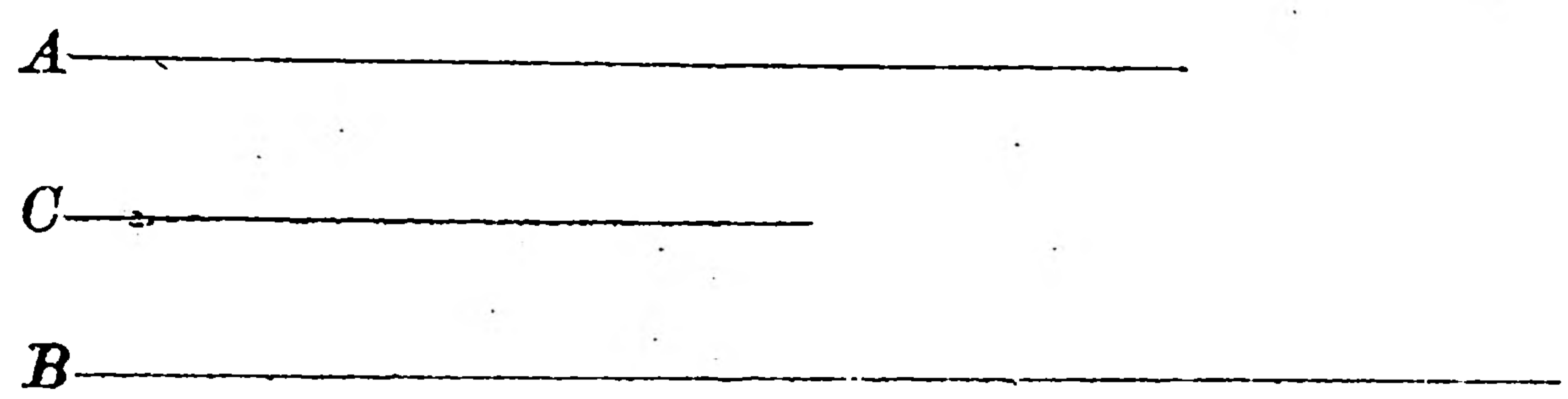


($m=6$, $n=4$, $p=2$, $q=5$, $r=3$, $s=2$, $t=5$).

Предложеніе 13. Если изъ двухъ величинъ A и B одна, напримѣръ A, соизмѣрима съ третьею C, а другая несоизмѣрима съ C, то A и B несоизмѣримы между собою (фиг. 315).

Доказат. Положимъ, что величины A и B будутъ соизмѣримы. По условію A соизмѣрима съ C, и величина B будетъ соизмѣрима съ C (кн. 10, пред. 12), что противурѣчитъ положенію, слѣдовательно величины A и B несоизмѣримы.

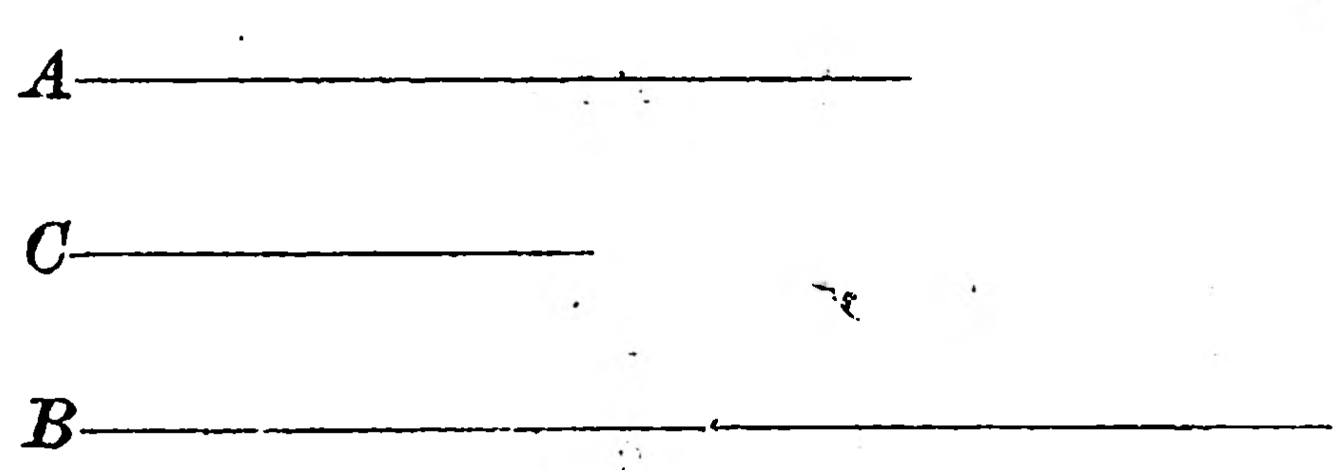
Фиг. 315.



Предложеніе 14. Если изъ двухъ соизмѣримыхъ между собою величинъ A и B одна, напримѣръ A, несоизмѣрима съ третьею C, то и другая B будетъ также несоизмѣрима съ C (фиг. 316).

Доказат. Положимъ, что величина B соизмѣрима съ C, то какъ по условію A несоизмѣрима съ C, а B соизмѣрима, то (кн. 10, пред. 12) и величины A и B будутъ несоизмѣримы между собою, что противурѣчитъ положенію, слѣдовательно величина B будетъ несоизмѣрима съ C.

Фиг. 316.



Слѣдствіе. По двумъ даннымъ не равнымъ прямымъ AB и C найти на сколько квадратъ построенный на большей AB превосходятъ квадратъ, построенный на меньшей C (фиг. 317)?

Рѣшеніе. На прямой AB опишемъ полуокружность ADB и впишемъ въ нее хорду $AD=C$ (кн. 4, пред. 1); соединимъ D съ B, я говорю, что квадратъ построенный на DB и будетъ искомая величина.

Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникѣ ADB уголъ ADB есть прямой (кн. 3, пред. 31), слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

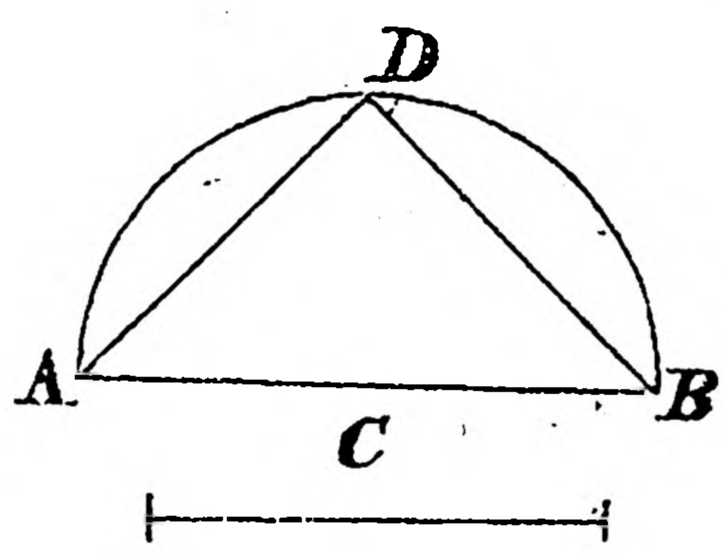
$$\square AB-\square AD=\square BD$$

но $AD=C$, слѣдовательно:

$$\square AB-\square C=\square BD$$

Найти прямую, квадратъ которой былъ бы равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на двухъ данныхъ прямыхъ AD и BD (фиг. 317)?

Фиг. 317.



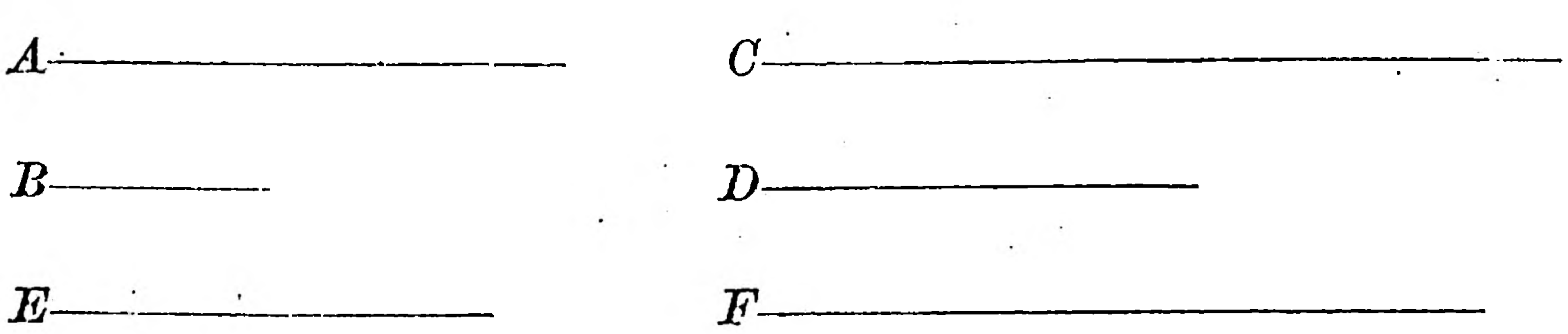
Рѣшеніе. На сторонахъ прямого угла надобно взять отрѣзки AD и DB и соединить прямою AB; квадратъ, построенный на AB, и будетъ искомый.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AD + \square DB = \square AB.$$

Предложеніе 15. Если изъ четырехъ пропорціональныхъ прямыхъ A, B, C, D, первая A квадратитъ надъ второю B на квадратъ, коего сторона E соизмѣрима или несоизмѣрима съ A; то и третья прямая C квадратитъ надъ четвертою D на квадратъ, коего сторона F будетъ соизмѣрима въ первомъ случаѣ и несоизмѣрима во второмъ съ третьею прямою C (фиг. 318).

Фиг. 318.



Доказат. Такъ какъ по условію мы имѣемъ:

$$A : B = C : D$$

то (кн. 6, пред. 22):

$$\square A : \square B = \square C : \square D$$

Но кромѣ того мы еще имѣемъ по условію:

$$\square A = \square B + \square E, \qquad \square C = \square D + \square F$$

слѣдовательно:

$$\square B + \square E : \square B = \square D + \square F : \square D,$$

откуда (кн. 5, пред. 17):

$$\square E : \square B = \square F : \square D,$$

а изъ этой пропорціи слѣдуетъ (кн. 6, пред. 22):

$$E : B = F : D \quad \text{или} \quad B : E = D : F$$

но

$$A : B = C : D,$$

слѣдовательно:

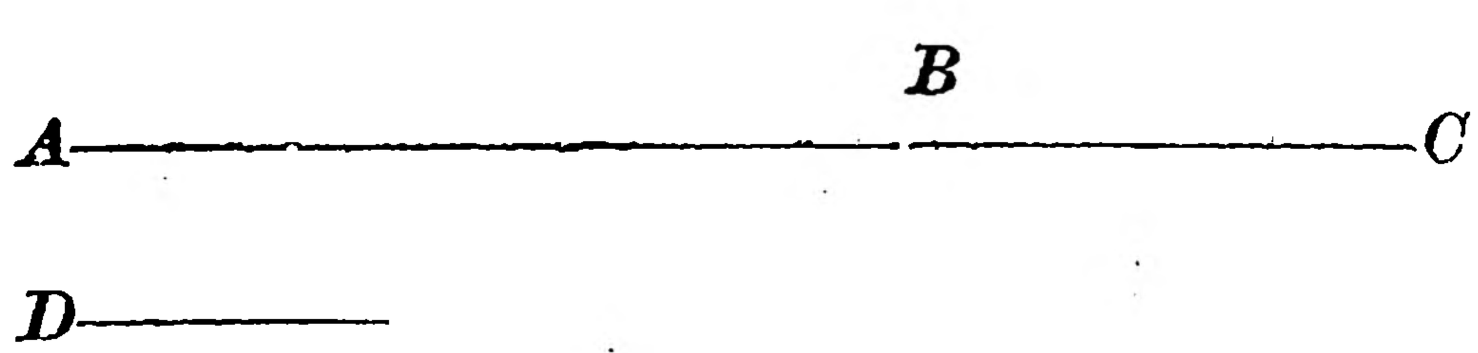
$$A : E = C : F,$$

откуда видимъ, что если E есть прямая соизмѣримая или несоизмѣримая съ A, то и прямая F будетъ соизмѣрима или несоизмѣрима съ прямою C (кн. 10, пред. 10).

Предложеніе 16. Если сложимъ двѣ соизмѣримыя величины AB и BC, то цѣлая AC будетъ величина соизмѣримая съ каждою изъ частей AB и BC; или, если цѣлая AC будетъ соизмѣрима съ одною изъ частей AB или BC, то и эти части будутъ соизмѣримы между собою (фиг. 319).

Доказат. 1. Если AB и BC соизмѣримы, то онѣ имѣютъ общую найбольшую мѣру D, которая, измѣряя величины AB и BC, очевидно измѣряетъ и цѣлую величину AC. Слѣдовательно всѣ три величины AB, BC, AC будутъ соизмѣримы.

Фиг. 319.



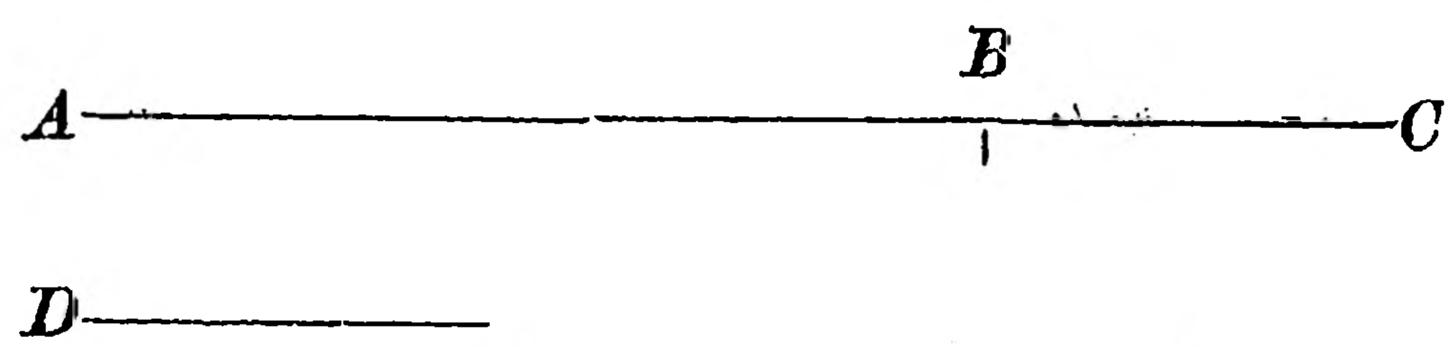
2. Если цѣлая AC соизмѣрима съ ея частью AB, то эти величины имѣютъ общую найбольшую мѣру D, которою, очевидно будетъ измѣряться и остатокъ BC, но она измѣряетъ AB, слѣдовательно AB и BC соизмѣримы.

Предложеніе 17. Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя величины AB и BC, то цѣлая величина AC будетъ несоизмѣрима съ каждой AB и BC; или, если цѣлая AC будетъ несоизмѣрима съ одной изъ частей AB или BC, то и эти части будутъ несоизмѣримы между собою (фиг. 320).

Доказат. 1. Пусть величины AB и BC будутъ несоизмѣримы между собою. Если бы цѣлая AC была соизмѣрима, напримѣръ съ AB, то онѣ имѣли бы общую найбольшую мѣру D. Очевидно мѣра D, измѣряя AC и

AB, будетъ измѣрять и остатокъ BC, слѣдовательно величины AB и BC будутъ соизмѣримы, что противорѣчитъ положенію.

Фиг. 320.



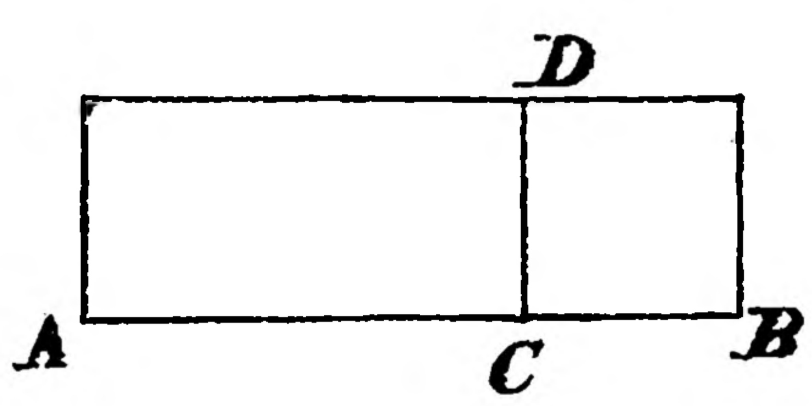
2. Пусть теперь цѣлая AC будетъ величина несоизмѣримая съ AB. Если бы части AB и BC были соизмѣримы между собою, то и цѣлая AC была бы величина соизмѣримая съ каждою AB и BC, что противорѣчитъ положенію.

Слѣдствіе. Если на прямой AB построимъ прямоугольникъ AD, коего дополненіе BD есть квадратъ, то стороны прямоугольника будутъ AC и CB (фиг. 321).

Въ самомъ дѣлѣ, $AD{=}AC\,.\,CD$, но BD есть по условію квадратъ, слѣдовательно $CD{=}CB$, откуда:

$$AD{=}AC\,.\,CB.$$

Фиг. 321.



Предложеніе 18. Если на большей BC изъ двухъ данныхъ прямыхъ BC и A построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на меньшей прямой A, при томъ такъ, чтобы его дополненіе было квадратъ и кромѣ того стороны по длинѣ соизмѣримы; то большая прямая BC квадратитъ надъ меньшею A на квадратъ, коего сторона есть величина соизмѣримая по длинѣ съ BC. Обратно, если на прямой BC построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на A, при томъ такъ, чтобы его дополненіе было квадратъ и кромѣ того если BC квадратитъ надъ A на квадратъ, коего сторона соизмѣрима съ BC; то стороны, построеннаго прямоугольника будутъ соизмѣримы между собою (фиг. 322).

Доказат. 1. Раздѣлимъ прямую BC въ точкѣ E пополамъ и сдѣлаемъ $DE{=}EF$, то будемъ имѣть $DC{=}BF$. Такъ какъ (кн. 2, пред. 5):

$$BD\,.\,DC+\square ED{=}\square EC$$

то:

$$4(DB.DC)+4\square ED=4\square EC.$$

Но по условію:

$$4(BD.DC)=\square A$$

а по построенію:

$$4\square ED=\square DF \quad \text{и} \quad 4\square EC=\square BC,$$

потому что:

$$2ED=DF \quad \text{и} \quad 2EC=BC$$

слѣдовательно:

$$\square A+\square DF=\square BC$$

откуда:

$$\square BC-\square A=\square DF$$

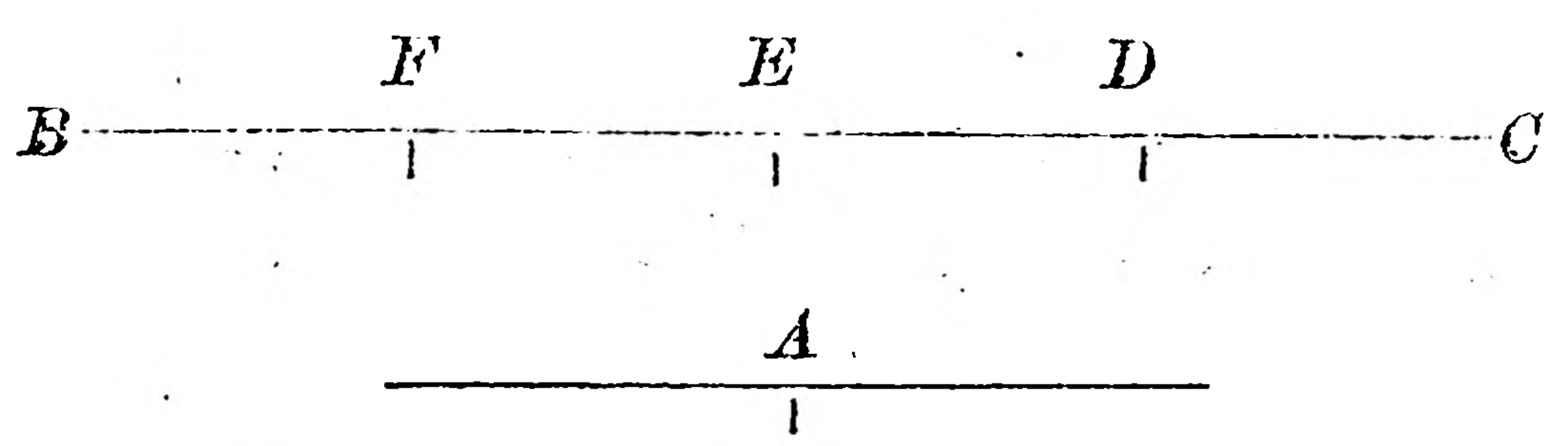
т. е. прямая BC квадратитъ надъ A на $\square DF$. Остается показать, что BC и DF соизмѣримы.

По условію прямыя BD и DC соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы и прямыя BC и DC. Но $DC=BF$, слѣдовательно:

$$DC : DC+BF=1:2$$

откуда видимъ (кн. 10, пред. 6), что DC и $DC+BF$ соизмѣримы, но DC соизмѣрима съ BC, слѣдовательно BC и $DC+BF$ также соизмѣримы (кн. 10, пред. 6). Если наконецъ BC и $DC+BF$ соизмѣримы, то (кн. 10, пред. 16) соизмѣримы и прямыя BC и DF.

Фиг. 322.



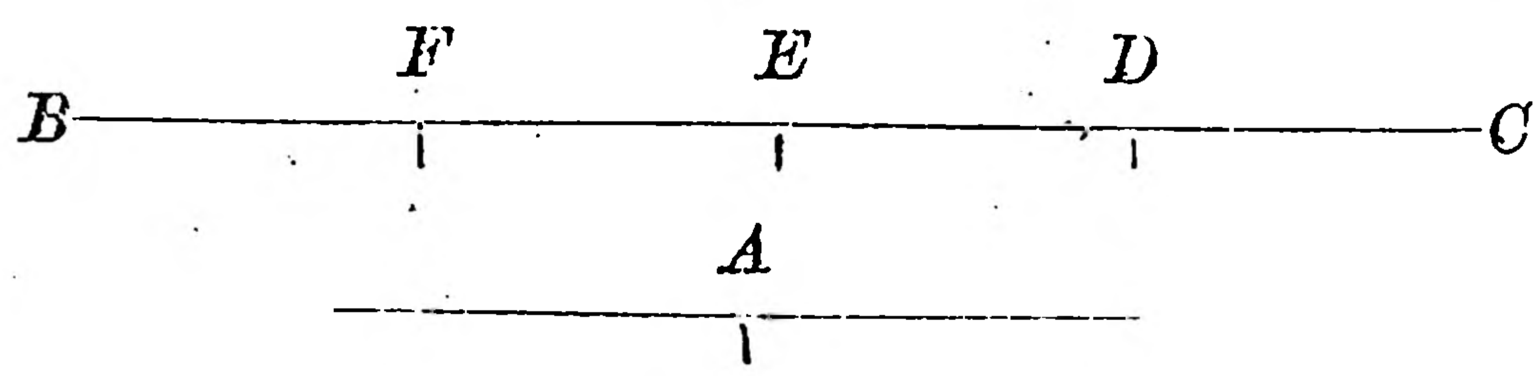
2. Если въ предъидущемъ построеніи:

$$\square BC-\square A=\square FD$$

прямыя BC и DF соизмѣримы, то соизмѣримы (кн. 10, пред. 16) и прямыя BC и $DC+BF$. Но $BF=DC$, слѣдовательно прямыя $BF+DC$ и DC соизмѣримы, а также соизмѣримы и прямыя BC и DC, откуда наконецъ соизмѣримы и прямыя BD и DC.

Предложеніе 19. Если на большей BC изъ двухъ прямыхъ BC и A построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на меньшей прямой A, и притомъ такъ, чтобы его дополненіе было квадратъ, и кромѣ того стороны BD и DC по длинѣ несоизмѣримы, то большая прямая BC квадратитъ надъ A на квадратъ, коего сторона несоизмѣрима по длинѣ съ BC. Обратно, если на прямой BC построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на A и при томъ такъ, чтобы его дополненіе былъ квадратъ, и кромѣ того, если прямая BC квадратитъ надъ A на квадратъ, коего сторона несоизмѣрима съ BC, то стороны BD и DC, построеннаго прямоугольника, будутъ по длинѣ несоизмѣримы между собою (фиг. 323).

Фиг. 323.



Доказат. 1. Построеніе, подобное предъидущему даетъ:

$$\square BC - \square A = \square DF.$$

По условію прямыя BD и DC несоизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) несоизмѣримы и прямыя BC и DC. Такъ какъ $DC = BF$, то:

$$DC : DC + BF = 1 : 2,$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 6) DC и $DC + BF$ соизмѣримы, откуда (кн. 10, пред. 14) прямая BC несоизмѣрима съ $DC + BF$, и наконецъ (кн. 10, пред. 17) несоизмѣримы и прямыя DF и BC.

Слѣдовательно прямая BC квадратитъ надъ A на квадратъ, коего сторона DF несоизмѣрима по длинѣ съ BC.

2. Если въ предъидущемъ построеніи:

$$\square BC - \square A = \square DF$$

прямыя BC и DF по длинѣ несоизмѣримы, то несоизмѣримы и BC и $DC + FB$ (кн. 10, пред. 17). Но прямыя DC и $DC + BF$ соизмѣримы (кн. 10, пред. 6), слѣдовательно (кн. 10, пред. 14) BC и DC несоизмѣримы, въ слѣдствіе чего стороны BD и DC по длинѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 17).

Замѣчаніе. Было показано (кн. 10, пред. 9, слѣд.), что прямыя, соизмѣримыя по длинѣ, всегда соизмѣримы и въ степени, но прямыя, соизмѣримыя въ степени, не всегда соизмѣримы по длинѣ, онѣ по длинѣ могутъ быть соизмѣримыми и несоизмѣримыми. Изъ этого явствуетъ, (кн. 10, опред. 6), что:

1. Прямая линія, по длинѣ соизмѣримая съ извѣстною раціональною

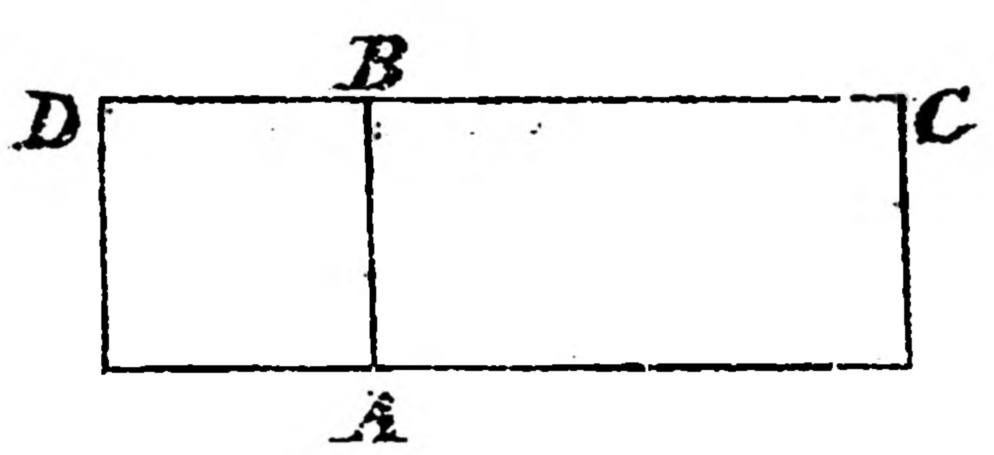
линіею, раціональна и называется соизмѣримою по длинѣ и въ степени съ взятою прямою.

2. Прямая линія, въ степени соизмѣримая съ извѣстною раціональною линіею, если въ тоже время и по длинѣ съ нею соизмѣрима, то также называется раціональною; но если она по длинѣ несоизмѣрима, то будетъ называться раціональною, но только въ степени соизмѣримою.

Предложеніе 20. Прямоугольникъ, имѣющій раціональныя по длинѣ соизмѣримыя стороны, будетъ раціональный (фиг. 324).

Доказат. Пусть AB и BC будутъ раціональныя, по длинѣ соизмѣримыя стороны прямоугольника AC; я говорю, что этотъ прямоугольникъ будетъ раціональный.

Фиг. 324.



Построимъ на прямой AB квадратъ AD, такъ какъ прямая AD раціональна, то раціоналенъ и квадратъ AD (кн. 10, пред. 8). Но по условію прямыя AB и BC соизмѣримы, а $AB=BD$, слѣдовательно соизмѣримы и прямыя BD и BC. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD:BC=AD:AC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) площади AD и AC соизмѣримы. Но такъ какъ AD есть раціональная площадь, то (кн. 10, пред. 9) и площадь AC раціональна.

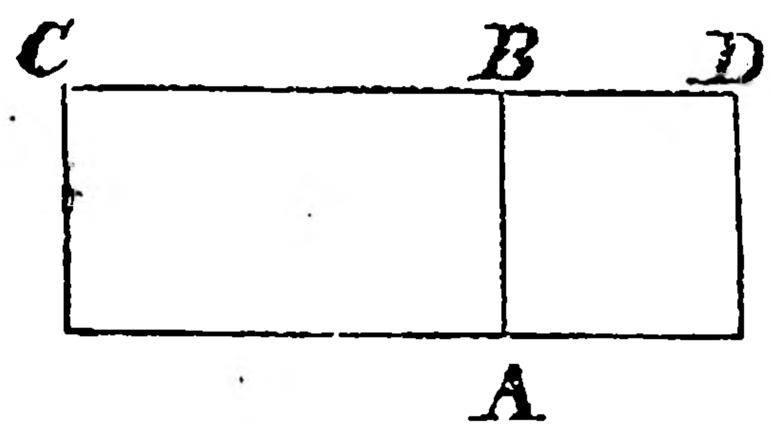
Предложеніе 21. Раціональный прямоугольникъ AC, построенный на раціональной прямой AB, будетъ имѣть раціональную, по длинѣ соизмѣримую съ ней, высоту BC (фиг. 325).

Доказат. Построимъ на прямой AB квадратъ AD, этотъ квадратъ будетъ раціональный. Такъ какъ по условію прямоугольникъ AC раціональный, то онъ соизмѣримъ (кн. 10, пред. 19, замѣч.) съ квадратомъ AD. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AD:AC=BD:BC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 15) прямыя BD и BC соизмѣримы. Но $BD=AB$, слѣдовательно AB и BC соизмѣримы. По условію AB есть раціональная прямая, слѣдовательно и BC будетъ раціональная, по длинѣ соизмѣримая, прямая съ AB.

Фиг. 325.



Слѣдствіе. Прямая A, квадратящая ирраціональную площадь фигуры, сама ирраціональна (фиг. 326).

Фиг. 326.

A——————————

Въ самомъ дѣлѣ, если бы прямая A была раціональна, то (кн. 10, пред. 8) $\square A$ былъ бы раціоналенъ, слѣдовательно и площадь фигуры, равной ему, была бы раціональною, что противорѣчитъ положенію.

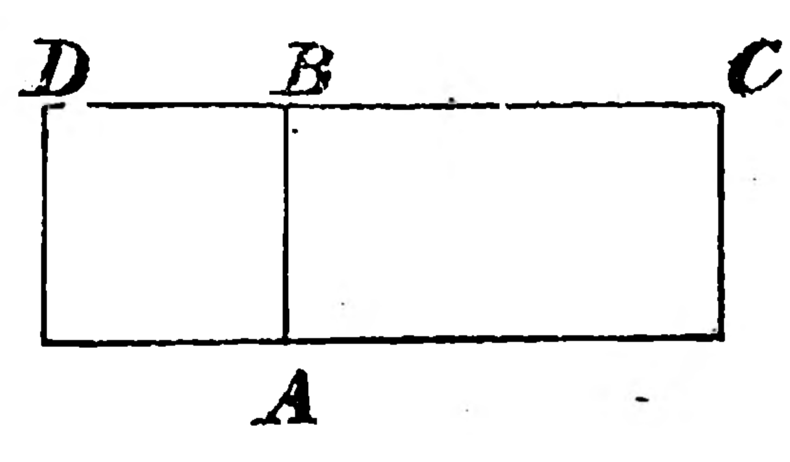
Предложеніе 22. Прямоугольникъ AC, коего стороны AB и BC суть раціональныя прямыя, соизмѣримыя только въ степени, будетъ ирраціональнымъ и прямая, квадратящая его площадь будетъ также ирраціональною и называется *среднею прямою* (фиг. 327).

Доказат. Построимъ на AB квадратъ AD, этотъ квадратъ будетъ раціональный. Такъ какъ по условію AB и BC соизмѣримы только въ степени, и $AB=BD$, то BD и BC несоизмѣримы по длинѣ. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD:BC=AD:AC$$

откуда видимъ (кн. 10, пред. 15), что AD и AC несоизмѣримы и какъ AD есть раціональный квадратъ, то AC будетъ ирраціональный прямоугольникъ. Слѣдовательно прямая, квадратящая его площадь, будетъ также ирраціональная (кн. 10, пред. 21, слѣд.).

Фиг. 327.



Замѣчаніе. Среднею эта прямая называется потому, что квадратъ, построенный на ней, равенъ прямоугольнику $AB.BC$, т. е. она есть средне-пропорціональная линія между раціональными по длинѣ только несоизмѣримими линіями AB и BC.

Слѣдствіе. Двѣ прямыя AB и BC относятся между собою такъ, какъ квадратъ, построенный на одной изъ нихъ, напримѣръ на AB, относится къ прямоугольнику, коего стороны суть эти прямыя (фиг. 327).

Доказат. Построимъ на прямой AB квадратъ и дополнимъ его прямоугольникомъ такъ, чтобы $AC = AB \,.\, BC$. Мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD : BC = \square AB : AC$$

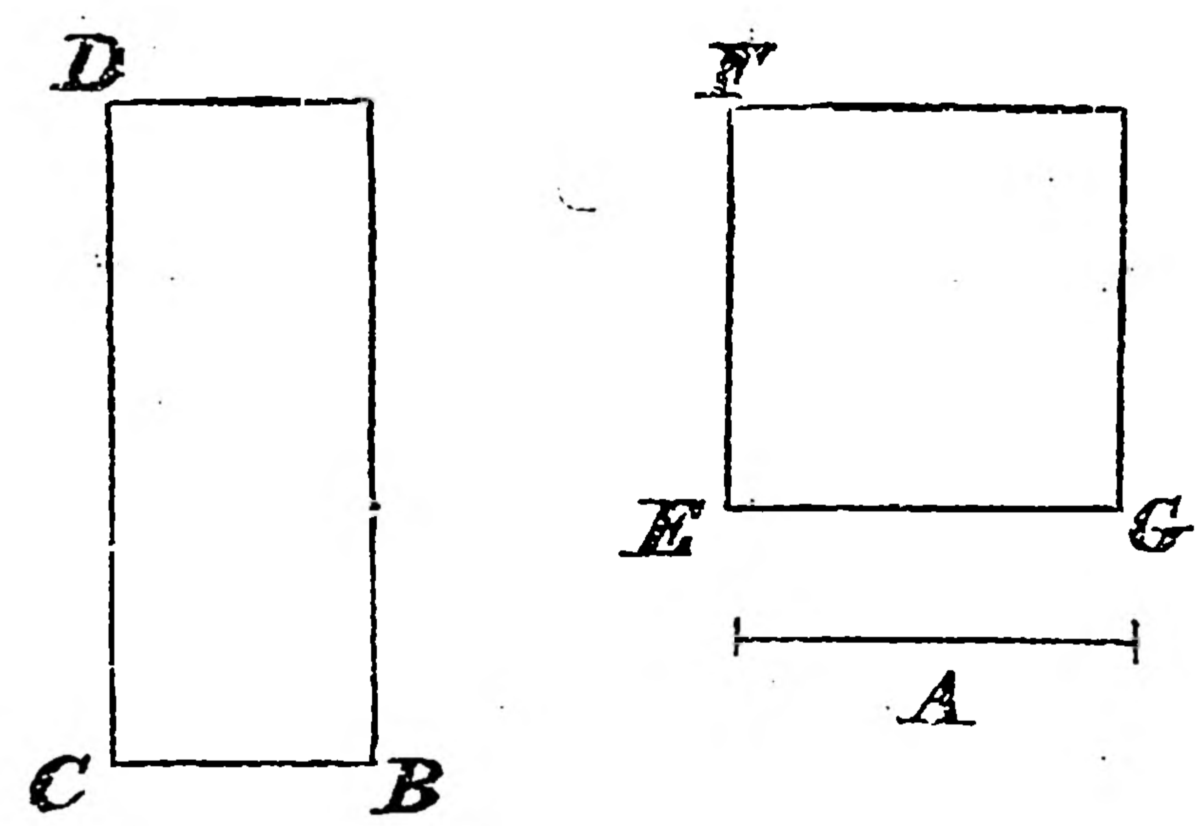
но $BD = AB$, слѣдовательно:

$$AB : BC = \square AB : AB \,.\, BC.$$

Предложеніе 23. Прямоугольникъ BD, построенный на раціональной прямой BC, равный квадрату, построенному на *средней* прямой A, будетъ имѣть высоту DC, раціональную по длинѣ несоизмѣримую съ BC (фиг. 328).

Доказат. Пусть $\square A = GF = GE \,.\, EF$. Такъ какъ A есть средняя прямая, то (кн. 10, пред. 22) прямыя GE и EF соизмѣримы только въ степени.

Фиг. 328.



По условію $\square A = BD$, слѣдовательно прямоугольникъ $BD = GF$ а такъ какъ они и равноугольны, то (кн. 6, пред. 14):

$$BC : EG = EF : CD$$

откуда (кн. 6, пред. 22):

$$\square BC : \square EG = \square EF : \square CD.$$

Но прямыя BC и EG раціональны, а потому квадраты $\square BC$ и $\square EG$ соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы и квадраты $\square EF$ и $\square CD$ (кн. 10, пред. 10). Но квадратъ $\square EF$ раціональный, слѣдовательно и $\square CD$ также раціональный. Откуда и сторона его CD есть раціональная прямая. Такъ какъ стороны EF и EG соизмѣримы только въ степени, а мы имѣемъ (кн. 10, пред. 22, слѣд.):

$$EF : EG = \square EF : EF \,.\, EG$$

то $\square EF$ несоизмѣримъ съ прямоугольникомъ $EF.EG$ (кн. 10, пред. 10). Но мы имѣемъ:

$$EF.EG=\square A=DC.CB$$

и какъ по предъидущему $\square EF$ и $\square CD$ соизмѣримы, то (кн. 10, пред. 13) $\square CD$ несоизмѣримъ съ прямоугольникомъ $DC.CB$. Но (кн. 10, пред. 22, слѣд.):

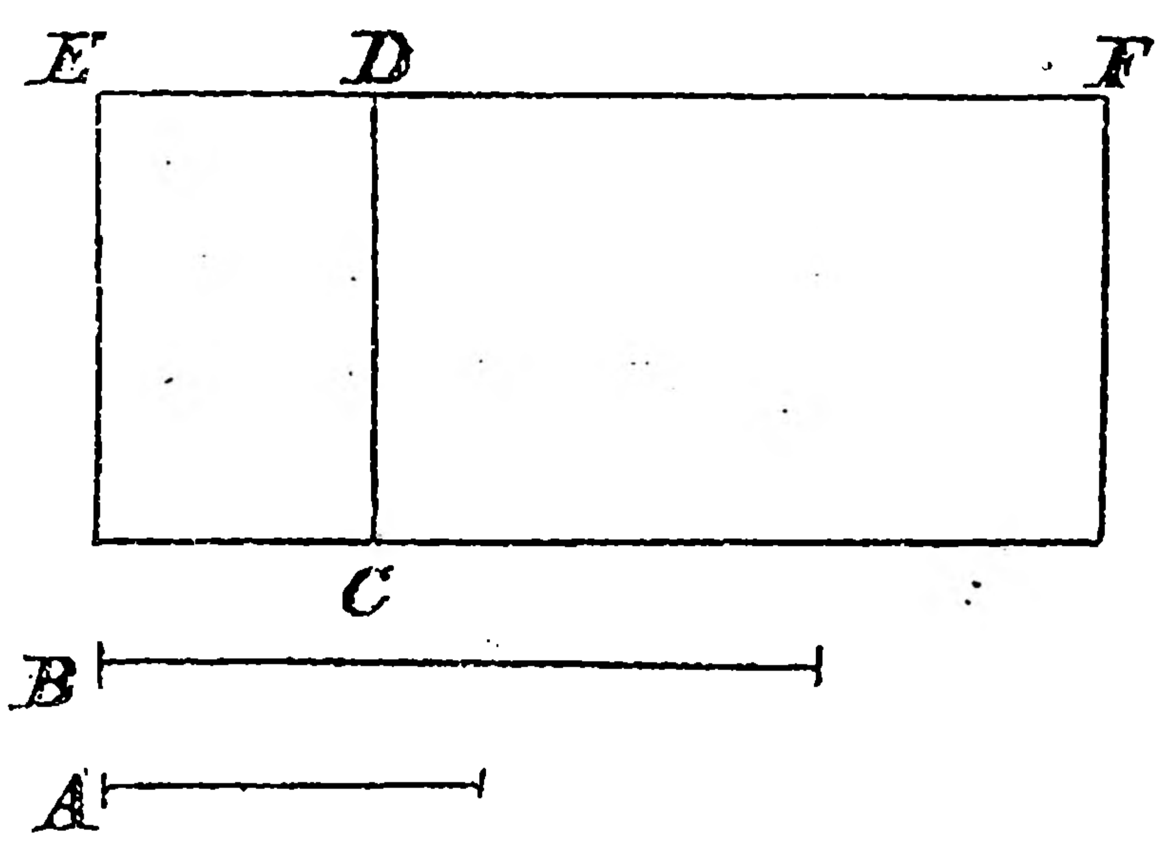
$$\square CD:DC.CB=DC:CB$$

слѣдовательно, CD и CB по длинѣ несоизмѣримы. А потому прямая DC раціональна и съ прямою CB по длинѣ несоизмѣрима.

Предложеніе 24. Каждая прямая B соизмѣримая съ *среднею* прямою A есть сама *средняя* (фиг. 329).

Доказат. Построимъ на раціональной прямой CD прямоугольникъ CE, равный квадрату, построенному на A. Стороны CD и DE, построеннаго прямоугольника, будутъ по длинѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 23).

Фиг. 329.



Построимъ на CD прямоугольникъ CF, равный квадрату, построенному на B и пусть его другая сторона будетъ DF.

По условію A и B соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 9, слѣд.) и квадраты $\square A$, $\square B$ также соизмѣримы. Но $\square A=CE$, $\square B=CF$, слѣдовательно и прямоугольники CE и CF также соизмѣримы. Но (кн. 6, пред. 1):

$$CE:CF=ED:DF$$

слѣдовательно и прямыя ED и DF соизмѣримы (кн. 10, пред. 10). Но ED есть раціональная прямая, по длинѣ несоизмѣримая съ CD, слѣдовательно (кн. 10, пред. 13) прямая DF раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ прямою CD. Откуда видимъ, что прямыя CD и DF раціональны соизмѣримы только въ степени. Но CF есть раціональный прямоугольникъ (кн. 10, пред. 22), а мы имѣемъ $\square B=CD.DF$, слѣдовательно, прямая B ирраціональна (кн. 10, пред. 22) и есть *средняя*.

Слѣдствіе. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что фигура, т. е. ея площадь, соизмѣримая съ площадью средней фигуры, сама есть средняя. Въ самомъ дѣлѣ, прямыя, квадратящія обѣ площади, соизмѣримы только въ степени, и какъ одна изъ нихъ есть средняя, то и другая будетъ также средняя. Что было сказано относительно раціональныхъ линій, то можно сказать и о среднихъ, именно: каждая прямая линія, соизмѣримая съ среднею, есть сама средняя и съ ней и по длинѣ и въ степени вмѣстѣ, или только въ степени соизмѣрима.

Предложеніе 25. Прямоугольникъ AC, имѣющій стороны *среднія*, по длинѣ соизмѣримыя прямыя AB и BC, есть самъ *средній* (фиг. 330).

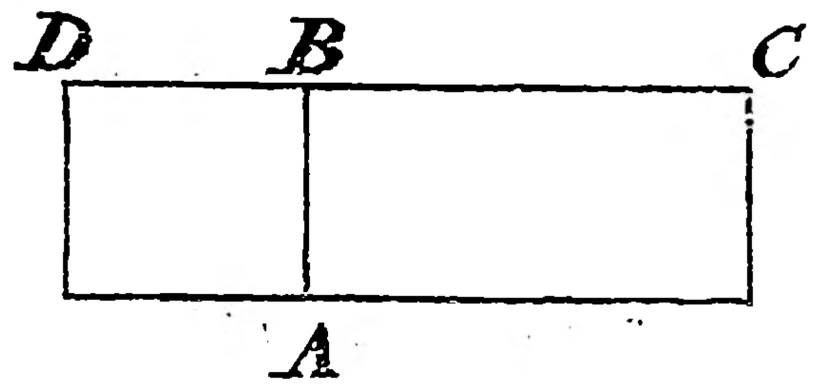
Доказат. Пусть AB и BC будутъ стороны прямоугольника среднія и по длинѣ соизмѣримыя прямыя; я говорю, что прямоугольникъ AC есть *средній*.

Въ самомъ дѣлѣ, построимъ на прямой AB квадратъ AD, который будетъ средній. Такъ какъ AB и BC соизмѣримы, а $AB{=}BD$, то BC и BD также соизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD:BC{=}AD:AC$$

слѣдовательно AD и AC соизмѣримы. Но AD есть средній квадратъ, слѣдовательно и прямоугольникъ AC есть средній (кн. 10, пред. 24).

Фиг. 330.



Предложеніе 26. Прямоугольникъ AC, коего стороны суть *среднія*, только въ степени соизмѣримыя линіи AB и BC, будетъ или *раціональный* или *средній* (фиг. 331).

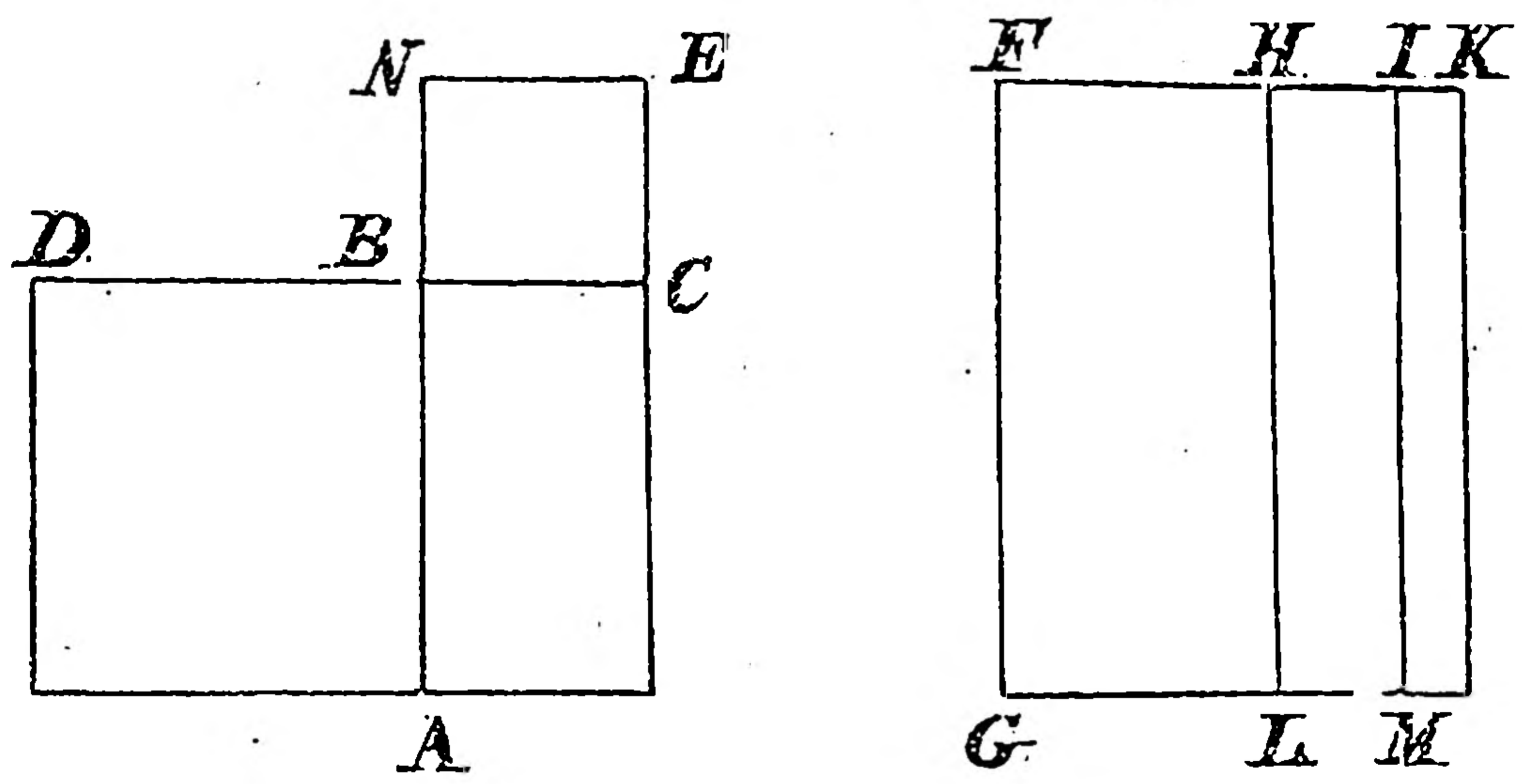
Доказат. Пусть AB и BC будутъ стороны прямоугольника AC. Если онѣ среднія, только въ степени соизмѣримыя, то прямоугольникъ AC будетъ или *раціональный* или *средній*.

Построимъ на AB и BC квадраты AD и BE, эти квадраты будутъ *среднія*. Возьмемъ раціональную прямую FG и построимъ на ней прямоугольникъ GH, равный квадрату AD; пусть его другая сторона будетъ FH.

На сторонѣ HL построимъ прямоугольникъ LI равный прямоугольнику AC и пусть другая его сторона будетъ HI. Наконецъ построимъ на MI прямоугольникъ MK, равный квадрату BE и пусть другая его сторона будетъ

IK. Стороны FH, HI, IK, построенныхъ прямоугольниковъ GH, LI, MK, составляютъ одну прямую линiю (кн. 1, пред. 14).

Фиг. 331.



Такъ какъ квадраты AD и BE суть *среднiе*, то и равные имъ прямоугольники GH и MK суть также *среднiе*, но сторона FG по условiю рацiональна, слѣдовательно FH и IK также рацiональны по длинѣ несоизмѣримыя прямыя съ FG. Но площадь AD соизмѣрима съ площадью BE, слѣдовательно и площадь GH соизмѣрима съ площадью MK. Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$GH:MK=FH:IK$$

то (кн. 10, пред. 10) FH и IK соизмѣримы. Слѣдовательно прямыя FH и IK рацiональны и по длинѣ соизмѣримы, откуда и прямоугольникъ $FH.IK$ рацiональный.

Такъ какъ $BD=AB$ и $BC=BN$, то мы имѣемъ:

$$BD:BC=AB:BN$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$BD:BC=AD:AC \quad \text{и} \quad AB:BN=AC:BE$$

слѣдовательно:

$$AD:AC=AC:BE.$$

Но $AD=GH$, $AC=LI$, $BE=MK$, слѣдовательно:

$$GH:LI=LI:MK \quad \text{и} \quad FH:HI=HI:IK$$

откуда (кн. 6, пред. 17):

$$\square HI=FH.IK.$$

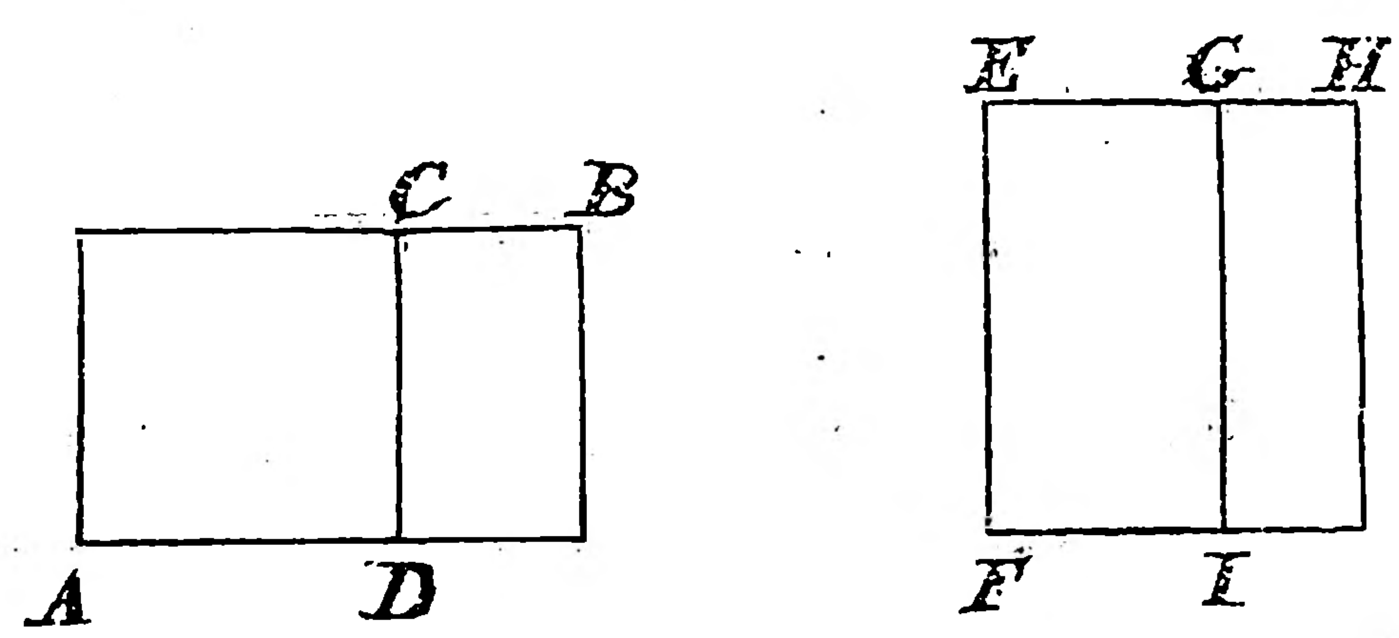
Мы выше показали, что прямоугольникъ $FH.IK$ рацiональный, слѣдовательно и $\square HI$ рацiональный, а слѣдовательно его сторона HI рацiональна.

Если HI соизмѣрима съ HL, т. е. если HI соизмѣрима съ FG, то прямоугольникъ LI будетъ раціональный; если же HI и $FG=HL$ несоизмѣримы, то прямыя HI и HL суть раціональныя, только въ степени соизмѣримыя линіи, слѣдовательно прямоугольникъ LI (кн. 10, пред. 22) будетъ *средній*. Откуда видимъ, что прямоугольникъ $AC=LI$ есть или *раціональный* или *средній*.

Предложеніе 27. Избытокъ средняго прямоугольника AB надъ среднимъ прямоугольникомъ AC не можетъ быть раціональною площадью (фиг. 332).

Доказат. Положимъ, что это возможно и пусть избытокъ DB будетъ раціональная площадь. Возьмемъ раціональную прямую EF и построимъ на ней прямоугольникъ FH равный прямоугольнику AB, пусть его другая сторона будетъ EH. Отъ FH отымемъ прямоугольникъ $FG=AC$, то $BD=IH$. Но мы допустили, что BD есть раціональный прямоугольникъ, слѣдовательно и прямоугольникъ IH будетъ также раціональный.

Фиг. 332.



Такъ какъ, по условію, прямоугольники AB и AC суть средніе, то и равные имъ прямоугольники FH и FG суть также средніе. Но сторона EF есть раціональная прямая, слѣдовательно и стороны EH и EG суть раціональныя прямыя (кн. 10, пред. 23), по длинѣ несоизмѣримыя съ EF. Но $IH=BD$ и одна изъ сторонъ $IG=EF$ раціональна, слѣдовательно и другая сторона GH раціональна (кн. 10, пред. 21) по длинѣ несоизмѣримая съ EF. Откуда видимъ, что стороны EG и GH несоизмѣримы, потому что несоизмѣримы прямыя EG и EF (кн. 10, пред. 13). Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$EG : GH = \square EG : EG \, . \, GH$$

откуда видимъ (кн. 10, пред. 10), что $\square EG$ и прямоугольникъ $EG \, . \, GH$ несоизмѣримы. Такъ какъ $\square EG$ и $\square GH$ раціональны, то $\square EG$ соизмѣримъ съ $\square EG + \square GH$ и прямоугольникъ $EG \, . \, GH$ соизмѣримъ съ $2(EG \, . \, GH)$, слѣдовательно (кн. 10, пред. 17):

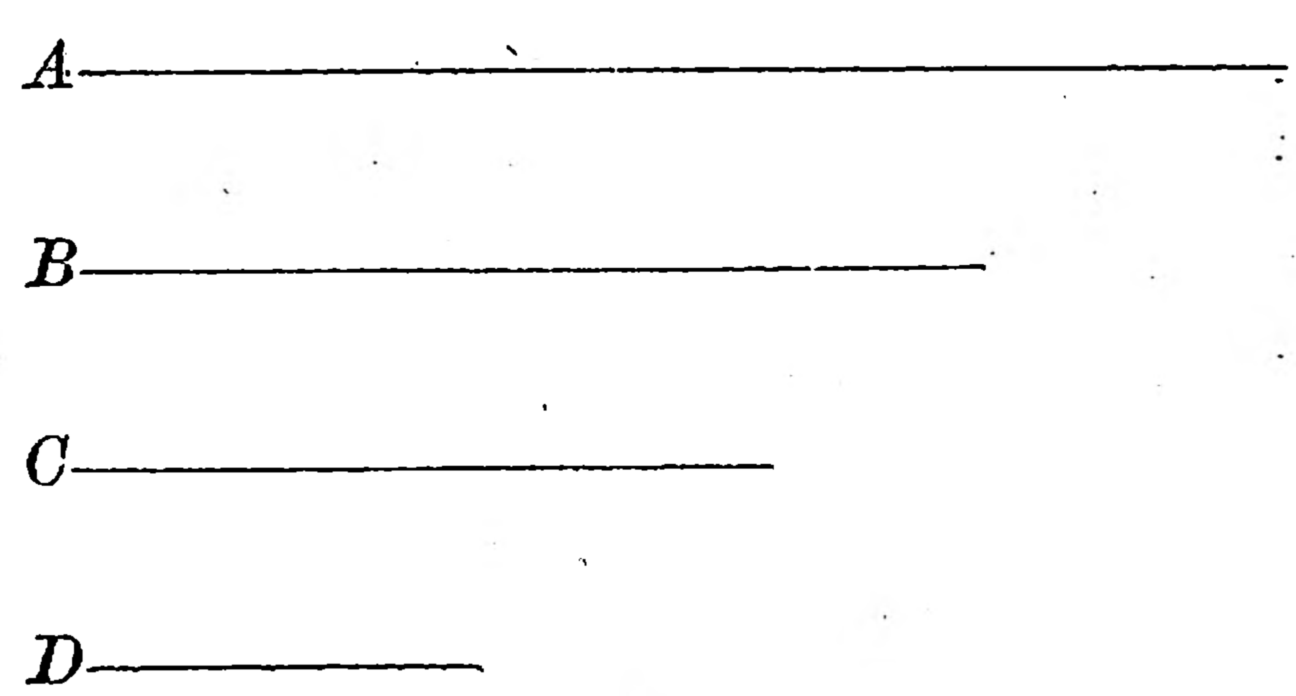
$$\square EG + \square GH \text{ несоизмѣр. съ } 2(EG \, . \, GH)$$

а слѣдовательно $\square EG+\square GH$ несоизмѣримъ съ $\square EG+\square GH+2(EG.GH)=$ $=\square EH$ (кн. 2, пред. 4). Итакъ площадь $\square EG+\square GH$ несоизмѣрима съ площадью $\square EH$. Но площадь $\square EG+\square GH$ раціональна, слѣдовательно квадратъ $\square EH$ и его сторона EH ирраціональны; мы выше показали, что EH раціональна, а теперь, что она ирраціональна, слѣдовательно наше положеніе, что избытокъ DB есть раціональная площадь, невозможно.

Предложеніе 28. Найти двѣ среднія прямыя, соизмѣримыя только въ степени, которыя бы были сторонами раціональнаго прямоугольника (фиг. 333)?

Рѣшеніе. Пусть A и B будутъ двѣ раціональныя только въ степени соизмѣримыя линіи. Построимъ прямую C средне-пропорціональную между A и B (кн. 6, пред. 13) и прямую D четвертую пропорціональную къ тремъ прямымъ A, B, C (кн. 6, пред. 12). Такъ какъ прямыя C и D суть среднія, только въ степени соизмѣримыя, то $C.D$ будетъ раціональный прямоугольникъ.

Фиг. 333.



Такъ какъ прямыя A и B суть раціональныя соизмѣримыя только въ степени, то прямоугольникъ $A.B=\square C$ будетъ средній, а также и прямая C. По построенію мы имѣемъ:

$$A:B=C:D$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямыя C и D соизмѣримы только въ степени, но прямая C есть *средняя*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 24) и D есть *средняя*. Итакъ прямыя C и D суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя.

Изъ пропорціи $A:B=C:D$ мы имѣемъ $A:C=B:D$, но $A:C=C:B$, слѣдовательно:

$$C:B=B:D,$$

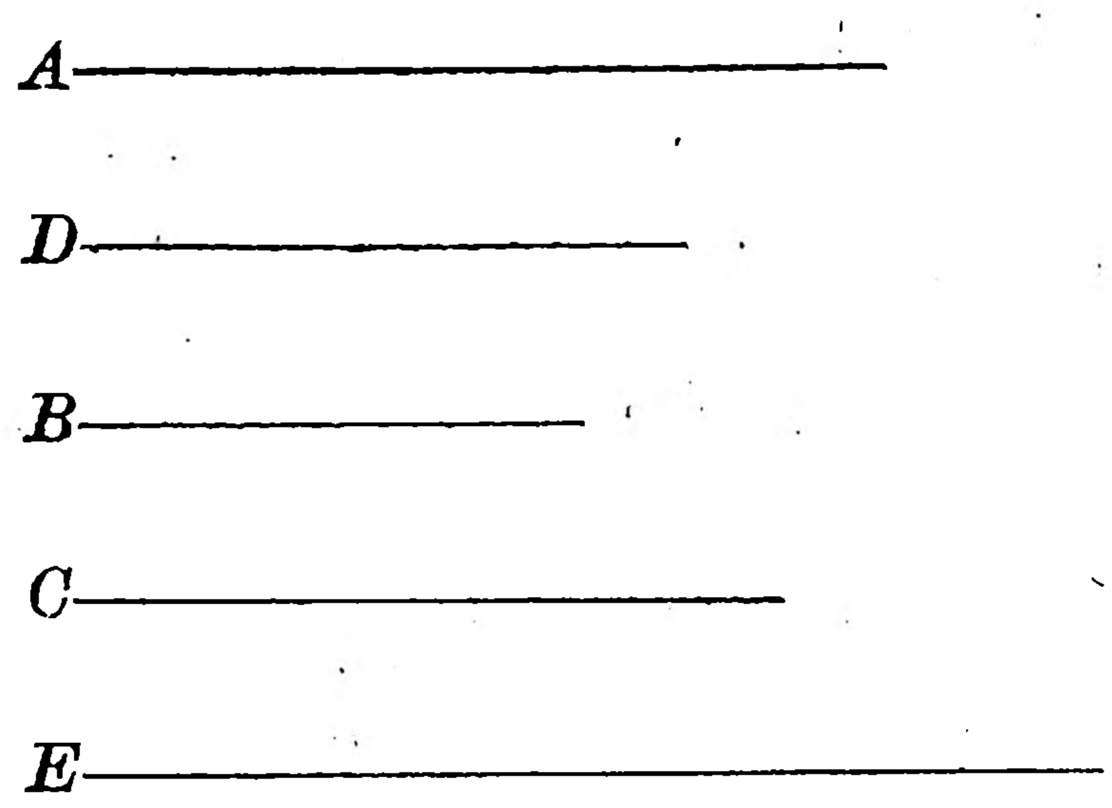
откуда (кн. 6, пред. 17):

$$\square B=C.D.$$

Но $\square B$ есть раціональный квадратъ, слѣдовательно и прямоугольникъ $C.D$ есть также раціональный.

Предложеніе 29. Найти двѣ *среднія* прямыя, соизмѣримыя только въ степени, которыя были бы сторонами *средняго* прямоугольника (фиг. 334)?

Фиг. 334.



Рѣшеніе. Возьмемъ три прямыя, только въ степени соизмѣримыя линіи, A, B, C. Построимъ средне-пропорціональную прямую D между A и B (кн. 6, пред. 13) и четвертую пропорціональную E къ тремъ прямымъ B, C и D (кн. 6, пред. 12). Такъ какъ D и E суть среднія, только въ степени соизмѣримыя, прямыя (кн. 10, пред. 25), то прямоугольникъ $D.E$ есть средній.

Такъ какъ A и B суть прямыя раціональныя, только въ степени соизмѣримыя, то (кн. 10, пред. 22) $A.B=\square D$ есть средній квадратъ. Такъ какъ прямыя B и C соизмѣримы только въ степени и мы имѣемъ:

$$B:C=D:E \tag{a}$$

то D и E соизмѣримы только въ степени (кн. 10, пред. 10). Но D есть средняя прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 24) и прямая E есть также средняя.

Изъ пропорціи (а) мы имѣемъ:

$$B:D=C:E$$

но мы еще имѣемъ:

$$B:D=D:A$$

слѣдовательно:

$$D:A=C:E$$

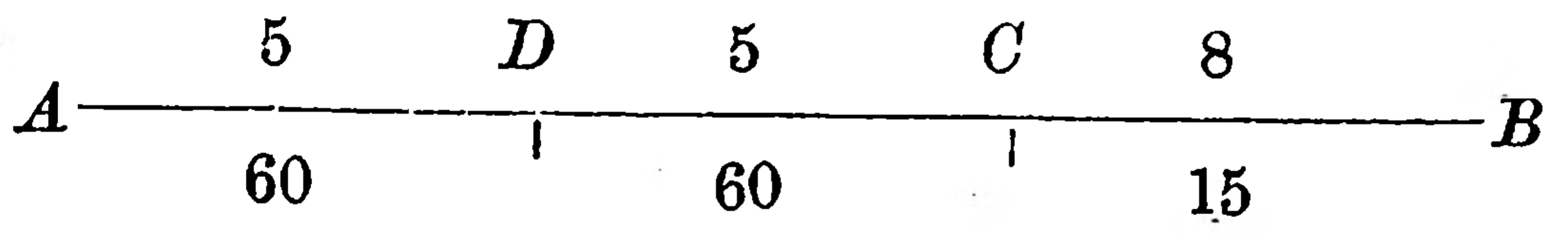
откуда (кн. 6, пред. 16) $A.C=D.E$. Но $A.C$ есть средній прямоугольникъ, слѣдовательно и $D.E$ есть также *средній* (кн. 10, пред. 22).

Слѣдствіе 1. Найти два квадратныхъ числа, которыхъ бы сумма была число квадратное (фиг. 335)?

Рѣшеніе. Возьмемъ два подобныя площадныя числа AB и BC (кн. 10, примѣч. 4) или два квадратныя. Мы видѣли, что произведеніе $AB.BC$ такихъ чиселъ есть число квадратное (кн. 10, примѣч. 4):

Пусть два взятыя числа AB и BC будутъ оба четныя или оба не-

Фиг. 335.



четныя. Ихъ разность AC въ обоихъ случаяхъ будетъ четная. Раздѣлимъ эту разность въ точкѣ D пополамъ, то мы будемъ имѣть (кн. 2, пред. 6):

$$AB.BC+\square CD=\square BD$$

слѣдовательно квадраты искомыхъ чиселъ суть $AB.BC$ и $\square CD$.

Примѣръ. $AB=18$, $BC=8$, эти числа подобны, такъ какъ мы имѣемъ:

$$AB=18=3.6 \qquad BC=8=2.4$$

и

$$3:6=2:4$$

слѣдовательно:

$$AB.BC=144, \quad CD=5$$

и

$$144+25=169, \quad 12^2+5^2=13^2.$$

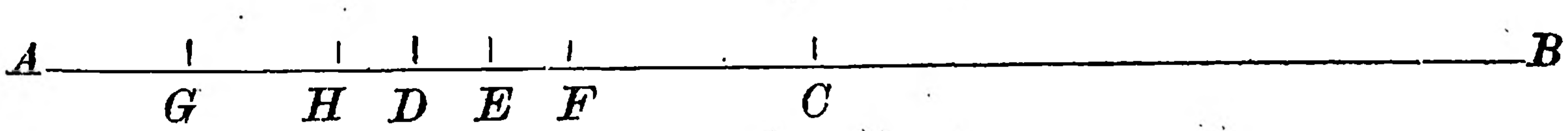
Изъ этого видно, что можно найти два числа BD^2 и CD^2, коихъ разность $AB.BC$ есть число квадратное.

Слѣдствіе 2. Найти два квадратныя числа коихъ сумма не есть число квадратное (фиг. 336)?

Рѣшеніе. Возьмемъ всѣ данныя предъидущаго слѣдствія, то мы будемъ имѣть, какъ выше:

$$AB.BC+\square CD=\square BD.$$

Фиг. 336.



Если отъ CD отымемъ единицу DE, то получимъ:

$$AB.BC+\square CE<\square BD$$

я говорю, что $AB.BC+\square CE$ не есть число квадратное.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы $AB.BC+\square CE$ было число квадратное, то сторона квадрата, выражаемаго этимъ числомъ, была бы или больше, или равна, или меньше числа BE, непосредственно меньшаго числа BD. Я говорю, что не одно изъ этихъ положеній не можетъ имѣть мѣста.

1. Не можетъ имѣть мѣста положеніе:

$$AB \,.\, BC + \square CE > \square BE$$

такъ какъ ближайшее большее отъ $\square BE$ число $\square BD$ больше предъидущей суммы.

2. Невозможно также и положеніе:

$$AB \,.\, BC + \square CE = \square BE.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $GA = 2DE$, $AC = 2DC$, $GC = 2CE$, т. е. GC въ точкѣ E дѣлится пополамъ, слѣдовательно (кн. 2, пред. 6):

$$GB \,.\, BC + \square CE = \square BE$$

но по положенію мы имѣемъ:

$$AB \,.\, BC + \square CE = \square BE$$

слѣдовательно $GB = AB$, что невозможно.

3. Наконецъ невозможно и положеніе:

$$AB \,.\, BC + \square CE < \square BE.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ $AH = 2DF$, $CH = 2CF$, слѣдовательно HC въ точкѣ F дѣлится пополамъ, откуда (кн. 2, пред. 6):

$$BH \,.\, BC + \square CF = \square BF.$$

Но какъ $\square BF$ есть ближайшее меньшее отъ $\square BE$ квадратное число, то:

$$AB \,.\, BC + \square CE = \square BF$$

откуда:

$$HB \,.\, BC + \square CF = AB \,.\, BC + \square CE$$

а это невозможно.

Итакъ $AB \,.\, BC + \square CE$ квадратнымъ числомъ быть не можетъ; слѣдовательно всегда возможно найти два квадратныхъ числа, коихъ сумма не есть число квадратное.

Предложеніе 30. Найти двѣ раціональныя, соизмѣримыя только въ степени, прямыя линіи, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большей (фиг. 337)?

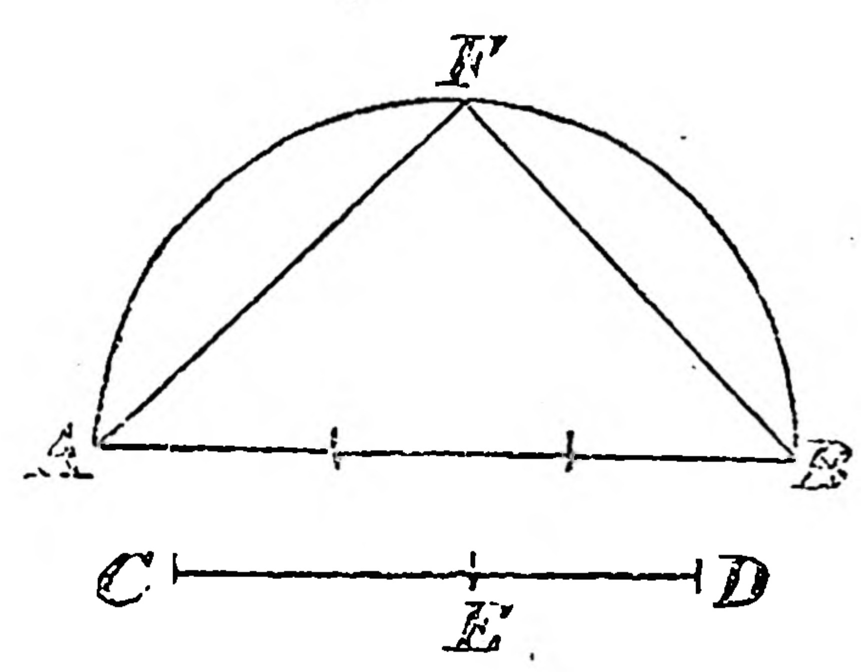
Рѣшеніе. Пусть AB будетъ, какая нибудь раціональная линія, а CD и DE два квадратныя числа (кн. 10, пред. 29, слѣд.), коихъ разность CE не есть число квадратное. На AB какъ на діаметрѣ опишемъ полукругъ AFB и сдѣлаемъ (кн. 10, пред. 6):

$$DC:CE = \square AB : \square AF$$

впишемъ въ полукругъ хорду AF и соединимъ точку F съ B. Я говорю, что искомыя раціональныя прямыя суть AB и AF, а FB есть прямая по длинѣ соизмѣримая съ AB и коей квадратъ есть разность квадратовъ построенныхъ на AB и AF, т. е. AB квадратитъ надъ AF:

$$\square AB - \square AF = \square BF.$$

Фиг. 337.



Такъ какъ:

$$\square AB : \square AF = DC : CE$$

а CD и CE не суть оба квадратныя числа, то (кн. 10, пред. 6) $\square AB$ и $\square AF$ соизмѣримы, а такъ какъ $\square AB$ раціональный, то $\square BF$, а слѣдовательно и линія AF также раціональна; слѣдовательно AB и AF несоизмѣримы по длинѣ (кн. 10, пред. 9). Слѣдовательно прямыя AB и AF суть раціональныя соизмѣримыя только въ степени.

Изъ пропорціи:

$$DC:CE = \square AB : \square AF$$

слѣдуетъ (кн. 5, пред. 19, и кн. 1, пред. 47):

$$CD:DE = \square AB : \square BF$$

но CD и DE суть числа квадратныя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 9), прямыя AB и BF соизмѣримы по длинѣ. Но мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB = \square AF + \square BF$$

откуда:

$$\square AB - \square AF = \square BF$$

что и требовалось доказать.

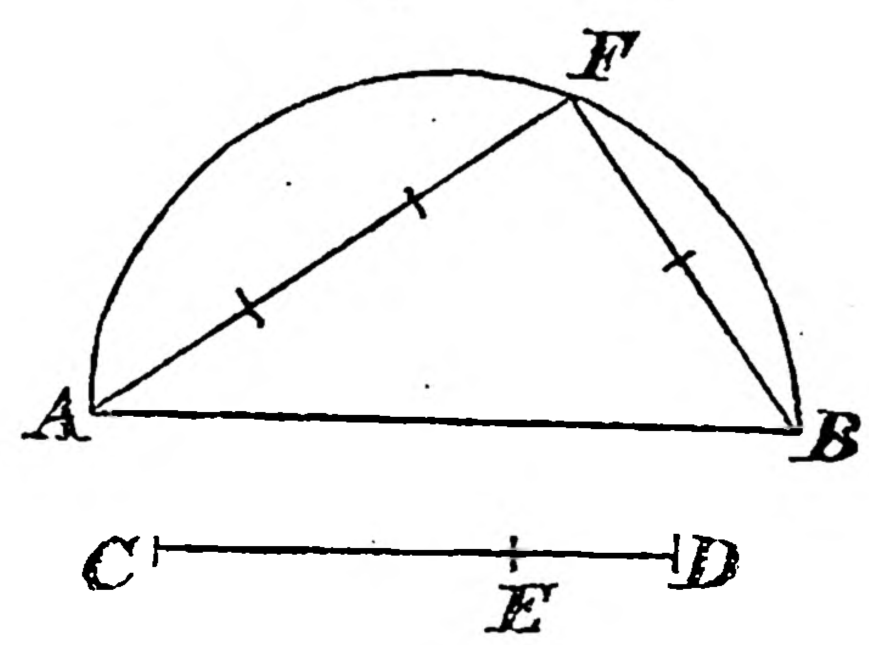
Предложеніе 31. Найти двѣ раціональныя прямыя соизмѣримыя только въ степени, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большей (фиг. 338)?

Рѣшеніе. Пусть AB будетъ, какая нибудь раціональная линія, а CE и ED два квадратныя числа (кн. 10, пред. 29, слѣд. 2), коихъ сумма не есть число квадратное. На AB какъ на діаметрѣ опишемъ полукругъ AFB (кн. 10, пред. 6, слѣд.) и сдѣлаемъ:

$$DC:CE=\square AB:\square AF.$$

Впишемъ въ полукругъ хорду AF и точку F соединимъ съ точкою B. Я говорю, что искомыя раціональныя прямыя суть AB и AF, и FB по длинѣ несоизмѣрима съ AB.

Фиг. 338.



Легко видѣть, какъ выше, что AB и AF суть раціональныя только въ степени соизмѣримыя линіи. Но мы имѣемъ:

$$DC:CE=\square AB:\square AF$$

и (кн. 5, пред. 19 и кн. 1, пред. 47):

$$CD:DE=\square AB:\square BF$$

такъ какъ CD и DE не суть оба числа квадратныя, то AB и BF несоизмѣримы (кн. 10, пред. 9). Но мы имѣемъ:

$$\square AB-\square AF=\square BF$$

слѣдовательно AB и AF суть искомыя прямыя.

Слѣдствіе. Большая изъ двухъ прямыхъ линій AB и BC относится къ меньшей, какъ прямоугольникъ содержащійся между обѣими къ квадрату построенному на меньшей (фиг. 339).

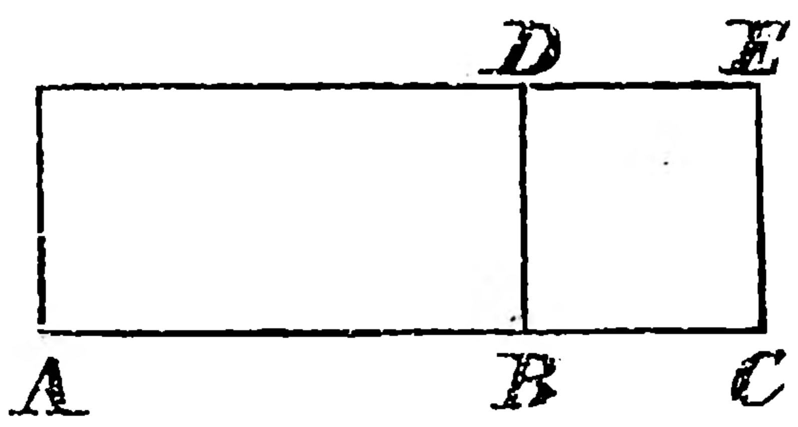
Доказат. На прямой BC построимъ квадратъ BE и дополнимъ его до прямоугольника AD, то (кн. 6, пред. 1):

$$AB:BC=AD:BE$$

Но $AD = AB . BD = AB . BC$, такъ какъ $BD = BC$; слѣдовательно:

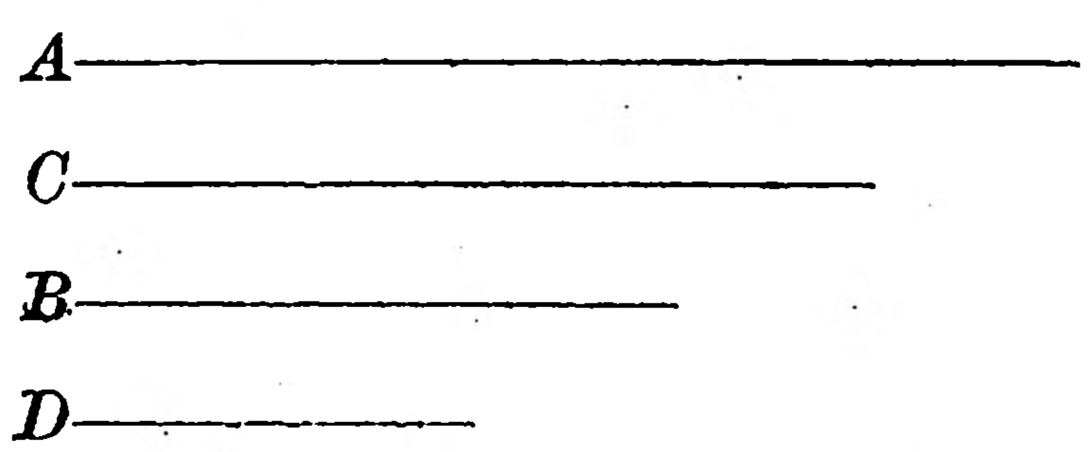
$$AB : BC = AB . BC : \square BC.$$

Фиг. 339.



Предложенiе 32. Найти двѣ среднiя прямыя соизмѣримыя только въ степени, которыя были-бы сторонами рацiональнаго прямоугольника и при томъ такъ, чтобы большая изъ искомыхъ прямыхъ квадратила надъ меньшею на квадратъ, коего сторона соизмѣрима по длинѣ съ большею (фиг. 340)?

Фиг. 340.



Рѣшенiе. Пусть A и B будутъ двѣ рацiональныя прямыя соизмѣримыя только въ степени (кн. 10, пред. 30), изъ коихъ большая A квадратитъ надъ меньшею B на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ A. Построимъ прямыя C и D по слѣдующимъ условiямъ (кн. 6, пред. 12, 13):

$$A : C = C : B, \quad C : B = B : D$$

откуда:

$$\square C = A . B, \qquad \square B = C . D$$

я говорю, что C и D суть искомыя прямыя.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $A . B$ есть *среднiй* прямоугольникъ (кн. 10, пред. 22), то и $\square C$ есть также *среднiй,* а слѣдоватально и прямая C есть *средняя.*

Такъ какъ $\square B = C . D$ и $\square B$ есть рацiональный, слѣдовательно и прямоугольникъ $C . D$ есть также рацiональный.

Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 31, слѣд.).

$$A : B = A . B : \square B$$

и

$$A . B = \square C, \qquad C . D = \square B$$

то:

$$A : B = \square C : C . D$$

но кромѣ этого мы еще имѣемъ (кн. 10, пред. 31, слѣд.):

$$C:D=\square C:C.D$$

откуда:

$$A:B=C:D.$$

Изъ этой пропорціи (кн. 10, пред. 10) видимъ, что C и D суть прямыя соизмѣримыя только въ степени. Но C есть *средняя*, слѣдовательно и D есть также *средняя* (кн. 10, пред. 24).

Изъ пропорціи:

$$A:B=C:D$$

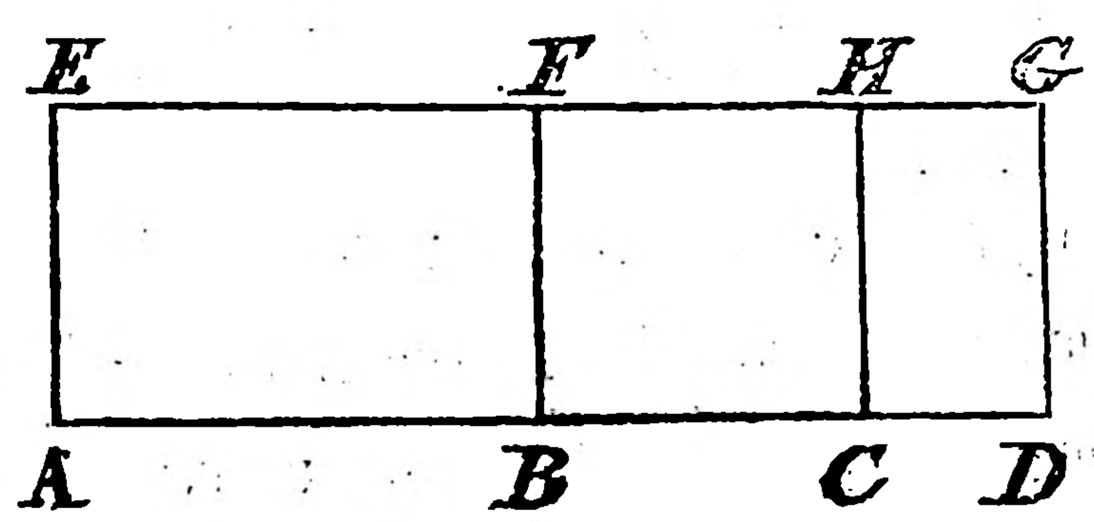
слѣдуетъ также (кн. 10, пред. 15), что C квадратитъ надъ D на квадратъ, коего сторона соизмѣрима по длинѣ съ C, ибо тоже имѣетъ мѣсто для прямыхъ A и B.

Замѣчаніе. Точно также мы найдемъ эти линіи, если большая должна квадратить надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большею, если прямыя A и B будутъ такъ взяты, что A квадратитъ надъ B на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ A.

Лемма. Изъ трехъ прямыхъ AB, BC, CD всегда первая такъ относится къ третьей, какъ прямоугольникъ, содержащійся между первою и второю, къ прямоугольнику, содержащемуся между второю и третьею (фиг. 341).

Доказат. Изъ точки A къ прямой AB возставимъ перпендикуляръ AE, сдѣлаемъ $AE=BC$ и чрезъ точку E проведемъ параллельную EG къ прямой AD; чрезъ точки B, C и D проведемъ линіи BF, CH и DG параллельныя AE.

Фиг. 341.



Такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB:BC=AF:BH \quad \text{и} \quad BC:CD=BH:CG$$

то:

$$AB:CD=AF:CG.$$

Но $AF=AB.BC$ и $CG=CD.BC$, потому что:

$$AE=BC,\ CH=AE=BC$$

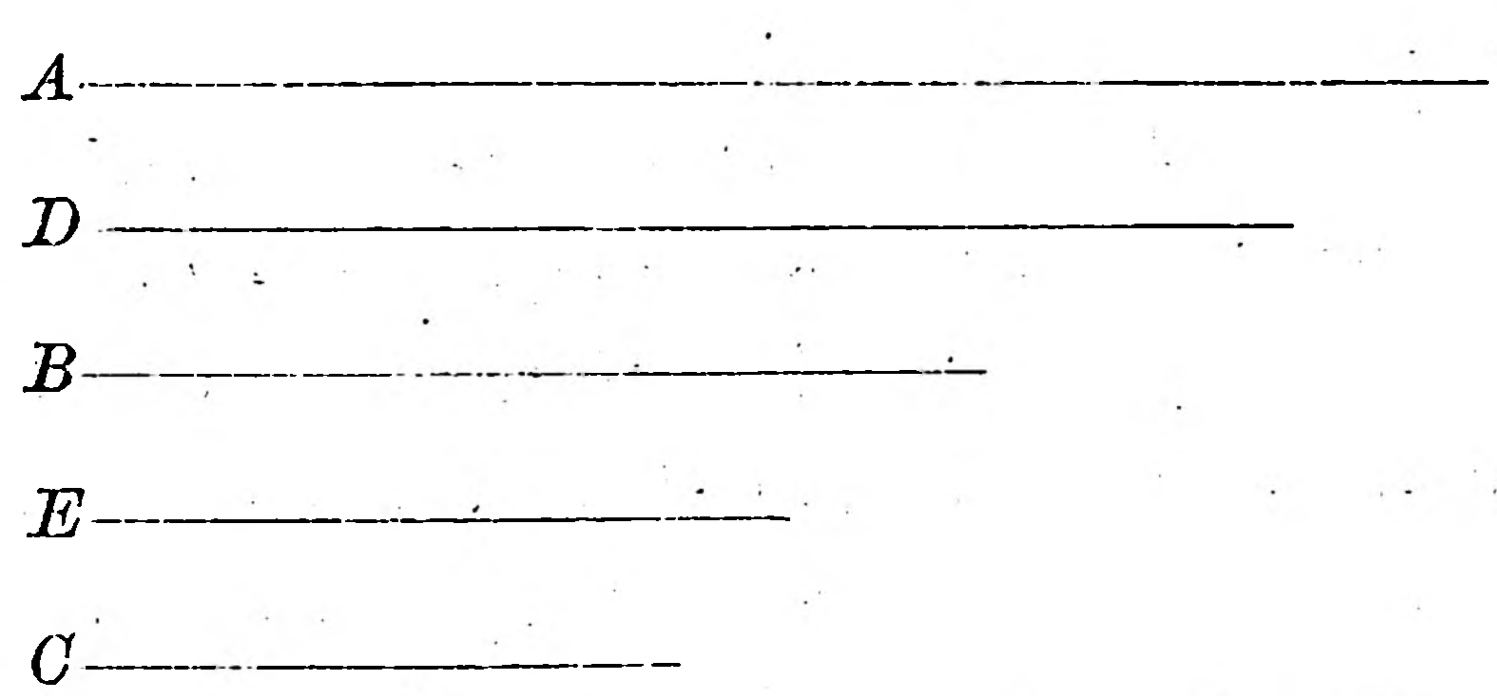
слѣдовательно:

$$AB:CD = AB.BC:BC.CD$$

Предложеніе 33. Найти двѣ *средніе* только въ степени соизмѣримыя прямыя, которыя были бы сторонами *средняго* прямоугольника и изъ коихъ большая квадратила бы надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большею (фиг. 342)?

Рѣшеніе. Пусть A, B, C будутъ три раціональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя (кн. 10, пред. 30), изъ коихъ A квадратитъ надъ C на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ A.

Фиг. 342.



Построимъ D и E такъ (кн. 6, пред. 13 и 12), чтобы:

$$A:D = D:B, \quad D:B = C:E$$

слѣдовательно:

$$\square D = A.B, \quad B.C = D.E.$$

Я говорю, что D и E суть искомыя прямыя.

Въ самомъ дѣлѣ, (кн. 10, пред. 22), такъ какъ $A.B$ есть *средняя* площадь, то и $\square D$ есть также *средній*, слѣдовательно и прямая D есть *средняя*. Но мы имѣемъ:

$$A.B:B.C = A:C$$

и

$$A.B = \square D, \quad B.C = D.E$$

слѣдовательно:

$$A:C = \square D:D.E$$

но (кн. 10, пред. 31):

$$\square D:D.E = D:E$$

слѣдовательно:

$$A:C = D:E.$$

Такъ какъ, по условію, прямыя A и C соизмѣримы только въ степени, то (кн. 10, пред. 10) и прямыя D и E соизмѣримы только въ степени. Но D есть *средняя* прямая, слѣдовательно и E есть также *средняя* (кн. 10, пред. 24). Итакъ прямыя D и E суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя. Далѣе, такъ какъ:

$$B.C=D.E$$

а $B.C$ есть средній прямоугольникъ, то (кн. 10, пред. 22) и $D.E$ есть также *средній*.

Изъ пропорціи:

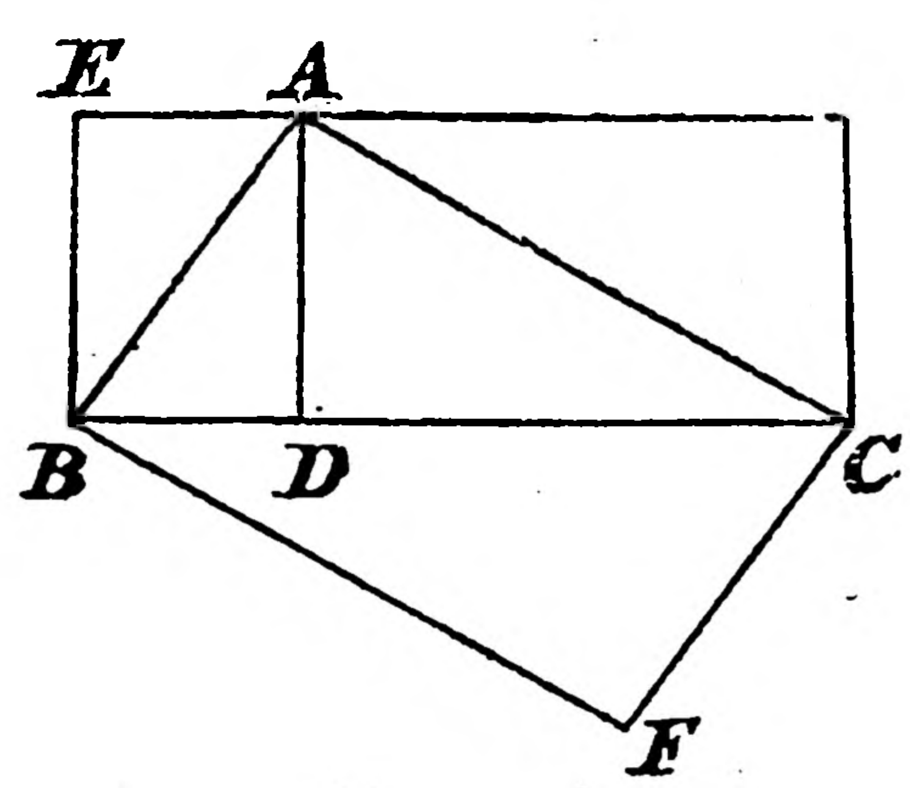
$$A:C=D:E$$

также слѣдуетъ (кн. 10, пред. 15), что D квадратитъ надъ E на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ D, ибо это же имѣетъ мѣсто по условію для A и C.

Замѣчаніе. Также точно найдемъ прямыя линіи, если большая должна квадратить надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большею, взявъ A и B такъ, чтобы A квадратила надъ B на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ A.

Лемма 1. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ BAC (фиг. 343) опустимъ изъ вершины прямаго угла A перпендикуляръ AD на гипотенузу BC, то:

Фиг. 343.



1. Мы имѣемъ:

$$CB.BD=\square AB$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8, слѣд.) мы имѣемъ:

$$BC:BA=BA:BD.$$

2. Мы имѣемъ еще:

$$BC.CD=\square AC$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$BC:CA=CA:CD.$$

3. Мы имѣемъ:

$$BD . DC = \square AD$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$BD : AD = AD : DC.$$

4. И наконецъ мы имѣемъ:

$$BC . AD = BA . AC$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$BC : AC = AB : AD.$$

Или, если построимъ прямоугольники CE и AF, то каждый изъ нихъ $=2\triangle BAC$, слѣдовательно $CE=AF$, т. е.:

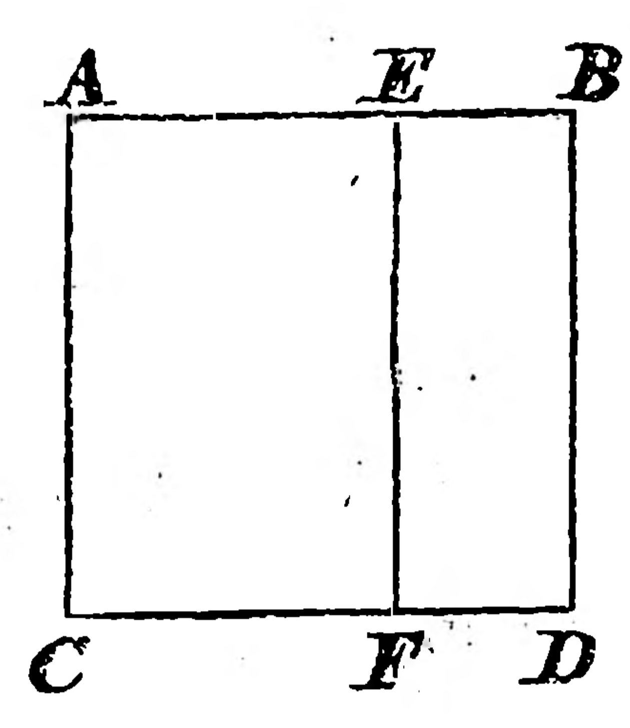
$$BC . AD = AB . AC$$

Лемма 2. Если прямую линію AB, въ точкѣ E раздѣлимъ на двѣ неравныя части AE и EB, то большая AE такъ относится къ меньшей EB, какъ прямоугольники, содержащіеся между цѣлою AB и меньшимъ отрѣзкомъ EB (фиг. 344).

Доказат. На данной прямой AB построимъ квадратъ AD и чрезъ точку E проведемъ $EF \parallel AC$, то (кн. 6, пред. 1):

$$AE : EB = AF : FB$$

Фиг. 344.



Но $AF = AB . AE$, $FB = AB . BE$, такъ какъ $AB = AC = BD$. Слѣдовательно:

$$AE : EB = AB . AE : AB . BE$$

Лемма 3. Если изъ двухъ неравныхъ прямыхъ AB и BC, меньшую BC, въ точкѣ D, раздѣлимъ пополамъ, то прямоугольникъ, содержащійся между AB и BC равенъ двойному прямоугольнику, содержащемуся между большею AB и половиною меньшей BC (фиг. 345).

Доказат. Изъ точки B возставимъ перпендикуляръ $BE=AB$ къ прямой AC и построимъ прямоугольникъ BG.

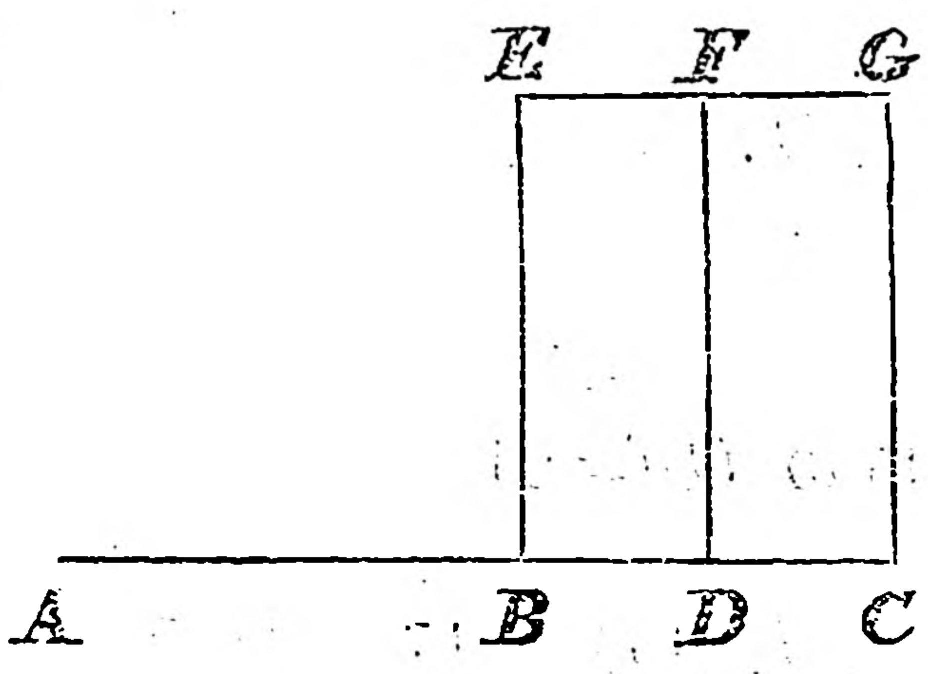
Такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$DB:DC=BF:DG$$

то:

$$BC:DC=BG:DG$$

Фиг. 345.



откуда, замѣчая, что $BC=2DC$ имѣемъ, $BG=2DG$.

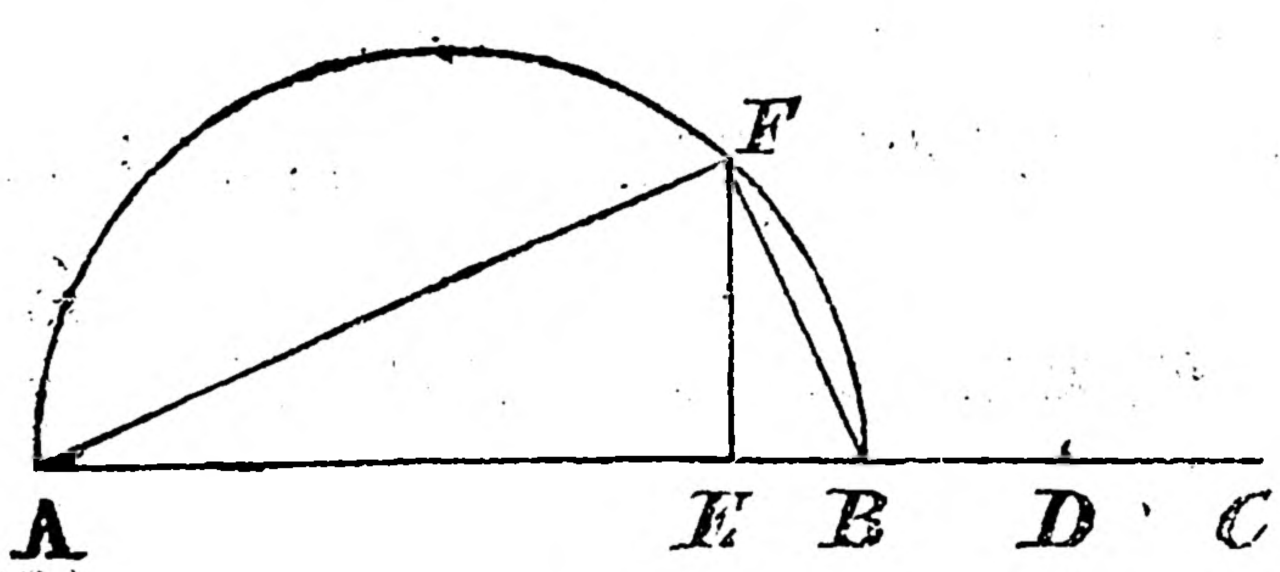
Но $BG=AB.BC$, $DG=AB.BD$, потому что $AB=BE$ и $BD=DC$, слѣдовательно:

$$AB.BC=2(AB.BD).$$

Предложеніе 34. Найти двѣ прямыя соизмѣримыя только въ степени, которыя бы были сторонами средняго прямоугольника и коихъ вмѣстѣ взятые квадраты составляли бы раціональную площадь (фиг. 346)?

Рѣшеніе. Пусть AB и BC будутъ раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя (кн. 10, пред. 31), изъ коихъ AB квадратитъ надъ BC на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ AB. Раздѣлимъ прямую BC въ точкѣ D пополамъ и на AB (кн. 6, пред. 28) построимъ прямоугольникъ $AE.EB$ равный четвертой части $\square BC$, т. е. $\square BD$ и коего дополненіе есть квадратъ. На AB, какъ на діаметрѣ опишемъ полукругъ AFB. Изъ точки E возставимъ перпендикуляръ EF и проведемъ прямыя AF и FB. Я говорю, что AF и FB будутъ искомыя прямыя.

Фиг. 346.



Въ самомъ дѣлѣ, по построенію (кн. 10, пред. 19) AE несоизмѣрима съ EB. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AE:EB=BA.AE:BA.BE$$

по (кн. 10, пред. 33) $AB.AE=\square AF$ и $BA.EB=\square FB$, слѣдовательно:

$$AE:EB=\square AF:\square FB$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) $\square AF$ и $\square FB$, а также AF и FB въ степени несоизмѣримы.

Такъ какъ AB есть раціональная прямая, то $\square AB$ есть раціональная площадь, но (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB=\square AF+\square FB$$

слѣдовательно и $\square AF+\square FB$ есть раціональная площадь.

Далѣе, (кн. 10, пред. 33, лемма 1) $AE.EB=\square EF$, а по построенію $AE.EB=\square BD$, слѣдовательно $EF=BD$ и $BC=2EF$, откуда (кн. 6, пред. 1) $AB.BC=2(AB.EF)$, но (кн. 10, пред. 22) $AB.BC$ есть *средній* прямоугольникъ, слѣдовательно и $AB.EF$ есть также *средній*; но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 33):

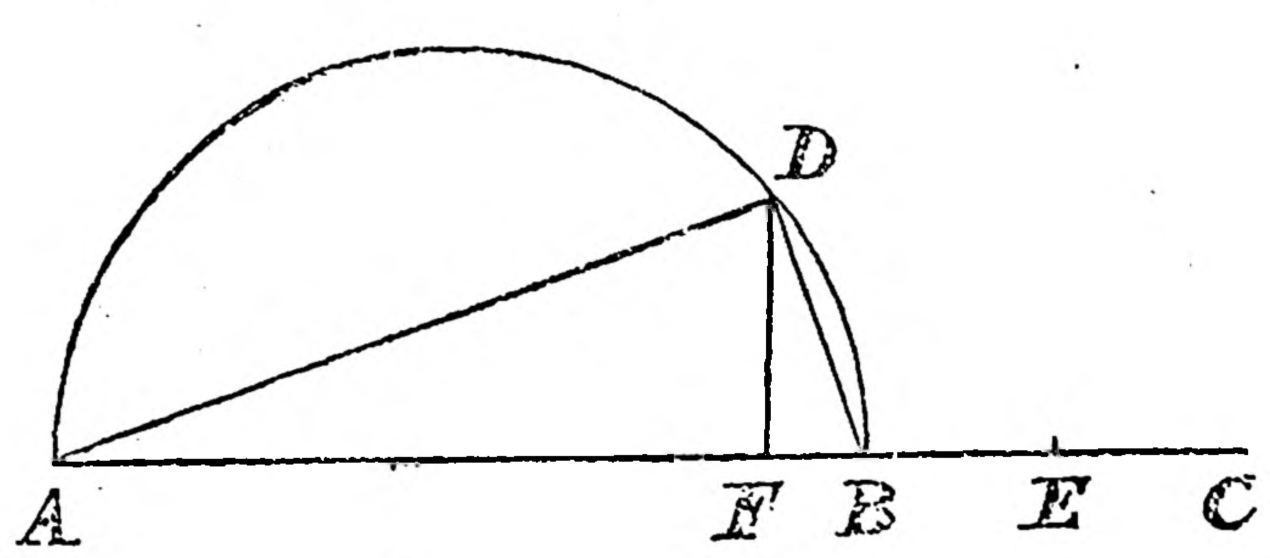
$$AB.EF=AF.FB$$

слѣдовательно и прямоугольникъ $AF.FB$ есть *средній*.

Предложеніе 35. Найти двѣ прямыя линіи, несоизмѣримыя въ степени, которыя были бы сторонами раціональнаго прямоугольника и коихъ сумма квадратовъ была-бы *средняя* площадь (фиг. 347)?

Рѣшеніе. Пусть AB и BC будутъ двѣ среднія прямыя (кн. 10, пред. 32) соизмѣримыя только въ степени, содержащія раціональный прямоугольникъ и изъ коихъ AB квадратитъ надъ BC на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ AB. Раздѣлимъ прямую BC, въ точкѣ E, пополамъ, и на AB построимъ (кн. 6, пред. 28) прямоугольникъ $AF.FB$, равный квадрату $\square BC$, коего дополненіе есть квадратъ. На AB, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ ADB, изъ точки F возставимъ перпендикуляръ FD и проведемъ хорды AD и DB. Я говорю, что AD и DB суть искомыя прямыя.

Фиг. 347.



Въ самомъ дѣлѣ, по построенію (кн. 10, пред. 19) прямая AF несоизмѣрима съ FB, слѣдовательно (кн. 6, пред. 1, и кн. 10, пред. 10):

$$AB\,.\,AF \text{ несоизмѣримъ съ } AB\,.\,BF$$

Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 33, лемма 1):

$$AB\,.\,AF = \square AD \quad \text{и} \quad AB\,.\,BF = \square BD$$

слѣдовательно и $\square AD$ несоизмѣримъ съ $\square BD$, откуда и прямыя AD и BD несоизмѣримы.

Такъ какъ $\square AB$ есть *средній* квадратъ, а мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB = \square AD + \square DB$$

поэтому и $\square AD + \square DB$ есть *средняя* площадь; слѣдовательно, квадраты, построенные на прямыхъ AD и DB составляютъ *среднюю* площадь.

Далѣе, по построенію, мы имѣемъ $AF\,.\,FB = \square BE$ и (кн. 10, пред. 33) $AF\,.\,FB = \square DF$, слѣдовательно $BE = DF$, откуда $BC = 2BE = 2DF$; слѣдовательно:

$$AB\,.\,BC = 2(AB\,.\,DF)$$

изъ этого видимъ, что прямоугольникъ $AB\,.\,BC$ соизмѣримъ съ прямоугольникомъ $AB\ DF$. Но, по построенію $AB\,.\,BC$ есть площадь раціональная, слѣдовательно и площадь $AB\,.\,DF$ есть также площадь раціональная. Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 33):

$$AB\,.\,DF = AD\,.\,DB$$

слѣдовательно и $AD\,.\,DB$ есть раціональная площадь.

Предложеніе 36. Найти двѣ прямыя, несоизмѣримыя въ степени, на которыхъ сумма построенныхъ квадратовъ была бы *средняя* площадь и которыя содержали бы *средній* прямоугольникъ, несоизмѣримый съ *среднею* площадью (фиг. 347)?

Рѣшеніе. Пусть AB и BC (кн. 10, пред. 33) будутъ двѣ *среднія* прямыя только въ степени соизмѣримыя, заключающія средній прямоугольникъ и изъ коихъ AB квадратитъ надъ BC на квадратъ, коего сторона несоизмѣрима съ AB.

Сдѣлавъ тоже построеніе какъ въ предъидущемъ предложеніи, найдемъ, что AD и DB суть искомыя прямыя.

Въ самомъ дѣлѣ, AF несоизмѣрима съ FB, слѣдовательно AD и DB несоизмѣримы въ степени; но $\square AB$ есть средній, слѣдовательно и $\square AD + \square DB$ есть *средняя* площадь.

Но мы и здѣсь имѣемъ $BC = 2DF$, слѣдовательно $AB\,.\,BC = 2(AB.FD)$, но такъ какъ $AB\,.\,BC$ есть *средній* прямоугольникъ, то и $AB\,.\,FD$ есть также *средній*. Но мы имѣемъ:

$$AB . FD = AD . DB$$

слѣдовательно $AD . DB$ есть *среднiй* прямоугольникъ.

По условiю AB и BC несоизмѣримы, но BC и BE соизмѣримы, слѣдовательно, AB и BE несоизмѣримы, откуда (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10) $\square AB$ и $AB . BE$ несоизмѣримы. Но мы имѣемъ:

$$\square AB = \square AD + \square DB$$

и

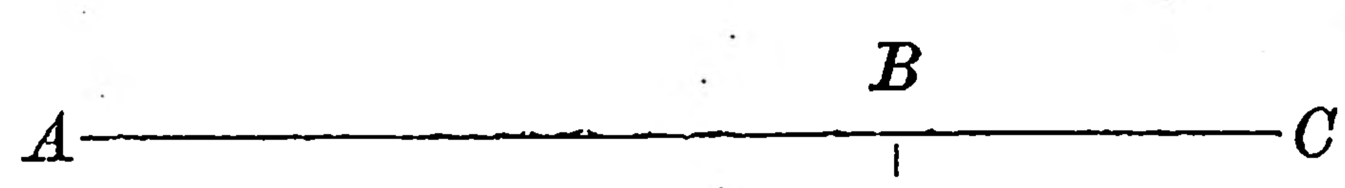
$$AB . BE = AB . FD = AD . DB$$

слѣдовательно, площадь $\square AD + \square DB$ несоизмѣрима съ площадью $AD . DB$.

Шесть отъ сложенiя происшедшихъ ирраціональностей.

Предложенiе 37. Если сложимъ двѣ раціональныя, только въ степени соизмѣримыя линiи AB и BC, то цѣлая линiя AC будетъ ирраціональная и называется *биномiальною* (фиг. 348).

Фиг. 348.



Доказат. Такъ какъ прямыя AB и BC соизмѣримы только въ степени, то сами онѣ несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB : BC = AB . BC : \square BC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямоугольникъ $AB . BC$ несоизмѣримъ съ квадратомъ $\square BC$.

Кромѣ этого (кн. 10, пред. 6), прямоугольникъ $AB . BC$ соизмѣримъ съ $2(AB . BC)$ и (кн. 10, пред. 16) квадратъ $\square BC$ соизмѣримъ съ $\square AB + \square BC$, слѣдовательно площадь $2(AB . BC)$ несоизмѣрима съ площадью $\square AB + \square BC$, а слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) и площадь $\square AB + 2(AB . BC) + \square BC = \square AC$ (кн. 2, пред. 4) несоизмѣрима съ $\square AB + \square BC$. Но $\square AB + \square BC$ есть раціональная площадь, слѣдовательно площадь $\square AC$ есть ирраціональная, откуда и прямая AC есть также ирраціональная.

Предложенiе 38. Если сложимъ двѣ *среднiя*, только въ степени соизмѣримыя, прямыя AB и BC, которыя содержатъ раціональную площадь, то цѣлая прямая AC будетъ ирраціональная и называется *первою бимедiальною* (*среднею*) (фиг. 349).

Доказат. По условію прямая AB несоизмѣрима съ прямою BC и площадь $\square AB + \square BC$ несоизмѣрима съ $2(AB . BC)$ (кн. 10, пред. 13), слѣдовательно (кн. 2, пред. 4) и площадь:

$$\square AB + 2(AB . BC) + \square BC = \square AC$$

несоизмѣрима съ площадью $AB . BC$, но $AB . BC$ есть раціональная площадь, слѣдовательно $\square AC$ есть ирраціональная площадь, а слѣдовательно и прямая AC есть ирраціональная.

Фиг. 349.

Предложеніе 39. Если сложимъ двѣ *среднія*, только въ степени соизмѣримыя прямыя AB и BC, которыя содержатъ *средній* прямоугольникъ, то цѣлая прямая AC будетъ ирраціональная и называется *второю бимедіальною* (*среднею*) (фиг. 350).

Доказат. Пусть DE будетъ, какая нибудь, раціональная линія на которой построимъ прямоугольникъ:

$$DF = ED . DG$$

равный квадрату, построенному на AC и прямоугольникъ $EH = ED . DH$, равный суммѣ квадратовъ, построенныхъ на AB и BC, т. е. $EH = \square AB + \square BC$.

Такъ какъ (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC = \square AB + \square BC + 2(AB . BC)$$

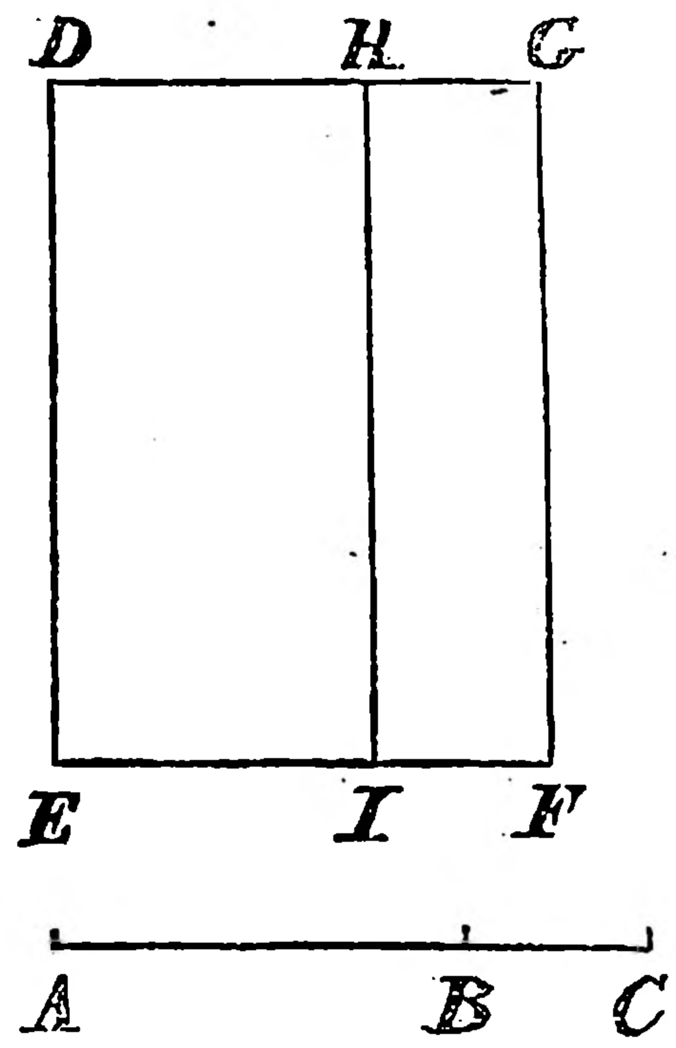
то $HF = 2(AB . BC)$. Но, AB и BC, а также и $\square AB$, $\square BC$ и $2(AB . BC)$ суть *среднія*, слѣдовательно, EH и HF суть также *среднія*. По условію DE есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) DH и HG суть также раціональныя по длинѣ несоизмѣримыя прямыя съ DE. Такъ какъ AB и BC соизмѣримы только въ степени, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB : BC = \square AB : AB . BC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) $\square AB$ и $AB . BC$ несоизмѣримы. По условію $\square AB$ соизмѣримъ съ $\square AB + \square BC$ и $AB . BC$ есть площадь соизмѣримая съ $2(AB . BC)$, слѣдовательно и $\square AB + \square BC$ есть площадь несоизмѣримая съ $2(AB . BC)$, т. е. EH несоизмѣрима съ HF, а также и DH несоизмѣрима съ HG.

Откуда видимъ, что DG и HG суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) DG есть ир-

Фиг. 350.



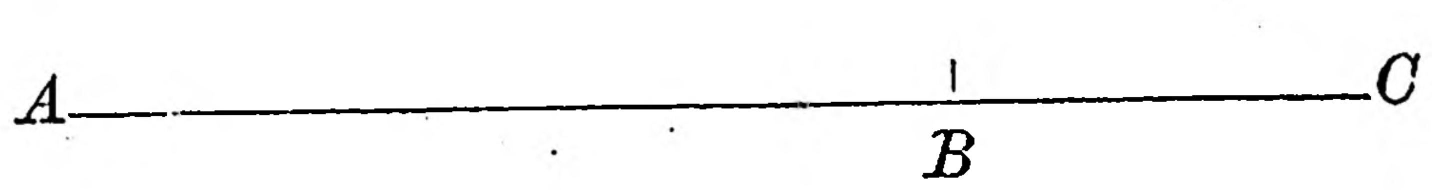
раціональная прямая, откуда, такъ какъ DE есть раціональная прямая, то $ED.DG$ (кн. 10, пред. 21), т. е. DF или $\square AC$ есть площадь ирраціональная, а слѣдовательно и прямая AC есть ирраціональная.

Примѣч. 5. Евклидъ потому прямую AC называетъ *второю медіальною,* что въ этомъ случаѣ прямоугольникъ $AB.BC$ есть *средній,* а не *раціональный,* какъ въ предъидущемъ предложеніи.

Предложеніе 40. Если сложимъ двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя AB и BC, которыя заключаютъ средній прямоугольникъ и построенные на которыхъ квадраты составляютъ раціональную площадь, то цѣлая прямая AC будетъ *ирраціональная* и называется *наибольшею ирраціональною* (фиг. 351).

Доказат. Такъ какъ $AB.BC$ есть средній прямоугольникъ, а также (кн. 10, пред. 24) и $2(AB.BC)$, а $\square AB+\square BC$ по условію есть раціональная площадь, то $2(AB.BC)$ несоизмѣрима съ площадью $\square AB+\square BC$, слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) $\square AB+\square BC+2(AB.BC)=\square AC$ (кн. 2, пред. 4) несоизмѣрима съ $\square AB+\square BC$, откуда, такъ какъ $\square AB+\square BC$ есть раціональная площадь, то $\square AC$ и прямая AC суть величины ирраціональныя.

Фиг. 351.



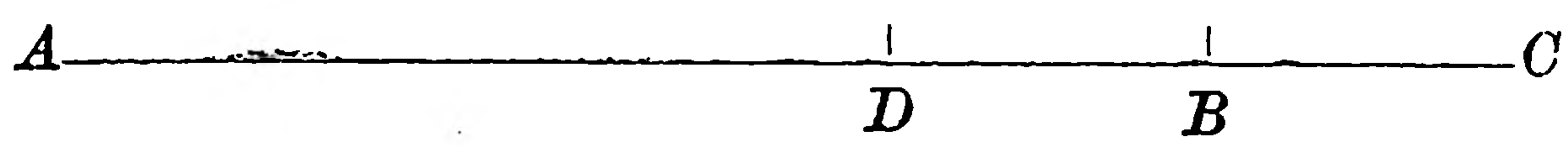
Примѣч. 6. Наибольшею ирраціональною прямую AC Евклидъ называетъ потому, что $\square AB+\square BC>2(AB.BC)$.

Въ самомъ дѣлѣ, AB не можетъ быть равна BC, ибо мы бы имѣли:

$$\square AB+\square BC=2(AB.BC)$$

слѣдовательно площадь $AB\,.\,BC$ была бы раціональная, что противорѣчитъ положенію. Поэтому положимъ $AB>BC$ и отложимъ $BD=BC$ (фиг. 352).

Фиг. 352.



Мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB+\square BD=2(AB\,.\,BD)+\square AD$$

но $BD=BC$, слѣдовательно:

$$\square AB+\square BC=2(AB\,.\,BC)+\square AD$$

откуда:

$$\square AB+\square BC>2(AB\,.\,BC).$$

Предложеніе 41. Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя въ степени прямыя AB и BC, заключающія раціональный прямоугольникъ и коихъ сумма квадратовъ даетъ *среднею* площадь, то цѣлая прямая AC будетъ ирраціональная и называется *раціональною и среднею степенящею* (фиг. 353).

Фиг. 353.

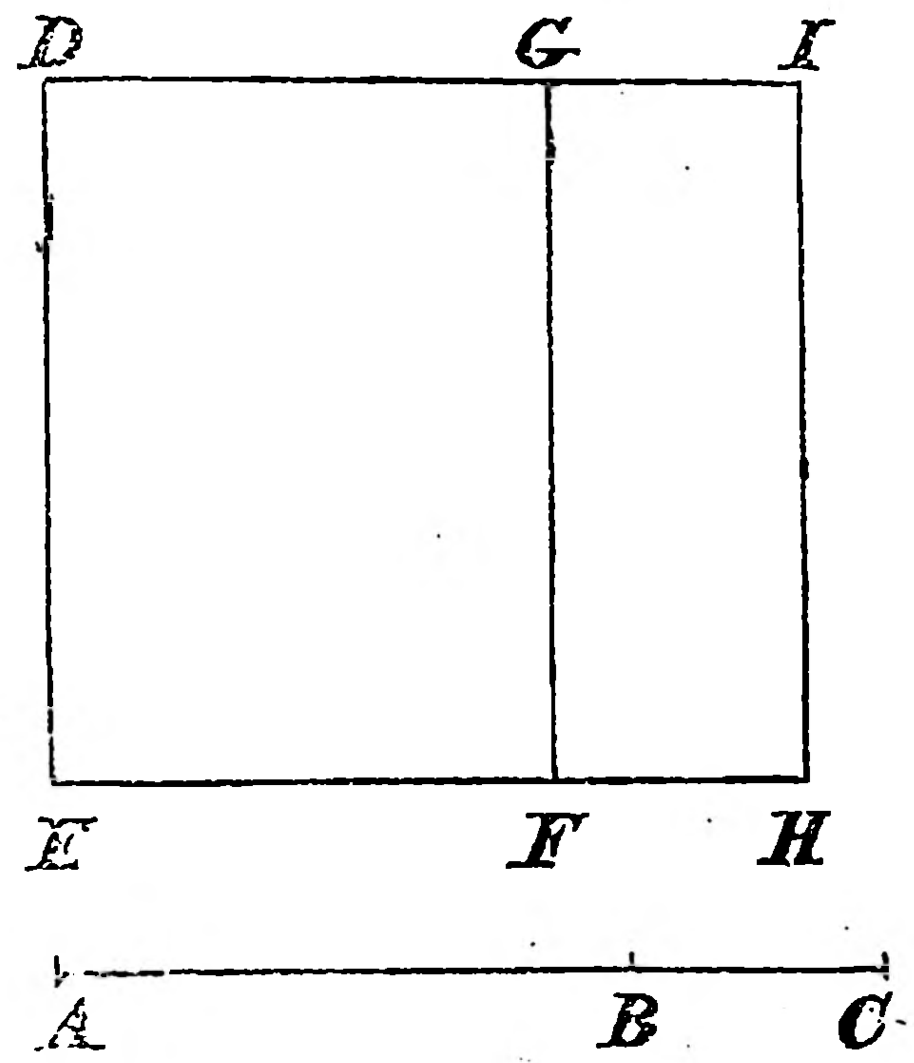
Доказат. Такъ какъ по условію $\square AB+\square BC$ есть *средняя* площадь, и $2(AB\,.\,BC)$ есть площадь раціональная; то $\square AB+\square BC$ несоизмѣрима съ $2(AB\,.\,BC)$, слѣдовательно и (кн. 2, пред. 4 и кн. 10, пред. 17) $\square AC$ несоизмѣримъ съ $2(AB\,.\,BC)$. Но $2(AB\,.\,BC)$ есть раціональный прямоугольникъ, слѣдовательно $\square AC$ есть ирраціональный квадратъ, а слѣдовательно и прямая AC есть ирраціональная.

Примѣч. 7. Прямую AC Евклидъ называетъ раціональною и среднею степенящею потому, что построенный на ней квадратъ равенъ двумъ фигурамъ изъ коихъ одна раціональная, а другая средняя.

Предложеніе 42. Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя въ степени прямыя AB и BC, коихъ сумма квадратовъ есть *средняя* площадь и которыя заключаютъ *среднюю* площадь несоизмѣримою съ предъидущей, то цѣлая прямая AC *ирраціональна* и называется *второю среднею степенящею* (фиг. 354).

Доказат. Пусть DE есть, какая нибудь, раціональная прямая, на которой построимъ (кн. 1, пред. 45) прямоугольникъ $DF=ED\,.\,DG$ равный суммѣ квадратовъ $\square AB + \square BC$, а также построимъ прямоугольникъ $GH = ED . GI$ равный $2(AB . BC)$, слѣдовательно $DH = \square AC$ (кн. 2, пред. 4).

Фиг. 354.



Такъ какъ по условію $\square AB + \square BC$ есть *средняя* площадь и равна площади DF, то $DF = ED . DG$ есть также средняя площадь; но DE есть раціональная прямая (кн. 10, пред. 23), слѣдовательно DG раціональна по длинѣ несоизмѣрима съ DE. По той же причинѣ GI раціональна по длинѣ несоизмѣрима съ DE. Теперь, такъ какъ $\square AB + \square BC$ несоизмѣримъ съ $2(AB . BC)$, т. е. DF несоизмѣрима съ GH, слѣдовательно (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10) прямая DG несоизмѣрима съ GI. Откуда видимъ что DG и GI суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) двучленъ DI есть ирраціональная прямая, откуда, такъ какъ DE есть раціональная прямая, то прямоугольникъ (кн. 10, пред. 39) DH, т. е. $\square AC$ будетъ ирраціональный, а слѣдовательно и его сторона AC также ирраціональна.

Примѣч. 8. Происхожденіе названія такое же какъ и выше. Мы ниже покажемъ, что всѣ шесть выше показанныхъ ирраціональностей могутъ быть разложены на тѣ члены изъ коихъ онѣ сложены. Но прежде мы предложимъ слѣдующую теорему.

Теорема. Если прямую AB раздѣлимъ (фиг. 355) въ двухъ точкахъ C и D такъ, что $AC > DB$, то мы имѣемъ:

$$\square AC + \square CB > \square AD + \square DB.$$

Доказат. Раздѣлимъ прямую AB въ точкѣ E пополамъ. Такъ какъ $AC > DB$, то, отнимая по DC, найдемъ $AD > CB$; но $AE = EB$, то, если отъ AE отнимемъ AD, и отъ EB отнимемъ CB, получимъ $DE < EC$. Слѣдовательно точки C и D лежатъ не въ равномъ разстояніи отъ точки E.

Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 2, пред. 5):

$$AC . CB + \square CE = \square EB = AD . DB + \square DE$$

и

$$\square DE < \square CE$$

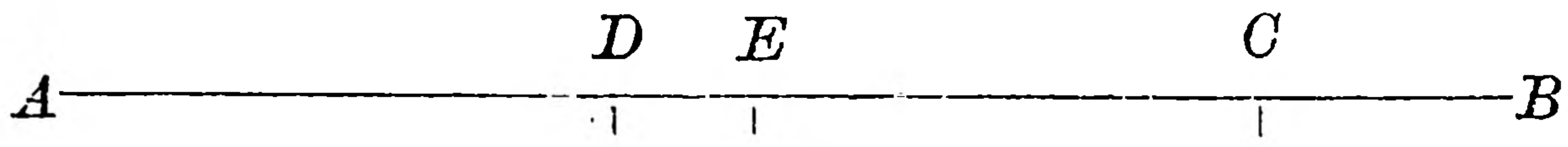
то:

$$AC \cdot CB < AD \cdot DB,$$

слѣдовательно и

$$2(AC \cdot CB) < 2(AD \cdot DB).$$

Фиг. 355.



Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 4):

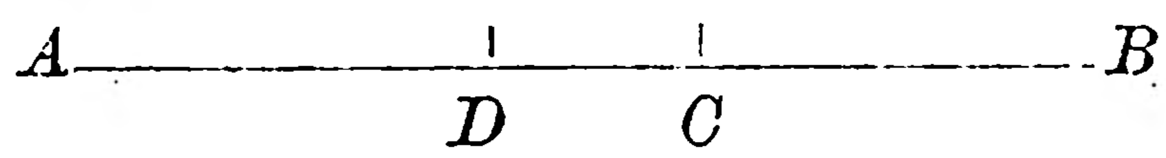
$$\square AC + \square BC + 2(AC \cdot CB) = \square AB = \square AD + \square DB + 2(AD \cdot DB)$$

откуда:

$$\square AC + \square CB > \square AB + \square DB.$$

Предложеніе 43. Биноміальная AB разлагается только въ одной точкѣ C на свои составныя части или члены AC и CB (фиг. 356).

Фиг. 356.



Доказат. Пусть D будетъ другая точка того же свойства, т. е., что AD и DB суть раціональныя прямыя, соизмѣримыя только въ степени; очевидно невозможно имѣть $AC = DB$, такъ какъ мы бы имѣли и $AD = BC$, слѣдовательно $AC : CB = BD : DA$ и прямая AB была бы одинаково раздѣлена въ точкахъ C и D, что мы устраняемъ. Слѣдовательно точки C и D лежатъ не въ равныхъ разстояніяхъ отъ средины прямой AB. Слѣдовательно мы имѣемъ (кн. 10, пред. 42):

$$\square AC + \square CB > \square AD + \square DB.$$

Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC + \square CB + 2(AC \cdot CB) = \square AB = \square AD + \square DB + 2(AD \cdot DB).$$

откуда:

$$\square AC + \square CB - (\square AD + \square DB) = 2(AD \cdot DB) - 2(AC \cdot CB).$$

Но квадраты раціональны, слѣдовательно и ихъ разность, т. е. раціональна и разность прямоугольниковъ, что (кн. 10, пред. 27) невозможно. Слѣдовательно биноміальная AB ни въ какой другой точкѣ, исключая C, на свои члены разложится не можетъ.

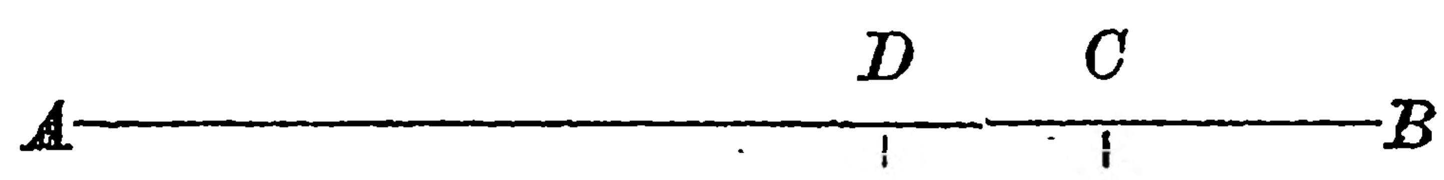
Предложеніе 44. Первая бимедіальная AB можетъ раздѣлится на свои члены AC и CB только въ одной точкѣ C (фиг. 357).

Доказат. Пусть первая биноміальная AB раздѣляется, если возможно, еще въ другой точкѣ D на свои члены AD и DB. Если AD и DB будутъ члены биноміальной AB, то они будутъ соизмѣримы только въ степени и будутъ заключать раціональный прямоугольникъ. Поэтому мы будемъ опять имѣть:

$$2(AD\,.\,DB)-2(AC\,.\,CB)=\square AC+\square CB-(\square AD+\square DB)$$

изъ чего видимъ, что такъ какъ прямоугольники раціональны, то и разность квадратовъ будетъ раціональна, что невозможно (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно первая бимедіальная можетъ раздѣлится на свои члены только въ одной точкѣ.

Фиг. 357.



Предложеніе 45. Вторую бимедіальную AB можно раздѣлить на ея члены AC и CB только въ одной товкѣ C (фиг. 358).

Доказат. Положимъ что есть другая точка D, въ которой прямая такъ дѣлится на части AD и DB, что онѣ суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя прямыя и заключающія *средній* прямоугольникъ; но въ тоже время AC не равно BD, а $AC>DB$, поэтому мы будемъ имѣть (кн. 10, пред. 42, слѣд.):

$$\square AC+\square CB>\square AD+\square DB.$$

Возьмемъ раціональную линію EF и построимъ на ней (кн. 1, пред. 45) прямоугольники:

$$EI=\square AB,\quad EG=\square AC+\square CB,\quad EK=\square AD+\square DB$$

то если отъ EI отымемъ EG, и отъ EI отымемъ EK, то получимъ:

$$HI=2(AC\,.\,CB),\quad LI=2(AD\,.\,DB).$$

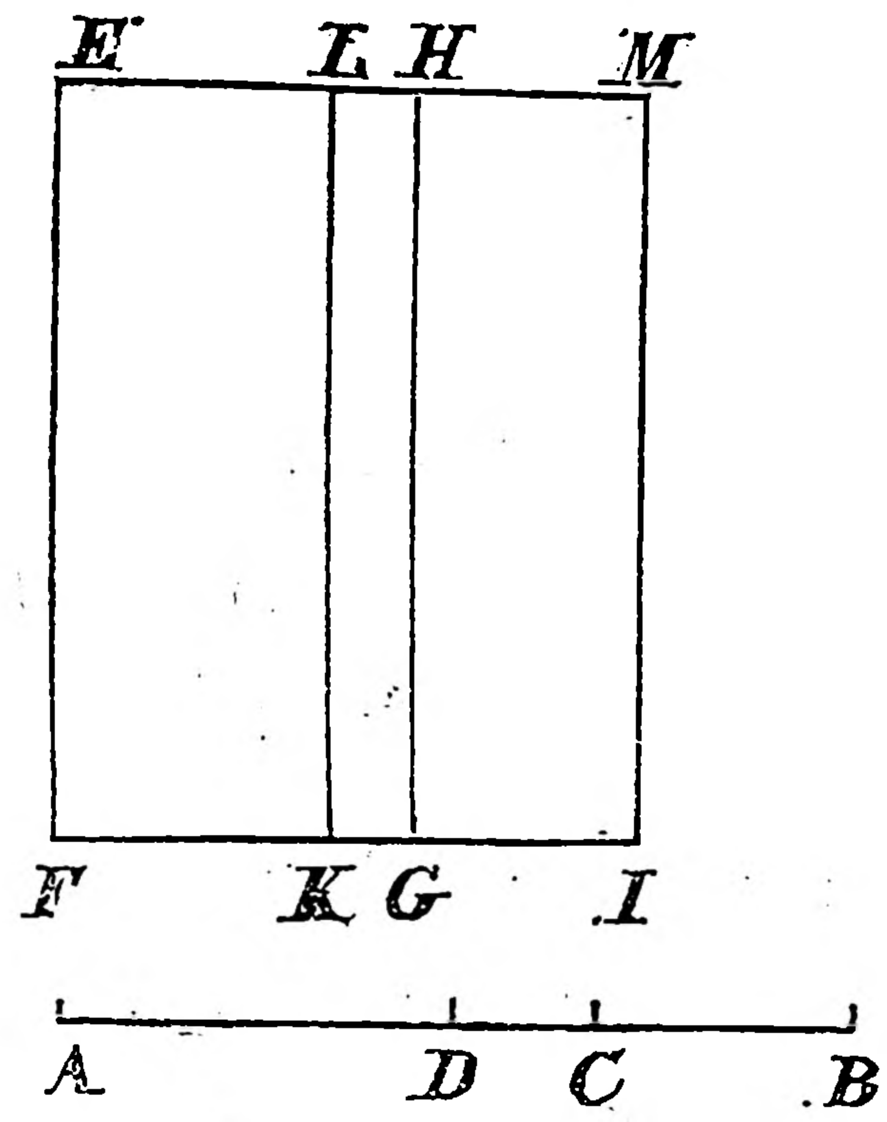
Такъ какъ (кн. 10, пред. 38) $\square AC+\square CB=EG=EF\,.\,EH$ есть средняя площадь, а EF линія раціональная, то (кн. 10, пред. 23) EH также есть линія раціональная по длинѣ несоизмѣримая съ EF. По той же причинѣ HM есть раціональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ EF.

Далѣе, такъ какъ (кн. 10, пред. 38) AC и CB суть среднія прямыя только въ степени соизмѣримыя, то AC и CB несоизмѣримы, но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AC:CB=\square AC:AC\,.\,CB$$

слѣдовательно площади (кн. 10, пред. 10) $\square AC$ и $AC.CB$ несоизмѣримы. Но $\square AC$ соизмѣрима съ $\square AC+\square BC$ (кн. 10, пред. 16), потому что AC и CB соизмѣримы только въ степени, а также $AC.CB$ соизмѣрима съ $2(AC.CB)$. Слѣдовательно $\square AC+\square CB$ несоизмѣрима съ $2(AC.CB)$, т. е.

Фиг. 358.



площадь EG несоизмѣрима съ площадью HI, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) несоизмѣримы и прямыя EH и HM. Откуда видимъ, что прямыя EH и HM раціональны только въ степени соизмѣримы. Изъ этого заключаемъ (кн. 10, пред. 37), что прямая EM есть биноміальная раздѣленная въ точкѣ H на свои члены.

Точно также можно доказать, что EL и LM суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, а слѣдовательно EM есть биноміальная раздѣленная на свои члены въ точкѣ L, и притомъ EH не равна LM; въ самомъ дѣлѣ (кн. 10, пред. 43, слѣд.) $\square AC+\square CB>\square AD+\square DB$, но $\square AD+\square DB>2(AD.DB)$, а тѣмъ болѣе $\square AC+\square CB>2(AD.DB)$, т. е. $EG>LI$, а потому и $EH>LM$.

Изъ этого видимъ, что если бы *вторая бимедіальная* AB была раздѣлена не только въ точкѣ C, но еще и въ другой точкѣ D на свои члены, то биноміальная EM была бы раздѣлена въ двухъ точкахъ H и L на свои члены, что невозможно (кн. 10, пред. 43). Слѣдовательно *вторая бимедіальная* можетъ быть раздѣлена на свои члены только въ одной точкѣ.

Предложеніе 46. Наибольшая ирраціональная AB можетъ быть раздѣлена на свои члены AC и CB только въ одной точкѣ C (фиг. 359).

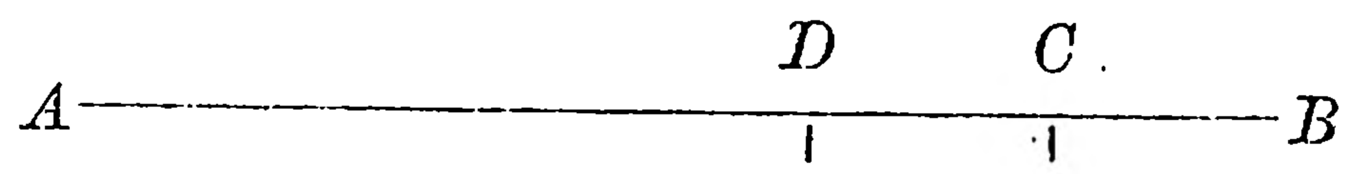
Доказат. Положимъ, что AB можетъ быть также раздѣлена и въ другой точкѣ D на свои члены AD и DB, которые, въ такомъ случаѣ, будутъ несоизмѣримы только въ степени, будутъ заключать *среднюю* площадь и сумма ихъ квадратовъ будетъ раціональная площадь.

Такъ какъ (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC+\square CB-\square(AB+\square DB)=2(AD.DB)-2(AC.CB)$$

и первая часть раціональна, слѣдовательно раціональна и вторая часть, т. е. разность среднихъ прямоугольниковъ, что невозможно (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно *наибольшая ирраціональная* на свои члены можетъ быть раздѣлена только въ одной точкѣ.

Фиг. 359.



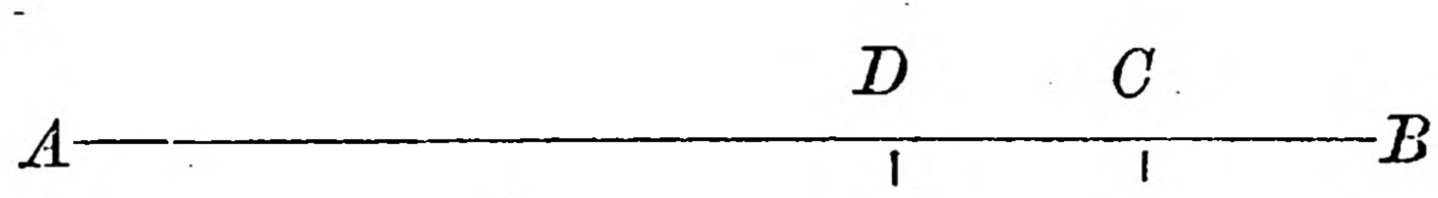
Предложеніе 47. Раціональная средняя степенящая прямая AB можетъ быть раздѣлена на свои члены AC и CB только въ одной точкѣ C (фиг. 360).

Доказат. Допустимъ, что есть и другая такого же свойства точка D, то AD и DB будутъ прямыя несоизмѣримыя въ степени, заключающія раціональную площадь и сумма ихъ квадратовъ будетъ *средняя* площадь.

Такъ какъ (кн. 2, пред. 4):

$$2(AD\,.\,DB)-2(AC\,.\,CB)=(\square AC+\square CB)-(\square AD+\square DB)$$

Фиг. 360.



и первая часть есть раціональная площадь, то и вторая будетъ также раціональная площадь, что невозможно, потому что сумма квадратовъ есть площадь *средняя* (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно, *раціональная средняя степенящая* можетъ быть раздѣлена на свои члены только въ одной точкѣ.

Предложеніе 48. Вторая средняя степенящая AB можетъ быть раздѣлена на свои члены AC и CB только въ одной точкѣ C (фиг. 361).

Доказат. Допустимъ что есть еще другая точка D, для которой AD и DB заключаютъ средній прямоугольникъ и коихъ сумма квадратовъ есть средняя площадь, но при этомъ AC не равно DB, а $AC>DB$.

Пусть EF есть, какая нибудь раціональная линія, построимъ на ней прямоугольники:

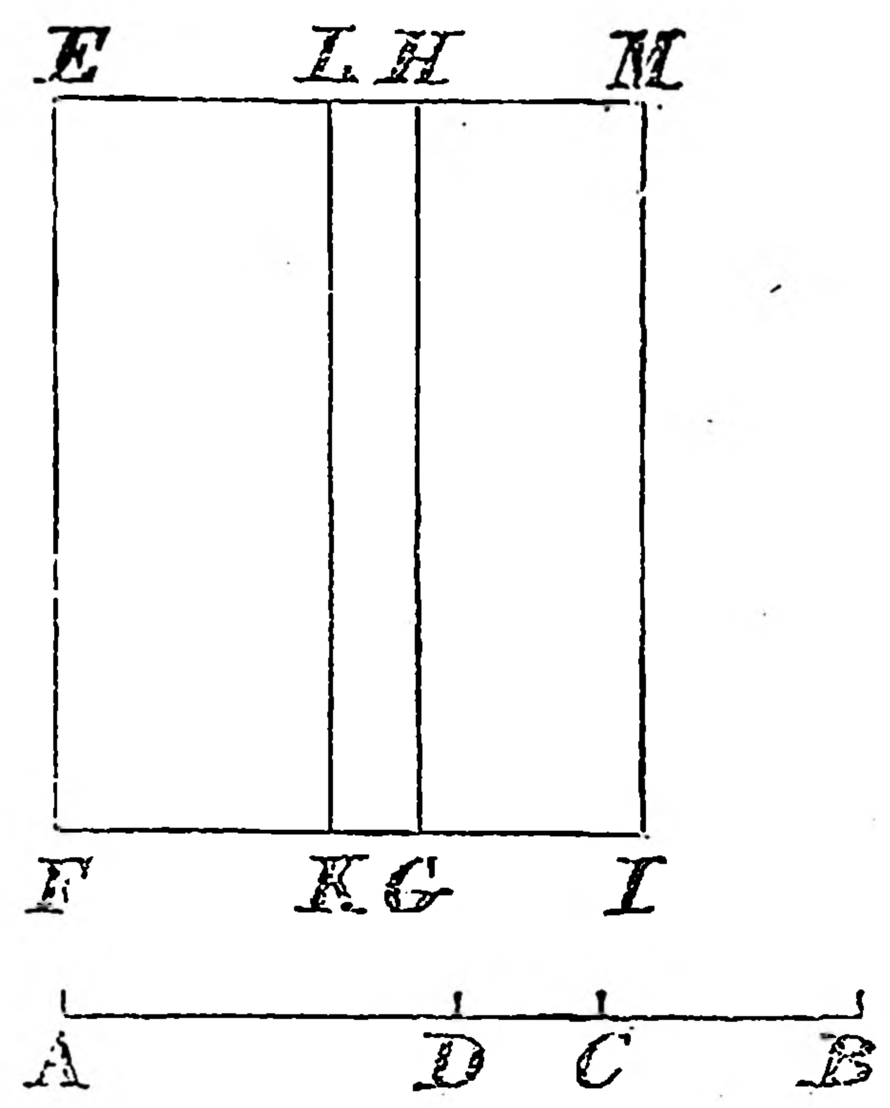
$$EG=\square AC+\square CB,\ HI=2(AC\,.\,CB),\ EL=\square AD+\square DB$$

то мы будемъ имѣть:

$$EI=\square AB,\quad LI=2(AD\,.\,DB).$$

Такъ какъ по условію $\square AC + \square CB = EG = FE . EH$ есть средняя площадь, а EF есть раціональная прямая (кн. 10, пред. 23), то EH будетъ

Фиг. 361.



также раціональная прямая, по длинѣ несоизмѣримая съ EF. По той же причинѣ HM есть раціональная прямая, по длинѣ несоизмѣримая съ EF.

Далѣе, такъ какъ площадь $\square AC + \square CB$ несоизмѣрима съ $2(AC . CB)$, т. е. EG несоизмѣрима съ HI, то (кн. 10, пред. 10) и EH несоизмѣрима HM. Слѣдовательно прямыя EH и HM раціональны только въ степени соизмѣримы, поэтому прямая EM есть биноміальная, раздѣленная въ точкѣ H на свои члены. Точно также можно показать, что таже прямая и въ точкѣ L раздѣлена на свои члены, что быть не можетъ, такъ какъ EH не равно LM. Слѣдовательно, если *вторая средняя степенящая прямая* AB, кромѣ точки C еще въ другой точкѣ D раздѣлена на свои члены, то биноміальная EM будетъ раздѣлена въ двухъ точкахъ H и L на свои члены, что (кн. 10, пред. 43) невозможно. Слѣдовательно и то невозможно чтобы AB была раздѣлена въ двухъ точкахъ на свои члены.

Шесть порядковъ биноміальныхъ отрѣзковъ прямой.

1. Биноміальный отрѣзокъ, коего большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большимъ членомъ называется *первымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если большій членъ соизмѣримъ съ данною раціональною линіею.

2. Онъ называется *вторымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если меньшій членъ по длинѣ соизмѣримъ съ данною соизмѣримою линіею.

3. Онъ называется *третьимъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если ни одинъ изъ членовъ не соизмѣримъ по длинѣ съ данною раціональною линіею.

4. Биноміальный отрѣзокъ, коего большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большимъ членомъ, называется *четвертымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если большій членъ соизмѣримъ съ данною раціональною линіею.

5. Онъ называется *пятымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если меньшій членъ соизмѣримъ съ данною раціональною линіею.

6. Онъ называется *шестымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если ни одинъ изъ членовъ не соизмѣримъ по длинѣ съ данною раціональною линіею.

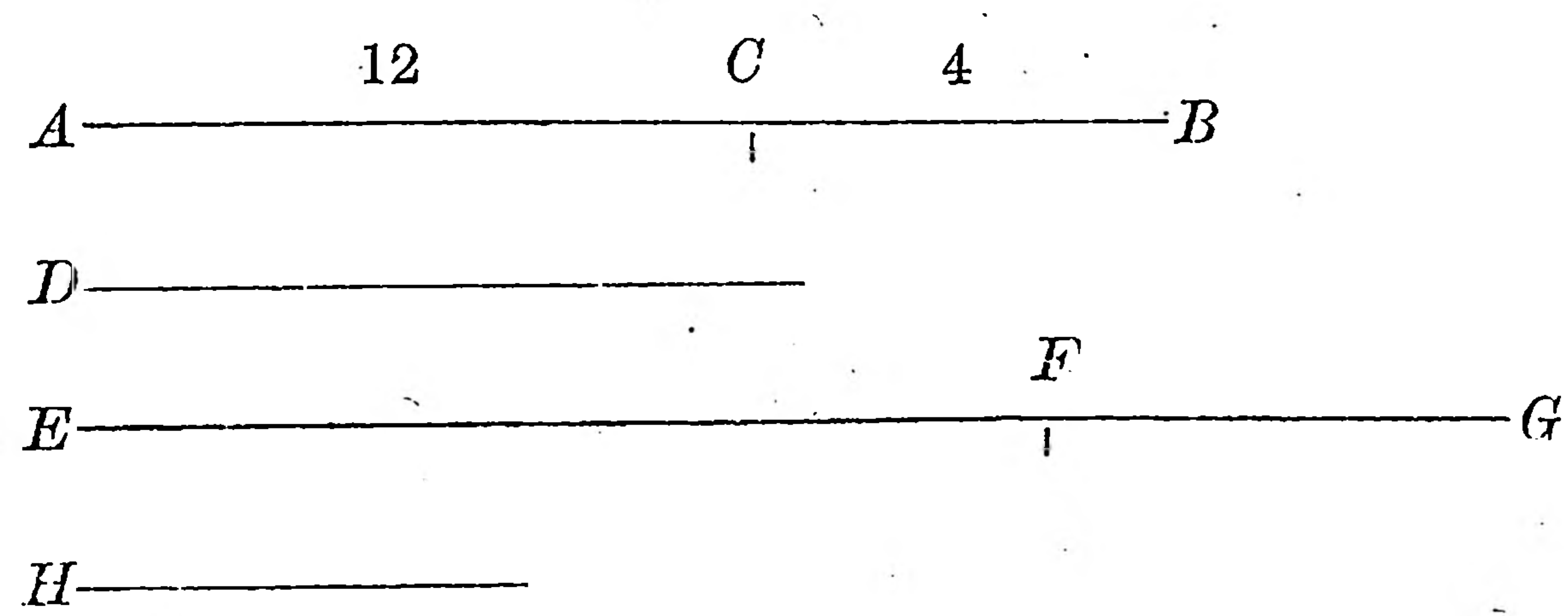
Предложеніе 49. Найти первый биноміальный отрѣзокъ (фиг. 362)?

Рѣшеніе. Возьмемъ два числа AC и CB, коихъ сумма AB относится къ BC, а не къ AC, какъ квадратныя числа (кн. 10, пред. 29, слѣд.). Пусть D будетъ данная раціональная линія, и EF прямая по длинѣ соизмѣримая съ D и пусть (кн. 10, пред. 6):

$$AB : AC = \square EF : \square FG$$

я говорю, что прямая EG, составленная изъ отрѣзковъ EF и FG и будетъ искомый *первый биноміальный отрѣзокъ.*

Фиг. 362.



Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$AB : AC = \square EF : \square FG \tag{1}$$

то (кн. 10, пред. 6) $\square EF$ соизмѣримъ съ $\square FG$, но прямая EF соизмѣрима съ D, слѣдовательно раціональна, а потому раціональна и прямая FG, но (кн. 10, пред. 9) EF несоизмѣрима съ FG. Откуда видимъ, что прямыя EF и FG раціональны и соизмѣримы только въ степени. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая EG есть биноміальный отрѣзокъ, коего члены суть EF и FG.

Изъ пропорціи (1), гдѣ $AB > AC$, слѣдуетъ также, что $\square EF > \square FG$. Если положимъ, что $\square EF - \square FG = \square H$, то найдемъ (кн. 5, пред. 19):

$$AB : CB = \square EF : \square H.$$

Но AB и CB относятся какъ квадратныя числа, слѣдовательно $\square EF$ и $\square H$ также относятся какъ квадратныя числа, откуда (кн. 10, пред. 9) прямая EF соизмѣрима съ H. Изъ этого видимъ, что EF квадратитъ надъ FG на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ H, но EF соизмѣрима съ D, слѣдовательно EG есть *первый биноміальный отрѣзокъ.*

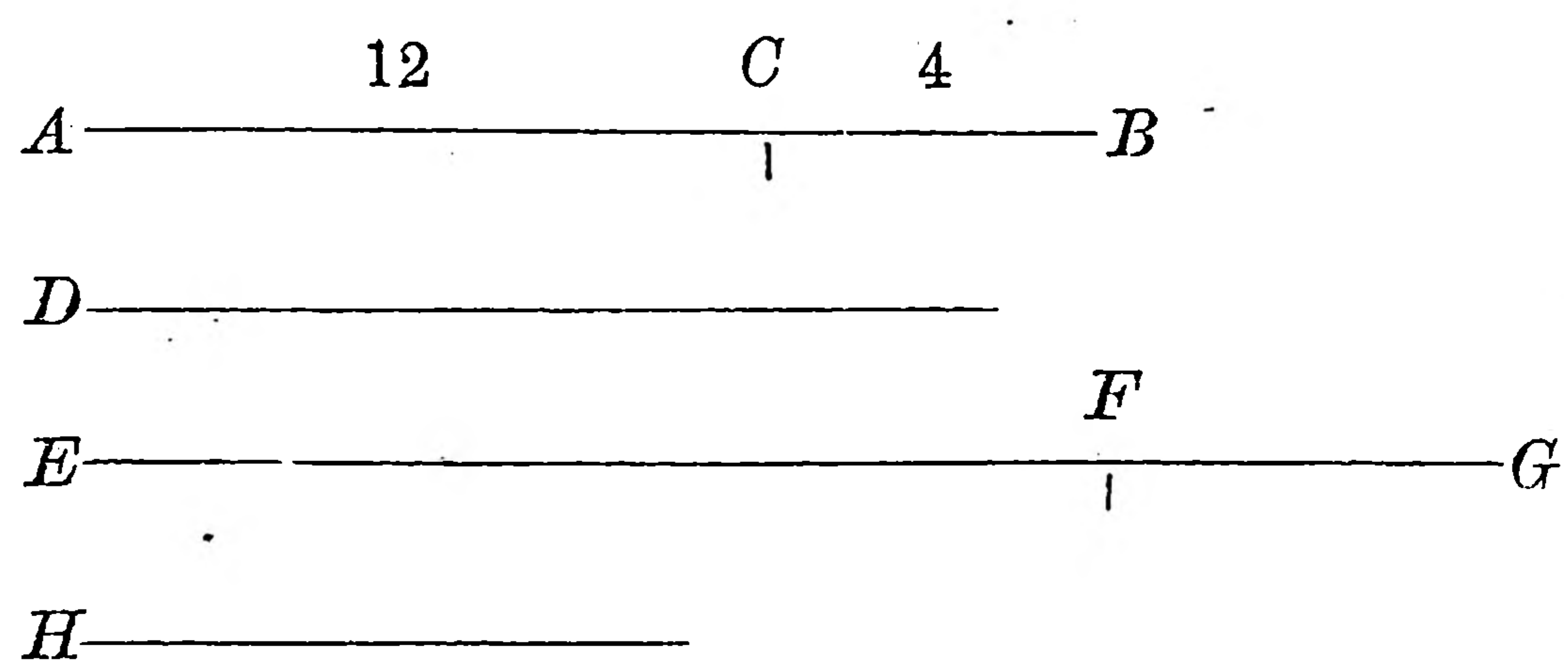
Предложеніе 50. Найти второй биноміальный отрѣзокъ (фиг. 363)?

Рѣшеніе. Возьмемъ два числа AC и CB, коихъ сумма AB относится къ CB, но не къ AC, какъ квадратныя числа. Пусть D будетъ данная раціональная линія и FG прямая по длинѣ соизмѣримая съ D, сдѣлаемъ (кн. 10, пред. 6):

$$AC:AB=\square GF:\square FE. \quad (1)$$

Я говорю, что прямая EG, составленная изъ отрѣзковъ EF и FG и есть *вторая биноміальная.*

Фиг. 363.



Изъ пропорціи (1) мы видимъ (кн. 10, пред. 6), что $\square EF$ соизмѣримъ съ $\square FG$; но прямая GF соизмѣрима съ D, слѣдовательно раціональна, а потому раціональна также и прямая EF; но (кн. 10, пред. 9) прямыя EF и FG несоизмѣримы. Откуда видимъ, что EF и FG суть прямыя, раціональныя только въ степени соизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая EG, составленная изъ отрѣзковъ EF и FG есть биноміальная, коей члены суть EF и FG.

Изъ пропорціи (1), гдѣ $AC<AB$, слѣдуетъ также, что $\square GF<\square EF$. Положимъ теперь $\square EF-\square FG=\square H$, то найдемъ (кн. 5, пред. 19), что:

$$AB:BC=\square EF:\square H.$$

Но AB и BC относятся между собою какъ квадратныя числа, слѣдовательно $\square EF$ и $\square H$ относятся также между собою какъ квадратныя числа. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя EF и H соизмѣримы. Откуда видимъ, что EF квадратитъ надъ FG на квадратъ, коего сторона H

по длинѣ соизмѣрима съ FG, но FG и D соизмѣримы, слѣдовательно EG есть вторая биноміальная.

Предложеніе 51. Найти третью биноміальную (фиг. 364)?

Рѣшеніе. Возьмемъ два числа AC и CB, коихъ сумма относится къ CB, но не AC, какъ квадратныя числа, возьмемъ третье число D, которое не есть квадратное и ни къ одному изъ чиселъ AC и CB не относится какъ квадратное число. Пусть еще будетъ E раціональная прямая и кромѣ этого пусть будетъ (кн. 10, пред. 6):

$$D : AB = \square E : \square FG \tag{1}$$

и

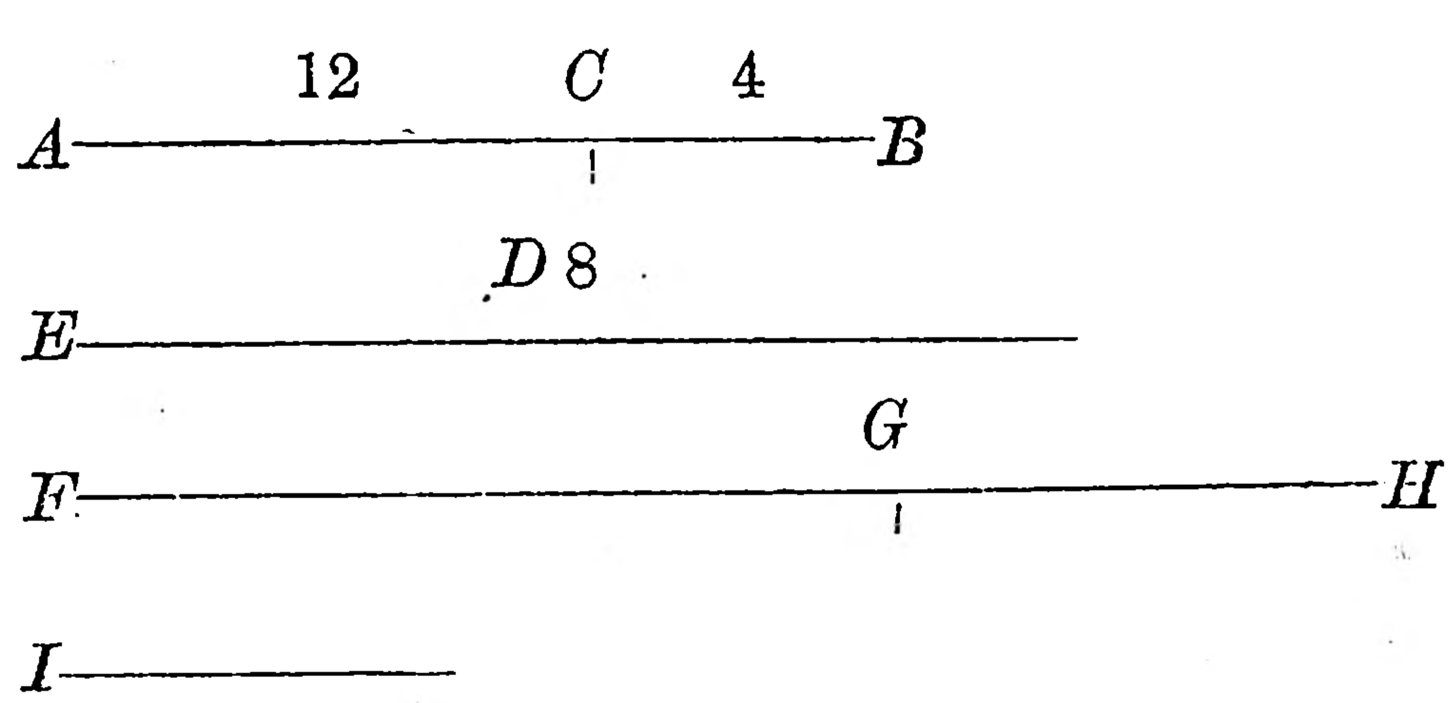
$$AB : AC = \square FG : \square GH. \tag{2}$$

Я говорю, что прямая FH, составленная изъ отрѣзковъ FG и GH и есть искомая *третяя биноміальная.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ пропорціи (1) видимъ, что $\square E$ и $\square FG$ соизмѣримы, и какъ прямая E раціональна, то и FG также раціональна, но (кн. 10, пред. 9) E и FG по длинѣ несоизмѣримы.

Изъ пропорціи (2) еще видимъ, что $\square FG$ и $\square GH$ соизмѣримы, слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то и GH есть также раціональная, но (кн. 10, пред. 9) FH и GH по длинѣ несоизмѣримы. Изъ этого видимъ, что прямыя FG и GH раціональны и соизмѣримы только въ степени, а слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) FH есть биноміальная прямая, коей члены суть FG и GH.

Фиг. 364.



Въ силу обѣихъ предъидущихъ пропорцій (1) и (2) (кн. 5, пред. 22) мы имѣемъ:

$$D : AC = \square E : \square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя E и GH несоизмѣримы, далѣе, такъ какъ $AB > AC$, то и $\square FG > \square GH$. Положимъ теперь $\square FG - \square GH = \square I$, то (кн. 5, пред. 19):

$$AB : CB = \square FG : \square I$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя FG и I соизмѣримы. Откуда наконецъ видимъ, что FG квадратитъ надъ GH на квадратъ, коего сторона I по длинѣ соизмѣрима съ FG, а FG и GH съ прямою E несоизмѣримы, слѣдовательно FH есть *третяя биноміальная прямая.*

Предложеніе 52. Найти четвертую биноміальную (фиг. 365)?

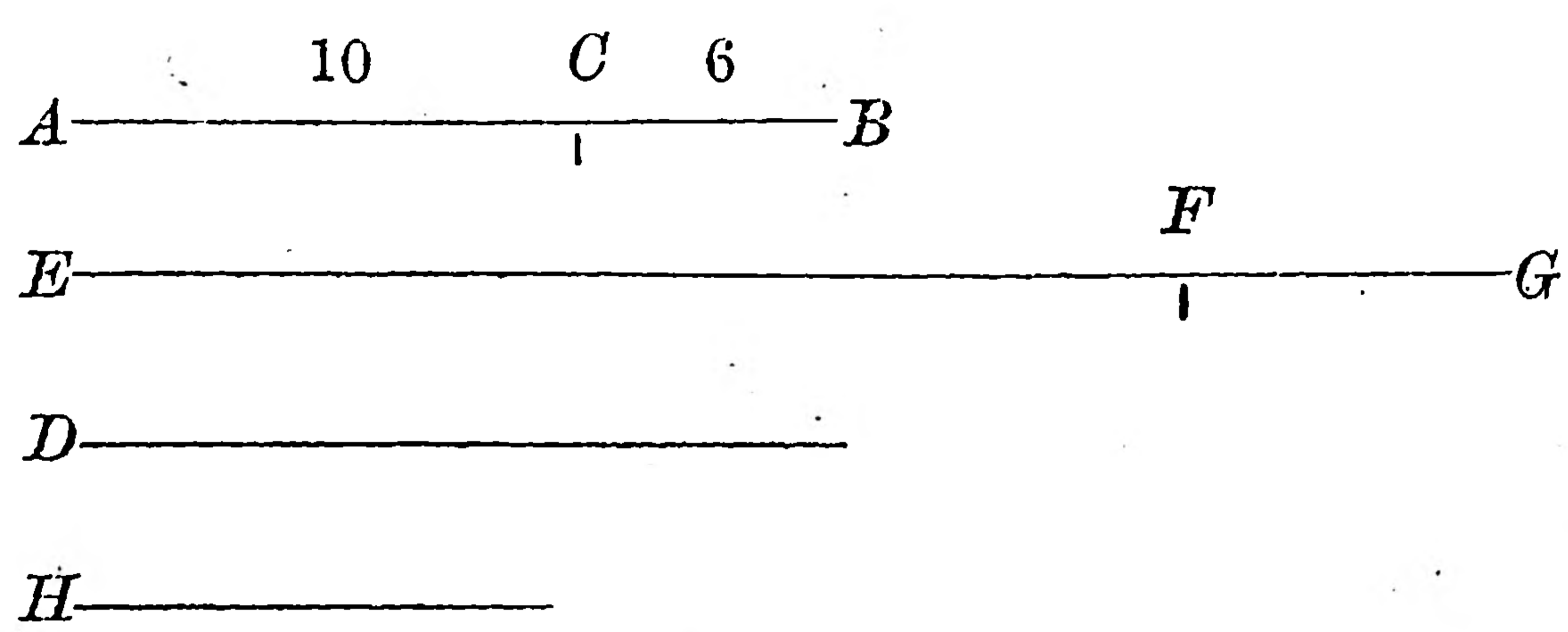
Рѣшеніе. Возьмемъ два числа AC и CB, коихъ сумма AB ни къ одному изъ чиселъ AC и CB не относится какъ квадратное число. Пусть еще D будетъ раціональная линія, а EF прямая по длинѣ соизмѣримая съ D, далѣе пусть будетъ (кн. 10, пред. 6):

$$AB : AC = \square EF : \square FG \tag{1}$$

я говорю, что прямая EG, составленная изъ EF и FG есть *четвертая биноміальная.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ пропорціи (1) слѣдуетъ что $\square EF$ и $\square FG$ соизмѣримы, слѣдовательно, такъ какъ EF соизмѣрима съ D, а D есть раціональная прямая, то EF, а также и FG суть раціональныя прямыя, но (кн. 10, пред. 9) прямыя EF и FG несоизмѣримы. Изъ этого слѣдуетъ, что EF и FG суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, откуда видимъ, что (кн. 10, пред. 37) EG есть *биноміальная* прямая, коей члены суть EF и FG.

Фиг. 365.



Изъ пропорціи (1), гдѣ $AB > AC$, слѣдуетъ что и $\square EF > \square FG$. Пусть будетъ:

$$\square EF - \square FG = \square H,$$

то мы будемъ имѣть:

$$AB : BC = \square EF : \square H$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя EF и H несоизмѣримы. Изъ этого видимъ, что прямая EF квадратитъ надъ FG на квадратъ, коего сторона H несоизмѣрима съ FG, но по условію EF и D соизмѣримы, слѣдовательно EG есть *четвертая биноміальная.*

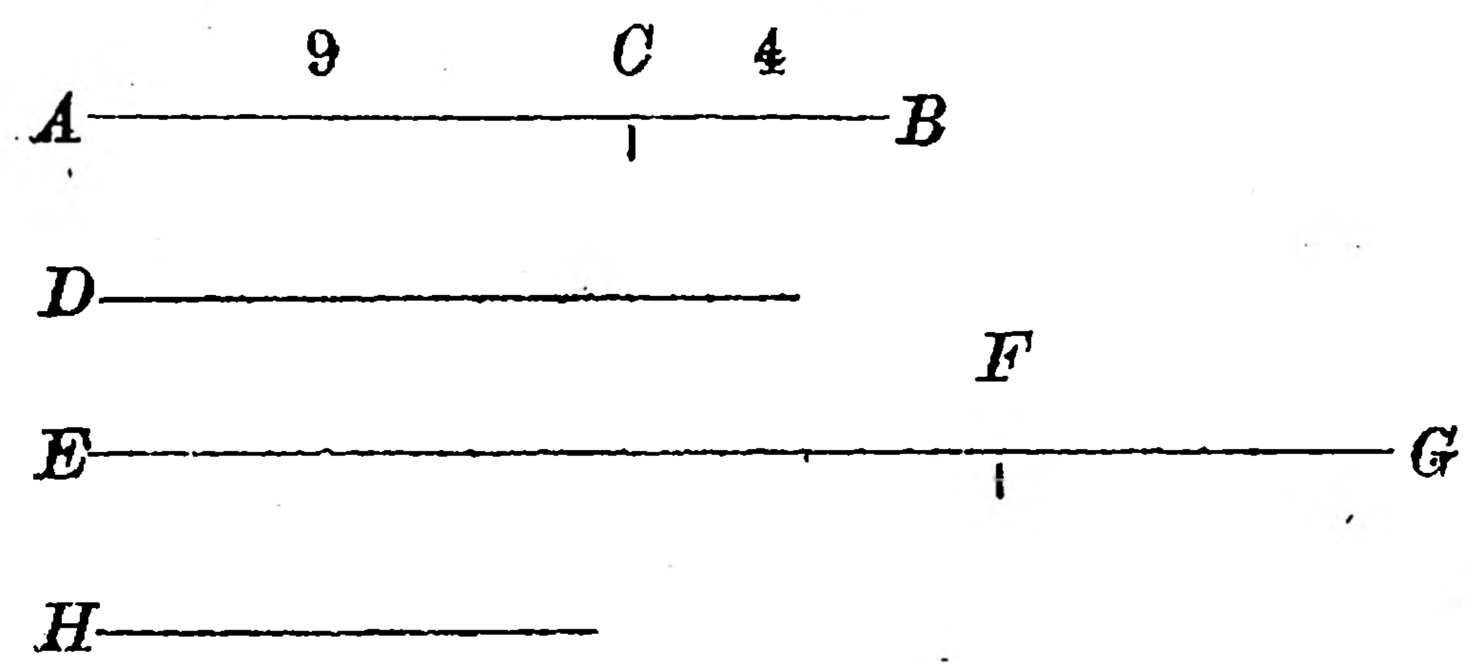
Предложеніе 53. Найти пятую биноміальную (фиг. 366)?

Рѣшеніе. Возьмемъ два числа AC и CB, коихъ сумма ни къ одному изъ чиселъ AC и CB не относится какъ квадратныя числа. Пусть D будетъ данная раціональная прямая и GF прямая по длинѣ соизмѣримая съ D, пусть далѣе будетъ (кн. 10, пред. 6):

$$AC : AB = \square GF : \square EF \tag{1}$$

я говорю, что прямая EG, составленная изъ отрѣзковъ EF и GF и будетъ искомая пятая биноміальная.

Фиг. 366.



Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ, какъ выше было показано, что прямыя GF и EF раціональны, соизмѣримы только въ степени, слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая EG есть биноміальная, коей члены суть EF и GF. Далѣе изъ той же пропорціи слѣдуетъ, что $\square GF < \square EF$. Если теперь положимъ:

$$\square EF - \square GF = \square H$$

то будемъ имѣть:

$$AB : BC = \square EF : \square H$$

слѣдовательно прямыя EF и H несоизмѣримы (кн. 10, пред. 9). Изъ этого слѣдуетъ, что прямая EF квадратитъ надъ GF на квадратъ, коего сторона H по длинѣ несоизмѣрима съ EF, и какъ прямыя GF и D соизмѣримы, то EG есть искомая *пятая биноміальная.*

Предложеніе 54. Найти шестую биноміальную (фиг. 367)?

Рѣшеніе. Возьмемъ два числа AC и CB коихъ сумма ни къ одному изъ нихъ не относится какъ квадратныя числа. Возьмемъ третье число D, которое не есть квадратное и не относится ни къ одному изъ взятыхъ чиселъ какъ квадратныя числа. Пусть еще C будетъ раціональная прямая и (кн. 10, пред. 6, слѣд.):

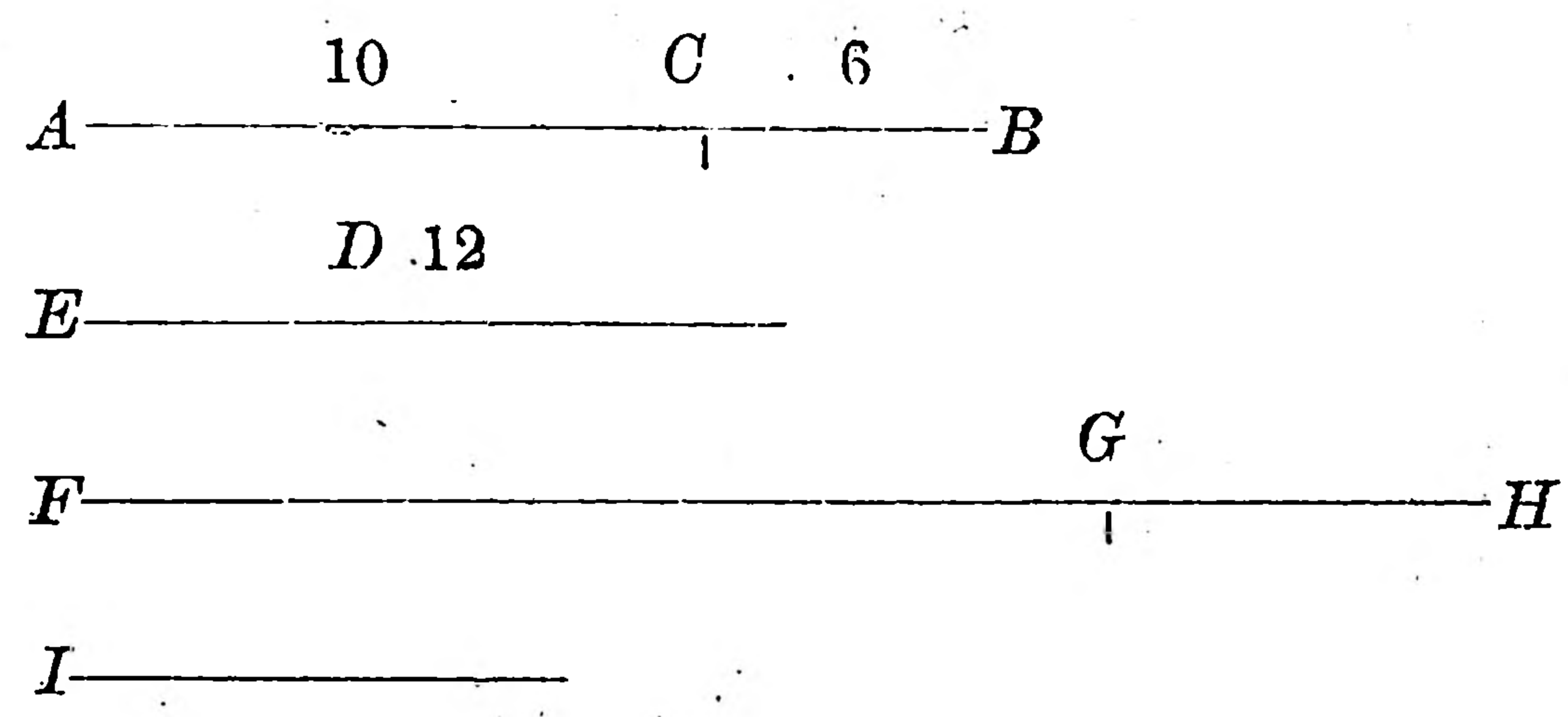
$$D : AB = \square E : \square FG \tag{1}$$

а также:

$$AB : AC = \square FG : \square GH \qquad (2)$$

я говорю, что прямая FH, составленная изъ отрѣзковъ FG и GH и есть искомая *шестая биномiальная.*

Фиг. 367.



Изъ пропорцiи (1) слѣдуетъ, что прямая FG рацiональна, но несоизмѣрима съ E, а изъ пропорцiи (2) слѣдуетъ, что GH рацiональна, но несоизмѣрима съ FG; слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая FG есть биномiальная, коей члены суть FG и GH.

Изъ пропорцiй (1) и (2) слѣдуетъ:

$$D : AC = \square E : \square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя E и GH несоизмѣримы.

Такъ какъ $AB > AC$, то и $\square FG > \square GH$. Пусть $\square FG - \square GH = \square I$, то:

$$AB : BC = \square FG : \square I$$

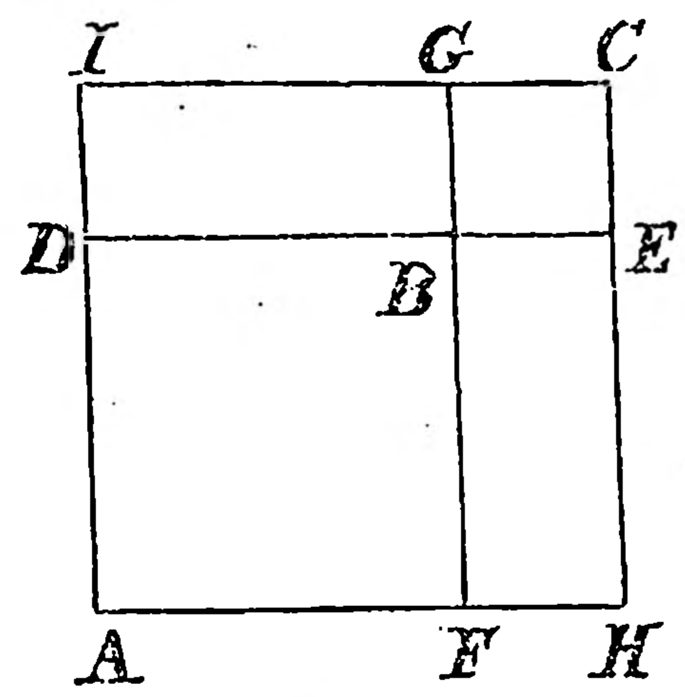
слѣдовательно (кн. 10, пред. 9), FG и I несоизмѣримы. А потому FG квадратитъ надъ GH на квадратъ, коего сторона I несоизмѣрима съ FG. Но мы имѣли, что FG и GH несоизмѣримы съ E, слѣдовательно FH есть шестая биномiальная.

Лемма. Совмѣстимъ два квадрата AB и BC такъ, чтобы ихъ стороны DB и BE составляли одну прямую DE, то и стороны FB и BG составятъ также одну прямую FG (кн. 1, пред. 14). Построимъ параллелограмъ AC. Я говорю, что площадь параллелограма DG будетъ средне-пропорцiональная между площадями квадратовъ AB и BC, а площадь параллелограма DC будетъ средне-пропорцiональная между площадями AC и BC (фиг. 368).

1. Параллелограмъ AC есть квадратъ. Въ самомъ дѣлѣ, $DB = FB$ и $BE = BG$, слѣдовательно и $DE = FG$. Но мы имѣемъ $DE = AH = IC$ и

$FG=AI=HC$. Слѣдовательно AC есть равносторонній четыреугольникъ, но онъ прямоугольный, слѣдовательно онъ есть квадратъ.

Фиг. 368.



2. Мы имѣемъ:

$$AB:DG=DG:BC$$

но

$$FB:BG=DB:BE$$

но мы также имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$FB:BG=AB:DG$$

и

$$DB:BE=DG:BC$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AB:DG=DG:BC$$

3. Мы имѣемъ:

$$AB:DG=DG:BC$$

Такъ какъ $AD=DB=IG$ и $DI=BG=GC$, то:

$$AD:DI=IG:GC$$

откуда:

$$AI:DI=IC:GC.$$

Но мы имѣемъ:

$$AI:DI=AC:DC \quad \text{и} \quad IC:GC=DC:BC$$

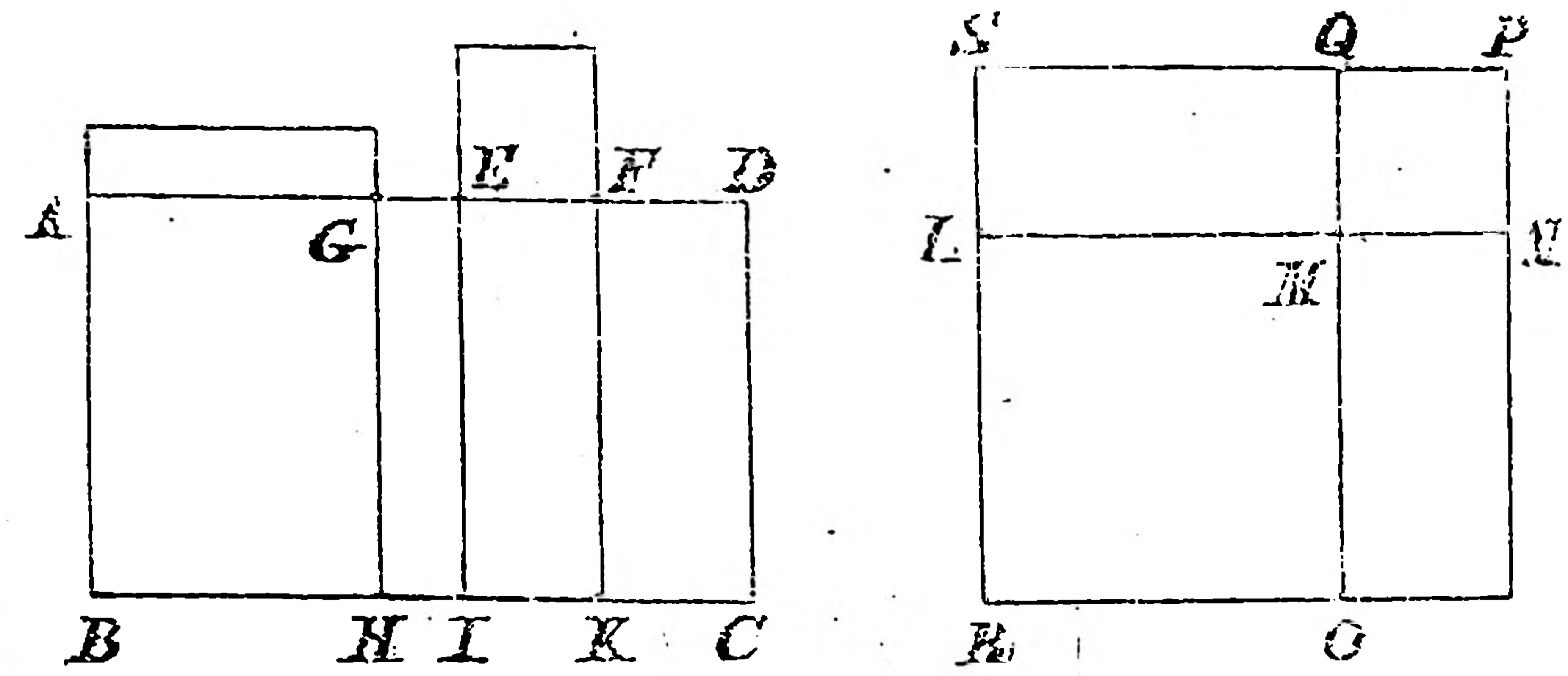
слѣдовательно:

$$AC:DC=DC:BC.$$

Предложеніе 55. Площадь прямоугольника $ABCD$, заключеннаго между раціональною линіею AB и *первою биноміальною* AD, квадратитъ биноміальная прямая (фиг. 369)?

Доказат. Пусть *первая биноміальная* AD въ точкѣ E будетъ раздѣлена на свои члены AE и ED, изъ коихъ AE большій; то (кн. 10, пред. 37) отрѣзки AE и ED будутъ только въ степени соизмѣримы, а также больший членъ AE по длинѣ соизмѣримъ съ раціональною прямою AB и AE квадратитъ надъ ED на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AE.

Фиг. 369.



Раздѣлимъ прямую ED въ точкѣ F пополамъ, и (кн. 6, пред. 28) построимъ прямоугольникъ$=\frac{1}{4}\square ED=\square EF$, коего дополненіе есть квадратъ, построенный на AE, поэтому, если $AG.GE$ есть такой прямоугольникъ, то AG и GE по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 18). Чрезъ точки G, E, F проведемъ параллельныя GH, EI, FK прямой AB или CD.

Построимъ (кн. 2, пред. 14) квадраты $RM=AH$ и $MP=GI$ и помѣстимъ ихъ такъ, чтобы прямыя LM и MN, а слѣдовательно и QM и MO составляли прямыя линіи и дополнимъ параллелограмъ RP, то этотъ параллелограмъ будетъ (кн. 10, пред. 54, слѣд.) квадратъ.

Теперь надобно показать, что прямая LN квадратитъ площадь AC и составлена изъ прямыхъ LM и LN только въ степени соизмѣримыхъ, слѣдовательно LN есть биноміальная.

1. Такъ какъ $AG.GE=\square EF$, то (кн. 6, пред. 17):

$$AG:EF=EF:GE$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 1):

$$AH:EK=EK:GI$$

откуда видимъ, что EK есть величина средне-пропорціональная между AH и GI, но $AH=RM$ и $GI=MP$, слѣдовательно EK есть средне-пропорціональная между RM и MP. Но LQ (кн. 10, пред. 54, слѣд.) есть средне-пропорціональная также между RM и MP, слѣдовательно $EK=LQ$. Такъ какъ (кн. 1, пред. 36) $EK=FC$ и (кн. 1, пред. 43) $LQ=ON$, то $FC=ON$. Слѣдовательно $EK+FC=EC=LQ+ON$. Но по условію мы имѣемъ $AH=RM$ и $GI=MP$. Слѣдовательно:

$$AC=RP=\square LN$$

т. е. LN квадратитъ площадь AC.

2. Такъ какъ прямыя AG и GE соизмѣримы, (кн. 10, пред. 16) то прямая AE соизмѣрима съ обѣими, а по условію AE соизмѣрима съ AB, слѣдовательно AG и GE соизмѣримы съ AB, а также раціональны, слѣдовательно (кн. 10, пред. 20) AH и GI раціональны и (кн. 10, пред. 10) соизмѣримы. Но $AH=RM$ и $GI=MP$, слѣдовательно RM и MP, т. е. $\square LM$ и $\square MN$ *раціональны* и *соизмѣримы*.

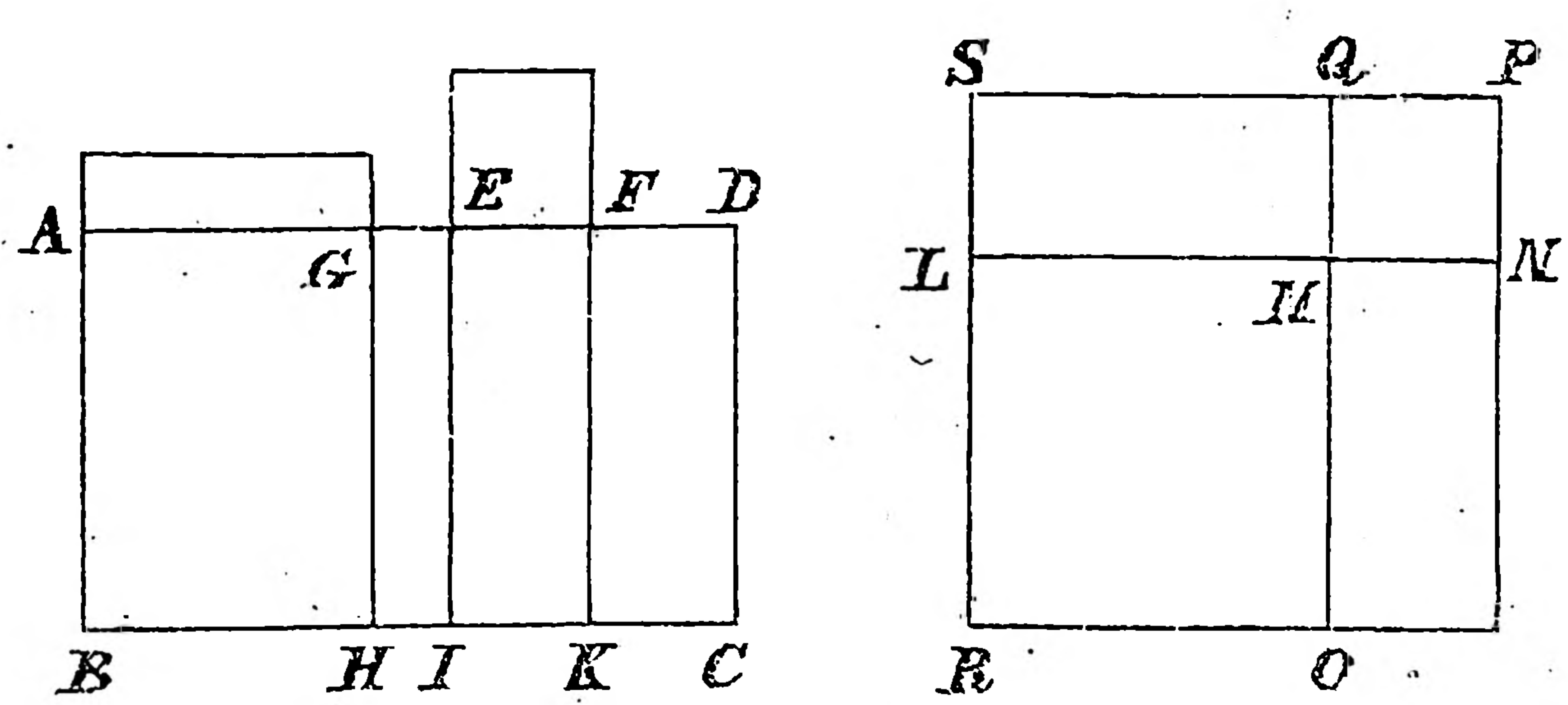
Такъ какъ (кн. 10, пред. 37) прямыя AE и ED несоизмѣримы, а AE и AG соизмѣримы, а также соизмѣримы и ED и EF, то AG и EF несоизмѣримы, слѣдовательно несоизмѣримы AH и EK, т. е. RM и LQ. Но мы имѣемъ:

$$RM : LQ = OM : MQ$$

откуда видимъ, что OM и MQ, т. е. LM и MN несоизмѣримы, слѣдовательно LM и MN только въ степени соизмѣримы, а изъ этого слѣдуетъ, что прямая LN, квадратящая площадь AC, составлена изъ двухъ раціональныхъ прямыхъ, соизмѣримыхъ только въ степени, слѣдовательно она есть *биноміальная* (кн. 10, пред. 37).

Предложеніе 56. Площадь прямоугольника $ABCD$, заключеннаго между раціональною прямою AB и *второю биноміальною* AD, квадратитъ *первая биноміальная* (фиг. 370).

Фиг. 370.



Доказат. Сдѣлаемъ тоже построеніе какъ и въ предъидущемъ предложеніи, то разница будетъ только въ томъ, что здѣсь *меньшій членъ* ED будетъ соизмѣримъ по длинѣ съ взятою раціональною прямою AB. Точно также будетъ доказано, что прямая LN квадратитъ площадь AC. Слѣдовательно остается показать, что прямая LN составлена изъ среднихъ прямыхъ LM и MN, соизмѣримыхъ только въ степени и что $LM.MN$ есть раціональная площадь, а слѣдовательно LN есть *первая бимедіальная*.

1. Такъ какъ (кн. 10, пред. 37) прямыя AE и ED несоизмѣримы, а прямыя ED и AB соизмѣримы, то (кн. 10, пред. 14) прямыя AE и AB несоизмѣримы.

Но, AG и GE соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 16)

AG и GE соизмѣримы съ AE и раціональны какъ и сама прямая AE. Откуда слѣдуетъ, что AG и GE съ AB по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно AB, AG, GE суть раціональныя, только въ степени соизмѣримыя линіи, а слѣдовательно (кн. 10, пред. 22) AH и GI, т. е. RM и MP, а также LM и MN суть *среднія.*

Такъ какъ AG соизмѣрима съ GE, то AH соизмѣрима съ GI, т. е. RM соизмѣрима съ MP, т. е. $\square LM$ соизмѣримъ съ $\square MN$. Слѣдовательно прямыя LM и MN соизмѣримы въ степени. Такъ какъ AE несоизмѣрима съ ED, а AE соизмѣрима съ AG, и ED соизмѣрима съ EF, то AG несоизмѣрима съ EF, слѣдовательно AH и EK несоизмѣримы, т. е. RM и LQ или OM и MQ, или LM и MN также несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя LM и MN только въ степени соизмѣримы.

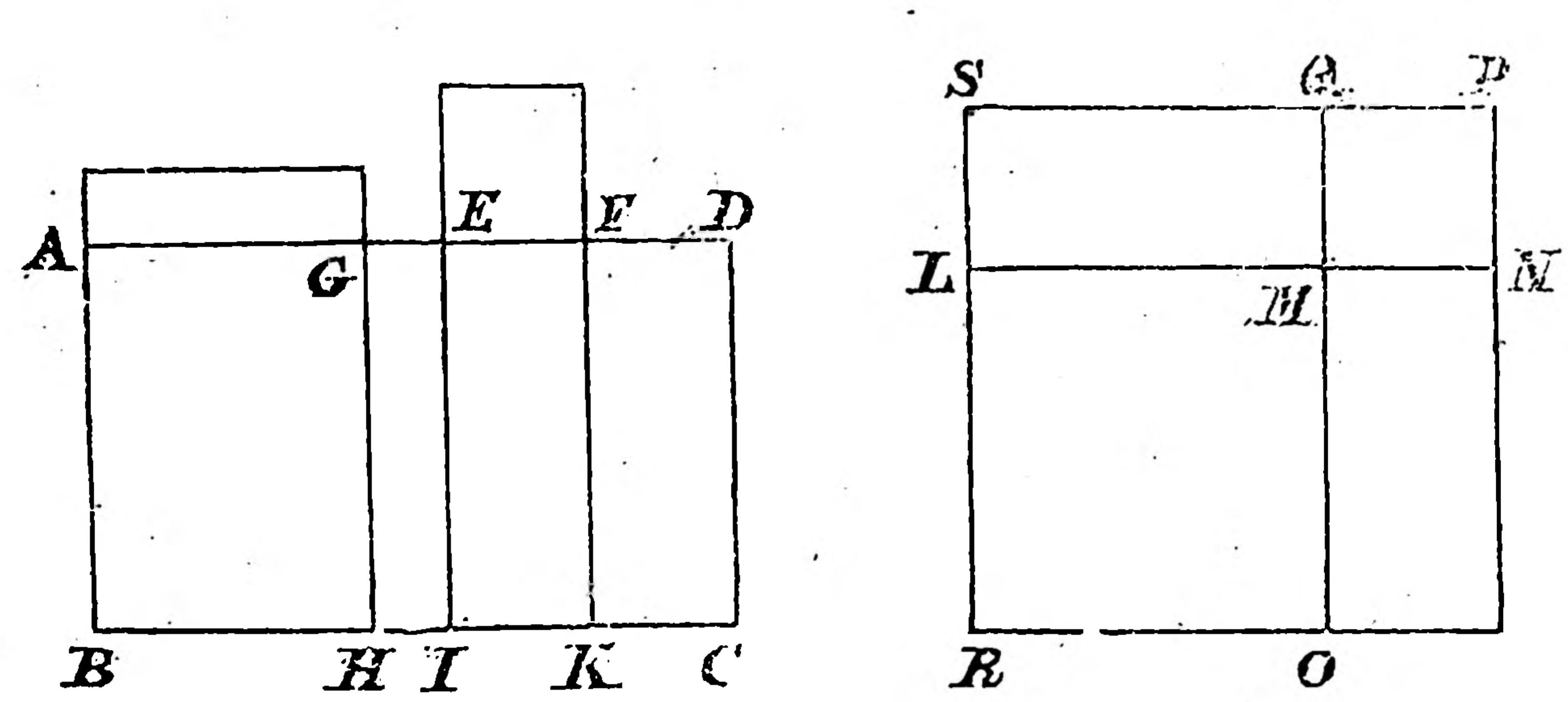
2. Такъ какъ прямая DE соизмѣрима съ AB и EF, то EF и EI соизмѣримы и раціональны. Слѣдовательно EK (кн. 10, пред. 20), т. е. $LQ = LM . MN$ есть раціональная площадь.

Изъ этого видимъ, что прямая LN, квадратящая площадь AC составленная изъ двухъ среднихъ, только въ степени соизмѣримыхъ линій, содержащихъ раціональный прямоугольникъ, (кн. 10, пред. 38) есть *первая биноміальная.*

Предложеніе 57. Площадь прямоугольника $ABCD$, заключеннаго между раціональною прямою AB и *третьею биноміальною* AD, квадратитъ *вторая бимедіальная* (фиг. 371).

Доказат. Сдѣлаемъ тоже построеніе, какъ и въ предъидущей теоремѣ, то все останется какъ и тамъ, съ тою только разницею, что здѣсь члены AE и ED не будутъ соизмѣримы по длинѣ съ раціональною линіею AB. Также точно какъ и тамъ можно доказать, что прямая LN квадратитъ площадь AC и что LN составлена изъ среднихъ LM и MN соизмѣримыхъ только въ степени. Остается только показать, что $LM . MN$ есть средняя площадь, а слѣдовательно прямая LN есть *вторая бимедіальная.*

Фиг. 371.



Такъ какъ прямая DE несоизмѣрима съ AB и EI, но соизмѣрима съ EF, то прямыя EI и EF несоизмѣримы. Прямыя EI и EF раціональны, слѣдовательно онѣ соизмѣримы только въ степени. Откуда видимъ, что EK, т. е. $LQ=LM.MN$ есть *средняя* площадь.

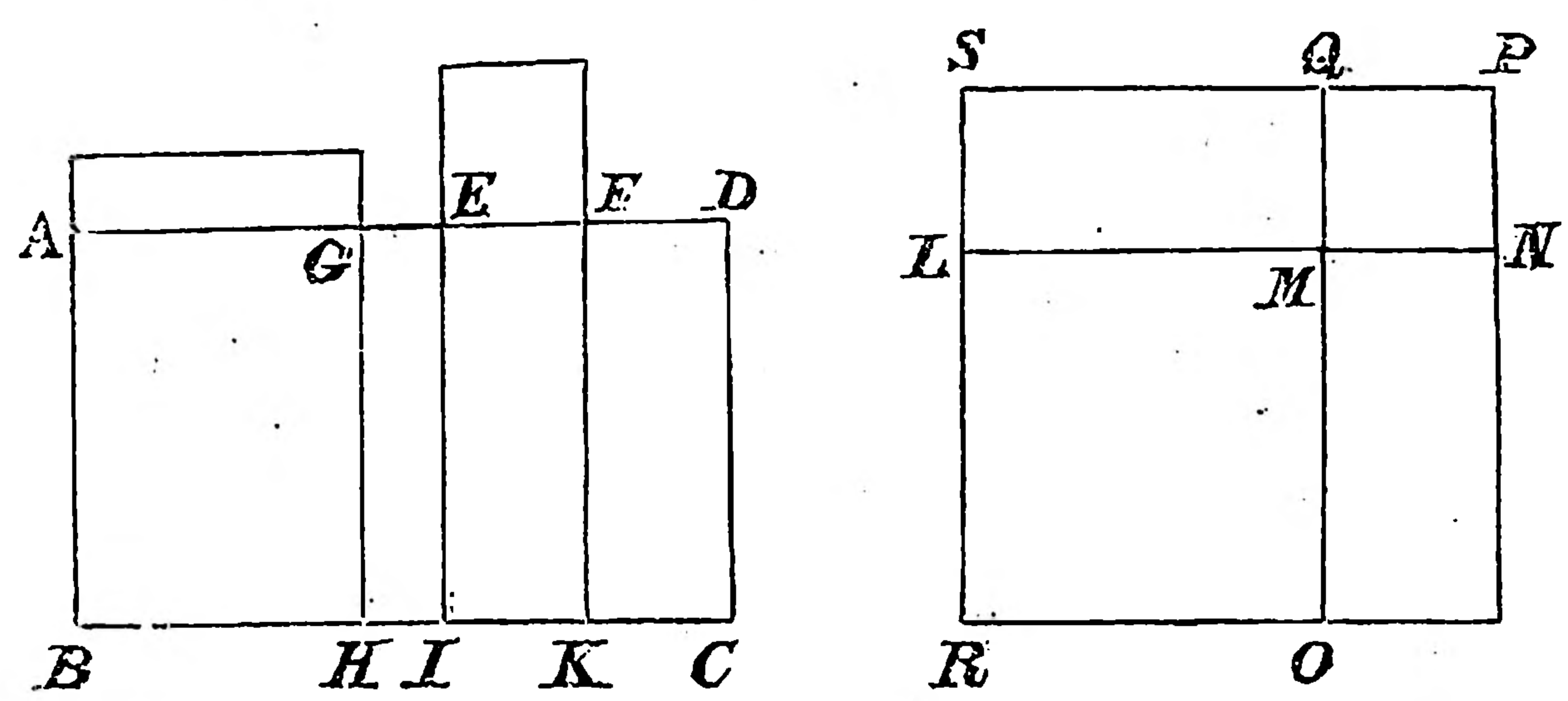
Итакъ видимъ, что прямая LN, квадратящая площадь AC, составлена изъ двухъ среднихъ прямыхъ, соизмѣримыхъ только въ степени и заключающихъ *среднюю* площадь, слѣдовательно она есть *вторая бимедіальная.*

Предложеніе 58. Площадь прямоугольника $ABCD$, заключеннаго между раціональною прямою AB и *четвертою биноміальною* AD, квадратитъ *наибольшая ирраціональная* (фиг. 372).

Доказат. Сдѣлаемъ построеніе такое, какое сдѣлано въ 55-мъ предложеніи, то все останется какъ тамъ, только съ тою разницею, что *большій членъ* AE, который здѣсь по длинѣ соизмѣримъ съ раціональною прямою AB, квадратитъ надъ меньшимъ членомъ ED на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AE, слѣдовательно (кн. 10, пред. 19) прямыя AG и GE несоизмѣримы.

Точно также какъ и тамъ можно доказать, что LN квадратитъ площадь AC. Остается только показать, что прямыя LM и MN, составляющія прямую LN несоизмѣримы въ степени и содержатъ *среднюю* площадь, но сумма ихъ квадратовъ есть *раціональная площадь*, слѣдовательно LN есть *наибольшая ирраціональная.*

Фиг. 372.



Такъ какъ AG и GE несоизмѣримы, то (кн. 1, пред. 6 и кн. 10, пред. 10) AH и GI, т. е. BM и MP, т. е. $\square LM$ и $\square MN$ несоизмѣримы.

Такъ какъ AE и AB несоизмѣримы, то AI, т. е. $\square LM+\square MN$ есть раціональная площадь.

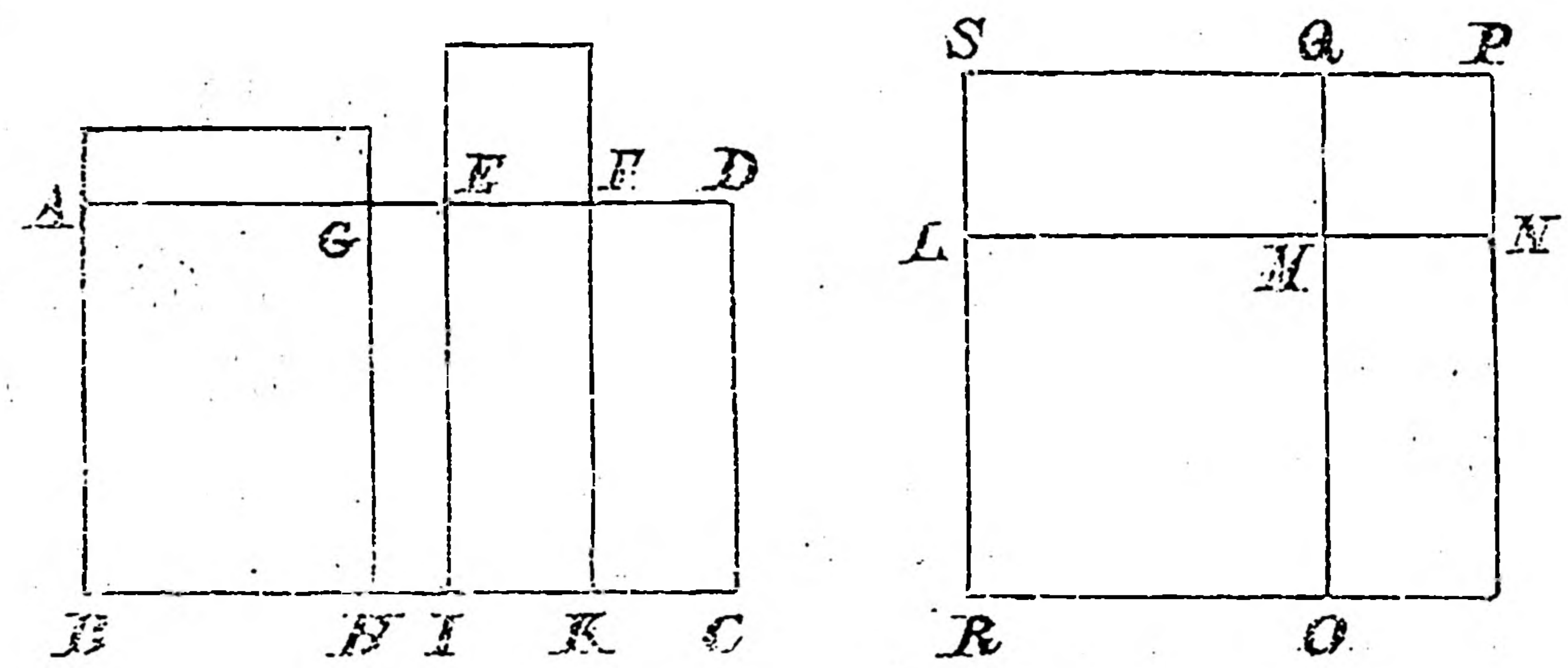
Такъ какъ DE несоизмѣрима съ AB, т. е. съ EI, а соизмѣрима съ EF, то EF и EI несоизмѣримы. Слѣдовательно EF и EI суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 22), что $KE=LQ=LM.MN$ есть *средняя* площадь.

Изъ показаннаго слѣдуетъ, что прямая LN, квадратящая площадь AC, составлена изъ двухъ прямыхъ несоизмѣримыхъ въ степени, содержащихъ среднюю площадь и коихъ сумма квадратовъ есть раціональная площадь, есть *наибольшая ирраціональная* (кн. 10, пред. 40).

Предложеніе 59. Площадь прямоугольника $ABCD$, заключеннаго между раціональною прямою AB и *пятою биноміальною* AD, квадратитъ прямая степенящая *раціональную* и *среднюю* площадь (фиг. 373).

Доказат. Сдѣлаемъ тоже построеніе, что и въ 58 предложеніи, то все будетъ какъ и тамъ, но только здѣсь *меньшій членъ* ED соизмѣримъ съ прямою AB. Точно также можно доказать, какъ и выше, что LN квадратитъ площадь AC. Остается только показать, что LM и MN несоизмѣримы въ степени, содержатъ раціональную площадь и сумма ихъ квадратовъ есть *средняя* площадь, слѣдовательно LN будетъ *степенящая раціональную* и *среднюю площадь*.

Фиг. 373.



Такъ какъ AG и GE несоизмѣримы, то AH и HE, т. е. $\square LM$ и $\square MN$ также несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя LM и MN несоизмѣримы въ степени.

Такъ какъ ED и AB соизмѣримы, а AE и ED несоизмѣримы, то AB и AE несоизмѣримы. Слѣдовательно AB и AE суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя. Откуда $AI = \square LM + \square MN$ есть *средняя* площадь.

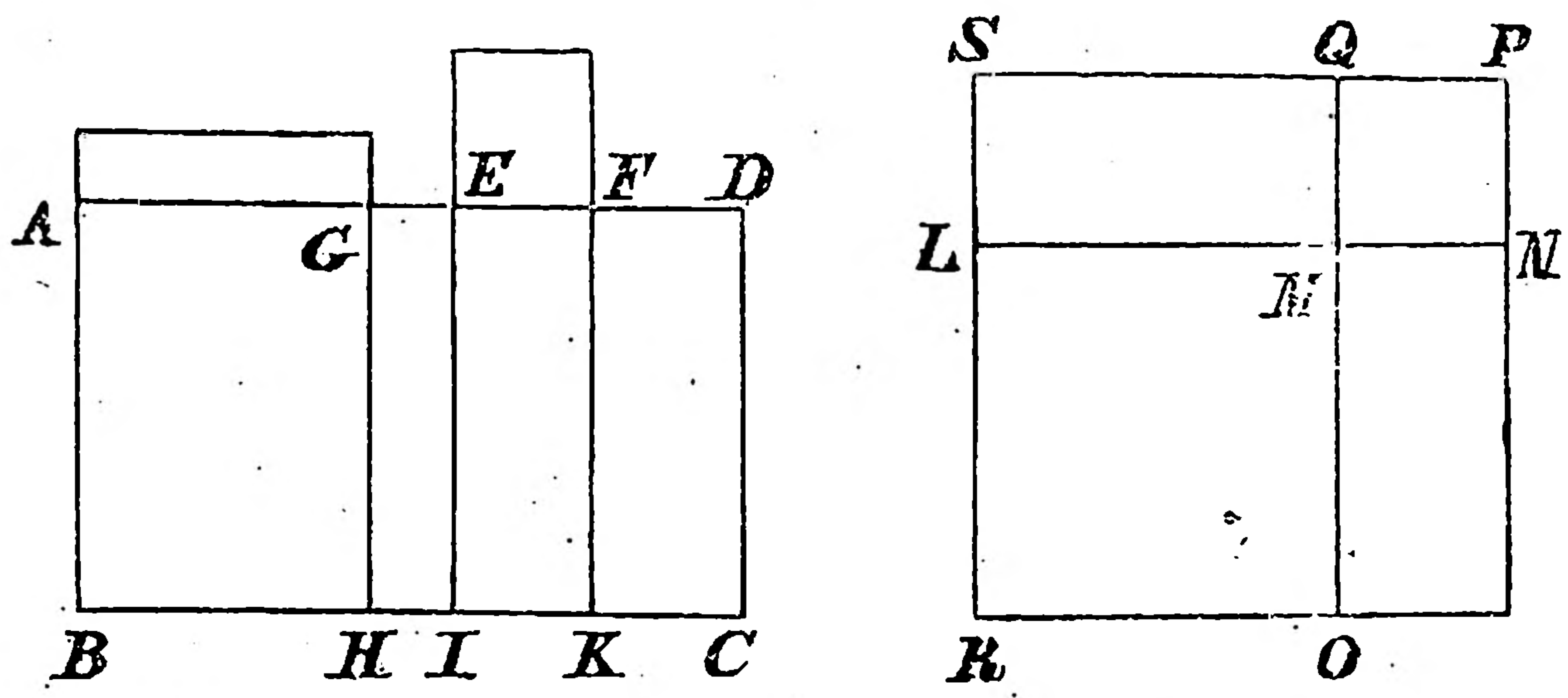
Но такъ какъ DE и AB соизмѣримы, т. е. DE и EI соизмѣримы и DE и EF также соизмѣримы, то EI и EF соизмѣримы; но EI есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 20) $EK = LQ = LM \, . \, MN$ есть раціональная площадь.

Изъ этого видимъ, что прямая LN, квадратящая площадь AC, составлена изъ двухъ прямыхъ LM и MN несоизмѣримыхъ въ степени, содержащихъ раціональную площадь и коихъ сумма квадратовъ есть *средняя* площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 41) она есть *степенящая раціональную* и *среднюю* площадь.

Предложеніе 60. Площадь прямоугольника $ABCD$, заключеннаго между раціональною прямою AB и *шестою биноміальною* AD, квадратитъ *степенящая* двѣ *среднія* (фиг. 374).

Доказат. Сдѣлаемъ тоже построеніе что и въ 58-мъ предложеніи, только здѣсь оба члена по длинѣ несоизмѣримы съ AB. Точно также, какъ и выше, можно доказать, что LN квадратитъ площадь AC. Остается только показать, что LM и MN несоизмѣримы въ степени и что сумма ихъ квадратовъ составляетъ *среднюю* площадь, но LM и MN содержатъ среднюю площадь несоизмѣримую съ суммою квадратовъ, слѣдовательно прямая LN будетъ *степенящая двѣ среднія* площади.

Фиг. 374.



Такъ какъ GA и GE несоизмѣримы только въ степени, то LM и MN соизмѣримы въ степени.

Такъ какъ AE и AB несоизмѣримы только въ степени, то онѣ раціональны, откуда (кн. 10, пред. 22) $AI = \square LM + \square MN$ есть *средняя* площадь.

Такъ какъ ED и AB по длинѣ несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы ED и EI, а ED и EF соизмѣримы по длинѣ, то EI и EF несоизмѣримы только въ степени. Слѣдовательно EI и EF суть раціональныя прямыя соизмѣримыя только въ степени. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 20), что $EK = LQ = LM \,.\, MN$ есть *средняя* площадь.

Но, такъ какъ EA по длинѣ несоизмѣрима съ EF и AI по длинѣ несоизмѣрима съ EK, то $LM \,.\, MN$ есть площадь несоизмѣримая съ площадью $\square LM + \square MN$.

Изъ этого видимъ, что прямая LN, квадратящая площадь AC, составлена изъ двухъ прямыхъ LM и MN несоизмѣримыхъ въ степени, которыхъ сумма квадратовъ составляетъ среднюю площадь и которыя сами содержатъ среднюю площадь несоизмѣримую съ предъидущей, а потому (кн. 10, пред. 42) LN есть *степенящая двѣ среднія*.

Лемма. Если прямую AB раздѣлимъ въ точкѣ C на два неравные отрѣзка AC и CB, то сумма квадратовъ, построенныхъ на этихъ отрѣзкахъ, больше удвоеннаго прямоугольника, котораго онѣ суть стороны (фиг. 375).

Доказат. Раздѣлимъ прямую AB въ точкѣ D пополамъ, то будемъ имѣть (кн. 2, пред. 5):

$$AC.CB+\square CD=\square AD$$

слѣдовательно:

$$AC.CB<\square AD$$

или

$$2(AC.CB)<2\square AD.$$

Фиг. 375.

Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 9):

$$\square AC+\square CB=2(\square AD+\square DC)$$

слѣдовательно:

$$\square AC+\square CB>2(AC.CB).$$

Предложеніе 61. Прямоугольникъ $DEFG$, построенный на раціональной прямой ED, равный квадрату построенному на *биноміальной* прямой AB, будетъ имѣть высоту DG *первую биноміальную* (фиг. 376).

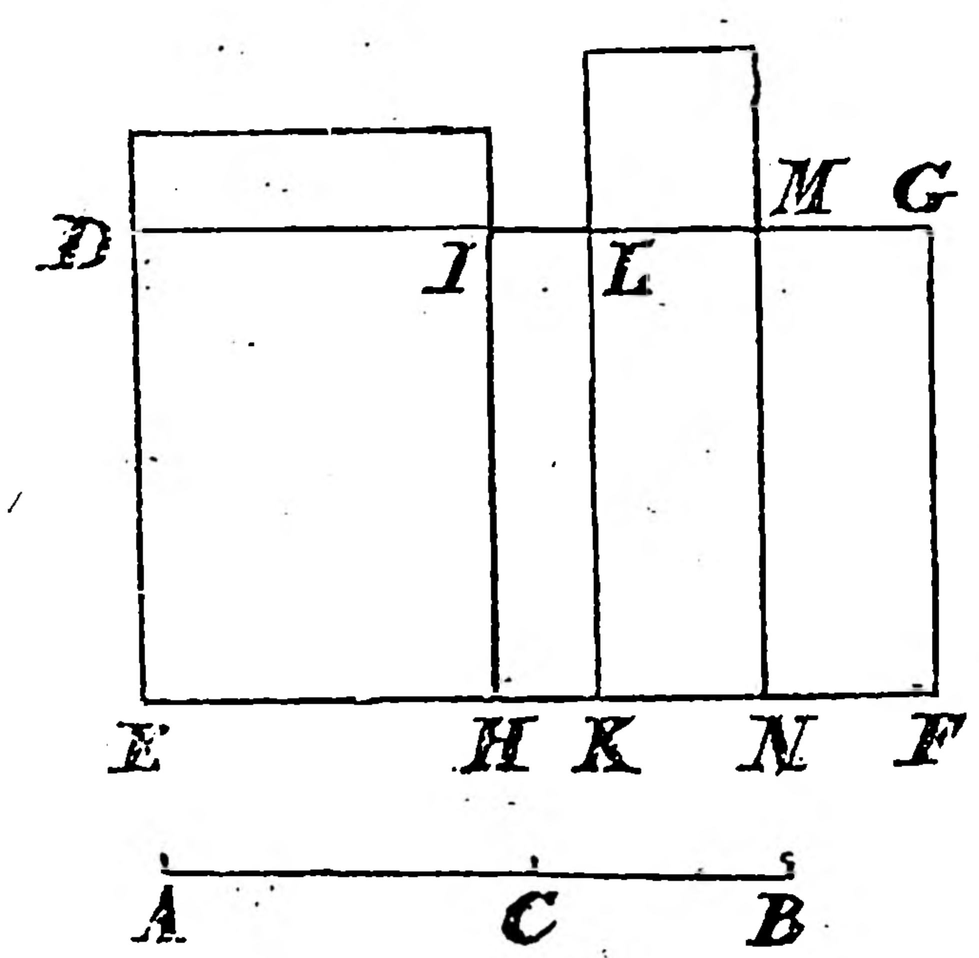
Доказат. Пусть *биноміальная* AB въ точкѣ C раздѣлена на свои члены AC и CB такъ, что AC есть большій членъ. На DE построимъ прямоугольники:

$$DH=\square AC \quad \text{и} \quad IK=\square CB$$

то, потому что $2(AC.CB)=LF$ (кн. 2, пред. 4), $\square AB=DEFG$.

Раздѣлимъ LG въ точкѣ M пополамъ и проведемъ MN параллельно LK или GF, то будемъ имѣть $AC.CB=LN=MF$. Теперь надобно доказать:

Фиг. 376.



1. Что DG есть *биноміальная*. Такъ какъ AB есть биноміальная прямая, то (кн. 10, пред. 37) AC и CB суть раціональныя, только въ степени соизмѣримыя прямыя, слѣдовательно $\square AC$ и $\square CB$ раціональны и

соизмѣримы. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 16), что $\square AC + \square CB$ есть площадь соизмѣримая какъ съ $\square AC$, такъ и съ $\square CB$; слѣдовательно $\square AC + \square CB = DK = ED . DL$ есть раціональная площадь, но ED раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21) DL есть раціональная прямая соизмѣримая съ DE.

Такъ какъ AC и CB раціональны и только въ степени соизмѣримы, то $2(AC . CB) = LF = LK . LG = ED . LG$ есть *средняя* площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) LG есть раціональная прямая несоизмѣримая съ ED. Но раціональныя прямыя DL и ED соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 13) DL и LG несоизмѣримы. Изъ этого видимъ, что DL и LG суть прямыя раціональныя и соизмѣримыя только въ степени, а слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) DG есть *биноміальная.*

2. Что DG есть *первая биноміальная.*

Такъ какъ, $\square AC : AC . CB = AC . CB : \square CB$ (кн. 10, пред. 54, слѣд. 2), т. е.:

$$DH : LN = LN : IK$$

то (кн. 6, пред. 1):

$$DI : LM = LM : IL$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 17) $DI . LI = \square LM = \frac{1}{4} \square LG$.

Далѣе, такъ какъ $\square AC$ соизмѣримъ съ $\square CB$, т. е. DH соизмѣримы съ IK, то (кн. 10, пред. 10) DI и LI соизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 60, слѣд.):

$$\square AC + \square CB > 2(AC . CB)$$

т. е. $DK > LF$, то $DL > LG$.

Откуда видимъ (кн. 10, пред. 18), что DL квадратитъ надъ LG на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ DL. Но DL и LG раціональны, и DL соизмѣрима съ DE, слѣдовательно DG есть *первая биноміальная.*

Предложеніе 62. Прямоугольникъ $DEFG$, построенный на раціональной прямой ED, коего площадь равна площади квадрата построеннаго на *первой бимедіальной* AB, имѣетъ высоту DG *вторую биноміальную* (фиг. 377).

Доказат. Сдѣлавъ тоже построеніе, что и въ 61 предложеніи, слѣдуетъ доказать:

1. Что прямая DG есть *биноміальная.*

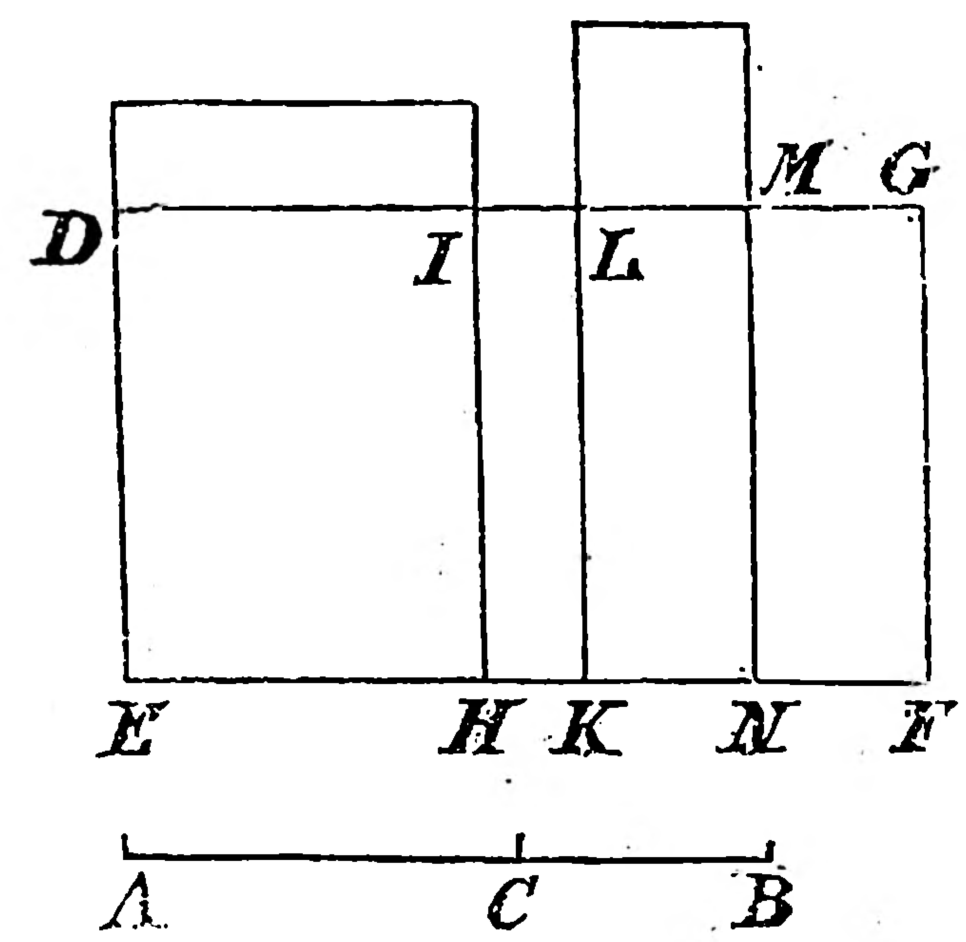
Такъ какъ AB есть *первая бимедіальная*, то (кн. 10, пред. 38) ея члены AC и CB суть *средніе*, только въ степени соизмѣримыя линіи, заключающія раціональный прямоугольникъ. Но:

$$\square AB + \square BC = DK = ED . DL$$

есть средняя площадь, но, какъ ED есть раціональная прямая, то DL будетъ также раціональная (кн. 10, пред. 23) съ ED несоизмѣримая прямая. Далѣе:

$$2(AB\,.\,BC)=LF=KL\,.\,LG=ED\,.\,LG$$

Фиг. 377.



есть раціональная площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21) и LG будетъ раціональная прямая съ ED по длинѣ соизмѣримая. Откуда слѣдуетъ (кн. 10, пред. 13), что DL по длинѣ несоизмѣрима съ LG, слѣдовательно DL и LG суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, откуда (кн. 10, пред. 37) DG есть *биноміальная.*

2. Что DG есть *вторая биноміальная.*

Такъ какъ (кн. 10, пред. 60, слѣд.):

$$\square AC+\square BC>2(AC\,.\,CB)$$

т. е.

$$DK>LF, \text{ то } DL>LG.$$

Такъ какъ $\square AC$ соизмѣримъ съ $\square BC$, т. е. DH соизмѣрима съ IK то и прямая DI соизмѣрима съ IL. Наконецъ мы имѣемъ еще $DI\,.\,LI=$ $=\square LM=\frac{1}{4}\square LG$. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 18) прямая DL квадратитъ надъ прямою LG на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ DL. Но LG и ED соизмѣримы, а потому DG есть *вторая биноміальная.*

Предложеніе 63. Прямоугольникъ $DEFG$, построенный на раціональной прямой ED, равный квадрату построенному на *второй бимедіальной* AB, имѣетъ высотою DG *третью биноміальную* (фиг. 378).

Доказат. Все какъ въ 61 предложеніи, а слѣдуетъ доказать:

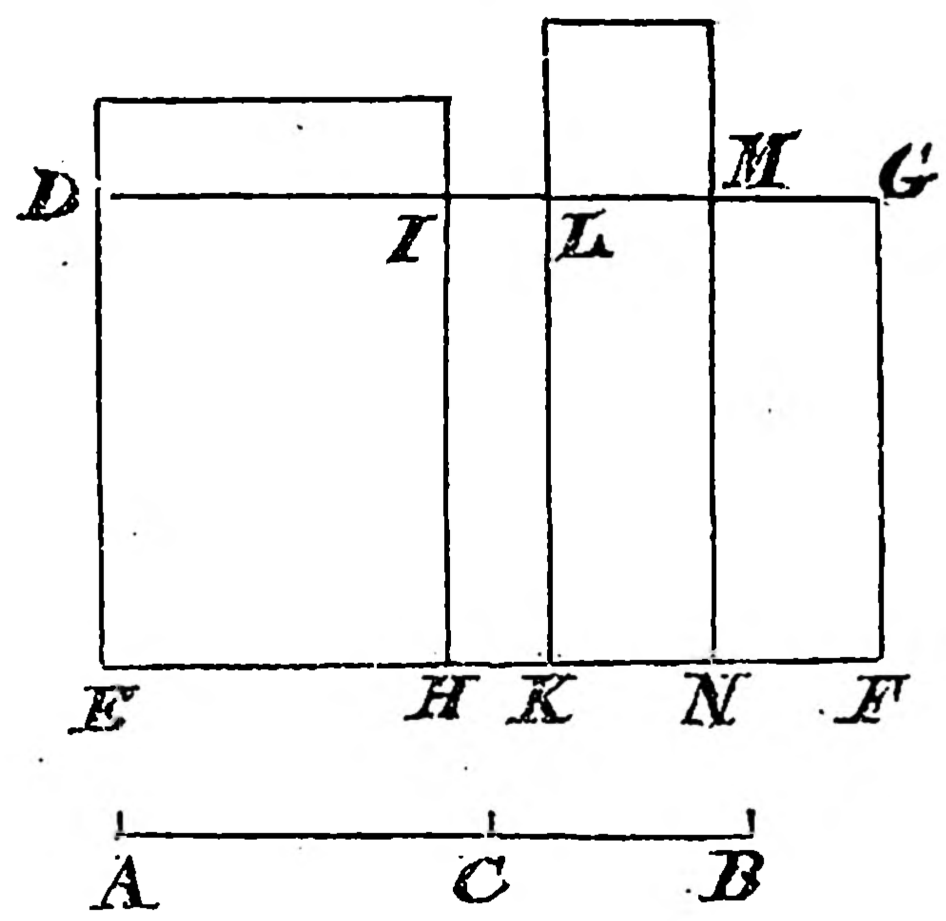
1. Что DG есть *биноміальная.*

Такъ какъ AB есть *вторая бимедіальная*, то ея части AC и CB (кн. 10, пред. 39) суть *среднія*, только въ степени соизмѣримыя прямыя, заключающія *средній* прямоугольникъ. Но мы имѣемъ:

$$\square AC+\square CB=DK=ED\,.\,DL$$

есть *средняя* площадь, слѣдовательно, какъ ED раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 23) DL также раціональная прямая несоизмѣримая съ ED.

Фиг. 378.



По той же причинѣ LG есть раціональная прямая съ ED несоизмѣримая. Слѣдовательно прямыя DL и LG раціональны по длинѣ несоизмѣримы съ ED. Такъ какъ (кн. 6, пред. 1);

$$AC:CB=\square AC:AC.CB$$

а AC и CB несоизмѣримы, то несоизмѣримы также и $\square AC$ съ $AC.CB$ и $\square AC+\square CB$ несоизмѣримы съ $2(AC.CB)$, т. е. несоизмѣримы DK съ LF, а также и DL съ LG несоизмѣримы. Откуда видимъ, что DL и LG суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) DG есть *биноміальная* прямая.

2. Что DG есть *третяя биноміальная.*

Точно также, какъ и въ 61 предложеніи можно заключить, что $DL>LG$ и что DI и IL несоизмѣримы. Мы имѣемъ:

$$DI.IL=\square LM=\tfrac{1}{4}\square LG.$$

Слѣдовательно (кн. 10, пред. 18) DL квадратитъ надъ LG на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ DL. Но мы видѣли, что DL и LG по длинѣ несоизмѣримы съ ED, слѣдовательно DG есть *третяя биноміальная.*

Предложеніе 64. Прямоугольникъ $DEFG$, построенный на раціональной прямой ED, равный квадрату построенному на *большей ирраціональной* AB, имѣетъ высотою DG *четвертую биноміальную* (фиг. 379).

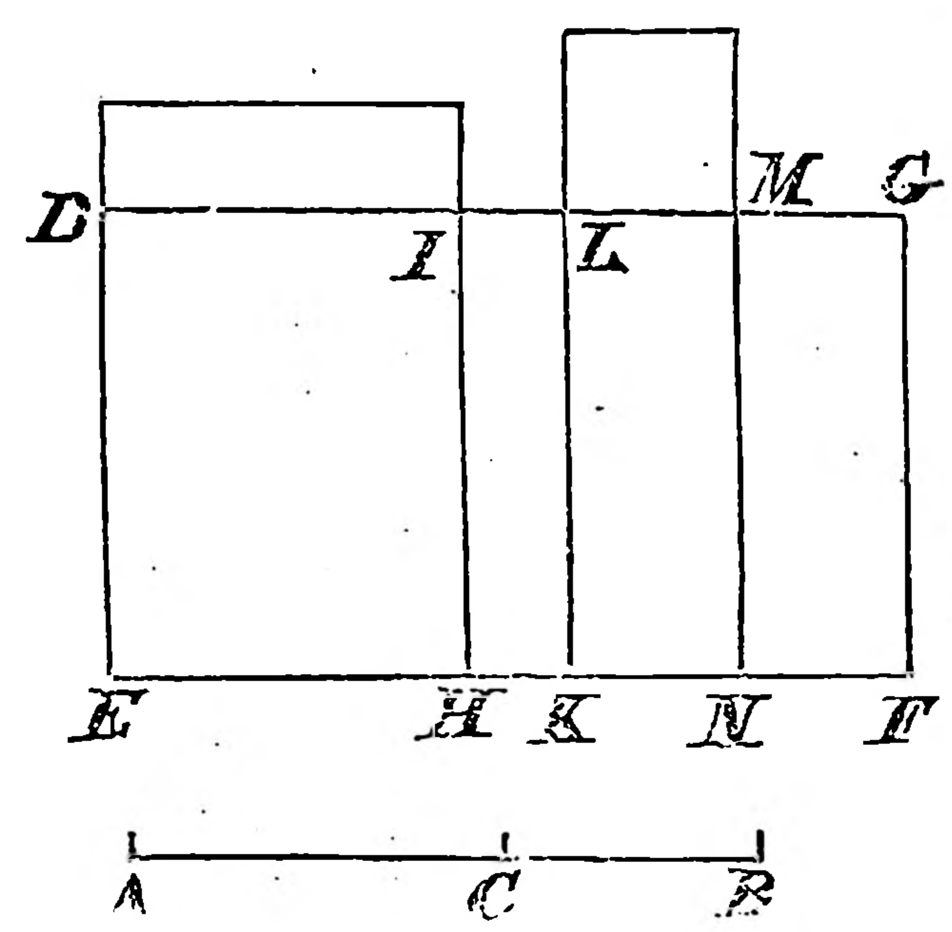
Доказат. Тоже построеніе что и въ 61 предложеніи; а слѣдуетъ доказать:

1. Что DG есть *биноміальная* прямая.

Такъ какъ AB есть *большая ирраціональная*, то (кн. 10, пред. 40) ея члены AC и CB несоизмѣримы въ степени, онѣ содержатъ *средній* прямоугольникъ и сумма ихъ квадратовъ раціональна. Мы имѣемъ:

$$\square AC+\square CB=DK=ED\,.\,DL$$

Фиг. 379.



слѣдовательно DK есть раціональная площадь, откуда (кн. 10, пред. 21) DL есть раціональная прямая соизмѣримая по длинѣ съ ED. Но:

$$2(AC\,.\,CB)=LF=ED\,.\,LG$$

есть *средняя* площадь, а ED есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) прямая LG раціональна и съ ED несоизмѣримая. Слѣдовательно прямыя DL и LG несоизмѣримы, а потому DL и LG раціональны и только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) DG есть *биноміальная* прямая.

2. Что DG есть *четвертая биноміальная*.

Точно также какъ и въ предъидущемъ предложеніи можно заключить, что $DL>LG$ и $DI\,.\,IL=\square LM=\frac{1}{4}\square LG$. Также и здѣсь $\square AC$ и $\square CB$ несоизмѣримы, т. е. DH и IK несоизмѣримы, а слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя DI и IL. Откуда слѣдуетъ (кн. 10, пред. 19), что DL квадратитъ надъ LG на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ DL. Но мы видѣли, что DL и ED соизмѣримы по длинѣ, слѣдовательно DG есть *четвертая биноміальная*.

Предложеніе 65. Прямоугольникъ $DEFG$, построенный на раціональной прямой ED, равный квадрату построенному на *раціональной средней степенящей* AB, имѣетъ высотою DG *пятую биноміальную* (фиг. 380).

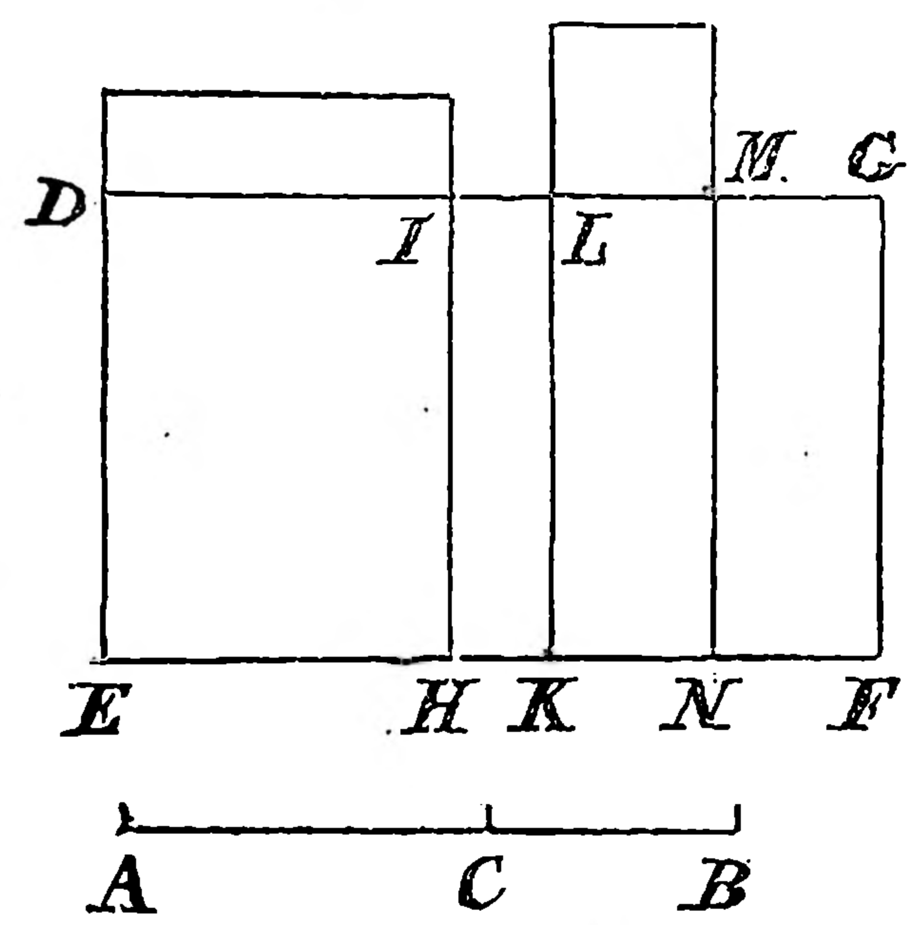
Доказат. Сдѣлавъ тоже построеніе, что и въ 61 предложеніи, а слѣдуетъ доказать:

1. Что DG есть *биноміальная прямая*.

Такъ какъ AB есть *раціональная* и *средняя степенящая*, то (кн. 10, пред. 41) ея члены AC и CB въ степени несоизмѣримы и заключаютъ раціональный прямоугольникъ, а сумма ихъ квадратовъ есть *средняя* площадь. Площадь:

$$\square AC+\square CB=DK=ED.DL$$

Фиг. 380.



есть *средняя*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) DL есть раціональная прямая съ ED несоизмѣримая. Но $2(AC.CB)=LF$ есть раціональная площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21) LG есть раціональная прямая съ ED соизмѣримая.

Откуда прямыя DL и LG несоизмѣримы. Слѣдовательно DL и LG суть прямыя раціональныя, только въ степени соизмѣримыя, а потому (кн. 10, пред. 37) прямая DG есть *биноміальная.*

2. Что DG есть *пятая биноміальная.*

Можно показать какъ выше, что $DI.IL=\square LM$ и что DI и IL несоизмѣримы, поэтому (кн. 10, пред. 19) DL квадратитъ надъ LG, на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ DL Но было показано, что прямыя LG и ED соизмѣримы, слѣдовательно DG есть *пятая биноміальная.*

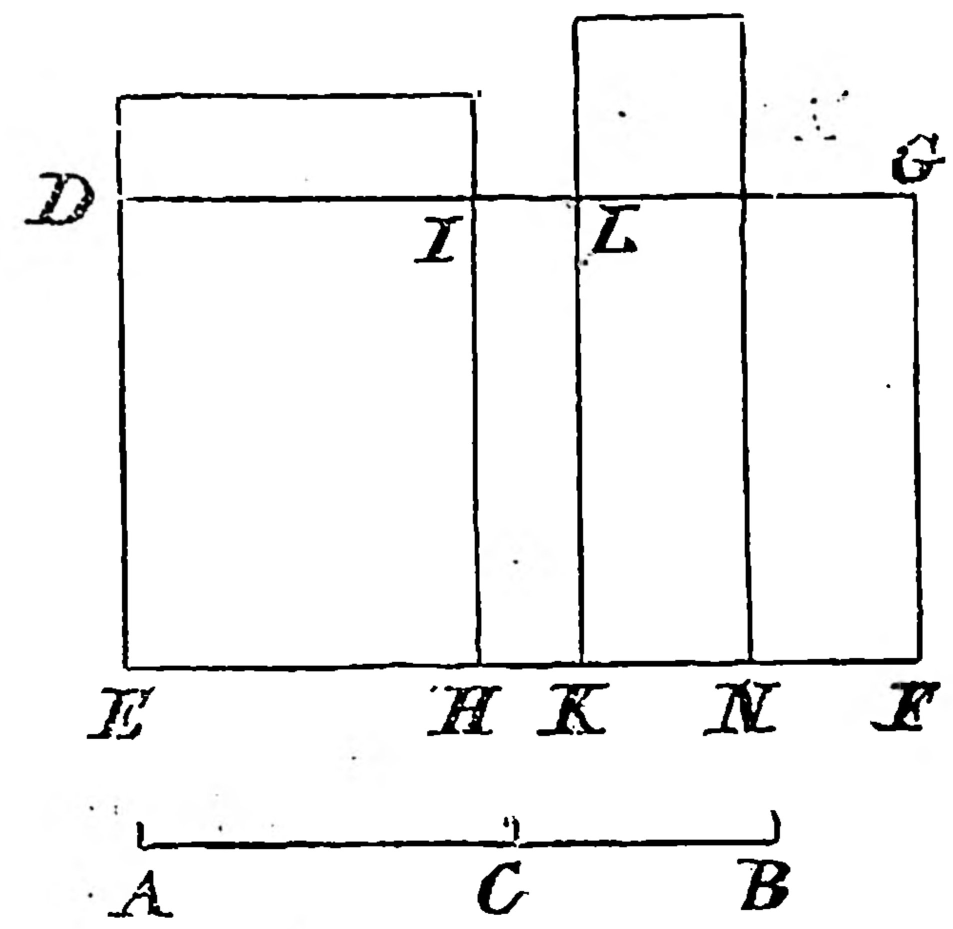
Предложеніе 66. Прямоугольникъ $DEFG$, построенный на раціональной прямой ED, равный квадрату построенному на прямой AB *второй средней степенящей,* имѣетъ высотою DG *шестую биноміальную* (фиг. 381).

Доказат. Тоже построеніе, что и въ 61 предложеніи, а слѣдуетъ доказать:

1. Что DG есть *биноміальная.*

Такъ какъ AB есть *вторая средняя степенящая,* то (кн. 10, пред. 42) ея члены AC и CB несоизмѣримы въ степени и сумма ихъ квадратовъ есть *средняя* площадь и кромѣ этого онѣ содержатъ прямоугольникъ несоизмѣримый съ суммою ихъ квадратовъ. Прямыя DK и LF суть среднія, но ED раціональна, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) DL и LG раціональны и съ ED по длинѣ несоизмѣримы. Но площадь $\square AC+\square CB$ несоизмѣрима съ $2(AC.CB)$, слѣдовательно DK и LF несоизмѣримы, а слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя DL и LG. Откуда видимъ, что DL

Фиг. 381.



и LG только въ степени соизмѣримы, а поэтому (кн. 10, пред. 37) прямая DG есть *биноміальная.*

2. Что DG есть *шестая биноміальная.*

Можно доказать, какъ выше, что $DI.IL=LM$ и что DI и IL несоизмѣримы, слѣдовательно прямая DL квадратитъ (кн. 10, пред. 19) надъ LG на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ DL. Но какъ DL и LG съ DE по длинѣ несоизмѣримы, то DG есть *шестая биноміальная.*

Предложеніе 67. Всякая прямая CD, по длинѣ соизмѣримая съ биноміальною AB, есть биноміальная того же порядка (фиг. 382).

Доказат. 1. Пусть прямая AB въ точкѣ E раздѣлена на свои члены AE и EB и притомъ пусть AE есть большій членъ. Прямыя AE и EB будутъ раціональны только въ степени соизмѣримыя (кн. 10, пред. 37). Сдѣлаемъ (кн. 6, пред. 12):

$$AB:CD=AE:CF$$

то будемъ имѣть также (кн. 5, пред. 19):

$$EB:FD=AB:CD$$

замѣчая, что AB и CD соизмѣримы, мы будемъ имѣть (кн. 10, пред. 10), что AE съ CF и EB съ FD также соизмѣримы. Но AE и EB раціональны, слѣдовательно CF и FD также раціональны. Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, пред. 11):

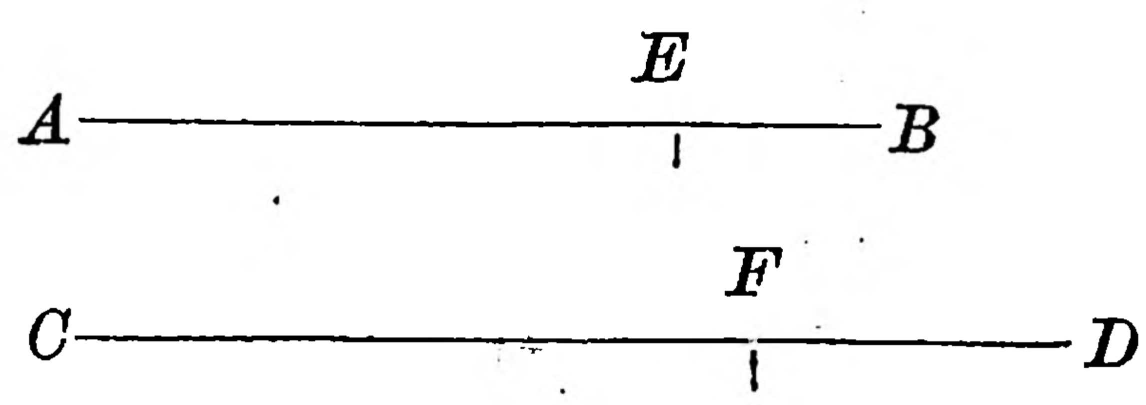
$$AE:CF=EB:FD$$

и откуда (кн. 5, пред. 16):

$$AE:EB=CF:FD$$

но, какъ AE и EB только въ степени соизмѣримы, то CF и FD будутъ также только въ степени соизмѣримы. Откуда прямыя CF и FD раціональны только въ степени соизмѣримы, а поэтому (кн. 10, пред. 37) CD есть биноміальная прямая.

Фиг. 382.



2. Прямая AB можетъ быть или первою, или второю, или третьею биноміальною, т. е. квадратитъ, въ пропорціи:

$$AE:EB=CF:FD$$

AE надъ EB, на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AE или съ EB, или ни одна изъ нихъ по длинѣ не соизмѣрима съ данною раціональною прямою, слѣдовательно (кн. 10, пред. 15) CF квадратитъ надъ FD на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ CF и по той же причинѣ CF или FD, или ни одна изъ нихъ не соизмѣрима съ данною раціональною прямою; слѣдовательно CD вмѣстѣ съ AB будетъ или первою, или второю, или третьею биноміальною.

Точно также можетъ быть доказано, что CD вмѣстѣ съ AB будетъ четвертая, пятая или шестая биноміальная. Слѣдовательно прямыя AB и CD всегда суть биноміальныя одного порядка.

Предложеніе 68. Прямая CD по длинѣ соизмѣримая съ бимедіальной AB будетъ сама бимедіальная того же порядка (фиг. 383).

Доказат. 1. Пусть будетъ бимедіальная AB въ точкѣ E раздѣлена на свои составныя части AE и EB и притомъ такъ, что $AE>EB$, то (кн. 10, пред. 38 и 39) прямыя AE и EB будутъ *среднія* только въ степени соизмѣримыя. Построимъ и здѣсь какъ выше пропорцію:

$$AB:CD=AE:CF$$

то (кн. 5, пред. 19):

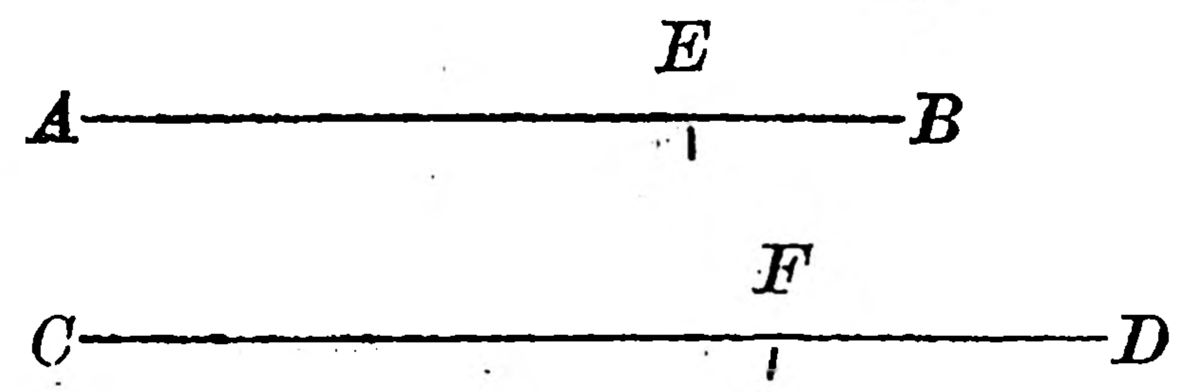
$$EB:FD=AB:CD$$

Откуда видимъ, что такъ какъ AB и CD соизмѣримы, то соизмѣримы AE и CF, а также EB и FD. Но AE и EB суть *среднія*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 24) CF и FD суть также *среднія.* Такъ какъ AE и EB суть прямыя соизмѣримыя только въ степени, а мы имѣемъ (кн. 5, пред. 11 и 16):

$$AE : EB = CF : FD$$

то и прямыя CF и FD соизмѣримы только въ степени. Изъ этого видимъ, что прямыя CF и FD суть *среднія*, только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 38 и 39) прямая CD есть *бимедіальная*.

Фиг. 383.



2. Изъ пропорціи:

$$AE : EB = CF : FD$$

слѣдуетъ (кн. 5, пред. 11 и кн. 6, пред. 1):

$$\square AE : AE \, . \, EB = \square CF : CF \, . \, FD$$

откуда (кн. 5, пред. 16):

$$\square AE : \square CF = AE \, . \, EB : CF \, . \, FD$$

но $\square AE$ и $\square CF$ соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы $AE \, . \, EB$ и $CF \, . \, FD$. Прямая AB можетъ быть первою, или второю биноміальною, поэтому (кн. 10, пред. 38 и 39) $AE \, . \, CB$ будетъ или раціональная или средняя площадь. Откуда площадь $CF \, . \, FD$ будетъ или раціональная или средняя, слѣдовательно прямая CD вмѣстѣ съ AB будетъ или *первая* или *вторая бимедіальная*.

Предложеніе 69. Прямая CD по длинѣ соизмѣримая съ *наибольшею ирраціональною* AB будетъ сама большею ирраціональною (фиг. 384).

Доказат. Пусть прямая AB въ точкѣ E раздѣлена на свои члены AE и EB, то они (кн. 10, пред. 40) несоизмѣримы въ степени, содержатъ *средній* прямоугольникъ и сумма ихъ квадратовъ есть раціональная площадь.

Сдѣлаемъ тоже построеніе, что и въ пред. 68, то:

$$AB : CD = AE : CF = EB : FD \tag{1}$$

но AB и CD соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы AE и CF, EB и FD откуда, такъ какъ AE и EB несоизмѣримы въ степени, CF и FD также несоизмѣримы въ степени.

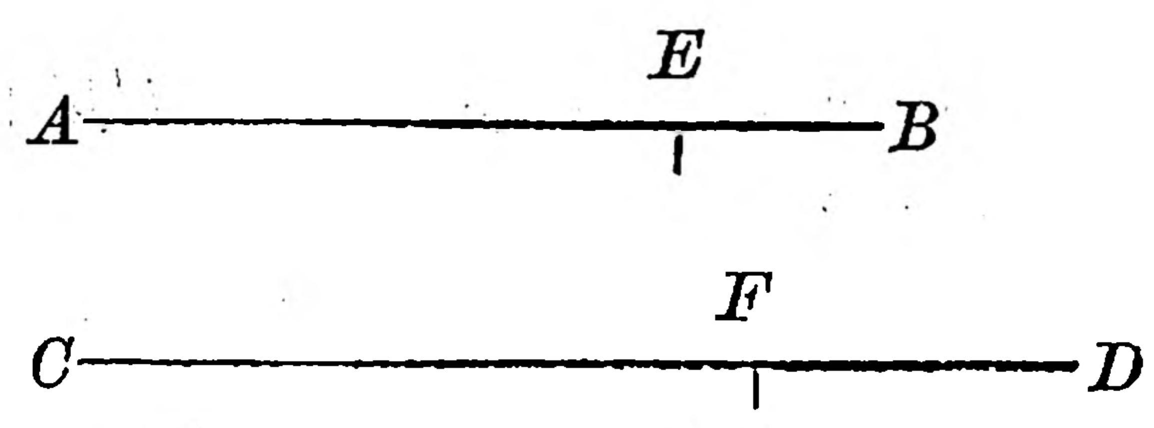
Изъ пропорціи (1) мы имѣемъ:

$$AE:EB=CF:FD$$

откуда (кн. 5, пред. 18):

$$AB:EB=CD:DF$$

Фиг. 384.



откуда еще (кн. 6, пред. 22):

$$\square AB:\square EB=\square CD:\square DF.$$

Точно также можно доказать, что:

$$\square AB:\square AE=\square CD:\square CF$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 24):

$$\square AB:\square AE+\square EB=\square CD:\square CF+\square FD$$

или

$$\square AB:\square CD=\square AE+\square EB:\square CF+\square FD$$

но $\square AB$ и $\square CD$ соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы площади $\square AE+\square EB$, и $\square CF+\square FD$, но $\square AE+\square EB$ есть раціональная площадь, слѣдовательно и площадь $\square CF+\square FD$ также раціональна.

Точно также площади $2(AE.EB)$ и $2(CF.FD)$ соизмѣримы, слѣдовательно, такъ какъ $AE.EB$ есть *средняя* площадь, то $CF.FD$ есть также *средняя* площадь (кн. 10, пред. 24, слѣд.).

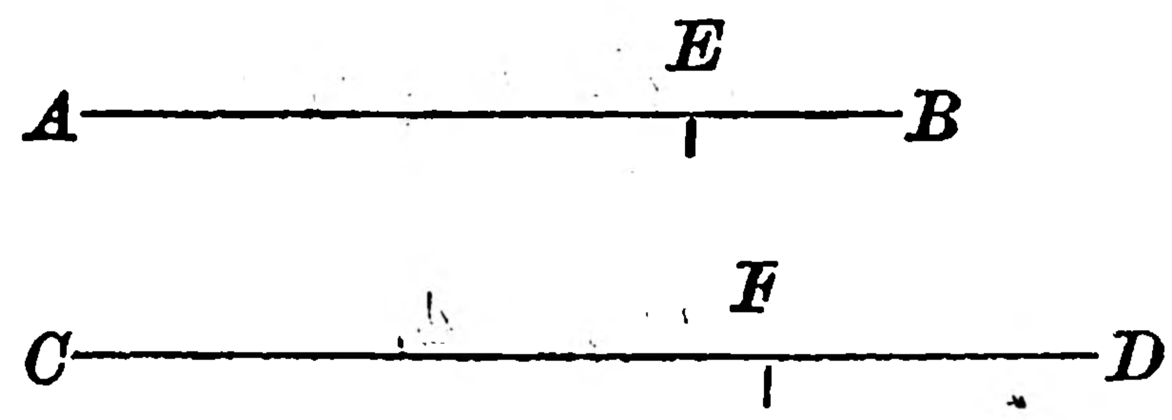
Откуда (кн. 10, пред. 40) CD есть *наибольшая ирраціональная.*

Предложеніе 70. Прямая CD по длинѣ соизмѣримая съ *раціональною* и *среднею степенящею* AB, есть сама *раціональная и средняя степенящая* (фиг. 385).

Доказат. Пусть прямая AB въ точкѣ E раздѣлена на свои члены AE и EB, то они несоизмѣримы въ степени, содержатъ раціональный прямоугольникъ и сумма ихъ квадратовъ есть средняя площадь.

Сдѣлавъ тоже построеніе, что и въ предъидущемъ предложеніи, точно также можно доказать, что CF и FD несоизмѣримы въ степени, что пло-

Фиг. 385.

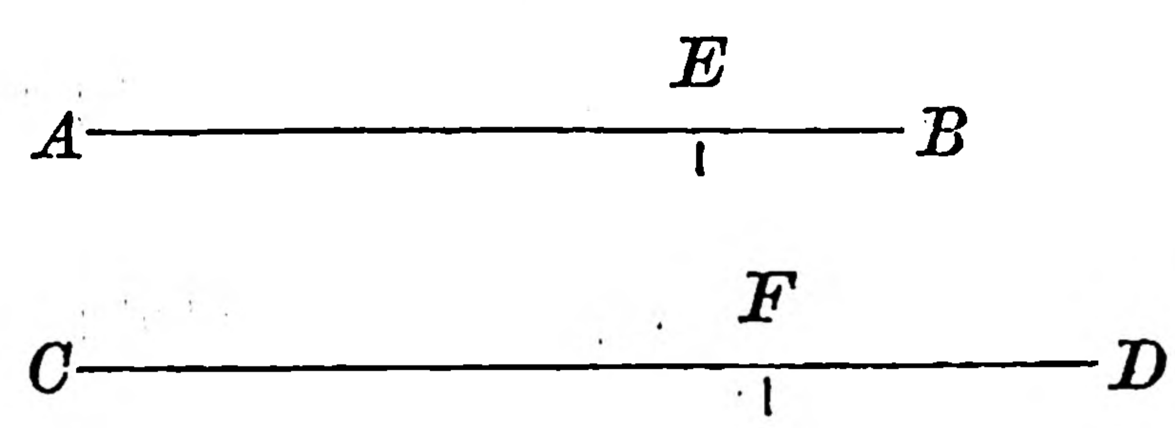


щадь $\square AE + \square EB$ соизмѣрима съ площадью $\square CF + \square FD$ и что прямоугольникъ $AE.EB$ соизмѣримъ съ $CF.FD$, слѣдовательно $\square CF + \square FD$ есть *средняя* площадь, а $CF.FD$ есть площадь раціональная. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 41), что прямая CD есть *раціональная и средняя степенящая.*

Предложеніе 71. Прямая CD по длинѣ соизмѣримая съ *второю среднею степенящею* AB будетъ сама *вторая средняя степенящая* (фиг. 386).

Доказат. Пусть прямая AB въ точкѣ E раздѣлена на свои составные члены AE и EB, то они (кн. 10, пред. 42) несоизмѣримы въ степени и сумма ихъ квадратовъ есть *средняя* площадь, но они содержатъ среднюю площадь несоизмѣримую съ суммою ихъ квадратовъ.

Фиг. 386.



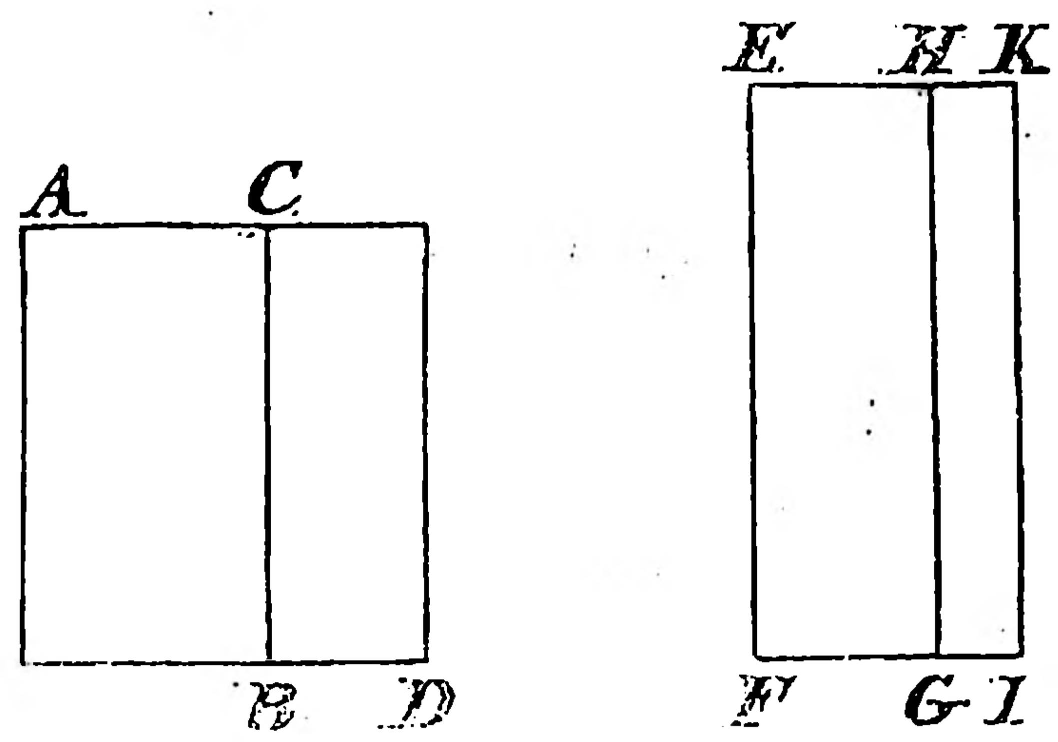
Изъ того же построенія, какъ и выше, мы докажемъ, что CF и FD соизмѣримы только въ степени, и что площади $\square AE + \square EB$ и $\square CF + \square FD$ соизмѣримы, а также соизмѣримы $AE.EB$ съ $CF.FD$, что слѣдовательно $\square CF + \square FD$ есть *средняя* площадь, а также и $CF.FD$ есть средняя съ $\square CF + \square FD$ несоизмѣримая площадь. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 42), что прямая CD есть *вторая средняя степенящая.*

Предложеніе 72. Если сложимъ раціональный прямоугольникъ AB съ среднимъ CD, то получимъ одну изъ слѣдующихъ четырехъ ирраціональныхъ линій: или *биноміальную*, или *первую бимедіальную*, или *наибольшую ирраціональную*, или наконецъ *раціональную и среднюю степенящую.*

Доказат. Пусть AB будетъ или больше, или меньше CD, слѣдуетъ доказать, что прямая, степенящая площадь AD, будетъ одна изъ четырехъ сказанныхъ ирраціональностей.

Случай 1. $AB>CD$ (фиг. 387).

Фиг. 387.



Пусть FE будетъ раціональная прямая, $EG=FE.EH=AB$ и $HI=FE.HK=CD$. Такъ какъ площадь AB есть раціональная, то EG есть также раціональная, а также (кн. 10, пред. 21) и сторона EH раціональна и соизмѣрима по длинѣ съ FE. Далѣе, такъ какъ CD есть *средняя* площадь, то и HI есть также *средняя* и (кн. 10, пред. 23) сторона HK раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ FE. Площадь AB раціональна, и CD средняя, слѣдовательно AB и CD несоизмѣримы, поэтому и EG и HI также несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$EG:HI=EH:HK$$

откуда прямыя EH и HK по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно EH и HK суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, откуда (кн. 10, пред. 33) прямая EK есть *биноміальная.* Но по условію $AB>CD$, т. е. $EG>HI$, слѣдовательно и $EH>HK$. Теперь, прямая EH можетъ квадратить надъ HK на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ EH.

Пусть будетъ первое: то, такъ какъ большая прямая EH соизмѣрима съ FE, EK есть *первая биноміальная.* Слѣдовательно, какъ FE есть раціональная прямая (кн. 10, пред. 55), то прямая, которая квадратитъ площадь EI, т. е. AD есть *биноміальная.*

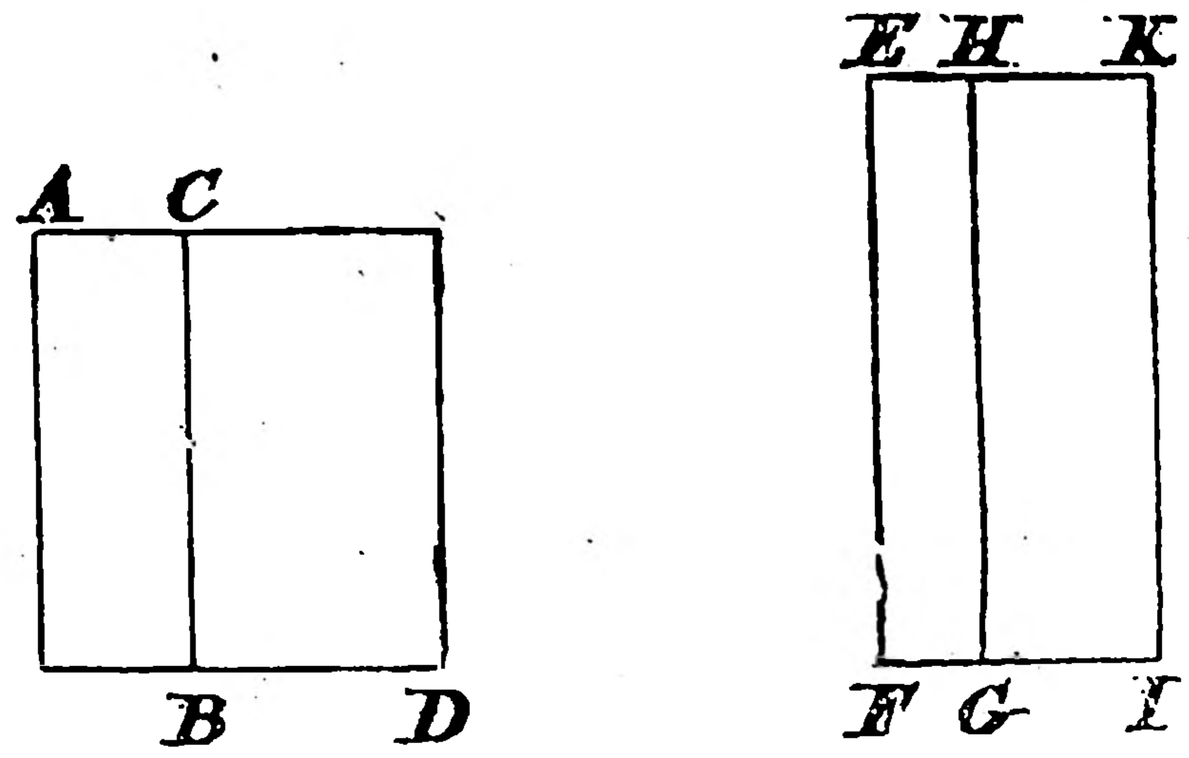
Пусть будетъ второе, то, такъ какъ EH и FE соизмѣримы по длинѣ, EK будетъ *четвертая биноміальная*; слѣдовательно, какъ FE (кн. 10, пред. 58) есть раціональная прямая, то прямая, квадратящая площадь EI, т. е. AD будетъ *наибольшая ирраціональная.*

Случай 2. Пусть $AB<CD$ (фиг. 388).

Если $AB<CD$, то въ силу предъидущаго построенія $EG<HI$ и $EH<HK$. Теперь можетъ случиться, что HK квадратитъ надъ EH на квадратъ, коего сторона соизмѣрима или несоизмѣрима съ HK.

Пусть будетъ первое: такъ какъ меньшая EH соизмѣрима съ EF, то EK есть *вторая биноміальная*, слѣдовательно, замѣтивъ, что EF есть раціональная прямая, (кн. 10, пред. 56) прямая квадратящая площадь EI, т. е. AD есть *первая бимедіальная*.

Фиг. 388.



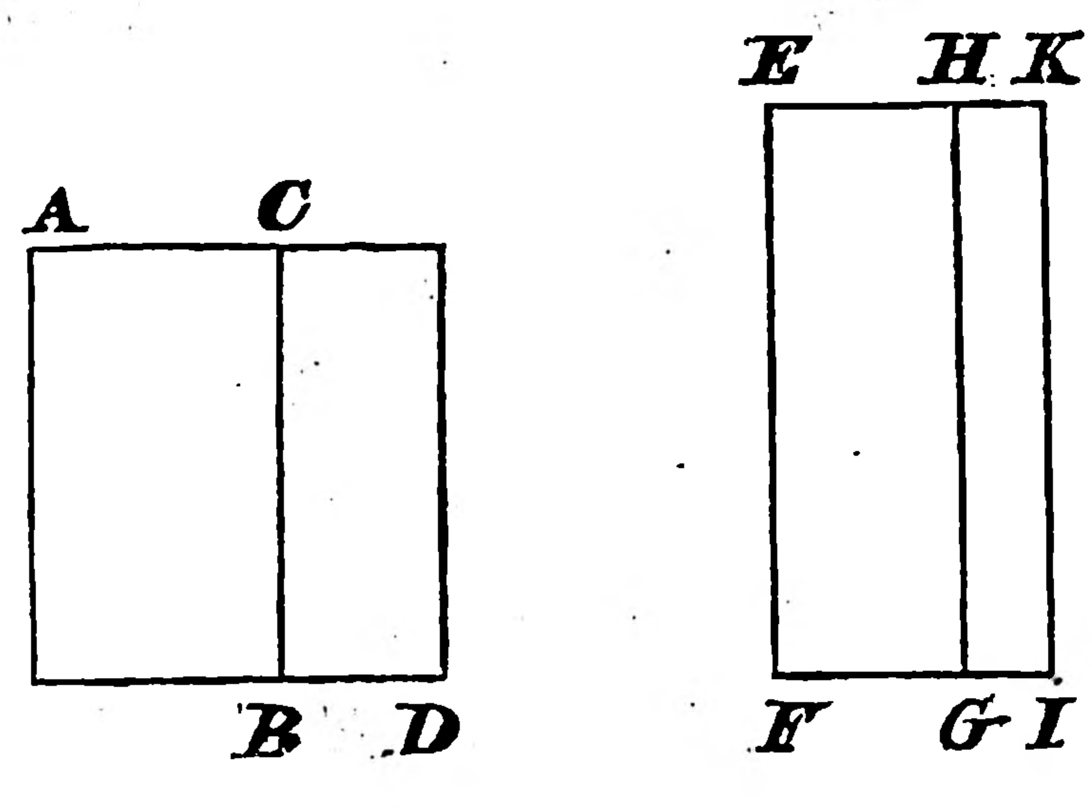
Пусть будетъ второе: такъ какъ меньшая EH соизмѣрима по длинѣ съ EF, то EK будетъ *пятая биноміальная*, слѣдовательно, какъ EF есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 59) прямая, квадратящая площадь EI, т. е. AD будетъ *раціональная и средняя степенящая*.

Предложеніе 73. Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя *среднія* площади AB и CD, то получимъ двѣ остальныя ирраціональныя линіи: *вторую бимедіальную* или *вторую среднюю степенящую*.

Доказат. Прямоугольникъ AB можетъ быть или больше, или меньше прямоугольника CD. Слѣдуетъ доказать, что прямая, квадратящая цѣлую площадь AD, будетъ одна изъ сказанныхъ выше ирраціональностей.

Случай 1. Пусть $AB>CD$ (фиг. 389).

Фиг. 389.



Изъ предъидущаго построенія видно, замѣчая что AB и CD суть среднія, что EG и HI суть также среднія площади. Такъ какъ EF есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 23) EH и HK будутъ прямыя раціональныя и по длинѣ соизмѣримыя съ EF. Такъ какъ AB и CD, т. е. EG и HI несоизмѣримы, и мы имѣемъ:

$$EG:HI=EH:HK$$

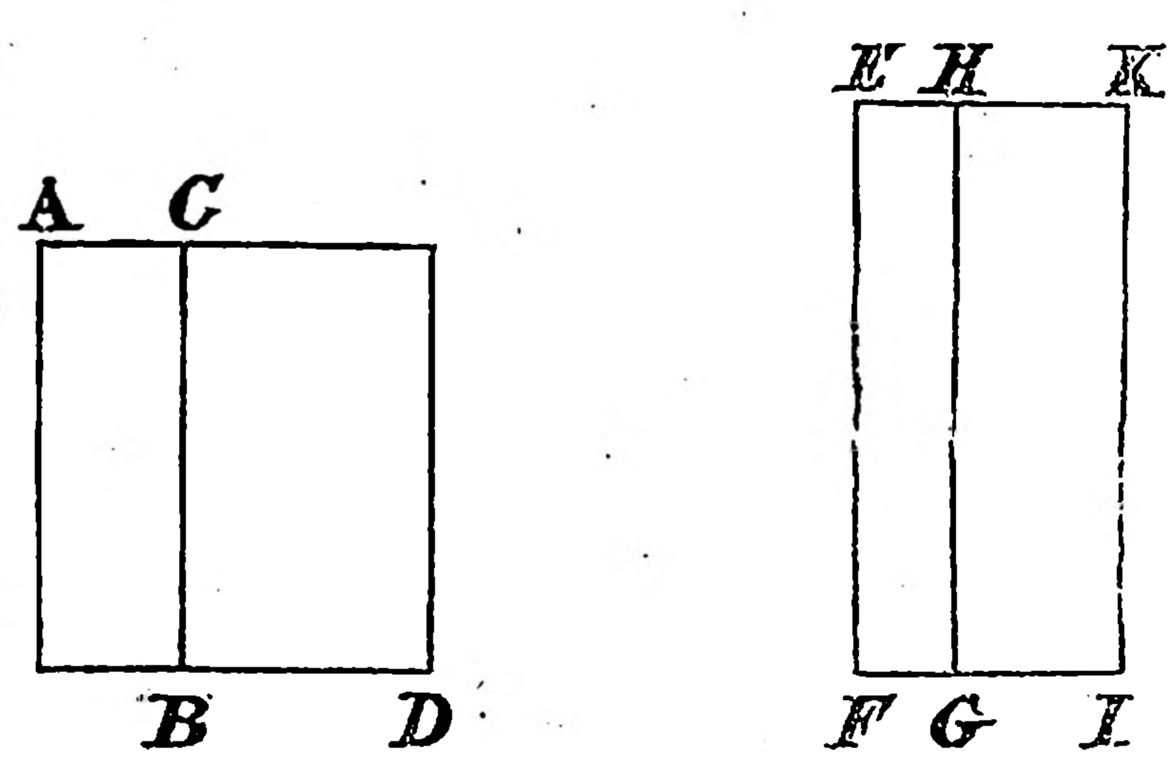
то EH и HK по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно EH и HK суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, откуда EK есть *биноміальная*. Такъ какъ $AB>CD$, т. е. $EG>HI$, то $EH>HK$.

Теперь, EH можетъ квадратить надъ HK на квадратъ, коего сторона будетъ по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ EH.

Пусть будетъ первое: такъ какъ ни EH, ни HK по длинѣ не соизмѣримы съ EF, то EK есть *третяя биноміальная*, слѣдовательно, замѣчая, что EF есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 57) прямая квадратящая площадь EI, т. е. AD, будетъ *вторая средняя степенящая*.

Случай 2. Пусть $AB<CD$ (фиг. 390).

Фиг. 390.



Точно также можетъ быть доказано, что прямая, квадратящая площадь EI, т. е. AD, будетъ или *вторая бимедіальная*, или *вторая средняя степенящая*.

Слѣдствіе. Биноміальныя прямыя и слѣдующія за ними ирраціональныя не только отличны отъ *среднихъ*, но различаются и между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, высота прямоугольника, построеннаго на раціональной прямой, коего площадь равна квадрату построенному на *средней* прямой, есть прямая раціональная *несоизмѣримая* съ основаніемъ (кн. 10, пред. 23). Если сторона квадрата есть *биноміальная*, то высота прямоугольника есть *первая биноміальная* (кн. 10, пред. 61). Если сторона квадрата есть *первая бимедіальная*, то высота прямоугольника есть *вторая биноміальная* (кн. 10, пред. 62). Если сторона квадрата есть *вторая бимедіальная*, то высота прямоугольника есть *третяя биноміальная* (кн. 10, пред. 63). Если сторона квадрата есть *наибольшая ирраціональная*, то высота прямоугольника есть *четвертая биноміальная* (кн. 10, пред. 64). Если сторона квадрата есть *раціональная и средняя степенящая*, то высота прямоугольника есть *пятая биноміальная* (кн. 10, пред. 65). Если наконецъ сторона квадрата есть *вторая средняя степенящая*, то высота прямоугольника есть *шестая биноміальная* (кн. 10, пред. 66).

Изъ этого слѣдуетъ, что всѣ упомянутыя ирраціональныя прямыя отличаются отъ первой, такъ какъ эта послѣдняя даетъ для высоты прямоугольника *раціональную* прямую. Отличаются эти послѣднія между собою потому, что высоты для прямоугольниковъ суть прямыя *биноміальныя различныхъ порядковъ*.

Примѣчаніе 9. Предъидущее изслѣдованіе относительно сложенія шести ирраціональныхъ линій ведетъ къ слѣдующимъ семи отдѣламъ предложеній: первый отдѣлъ (пред. 37, 38, 39, 40, 41, 42) показываетъ происхожденіе или сложеніе этихъ линій; второй отдѣлъ (пред. 43, 44, 45, 46, 47, 48) показываетъ ихъ разложеніе въ единственной точкѣ; третій отдѣлъ (пред. 49, 50, 51, 52, 53, 54) показываетъ какъ шесть биноміальныхъ линій могутъ быть найдены; четвертый отдѣлъ (пред. 55, 56, 57, 58, 59, 60) показываетъ какія линіи квадратятъ прямоугольникъ, содержащійся между раціональною прямою и биноміальными различныхъ порядковъ; пятый отдѣлъ (пред. 61, 62, 63, 64, 65, 66) показываетъ какая будетъ высота прямоугольниковъ, построенныхъ на раціональной прямой, коихъ площадь равна площади квадратовъ, построенныхъ на биноміальныхъ различныхъ порядковъ; шестой отдѣлъ (пред. 67, 68, 69, 70, 71), показываетъ, что несоизмѣримыя линіи съ ними будутъ того-же рода и порядка; седьмой отдѣлъ (пред. 72 и 73) показываетъ, въ двухъ предложеніяхъ, ихъ происхожденіе и различіе.

Замѣтимъ еще, что половины каждаго изъ этихъ родовъ ирраціональностей, будучи соизмѣримы съ цѣлыми будутъ того же рода и порядка.

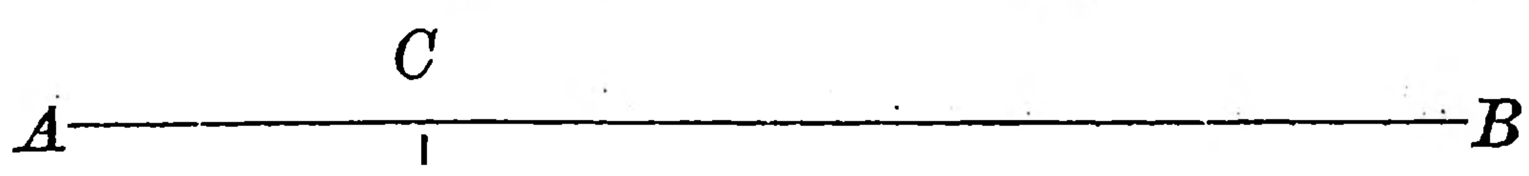
Шесть ирраціональностей происшедшихъ отъ вычитанія.

Предложеніе 74. Если вычтемъ одну изъ другой двѣ раціональныя, только въ степени соизмѣримыя прямыя AB и BC, то остатокъ AC будетъ ирраціональная прямая и называется *вычетомъ* (ἀποτομή) (фиг. 391).

Доказат. Такъ какъ AB и BC соизмѣримы только въ степени, и мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB:BC=\square AB:AB\,.\,BC$$

Фиг. 391.



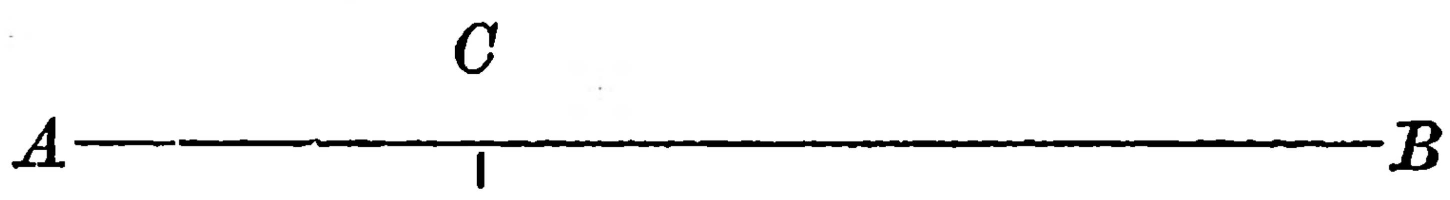
то площади $\square AB$ и $AB\,.\,BC$ (кн. 10, пред. 10) будутъ несоизмѣримы. Но (кн. 10, пред. 16) площади $\square AB$ и $\square AB+\square BC$ соизмѣримы, а также соизмѣримы $AB\,.\,BC$ и $2(AB\,.\,BC)$, слѣдовательно площадь $\square AB+\square BC$ несоизмѣрима съ $2(AB\,.\,BC)$. Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB+\square BC=2(AB\,.\,BC)+\square AC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) площади $\square AB+\square BC$ и $\square AC$ несоизмѣримы. Замѣчая теперь, что площадь $\square AB+\square BC$ раціональна, мы видимъ что $\square AC$ есть площадь ирраціональная, а слѣдовательно и AC есть прямая ирраціональная.

Предложеніе 75. Если вычтемъ одну изъ другой двѣ среднія прямыя AB и AC, только въ степени соизмѣримыя, содержащія раціональный прямоугольникъ, то остатокъ AC будетъ ирраціональный и называется *первымъ среднимъ вычетомъ* (фиг. 392).

Фиг. 392.



Доказат. Такъ какъ $\square AB+\square BC$ есть площадь *средняя*, и $2(AB.BC)$ раціональная, то $\square AB+\square BC$ и $2(AB.BC)$ несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB+\square BC=2(AB.BC)+\square AC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) площади $2(AB.BC)$ и $\square AC$ несоизмѣримы, но $2(AB.BC)$ есть раціональная площадь, слѣдовательно $\square AC$ есть ирраціональная площадь, поэтому и прямая AC есть ирраціональная.

Предложеніе 76. Если вычтемъ одну изъ другой двѣ среднія прямыя AB и BC только въ степени соизмѣримыя, содержащія *средній* прямоугольникъ, то остатокъ AC будетъ ирраціональный и называется *вторымъ среднимъ вычетомъ* (фиг. 393).

Доказат. Пусть DI будетъ раціональная линія, на которой построимъ прямоугольникъ $DE=DI.DG=\square AB+\square BC$, и прямоугольникъ $DH=ID.DF=2(AB.BC)$. Откуда, замѣчая, что (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB+\square BC=2(AB.BC)+\square AC$$

найдемъ, что:

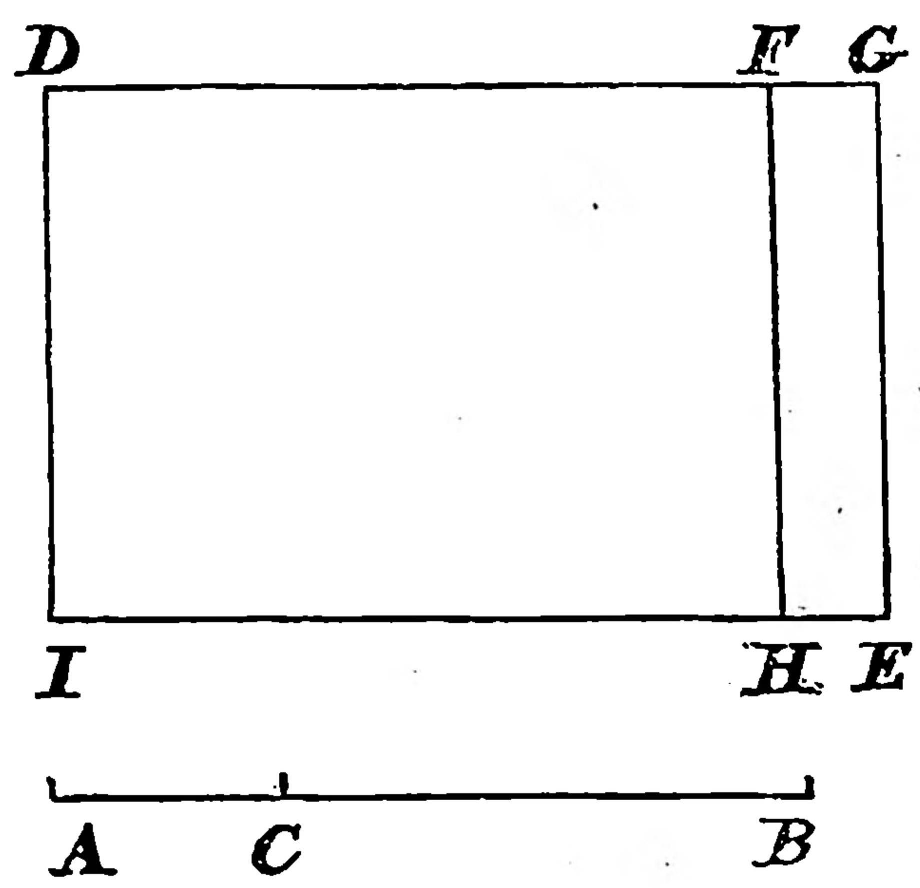
$$FE=ID.FG=\square AC.$$

Такъ какъ $\square AB+\square BC$, т. е. DE есть средняя площадь, то (кн. 10, пред. 23) прямая DG раціональна и несоизмѣрима съ DI. Такъ какъ $AB.BC$ есть *средняя* площадь, то $2(AB.BC)$ будетъ также средняя площадь, слѣдовательно DH есть *средняя*, а потому (кн. 10, пред. 23) прямая DF раціональна и несоизмѣрима съ ID.

Такъ какъ прямыя AB и BC только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно по длинѣ несоизмѣримы, то (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10) площади $\square AB$ и $AB.BC$ несоизмѣримы. Но (кн. 10, пред. 16) площади $\square AB$ и $\square AB+\square BC$ соизмѣримы, а также (кн. 10, пред. 6) соизмѣримы и площади $AB.BC$ и $2(AB.BC)$. Слѣдовательно $\square AB+\square BC$ несоизмѣримы съ $2(AB.BC)$, т. е. DE несоизмѣрима съ DH. Но такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$DE:DH=DG:DF$$

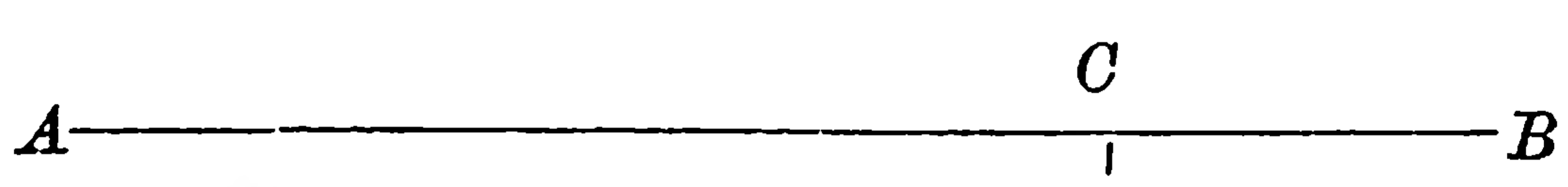
Фиг. 393.



то и прямыя DG и DF также несоизмѣримы (кн. 10, пред. 10). Слѣдовательно DG и DF суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, а потому (кн. 10, пред. 74) FG есть *вычетъ*. Замѣчая теперь, что прямая ID раціональна, мы видимъ (кн. 10, пред. 21), что площадь FE, т. е. $\square AC$ ирраціональна, а слѣдовательно ирраціональна и прямая AC.

Предложеніе 77. Если двѣ прямыя AB и BC въ степени несоизмѣримыя, содержащія *среднюю* площадь и коихъ сумма квадратовъ есть раціональная площадь, вычтемъ одну изъ другой, то остатокъ AC будетъ ирраціональная прямая и называется *меньшею ирраціональною* (фиг. 394).

Фиг. 394.



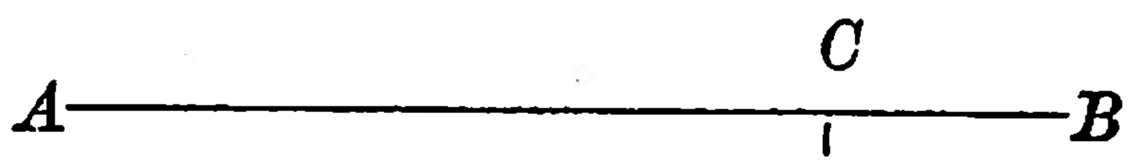
Доказат. Такъ какъ площадь $\square AB+\square BC$ раціональна, а $AB.BC$ *средняя*, то площади $\square AB+\square BC$ и $AB.BC$ несоизмѣримы. Но (кн. 2, пред. 7) мы имѣемъ:

$$\square AB+\square BC=2(AB.BC)+\square AC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) площади $\square AB+\square BC$ и $\square AC$ несоизмѣримы. Но такъ какъ $\square AB+\square BC$ есть площадь раціональная, то $\square AC$ есть ирраціональная площадь, а слѣдовательно и прямая AC есть ирраціональная.

Предложеніе 78. Если двѣ прямыя AB и BC, несоизмѣримыя въ степени, содержащія раціональный прямоугольникъ и коихъ сумма квадратовъ есть *средняя* площадь, вычтемъ одну изъ другой, то остатокъ AC будетъ ирраціональная прямая и называется *составляющею съ раціональнымъ прямоугольникомъ цѣлую среднюю площадь* (фиг. 395).

Фиг. 395.



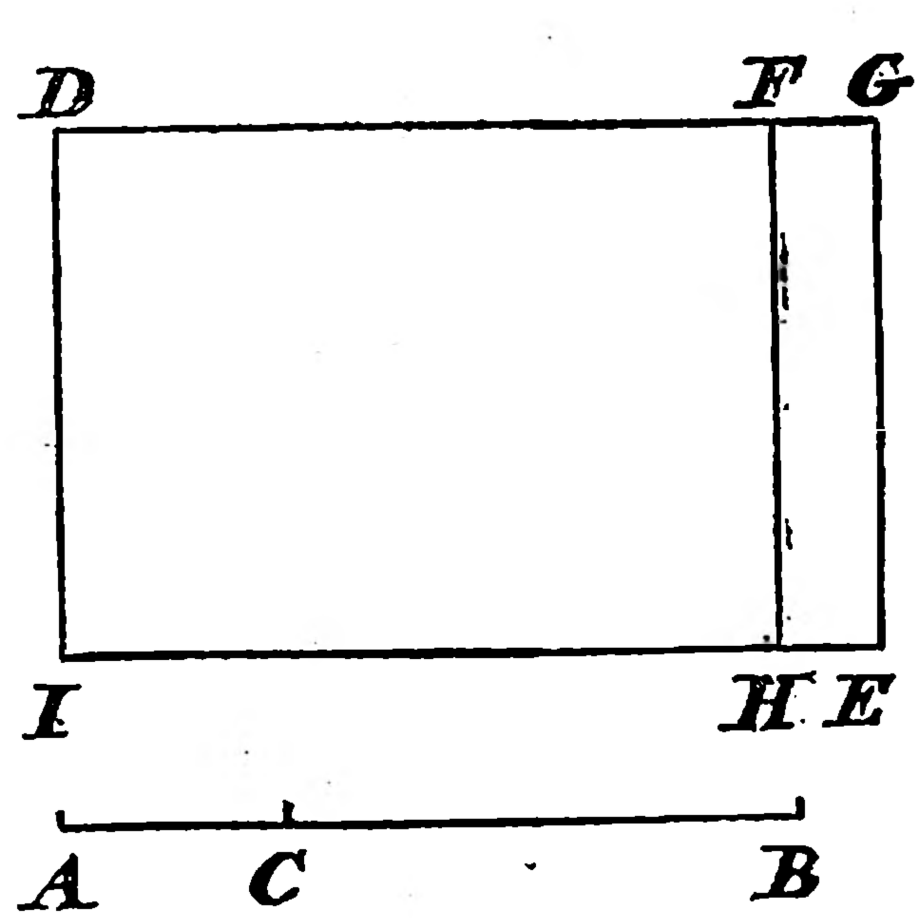
Доказат. Такъ какъ $\square AB + \square BC$ есть площадь средняя, и $2(AB.BC)$ есть площадь раціональная, то площади $\square AB + \square BC$ и $2(AB.BC)$ несоизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) $\square AC$ и $2(AB.BC)$ также несоизмѣримы; но $2(AB.BC)$ есть площадь раціональная, слѣдовательно площадь $\square AC$ будетъ ирраціональная, а поэтому и прямая AC будетъ также ирраціональная.

Примѣчаніе 10. Евклидъ остатокъ AC такъ называетъ потому, что прямоугольникъ равный $\square AC$ съ раціональнымъ прямоугольникомъ $2(AB.BC)$ составляетъ цѣлую среднею площадь $\square AB + \square BC$.

Предложеніе 79. Если двѣ прямыя AB и BC, несоизмѣримыя въ степени, коихъ сумма квадратовъ есть *средняя* площадь, содержащая *средній* прямоугольникъ несоизмѣримый съ суммою квадратовъ, вычтемъ одну изъ другой, то остатокъ AC будетъ ирраціональная прямая и называется *составляющею съ среднимъ прямоугольникомъ цѣлую среднюю площадь* (фиг. 396).

Доказат. Построимъ на раціональной прямой DI прямоугольникъ DE равный $DI.DG = \square AC + \square BC$. Отнимемъ прямоугольникъ $DH = DI.DF = 2(AB.BC)$, то (кн. 2, пред. 7) остатокъ $FE = DI.FG$ будетъ равенъ $\square AC$. Слѣдовательно прямая AC квадратитъ площадь FE.

Фиг. 396.



Такъ какъ площадь $\square AB + \square BC$, т. е. DE есть *средняя*, то прямая DG (кн. 10, пред. 23) раціональна и несоизмѣрима по длинѣ съ DI.

Точно также, такъ какъ площадь DH *средняя*, то прямая DF раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ DI.

Такъ какъ площади $\square AB + \square BC$ и $2(AB \, . \, BC)$ несоизмѣримы, то несоизмѣримы и площади DE и DH; но мы имѣемъ:

$$DE : DH = DG : DF$$

откуда (кн. 10, пред. 10) прямыя DG и DF по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя DG и DF раціональны только въ степени соизмѣримы, откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что прямая FG есть *вычетъ*. Такъ какъ $DI = FH$ есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 21) FE, т. е. $\square AC$ есть ирраціональная площадь, а потому и прямая AC есть ирраціональная.

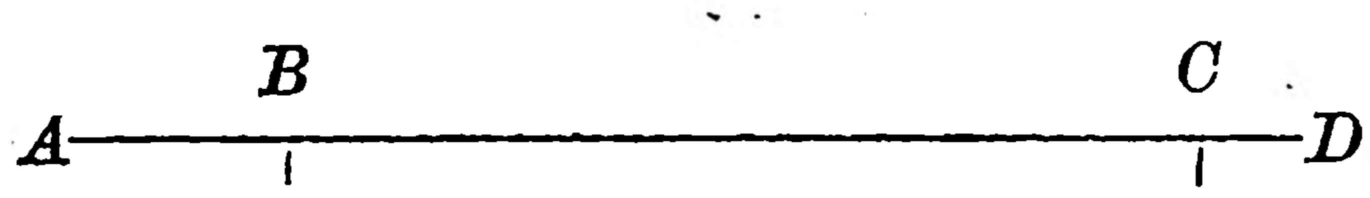
Примѣчаніе 11. Евклидъ потому такъ называетъ прямую AC, что:

$$\square AC + 2(AB \, . \, BC) = \square AB + \square BC.$$

Предложеніе 80. Къ вычету AB можно прибавить одну только раціональную прямую BC, соизмѣримую только въ степени съ цѣлою прямою AC (фиг. 397).

Доказат. Положимъ, что къ AB прибавлена еще другая прямая BD и притомъ (кн. 10, пред. 74) такая, что прямыя AD и BD раціональны только въ степени соизмѣримы. Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

Фиг. 397.



$$\square AD + \square BD = 2(AD \, . \, BD) + \square AB$$

а также

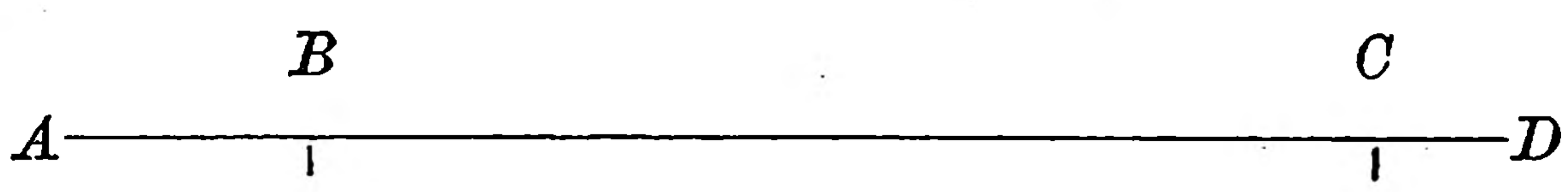
$$\square AC + \square CB = 2(AC \, . \, CB) + \square AB$$

Откуда видимъ, что избытокъ суммы квадратовъ $\square AD + \square BD$ надъ суммою квадратовъ $\square AC + \square CB$, равенъ избытку прямоугольника $2(AD . BD)$ надъ прямоугольникомъ $2(AC . CB)$ и какъ первый избытокъ раціональный, то и второй долженъ быть раціональный, что невозможно (кн. 10, пред. 27), такъ какъ (кн. 10, пред. 22) оба прямоугольника суть *среднія* площади. Слѣдовательно къ вычету AB можно прибавить только одну раціональную прямую BC, которая съ цѣлою AC только въ степени соизмѣрима.

Предложеніе 81. Къ *первому среднему вычету* AB можно прибавить только одну *среднюю* BC, которая съ цѣлою AC только въ степени соизмѣрима и содержитъ съ нею раціональный прямоугольникъ (фиг. 398).

Доказат. Положимъ, что къ вычету AB прибавлена еще другая прямая BD такая, что AD и BD суть среднія (кн. 10, пред. 75), только въ степени соизмѣримыя прямыя, содержащія раціональный прямоугольникъ.

Фиг. 398.

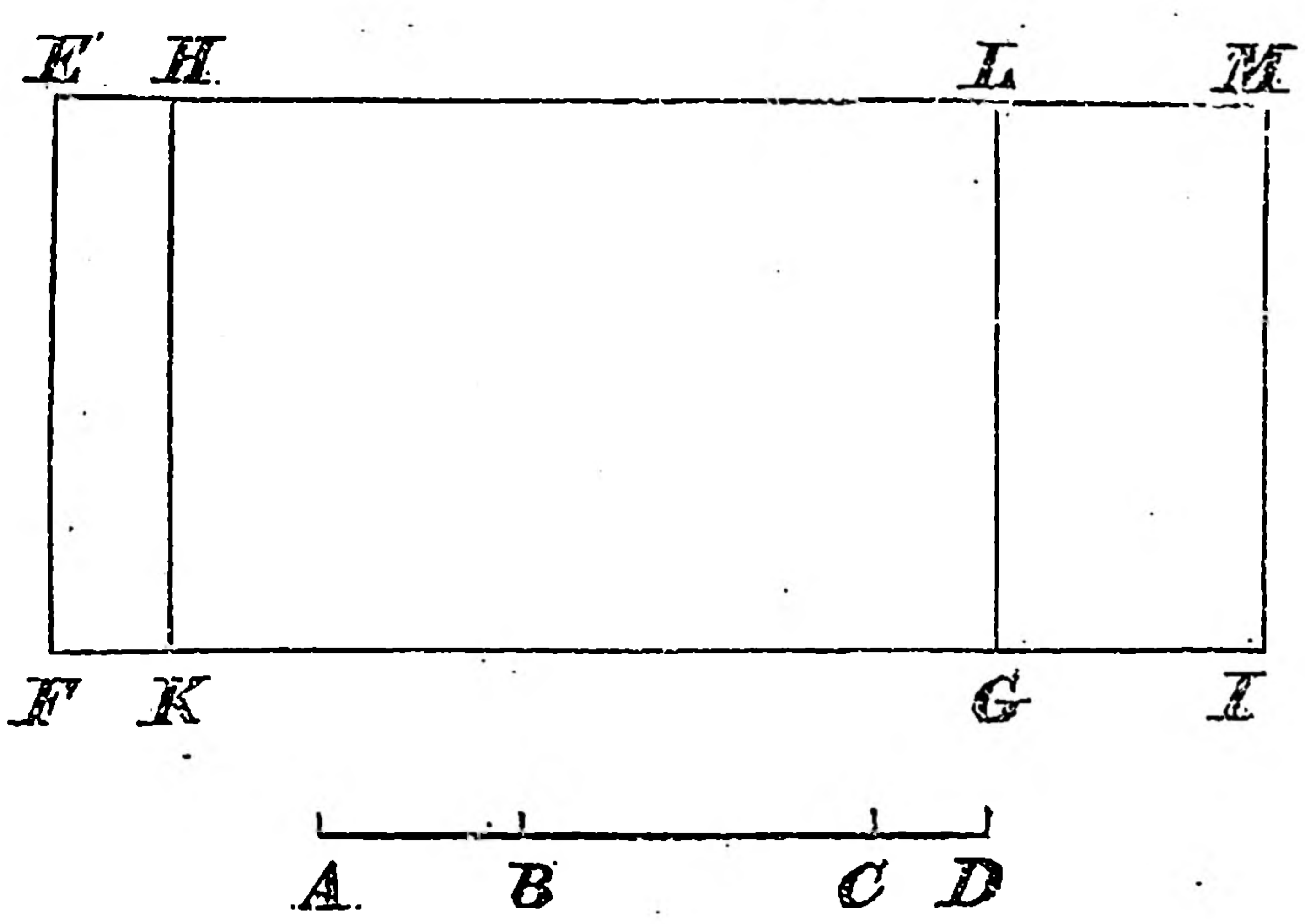


Здѣсь снова мы будемъ имѣть, что избытокъ суммы квадратовъ $\square AD + \square DB$ надъ суммою квадратовъ $\square AC + \square CB$ равенъ избытку прямоугольника $2(AD \,.\, DB)$ надъ $2(AC \,.\, CB)$, но этотъ избытокъ раціональный, слѣдовательно и первый долженъ быть раціональный, что невозможно, такъ какъ сумма квадратовъ есть *средняя* площадь (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно къ *первому среднему вычету* можно прибавить только одну среднюю прямую, которая съ цѣлою только въ степени соизмѣрима и содержитъ съ нею раціональный прямоугольникъ.

Предложеніе 82. Ко *второму среднему вычету* AB можно придать только одну *среднюю* прямую BC, которая съ цѣлою AC соизмѣрима только въ степени и содержитъ съ нею *средній* прямоугольникъ (фиг. 399).

Доказат. Положимъ что къ вычету AB прибавлена еще другая прямая BD (кн. 10, пред. 76) соизмѣримая съ AD только въ степени и заключающая съ нею средній прямоугольникъ.

Фиг. 399.



На раціональной прямой EF построимъ прямоугольникъ $EG = EF.EL = \square AC + \square CB$. Отнявъ отъ этого прямоугольника прямоугольникъ $HG = EF \,.\, HL = 2(AC \,.\, CB)$, то остатокъ $EK = EF \,.\, EH$ будетъ равенъ $\square AB$, слѣдовательно прямая AB квадратитъ площадь EK. Построимъ еще на прямой EF прямоугольникъ $EI = EF . EM = \square AD + \square DB$, то, такъ какъ $EK = \square AB$, остатокъ HI будетъ равенъ $2(AD . DB)$.

Такъ какъ прямыя AC и CB суть среднія, то $\square AC + \square CB$, т. е. EG есть площадь средняя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) прямая EL раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ EF. Прямоугольникъ $2(AC . CB)$, т. е. HG есть *средній*, слѣдовательно прямая HL раціональна и несоизмѣрима съ EF.

Такъ какъ AC и CB, только въ степени соизмѣримы, то онѣ по длинѣ несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AC : CB = \square AC : AC . CB$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) площади $\square AC$ и $AC . CB$ несоизмѣримы.

Но площади (кн. 10, пред. 16) $\square AC$ съ $\square AC + \square CB$ и $AC . CB$ съ $2(AC . CB)$ соизмѣримы, слѣдовательно площадь $\square AC + \square CB$ несоизмѣрима съ площадью $2(AC . CB)$, т. е. EG и HG несоизмѣримы. Но мы имѣемъ:

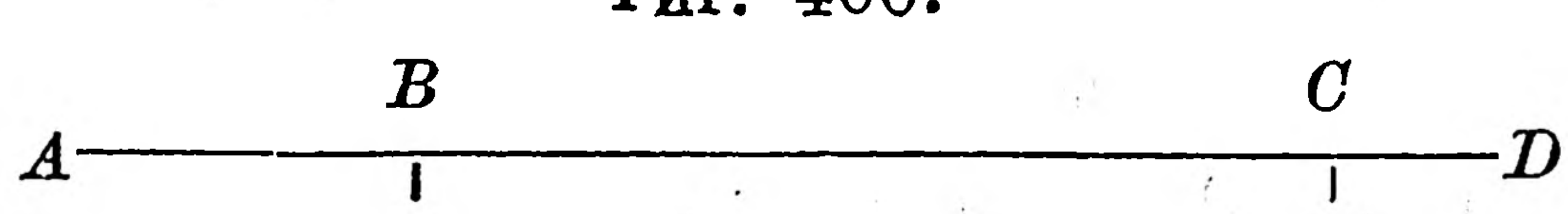
$$EG : HG = EL : HL$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямыя EL и HL несоизмѣримы по длинѣ. Изъ этого видимъ, что EL и HL суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) EH есть вычетъ прибавленный къ HL. Точно также можетъ быть доказано, что къ ней прибавлена прямая HM, что невозможно (кн. 10, пред. 80), такъ какъ HL и HM съ цѣлою только въ степени соизмѣримы. Слѣдовательно ко *второму среднему вычету* можно прибавить только одну *среднюю*, которая съ цѣлою только въ степени соизмѣрима и которая съ нею содержитъ средній прямоугольникъ.

Предложеніе 83. Къ *меньшей ирраціональной* AB можно прибавить только одну прямую BC, которая съ цѣлою AC несоизмѣрима въ степени, коей квадратъ съ квадратомъ цѣлой составляетъ раціональную площадь и которая съ цѣлой содержитъ *средній* прямоугольникъ (фиг. 400).

Доказат. Положимъ, что можно прибавить еще одну DB къ AB, такую что (кн. 10, пред. 77) AD и DB несоизмѣримы въ степени, что $\square AB + \square DB$ есть раціональная площадь и что наконецъ $2(AD . DB)$ есть площадь *средняя*.

Фиг. 400.

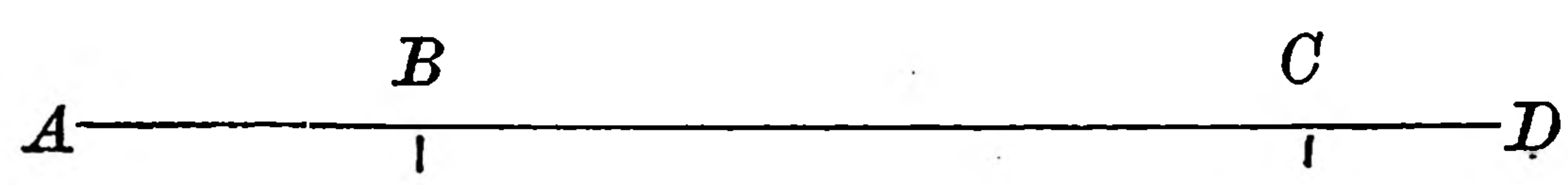


Такъ какъ избытокъ $\square AD + \square DB$ надъ $\square AC + \square CB$ равенъ избытку $2(AD.DB)$ надъ $2(AC.CB)$; а избытокъ квадратовъ есть раціональная площадь, слѣдовательно и избытокъ прямоугольниковъ долженъ быть площадь раціональная, что невозможно, потому, что эти прямоугольники суть *средніе* (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно къ *меньшей ирраціональной* можно прибавить только одну прямую съ сказанными свойствами.

Предложеніе 84. Къ составляющей съ раціональнымъ прямоугольникомъ цѣлую среднюю площадь AB можно прибавить только одну прямую BC, которая съ цѣлою AC въ степени несоизмѣрима, коей квадратъ съ квадратомъ цѣлой составляетъ *среднюю* площадь и которая съ цѣлою содержитъ раціональный прямоугольникъ (фиг. 401).

Доказат. Положимъ, что можно прибавить къ AB еще одну DB, такую, что (кн. 10, пред. 78) AD и DB въ степени несоизмѣримы, что $\square AD + \square DB$ есть *средняя* площадь и что наконецъ $2(AD.DB)$ есть раціональный прямоугольникъ.

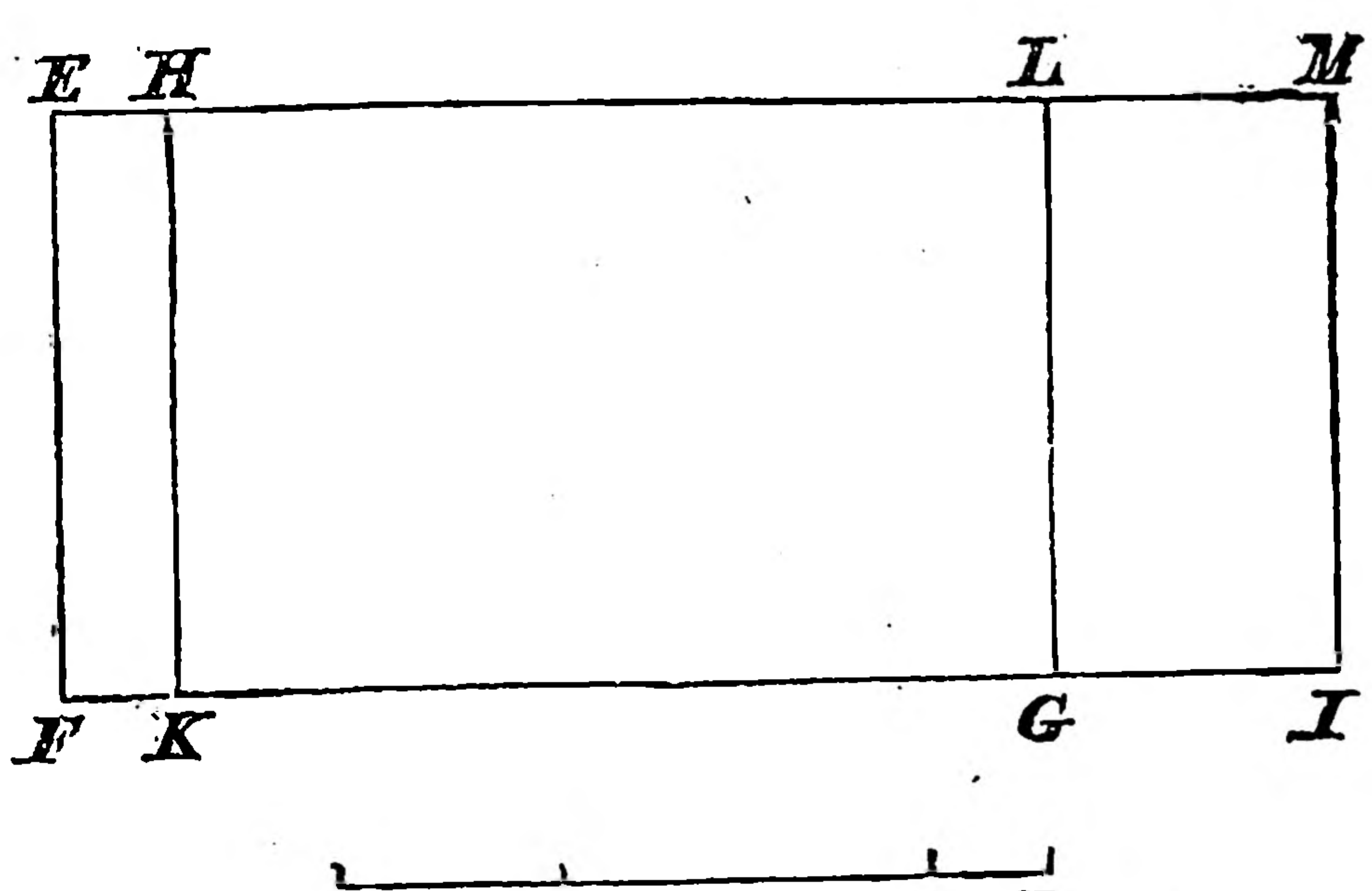
Фиг. 401.



Здѣсь опять избытокъ $\square AD + \square DB$ надъ $\square AC + \square CB$ равенъ избытку $2(AD.DB)$ надъ $2(AC.CB)$; и такъ какъ избытокъ прямоугольниковъ есть раціональная площадь, то и избытокъ квадратовъ долженъ быть площадь раціональная, что невозможно, потому что квадраты суть средніе (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно къ AB можно прибавить только одну BC, имѣющую выше сказанныя свойства.

Предложеніе 85. Къ составляющей съ среднимъ прямоугольникомъ цѣлую среднюю площадь (кн. 10, пред. 79) AB можно прибавить только одну прямую BC, которая съ цѣлою AC въ степени несоизмѣрима и коей квадратъ съ квадратомъ цѣлой составляетъ *среднюю* площадь и наконецъ которая съ цѣлой содержитъ *средній* прямоугольникъ, несоизмѣримый съ *среднею* площадью квадратовъ (фиг. 402).

Фиг. 402.



Доказат. Положимъ, что къ AB можетъ быть прибавлена еще другая прямая BD, такая (кн. 10, пред. 79), что AD и DB въ степени несоизмѣримы, что площадь $\square AD + \square DB$ есть *средняя* и наконецъ что $2(AD \, . \, DB)$ есть также *средняя* площадь и несоизмѣримая съ площадью $\square AD + \square DB$.

Построимъ на раціональной прямой EF прямоугольникъ $EG = EF . EL = \square AC + \square CB$. Отымемъ отъ этого прямоугольника прямоугольникъ $HG = EF . HL = 2(AC \, . \, CB)$, то остатокъ $EK = \square AB$, слѣдовательно AB квадратитъ площадь EK. Построимъ наконецъ прямоугольникъ $EI = EF \, . \, EM = \square AD + \square DB$, то, такъ какъ $EK = \square AB$, мы будемъ имѣть $HI = 2(AD \, . \, DB)$. Такъ какъ $\square AC + \square CB$, т. е. EG есть средняя площадь, а прямая EF раціональна, то прямая EL раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ EF. Такъ какъ $2(AC \, . \, CB) = HG$ есть площадь *средняя,* то HL раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ EF. Но площади $\square AC + \square CB$ и $2(AC . CB)$ несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы EG съ HG, слѣдовательно несоизмѣримы по длинѣ и прямыя EL и HL. Слѣдовательно прямыя EL и HL раціональны только въ степени соизмѣримы, откуда видимъ, что (кн. 10, пред. 74) EH есть *вычетъ*, къ которому прибавлена HL. Точно также можетъ быть показано, что къ нему прибавлена и HM, что невозможно, такъ какъ прямыя HL и HM съ цѣлою только въ степени соизмѣримы (кн. 10, пред. 80). Слѣдовательно къ AB можно прибавить только одну прямую BC съ сказанными выше свойствами.

Шесть порядковъ вычетовъ.

1. Вычетъ къ которому прибавлена такая прямая, что цѣлая квадратитъ надъ прибавленной, на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ цѣлою, называется *первымъ вычетомъ*, если цѣлая прямая по длинѣ соизмѣрима съ данною раціональною прямою.

2. Онъ называется *вторымъ вычетомъ*, если данная раціональная прямая по длинѣ соизмѣрима съ прибавленной.

3. Онъ называется *третьимъ вычетомъ,* если ни цѣлая, ни прибавленная по длинѣ не соизмѣримы съ данной раціональной прямой.

4. Вычетъ къ которому прибавлена такая прямая, что цѣлая прямая квадратитъ надъ прибавленною, на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ цѣлою, называется *четвертымъ вычетомъ*, если цѣлая прямая по длинѣ соизмѣрима съ данною раціональною прямою.

5. Онъ называется *пятымъ вычетомъ*, если прибавленная по длинѣ соизмѣрима съ данною раціональною прямою.

6. Онъ называется *шестымъ вычетомъ*, если ни первое, ни второе не имѣютъ мѣста.

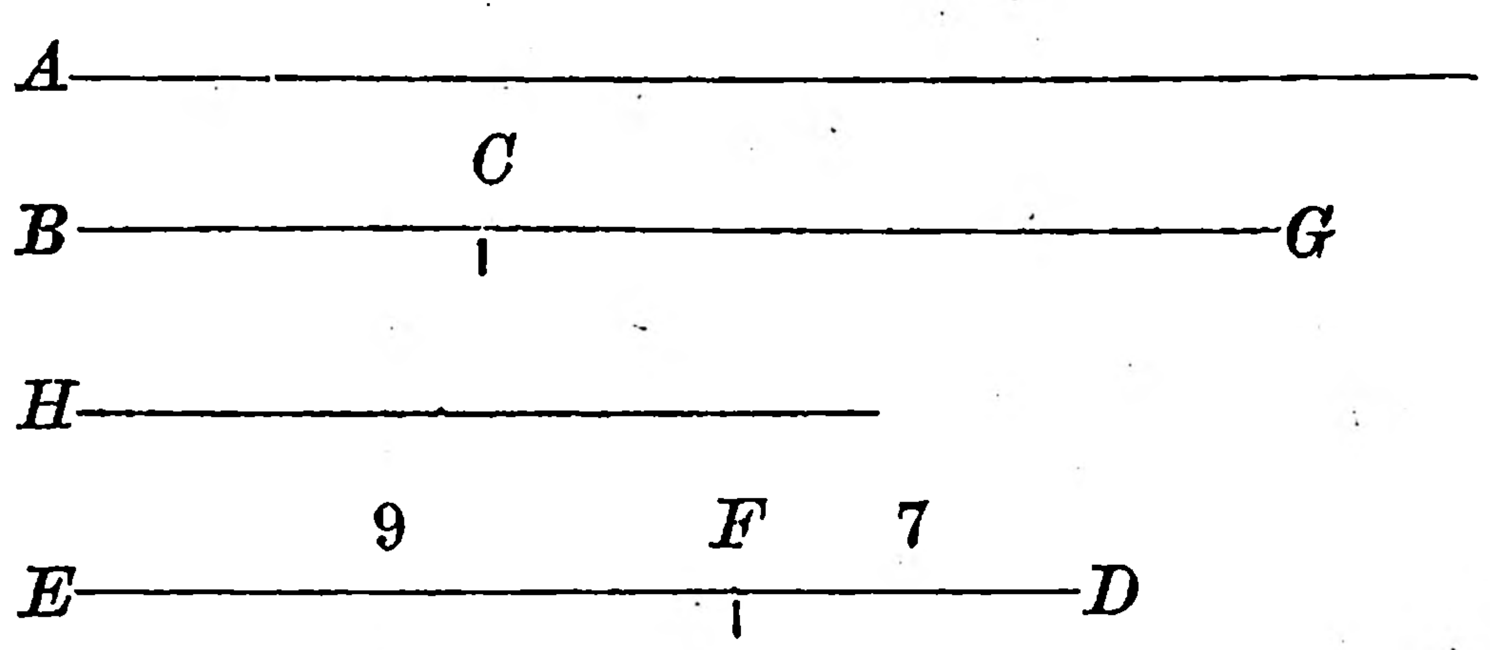
Предложеніе 86. Найти первый вычетъ (фиг. 403).

Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная раціональная прямая и BG другая прямая по длинѣ соизмѣримая съ A. Возьмемъ (кн. 10, пред. 30, слѣд.) два квадратныя числа ED и EF, коихъ разность FD не есть число квадратное и сдѣлаемъ:

$$ED : DF = \square BG : \square GC \tag{1}$$

я говорю, что $BG - GC = BC$ есть *первый вычетъ.*

Фиг. 403.



Прямая BG соизмѣрима съ A, слѣдовательно она раціональна. Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что $\square BG$ соизмѣримъ съ $\square GC$. Но $\square BG$ есть раціональная площадь, слѣдовательно $\square GC$, а потому и GC раціональны; но (кн. 10, пред. 9) прямыя BG и GC несоизмѣримы, слѣдовательно BG и GC суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, а потому (кн. 10, пред. 74) BC есть *вычетъ.*

Пусть теперь будетъ $\square BG - \square GC = \square H$, то въ силу пропорціи (1) (кн. 5, пред. 19), мы будемъ имѣть:

$$DE : EF = \square BG : \square H$$

слѣдовательно прямыя BG и H по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 9). Слѣдовательно BG квадратитъ надъ GC, на квадратъ, коего сторона H соизмѣрима съ BG, а какъ BG по длинѣ соизмѣрима съ A, то BC и есть *первый вычетъ.*

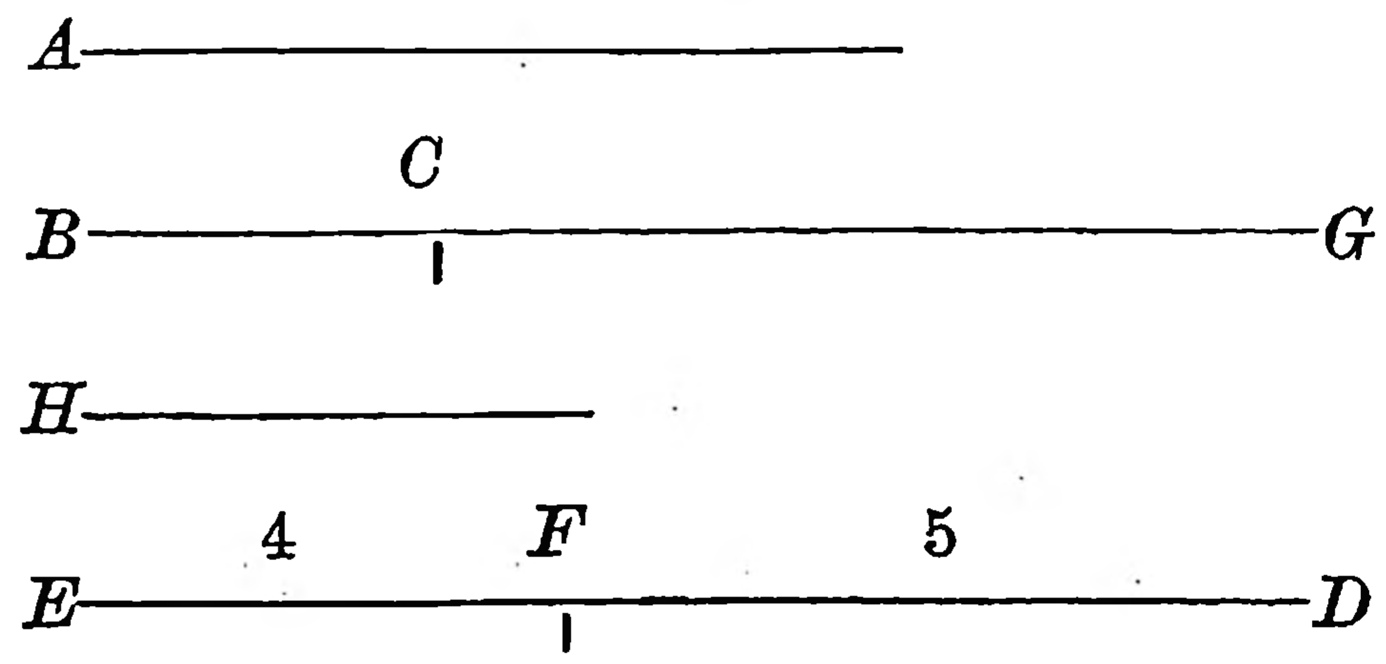
Предложеніе 87. Найти второй вычетъ (фиг. 404)?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная раціональная прямая, а GC другая по длинѣ соизмѣримая съ A. Возьмемъ снова два квадратныхъ числа DE и EF, коихъ разность не есть число квадратное и сдѣлаемъ:

$$FD : DE = \square CG : \square GB \tag{1}$$

я говорю, что $BG—GC=BC$ есть *второй вычетъ.*

Фиг. 404.



Такъ какъ прямая GC соизмѣрима съ A, то она раціональна. Но изъ пропорціи (1) (кн. 10, пред. 6) слѣдуетъ, что площади $\square CG$ и $\square GB$ соизмѣримы, а какъ площадь $\square CG$ раціональна, то раціональна и площадь $\square GB$, а слѣдовательно раціональна и прямая GB, но (кн. 10, пред. 9) прямыя CG и GB по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя CG и GB раціональны, только въ степени соизмѣримы, а потому (кн. 10, пред. 74) BC есть *вычетъ.*

Положимъ теперь $\square GB—\square GC=\square H$, то изъ пропорціи (1) (кн. 5, пред. 4 и кн. 5, пред. 19) мы имѣемъ:

$$ED:EF=\square GB:\square H$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) GB и H соизмѣримы. Откуда видимъ, что GB квадратитъ надъ GC, на квадратъ, коего сторона H по длинѣ соизмѣрима съ GC, но GC есть прямая соизмѣримая съ A, слѣдовательно BC есть *второй вычетъ.*

Предложеніе 88. Найти третій вычетъ (фиг. 405)?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная раціональная прямая. Возьмемъ три числа E, BC и CD, которыя между собою не относятся какъ квадратныя числа, но BC и BD относятся какъ числа квадратныя. Сдѣлаемъ:

$$E:BC=\square A:\square FG \qquad (1)$$

и

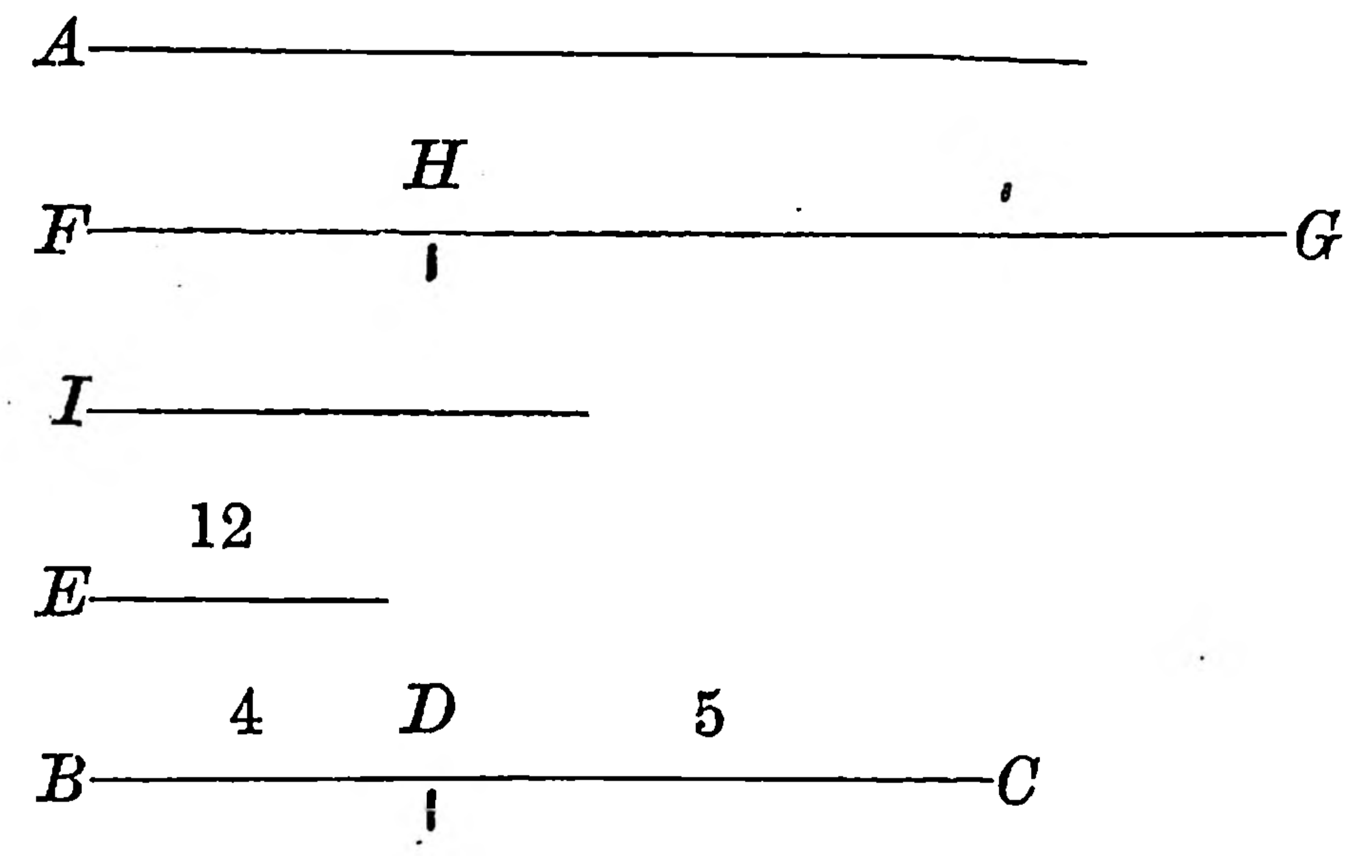
$$BC:CD=\square FG:\square GH$$

я говорю, что $FG—GH=FH$ есть *третій вычетъ.*

Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что площади $\square A$ и $\square FG$ соизмѣримы, но (кн. 10, пред. 9) прямыя A и FG по длинѣ несоизмѣримы, слѣдовательно FG есть раціональная прямая.

Изъ пропорціи (2) слѣдуетъ, что площади $\square FG$ и $\square GH$ соизмѣримы, но прямыя FG и GH по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя FG и GH раціональны и только въ степени соизмѣримы. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что FH есть *вычетъ*.

Фиг. 405.



Изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ (кн. 5, пред. 22):

$$E:CD=\square A:\square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя A и GH по длинѣ несоизмѣримы. Но было показано, что A и FG по длинѣ несоизмѣримы, слѣдовательно ни GH, ни FG съ прямою A по длинѣ не соизмѣримы.

Положимъ теперь $\square FG - \square GH = \square I$, то изъ пропорціи (2) найдемъ (кн. 5, пред. 19):

$$CB:BD=\square FG:\square I$$

откуда (кн. 10, пред. 9) FG и I по длинѣ соизмѣримы. Слѣдовательно FG квадратитъ надъ GH, на квадратъ, коего сторона I по длинѣ соизмѣрима съ FG, но было показано, что прямыя GH и FG по длинѣ несоизмѣримы съ A, слѣдовательно FH есть *третій вычетъ*.

Предложеніе 89. Найти четвертый вычетъ (фиг. 406)?

Рѣшеніе. Пусть данная раціональная прямая будетъ A и другая BG по длинѣ соизмѣримая съ A. Возьмемъ два числа DF и FE, коихъ сумма DE ни къ одному изъ нихъ не относится какъ квадратныя числа и сдѣлаемъ:

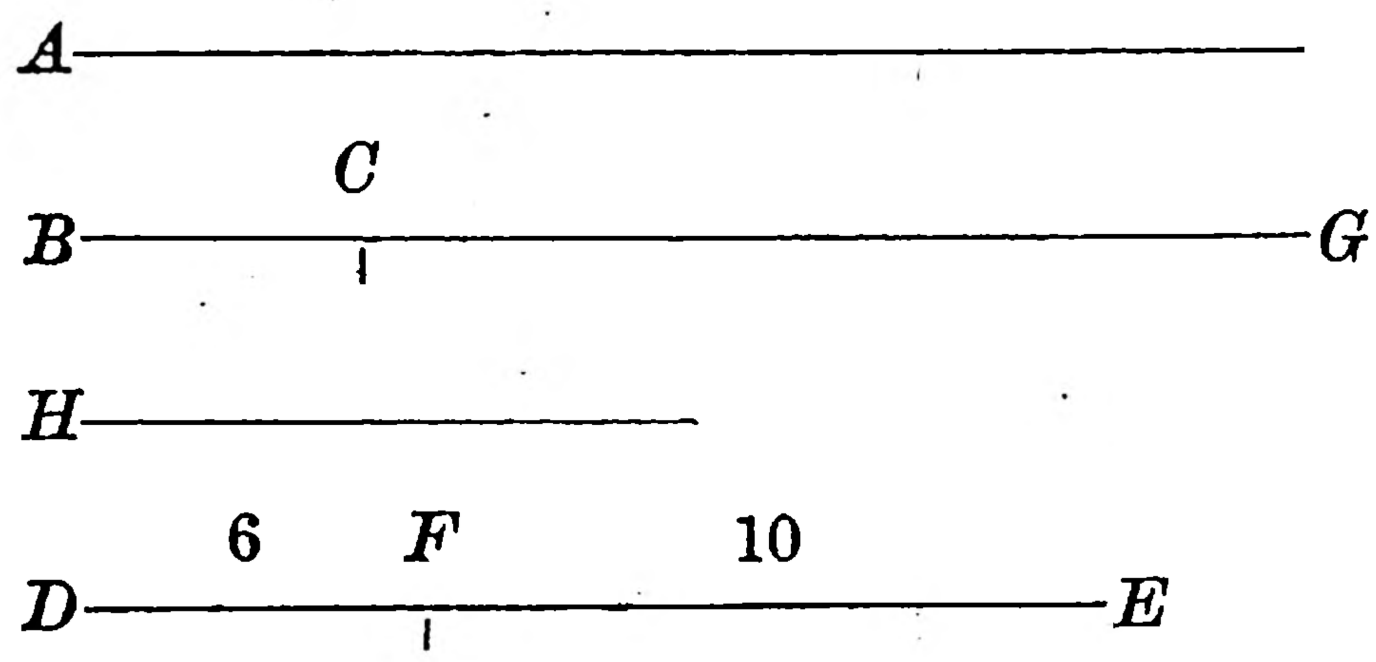
$$DE:EF=\square BG:\square CG \tag{1}$$

я говорю, что $BG-GC=BC$ есть *четвертый вычетъ*.

Такъ какъ BG по длинѣ соизмѣрима съ A, то BG раціональна, а потому $\square BG$ есть раціональная площадь.

Изъ пропорціи (1) (кн. 10, пред. 6) слѣдуетъ, что $\square BG$ соизмѣримъ съ $\square CG$, слѣдовательно $\square CG$ есть раціональная площадь, а потому прямая CG раціональна, но (кн. 10, пред. 9) BG и GC по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямыя BG и GC раціональны только въ степени соизмѣримы, а потому (кн. 10, пред. 74) прямая BC есть *вычетъ* (кн. 10, пред. 74).

Фиг. 406.



Положимъ теперь $\square BG - \square CG = \square H$, то изъ пропорціи (1) мы будемъ имѣть (кн. 5, пред. 19):

$$DE : DF = \square BG : \square H$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя BG и H по длинѣ несоизмѣримы Слѣдовательно прямая BG квадратитъ надъ CG на квадратъ, коего сторона H по длинѣ несоизмѣрима съ BG; но BG и A соизмѣримы, слѣдовательно BC есть *четвертый вычетъ*.

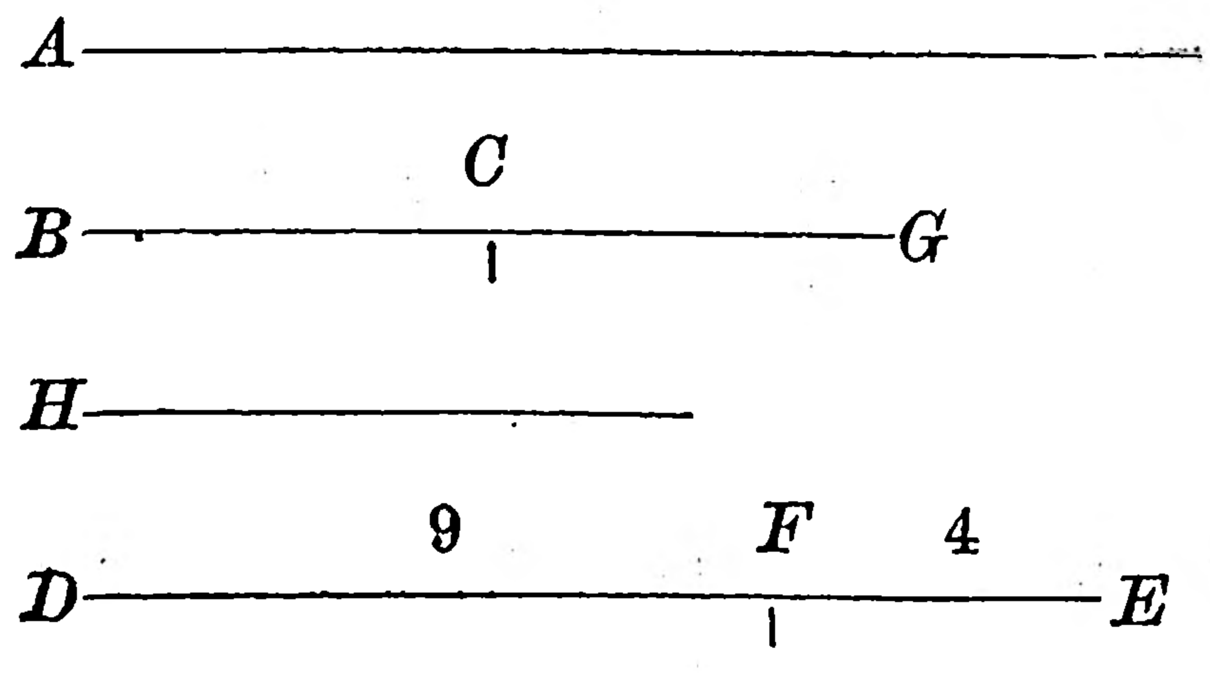
Предложеніе 90. Найти пятый вычетъ (фиг. 407)?

Рѣшеніе. Пусть данная раціональная прямая будетъ A и другая EG по длинѣ соизмѣримая съ A. Возьмемъ два числа DF и FE, коихъ сумма ни къ одному изъ нихъ не относится какъ квадратное число и сдѣлаемъ:

$$FE : ED = \square CG : \square GB \tag{1}$$

я говорю, что $BG - GC = BC$ есть *пятый вычетъ*.

Фиг. 407.



Такъ какъ прямая CG соизмѣрима съ A, слѣдовательно CG, а потому и $\square CG$ суть раціональныя величины, то изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что $\square CG$ соизмѣримъ съ $\square GB$, слѣдовательно $\square GB$ а потому и прямая GB раціональны; но (кн. 10, пред. 9) CG и GB по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что GB и GC суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) BC есть *вычетъ*.

Положимъ теперь, $\square BG - \square GC = \square H$, то изъ пропорціи (1) (кн. 5, пред. 4, слѣд. и пред. 19) мы имѣемъ:

$$ED : DF = \square BG : \square H$$

откуда прямыя GB и H по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно GB квадратитъ надъ GC на квадратъ, коего сторона H, по длинѣ несоизмѣрима съ GB, но было показано, что CG соизмѣрима съ A, слѣдовательно BC есть *пятый вычетъ*.

Предложеніе 91. Найти *шестой вычетъ* (фиг. 408)?

Рѣшеніе. Пусть данная раціональная прямая будетъ A. Возьмемъ три числа E, BC и CD, которыя не относятся между собою какъ квадратныя числа и сдѣлаемъ:

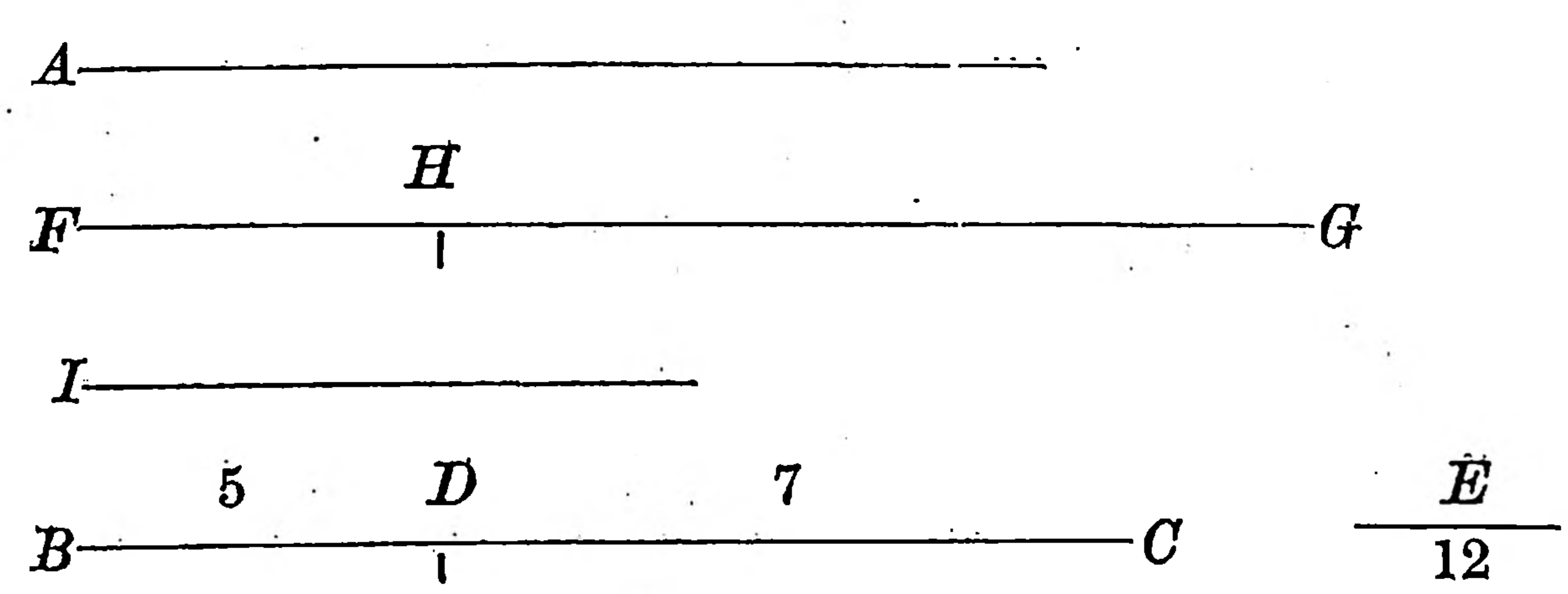
$$E : BC = \square A : \square FG \tag{1}$$

и

$$BC : CD = \square FG : \square GH \tag{2}$$

я говорю, что $FG - GH = FH$ и будетъ *шестой вычетъ*.

Фиг. 408.



Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что $\square A$ и $\square FG$ соизмѣримы, слѣдовательно $\square FG$, а также и FG раціональны, но A и FG (кн. 10, пред. 9) по длинѣ несоизмѣримы.

Изъ пропорціи (2) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что $\square FG$ и $\square GH$ соизмѣримы, слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то $\square GH$, а также и GH раціональны, но (кн. 10, пред. 9) FG и GH по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямыя FG и GH раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) FH есть *вычетъ*.

Изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ (кн. 5, пред. 22):

$$E:CD=\square A:\square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) A и GH по длинѣ несоизмѣримы, но было показано, что A несоизмѣрима съ FG. Слѣдовательно какъ FG такъ и GH по длинѣ несоизмѣримы съ A.

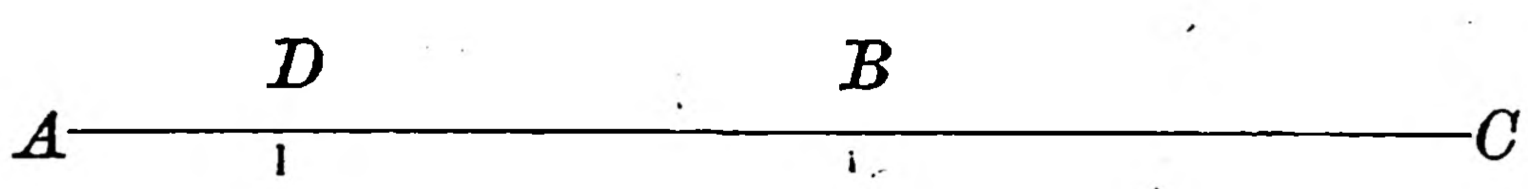
Положимъ теперь, $\square FG-\square GH=\square I$, то изъ пропорціи (2) найдемъ (кн. 5, пред. 19):

$$CB:BD=\square FG:\square I$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя FG и I по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно FG квадратитъ надъ GH на квадратъ, коего сторона I по длинѣ несоизмѣрима съ FG, но было показано, что FG и GH по длинѣ несоизмѣримы съ A, слѣдовательно FH есть *шестой вычетъ*.

Замѣчаніе. Легко можно показать, что предъидущіе вычеты могутъ быть найдены гораздо проще (фиг. 409).

Фиг. 409.



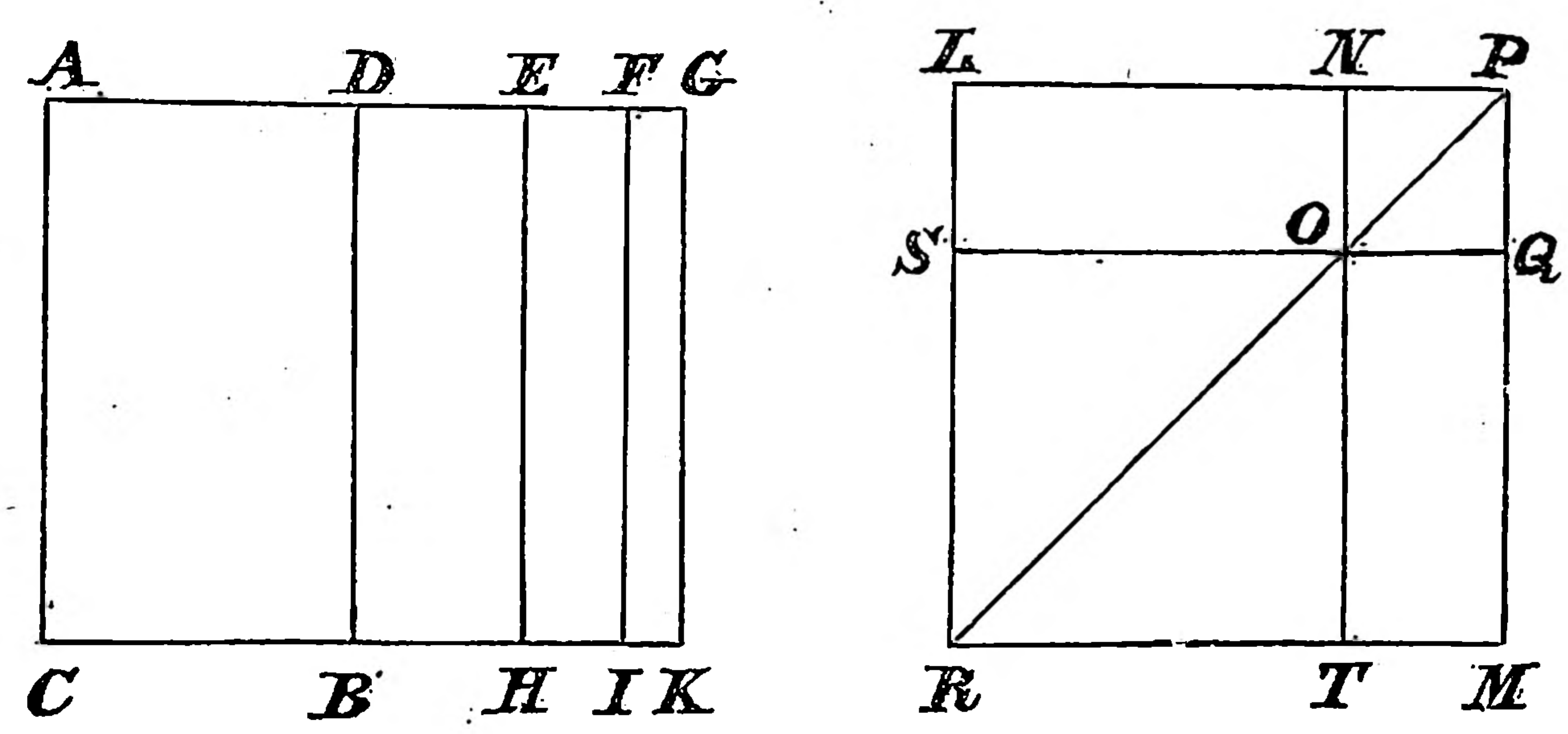
Положимъ что требуется найти *первый вычетъ*, для этого возьмемъ (кн. 10, пред. 49) *первую биноміальную* AC, коей большій членъ есть AB и сдѣлаемъ $BC=BD$, то AD и будетъ *первый вычетъ*. Въ самомъ дѣлѣ, AB и BC, т. е. AB и BD суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, и AC квадратитъ надъ BC, а слѣдовательно и надъ BD, на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ AC, но AB по длинѣ несоизмѣрима съ данною раціональною прямою, слѣдовательно AD есть *первый вычетъ*.

Точно также можно найти остальные пять вычетовъ, если каждый разъ взять биноміальную того же порядка, т. е. вторую, третью и т. д. какого порядка желаемъ найти вычетъ.

Предложеніе 92. Прямоугольникъ, заключающійся между раціональною прямою AC и первымъ вычетомъ AD, квадратитъ *первый вычетъ* (фиг. 410).

Доказат. Прибавимъ къ первому вычету AD прямую DG, то AG и GD будутъ (кн. 10, пред. 47) раціональны только въ степени соизмѣримыя прямыя. Цѣлая прямая AG по длинѣ соизмѣрима съ AC и AG квадратитъ надъ DG на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AG. Раздѣлимъ прямую DG въ точкѣ E пополамъ и на AG построимъ прямоугольникъ $AF.FG$ равный $\square EG$ или равный $\frac{1}{4}$ $\square DG$ и кромѣ того, чтобы его дополненіе былъ квадратъ, то (кн. 10, пред. 18) AF и FG будутъ прямыя по длинѣ соизмѣримыя. Чрезъ точки E, F и G проведемъ прямыя EH, FI, GK параллельныя прямой AC. Сдѣлаемъ (кн. 2, пред. 14) квадратъ $LM=AI$ и $NQ=FK$, оба будутъ на одной діагонали PR (кн. 6, пред. 26) и дополнимъ фигуру.

Фиг. 410.



Теперь надобно доказать, что въ фигурѣ $LPMR$ прямая LN квадратитъ площадь AB и есть *вычетъ*.

1. Такъ какъ $AF.FG=\square EG$, то (кн. 6, пред. 17):

$$AF:EG=EG:FG$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$AF:EG=AI:EK \text{ и } EG:FG=EK:FK$$

слѣдовательно:

$$AI:EK=EK:FK.$$

Откуда видимъ, что EK есть средне-пропорціональная площадь между AI и FK, т. е. между LM и NQ, которая (кн. 10, пред. 54, слѣд.) есть MN, слѣдовательно $MN=EK$. Но мы имѣемъ (кн. 1, пред. 37) $EK=DH$ и (кн. 1, пред. 43) $MN=LQ$. Откуда видимъ, что DK=гномону $SOTMPL+NQ$. Но $AK=LM+NQ$, слѣдовательно $AB=SF=\square LN$. Слѣдовательно LN квадратитъ площадь AB.

2. По предъидущему прямыя AF и FG по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 16) AG, а также (кн. 10, пред. 12) и соизмѣримая съ нею AC по длинѣ соизмѣрима съ AF и FG. Но AC есть раціональная прямая, слѣдовательно и прямыя AF и FG, а также (кн. 10, пред. 20) AI и FK раціональны. Но мы имѣемъ $AI=LM$ и $FK=NQ$, слѣдовательно LM и NQ, а потому LP и PN раціональны.

Такъ какъ прямыя DE и EG по длинѣ соизмѣримы, то DG съ DE

и GE по длинѣ соизмѣримы, но DG есть раціональная прямая несоизмѣримая по длинѣ съ AC, поэтому DE и EG раціональны по длинѣ несоизмѣримыя съ AC, слѣдовательно (кн. 10, пред. 22) DH и EK суть средніе прямоугольники. Но $DH=EK=MN=LQ$, слѣдовательно площадь LQ есть также средняя. Было показано, что NQ есть раціональная площадь, слѣдовательно LQ и NQ несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1).

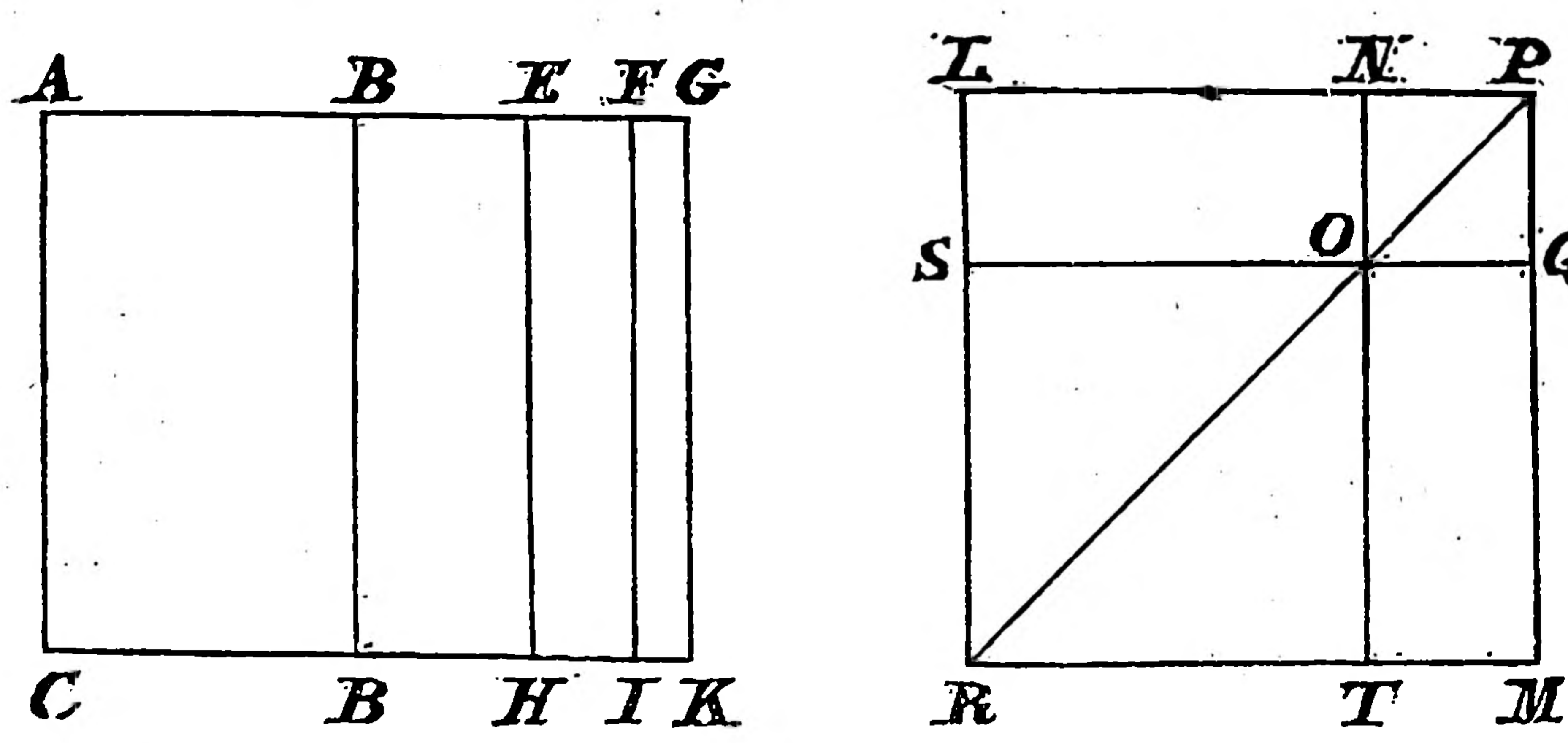
$$LQ : NQ = LP : PN$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) LP и PN по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно LP и PN раціональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя, откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что прямая LN, квадратящая площадь AB, есть *вычетъ*.

Предложеніе 93. Первый вычетъ квадратитъ прямоугольникъ AB, заключенный между раціональною прямою AC и вторымъ вычетомъ AD (фиг. 411).

Доказат. Прибавимъ ко *второму вычету* AD прямую DG, то прямыя AG и GD будутъ раціональны только въ степени соизмѣримы, прибавленная DG соизмѣрима по длинѣ съ AC и AG квадратитъ надъ DG на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AG. Раздѣлимъ прямую DG въ точкѣ E пополамъ и сдѣлаемъ тоже построеніе, что и въ предъидущемъ предложеніи, то найдемъ, какъ и тамъ, что прямая LN въ фигурѣ $LRMP$ квадратитъ площадь AB. Остается только показать, что LN есть *первый средній вычетъ*.

Фиг. 411.



Такъ какъ (кн. 10, пред. 18) прямыя AF и FG по длинѣ соизмѣримы, то AG соизмѣрима по длинѣ съ AF и FG, но AG есть раціональная прямая и соизмѣрима по длинѣ съ AC, слѣдовательно AF и FG раціональны и по длинѣ соизмѣримы съ AC, откуда (кн. 10, пред. 22) AI и FK суть *среднія* площади. Но мы имѣемъ $AI=LM$ и $FK=NQ$, слѣдовательно LM и NQ суть также *среднія* площади и соизмѣримыя, слѣдовательно прямыя LP и PN суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя.

Такъ какъ DE по длинѣ соизмѣрима съ EG, то DG по длинѣ соизмѣрима съ DE и EG, но DG по длинѣ соизмѣрима съ AC, слѣдовательно DE и EG раціональны и по длинѣ соизмѣримы съ AC, откуда также DH и EK раціональны, но $EK=MN=LQ$, слѣдовательно и площадь LQ раціональна. Но мы показали, что $\square PN=NQ$ есть площадь *средняя*, слѣдовательно LQ несоизмѣрима съ NQ. Но:

$$LQ:NQ=LP:PN$$

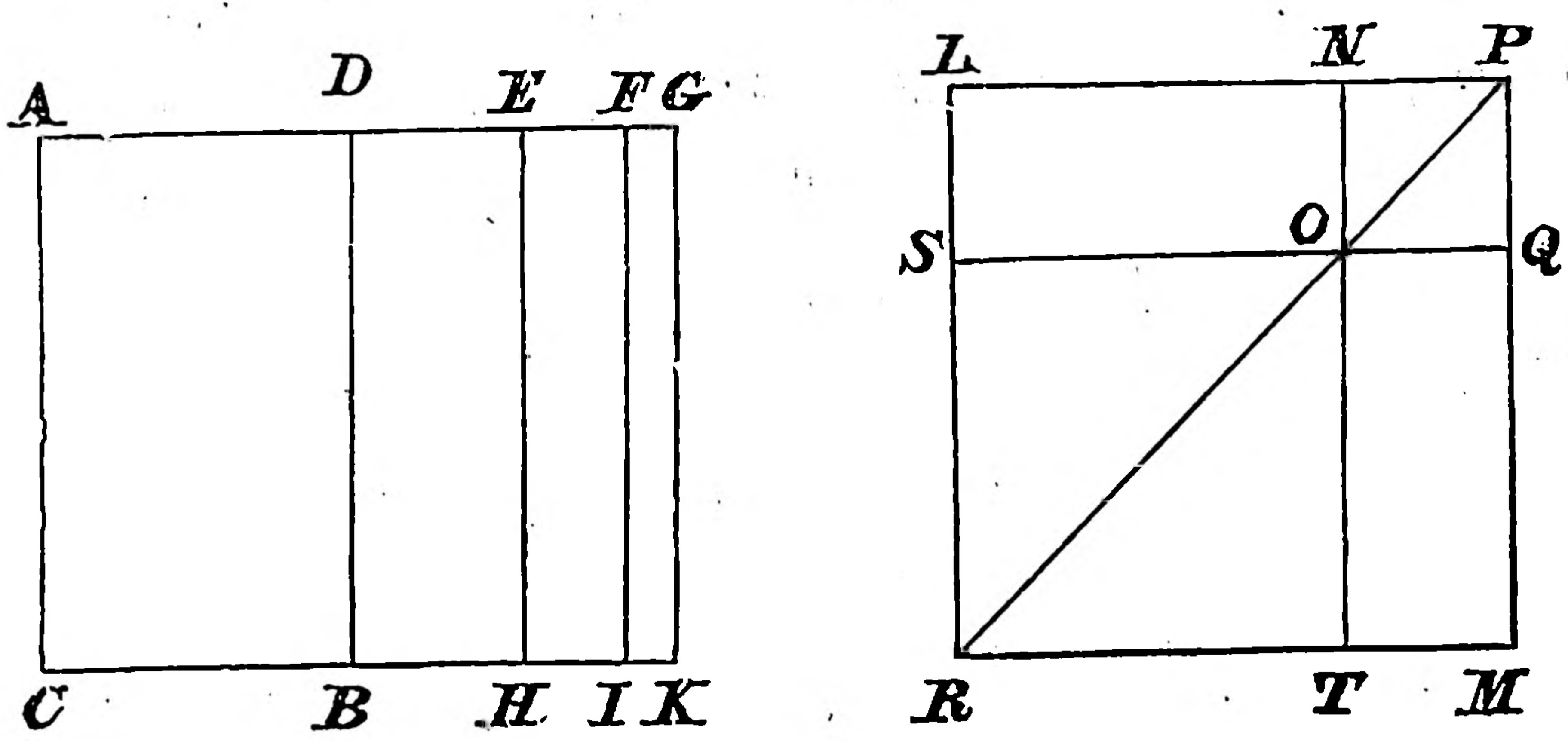
слѣдовательно LP и PN суть среднія прямыя только въ степени соизмѣримыя, но такъ какъ площадь LQ раціональна, то раціональна и площадь $LP.PN$.

Откуда видимъ, что прямая LN, квадратящая площадь AB (кн. 10, пред. 75) есть *первый средній вычетъ*.

Предложеніе 94. Второй средній вычетъ, квадратитъ площадь AB прямоугольника, заключеннаго между раціональною прямою AC и третьимъ вычетомъ AD (фиг. 412).

Доказат. Прибавимъ къ AD прямую DG, то AG и GD будутъ раціональны, только въ степени соизмѣримыя прямыя и какъ AG, такъ и GD будутъ по длинѣ несоизмѣримы съ данною раціональною прямою и кромѣ этого AG квадратитъ надъ GD, на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AG. Раздѣлимъ прямую DG въ точкѣ E пополамъ и сдѣлаемъ тоже построеніе какъ и выше, то точно также какъ и тамъ можетъ быть доказано, что LN въ фигурѣ $LRMP$ квадратитъ площадь AB. Останется только показать, что LN есть *второй средній вычетъ*.

Фиг. 412.



Такъ какъ (кн. 10, пред. 18) прямыя AF и FG по длинѣ соизмѣримы, а также и прямыя AI и FK. Но, какъ $AI=\square LP$ и $FK=\square NP$, то площади $\square LP$ и $\square NP$ соизмѣримы. Такъ какъ AF по длинѣ соизмѣрима съ FG, то AG по длинѣ соизмѣрима съ AF и FG; но прямая AG

раціональна и несоизмѣрима по длинѣ съ AC, слѣдовательно AF и FG раціональны и по длинѣ несоизмѣримы съ AC. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 22), что AI и FK суть *среднія* площади. Но мы имѣемъ $AI = \square LP$, $FK = \square NP$, слѣдовательно $\square LP$ и $\square NP$ суть площади *среднія*, а потому LP и NP суть *среднія* прямыя.

Такъ какъ DE по длинѣ соизмѣрима съ EG, а также DG по длинѣ соизмѣрима съ DE и EG, а DG раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ AC, слѣдовательно DE и EG раціональны и по длинѣ несоизмѣримы съ AC, откуда видимъ, что площади DH и EK суть *среднія*.

Прямая AG по длинѣ несоизмѣрима съ GD, а AG по длинѣ соизмѣрима съ AF и GD съ GE, то (кн. 10, пред. 13) AF по длинѣ несоизмѣрима съ GE. Но мы имѣемъ:

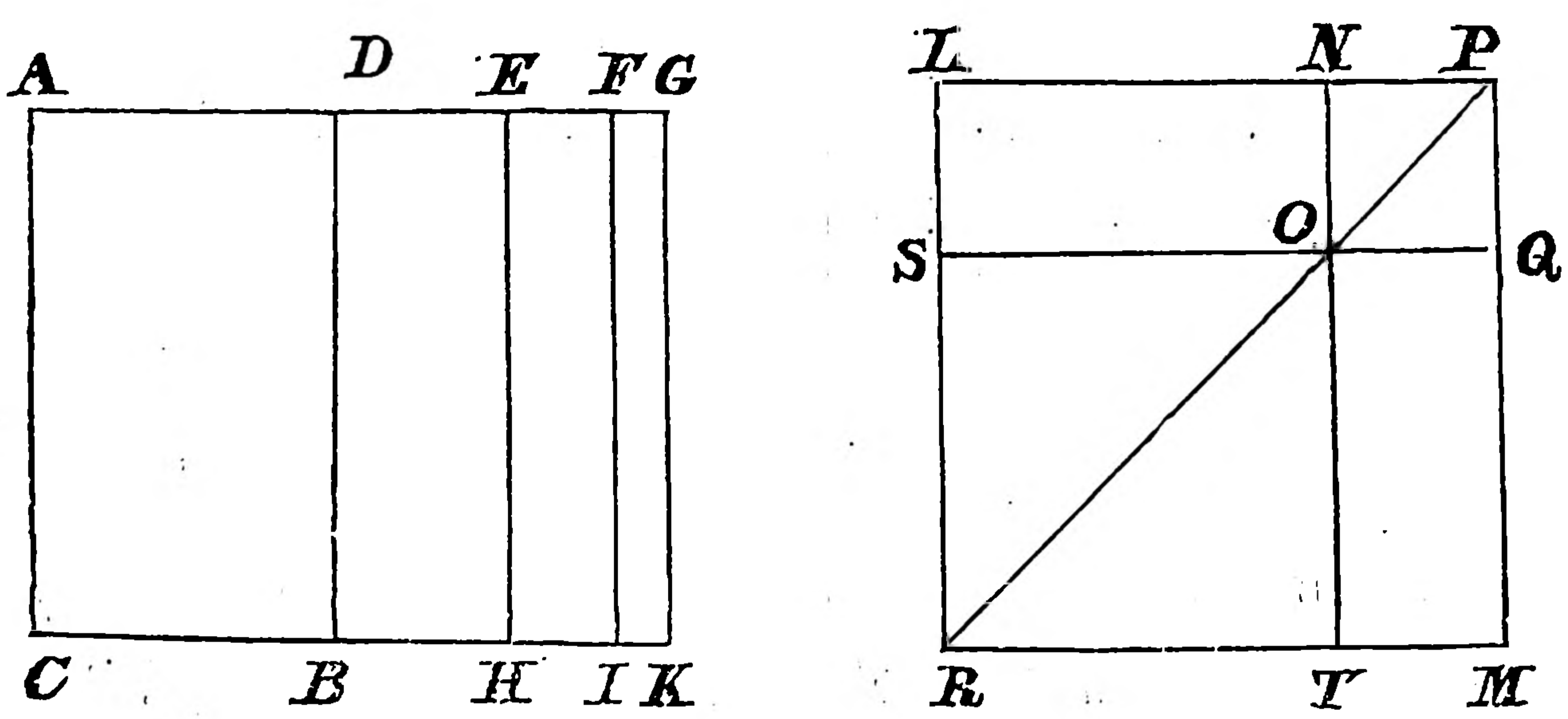
$$AF : GE = AI : EK$$

слѣдовательно AI и EK несоизмѣримы. Мы имѣемъ также: $EK = MN = LP.PN$, слѣдовательно $\square LP$ несоизмѣримъ съ $LP.PN$, и слѣдовательно LP и PN по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ что LP и PN суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя прямыя, и какъ EK есть *средняя* площадь, т. е. $LP.PN$ есть также *средняя*, слѣдовательно LN, квадратящая площадь AB (кн. 10, пред. 76) есть *второй среднiй вычетъ.*

Предложеніе 95. Меньшая ирраціональная квадратитъ площадь прямоугольника AB, заключеннаго между раціональною прямою AC и *четвертымъ вычетомъ* (фиг. 413).

Доказат. Прибавимъ къ AD прямую DG, то AG и GD будутъ раціональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя, а также AG по длинѣ соизмѣрима съ AC и AG квадратитъ надъ DG, на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AG. По раздѣленіи прямой DG въ точкѣ E пополамъ и послѣ выше сдѣланнаго построенія, легко доказать, какъ и выше, что LN, въ фигурѣ $LRMP$, квадратитъ площадь AB, а остается только показать, что LN есть *меньшая ирраціональная.*

Фиг. 413.



Такъ какъ здѣсь (кн. 10, пред. 19) AF и FG по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AF:FG=AI:FK$$

то (кн. 10, пред. 10) площади AI и FK также несоизмѣримы. Такъ какъ $AI=LM=\square LP$ и $FK=NQ=\square NP$, то $\square LP$ и $\square NP$ также несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямыя LP и NP несоизмѣримы въ степени.

Такъ какъ прямая AG раціональна и соизмѣрима по длинѣ съ AC, то (кн. 10, пред. 20) AK есть раціональная площадь; но:

$$AK=\square LP+\square NP$$

слѣдовательно и площадь $\square LP+\square NP$ раціональна.

Такъ какъ DG и AC по длинѣ несоизмѣримы и обѣ раціональны, то (кн. 10, пред. 22) DK есть *средняя* площадь, но $DK=2(LP.PN)$, слѣдовательно и площадь $LP.PN$ есть также *средняя.*

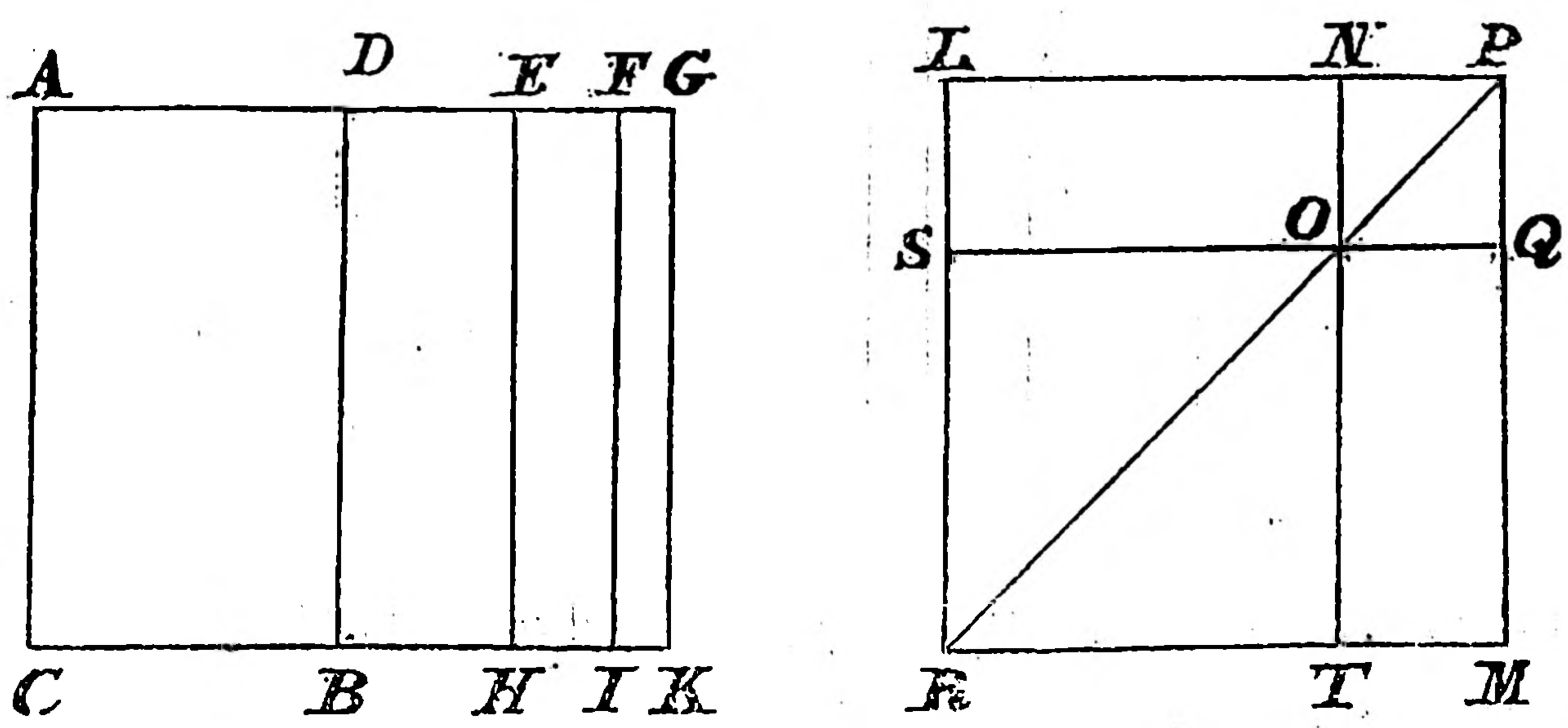
Изъ этого видимъ, что прямая LN, квадратящая площадь AB (кн. 10, пред. 77) есть *меньшая ирраціональная.*

Предложеніе 96. Прямая, которая съ раціональною площадью даетъ цѣлую среднюю площадь, квадратитъ площадь прямоугольника AB, заключеннаго между раціональною прямою AC и *пятымъ вычетомъ* AD (фиг. 414).

Доказат. Прибавимъ къ AD прямую DG, то AG и GD будутъ раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, а также GD по длинѣ соизмѣрима съ AC и AG квадратитъ надъ GD на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ AG.

Послѣ построенія сдѣланнаго выше, можно показать, какъ и тамъ, что LN въ фигурѣ $LRMP$ квадратитъ площадь AB, а остается только показать, что прямая LN есть та, *которая съ раціональною площадью даетъ цѣлую среднюю* площадь.

Фиг. 414.



Такъ какъ здѣсь (кн. 10, пред. 19) AF и FG по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AF:FG=AI:FK$$

то (кн. 10, пред. 10) площади AI и FK несоизмѣримы. Откуда, такъ какъ $AI = \square LP$ и $FK = \square NP$, то площади $\square LP$ и $\square NP$ также несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя LP и NP въ степени несоизмѣримы.

Такъ какъ AG по длинѣ несоизмѣрима съ GD, а GD соизмѣрима съ AC, то (кн. 10, пред. 13) AG по длинѣ несоизмѣрима съ AC. Но прямыя AG и AC раціональныя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 22) AK есть *средняя* площадь, но $AK = \square LP + \square NP$, слѣдовательно эта послѣдняя площадь есть *средняя*.

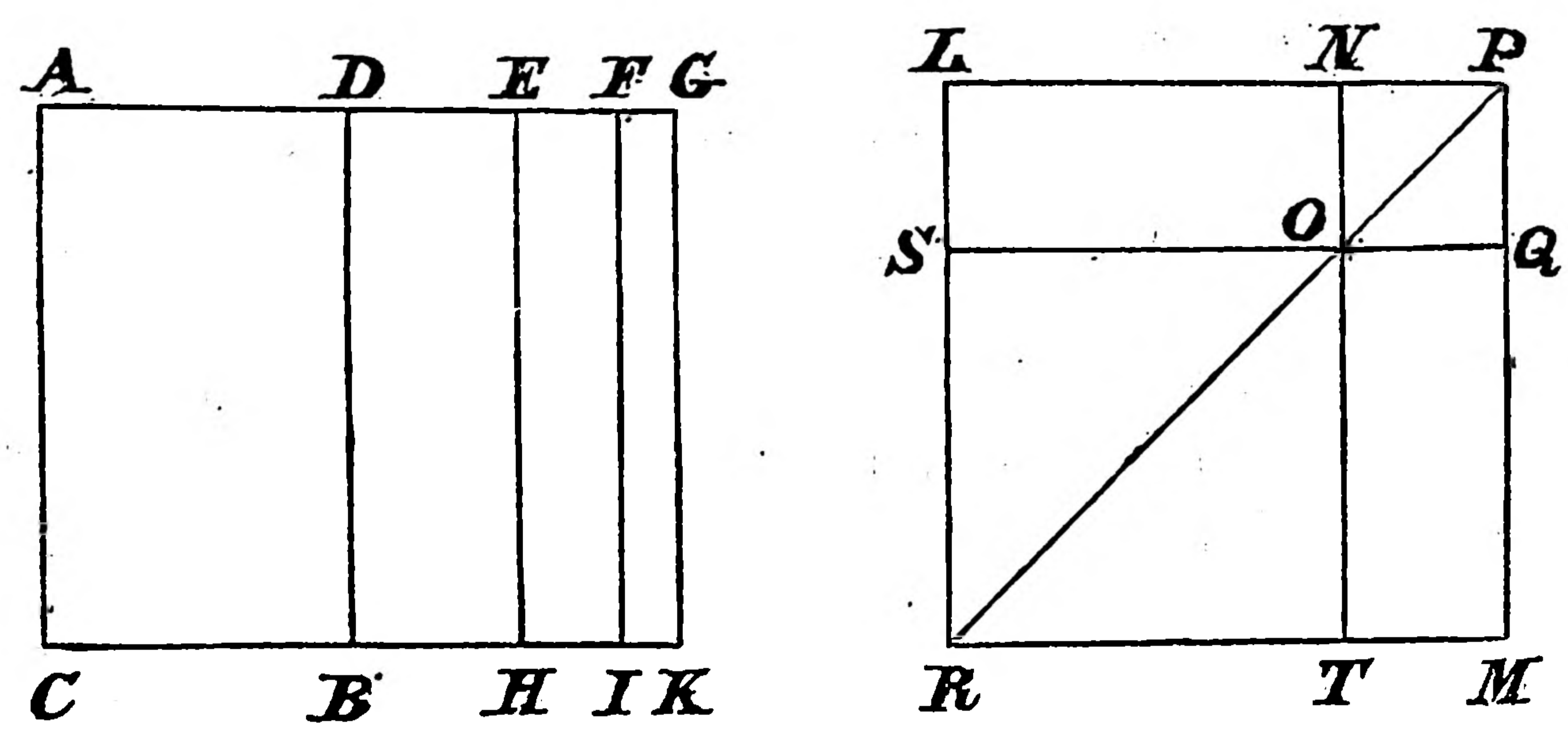
Такъ какъ прямая GD раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ AC, то (кн. 10, пред. 20) DK есть раціональная площадь, но $DK = 2(LP.PN)$, слѣдовательно площадь $2(LP.PN)$ есть раціональная.

Изъ этого видимъ, что LN, квадратящая площадь AB (кн. 10, пред. 78) есть та, *которая съ раціональною площадью даетъ цѣлую среднюю площадь*.

Предложеніе 97. Прямая, которая съ среднею площадью даетъ цѣлую среднюю площадь квадратитъ площадь прямоугольника AB, заключеннаго между раціональною прямою AC и *шестымъ вычетомъ* AD (фиг. 415).

Доказат. Прибавимъ къ AD прямую DG, то AG и GD будутъ раціональныя прямыя соизмѣримыя только въ степени и какъ AG, такъ и GD по длинѣ несоизмѣримы съ AC; AG квадратитъ надъ GD на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ AG. Сдѣлавъ тоже построеніе, что и выше легко показать, что LN въ фигурѣ $LRMP$ квадратитъ площадь AB, остается показать, что LN есть прямая, которая съ *среднею площадью даетъ цѣлую среднюю площадь*.

Фиг. 415.



Такъ какъ здѣсь (кн. 10, пред. 19) AF и FG по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AF : FG = AI : FK$$

то (кн. 10, пред. 10) и площади AI и FK также несоизмѣримы. Но мы имѣемъ:

$$LM = \square LD = AI \quad \text{и} \quad QN = \square NP = FK$$

слѣдовательно и $\square LP$ и $\square NP$ также несоизмѣримы, откуда слѣдуетъ, что прямыя LP и NP несоизмѣримы въ степени.

Такъ какъ AG и AC суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, то (кн. 10, пред. 22) $AK = \square LP + \square NP$ есть *средняя* площадь.

Такъ какъ AC и DG раціональны, а AC по длинѣ несоизмѣрима съ DG, то площадь $DK = 2(LP.PN)$ есть *средняя*.

Далѣе AG и DG по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ:

$$AG : DG = AK : DK$$

то и площади AK и DK, т. е. $\square LP + \square NP$ и $2(LP.PN)$ также несоизмѣримы.

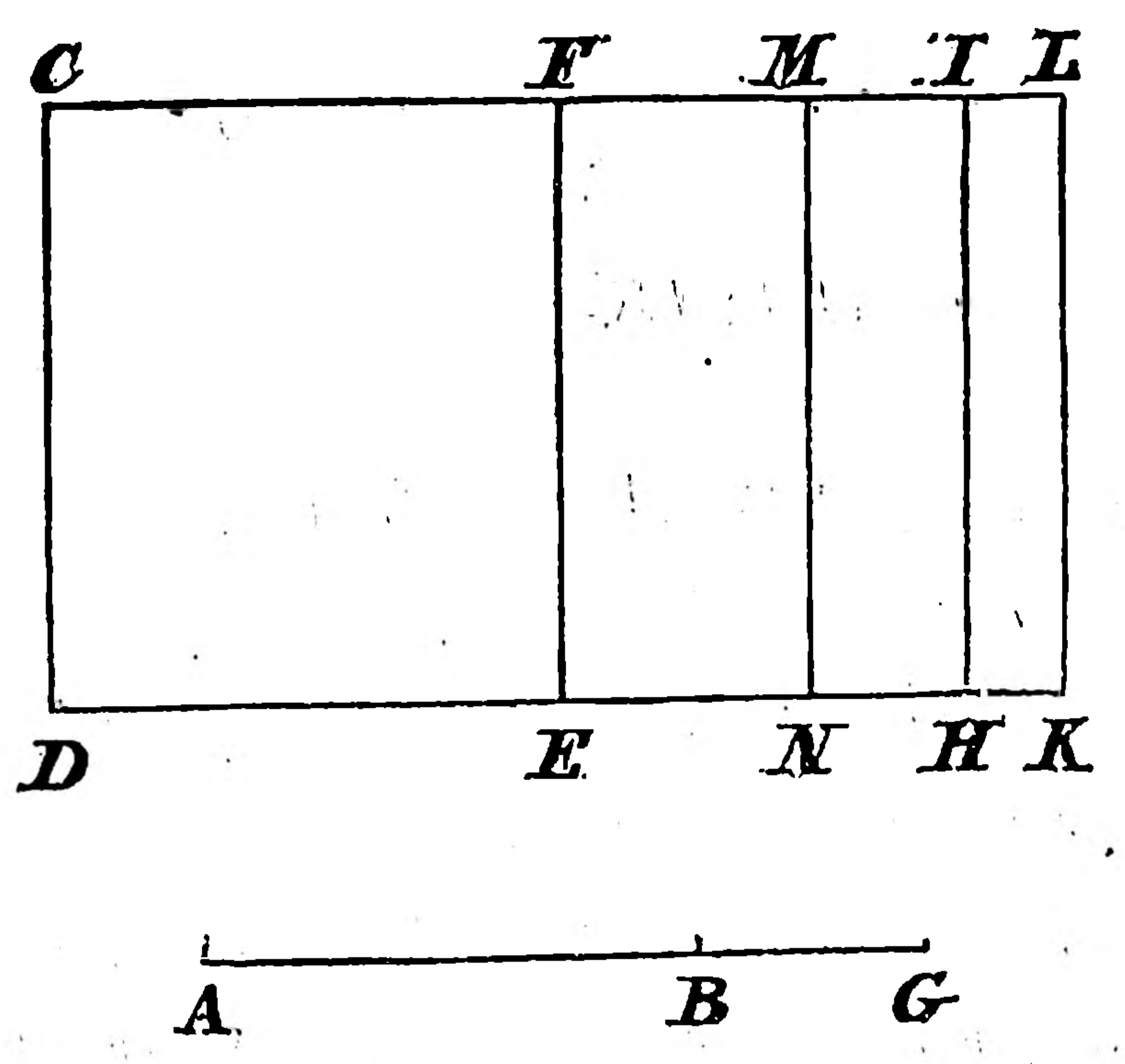
Изъ этого видимъ, что LN, квадратящая площадь AB (кн. 10, пред. 79) есть прямая, *которая съ среднею площадью даетъ цѣлую среднюю площадь.*

Предложеніе 98. Прямоугольникъ CE, построенный на раціональной прямой CD, коего площадь равна площади квадрата построеннаго на *вычетъ* AB, имѣетъ высотою *первый вычетъ* CF (фиг. 416).

Доказат. Прибавимъ къ вычету AB прямую BG, то (кн. 10, пред. 74) прямыя AG и GB будутъ раціональны и соизмѣримы только въ степени. На CD построимъ прямоугольники $CH = \square AG$ и $IK = \square GB$, то $CK = \square AG + \square GB$ и какъ $CE = \square AB$, то (кн. 2, пред. 7) $FK = 2(AG.GB)$.

Раздѣлимъ прямую FL въ точкѣ M пополамъ и чрезъ точку M проведемъ прямую $MN \parallel CD$, то (кн. 1, пред. 36) $FN = MK = AG.GB$. Теперь надобно доказать:

Фиг. 416.



1. Что CF есть вычетъ.

Такъ какъ площадь $\square AG+\square GB$ раціональна и равна CK, то CK, т. е. $DC.CL$ есть также площадь раціональная, слѣдовательно, какъ прямая CD раціональна, то (кн. 10, пред. 21) CL также раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ CD.

Такъ какъ (кн. 10, пред. 22) $2(AG.GB)$ есть *средняя* площадь и равна FK; то FK, т. е. $DC.FL$ есть также площадь *средняя*. Слѣдовательно, какъ CD есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 23) FL есть раціональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ CD.

Такъ какъ площадь CK раціональна, и FK *средняя*, то CK несоизмѣрима съ FK, но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$CK:FK=CL:LF$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) CL и LF по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что CL и LF суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) CF есть *вычетъ*.

2. Что CF есть *первый вычетъ*.

Такъ какъ (кн. 10, пред. 54, слѣд. 3) площадь $AG.GB$ есть средне-пропорціональныя между $\square AG$ и $\square GB$, то MK есть средне-пропорціональная площадь между CH и IK, т. е.:

$$CH:MK=MK:IK.$$

Но мы имѣемъ:

$$CH:MK=CI:ML \quad \text{и} \quad MK:IK=ML:IL$$

слѣдовательно:

$$CI:ML=ML:IL$$

откуда (кн. 6, пред. 17) $CI.IL=\square ML=\frac{1}{4}\square FL$. Но площади $\square AG$ и $\square GB$ соизмѣримы, т. е. соизмѣримы CH и IK; но:

$$CH:IK=CI:IL$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) CI и IL соизмѣримы. Откуда (кн. 10, пред. 18) видимъ, что CL квадратитъ надъ LF на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ CL, а было показано, что CL и CD соизмѣримы, слѣдовательно CF есть *первый вычетъ*.

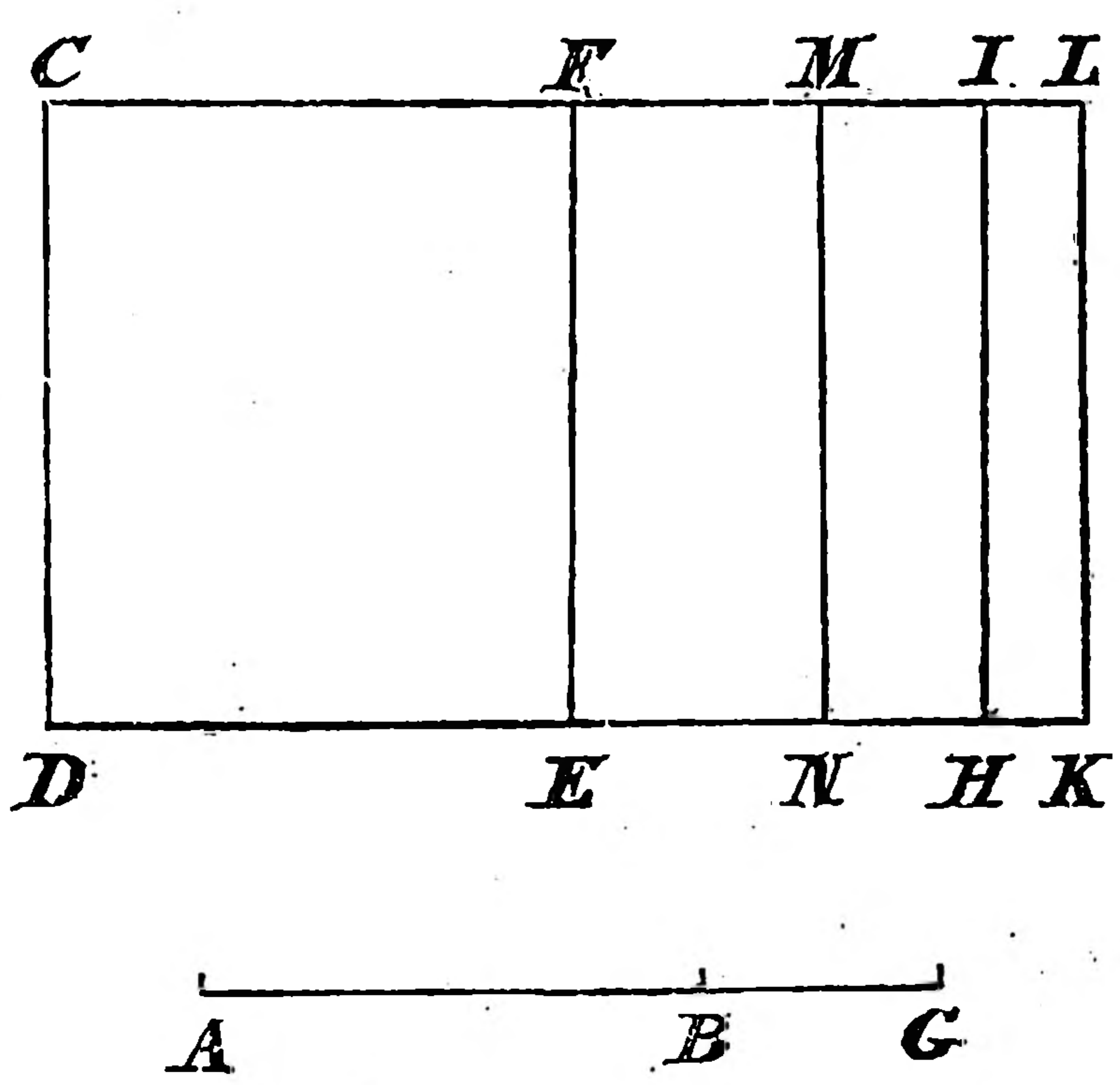
Предложеніе 99. Прямоугольникъ CE, построенный на раціональной прямой CD, коего площадь равна площади квадрата, построеннаго на *среднемъ вычетѣ* AB, имѣетъ высотою *второй вычетъ* CF (фиг. 417).

Доказат. Прибавимъ къ *первому среднему вычету* AB прямую BG, то прямыя (кн. 10, пред. 75) AG и GB будутъ *среднія* только въ степени соизмѣримыя; но $AG.GB$ будетъ раціональная площадь.

Сдѣлавъ построеніе подобное предъидущему остается доказать:

1. Что CF есть вычетъ.

Фиг. 417.



Такъ какъ $\square AG + \square GB = CK = DC.CL$ есть площадь *средняя*, но CD раціональна, то (кн. 10, пред. 23) CL есть прямая также раціональная и по длинѣ несоизмѣримая съ CD. Такъ какъ $2(AG.GB) = FK = DC.FL$ есть раціональная площадь, то (кн. 10, пред. 21) прямая FL раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ DC. Такъ какъ CK есть *средняя* площадь, а FK раціональная, то CK и FK несоизмѣримы, но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$CK : FK = CL : LF$$

слѣдовательно CL и LF по длинѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 10). Откуда видимъ, что прямыя CL и LF раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) CF есть *вычетъ*.

2. Что CF есть *второй вычетъ*.

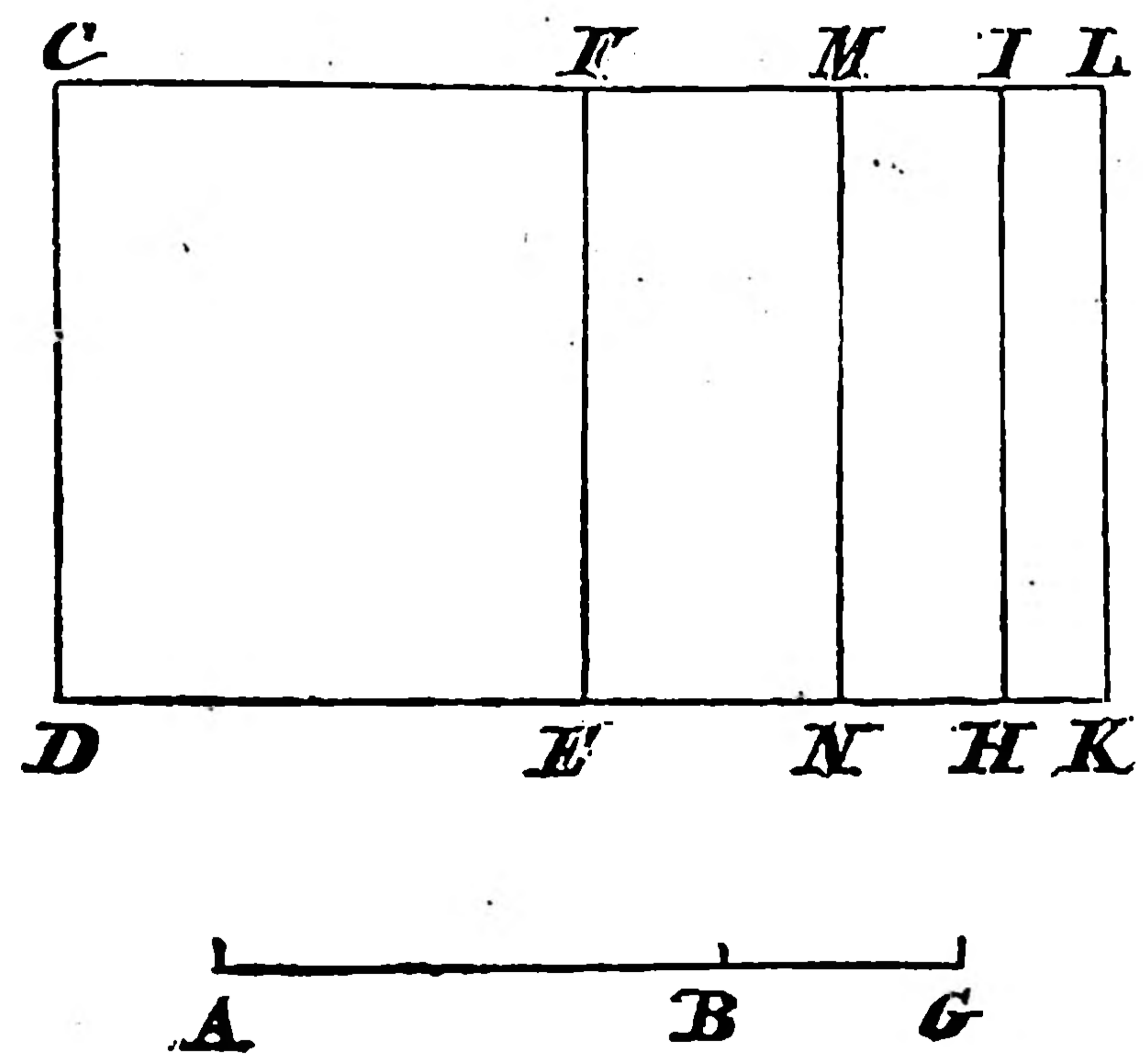
Здѣсь опять мы имѣемъ $CI.IL = \square ML = \frac{1}{4}\square FL$ и $\square AG$ съ $\square GB$ соизмѣримы, т. е. CH и IK, а также CI и IL соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 18) прямая LC квадратитъ надъ FL на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ LC, а было показано, что FL и CD по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно CF есть *второй вычетъ.*

Предложеніе 100. Прямоугольникъ CE, построенный на раціональной прямой CD, коего площадь равна площади квадрата построеннаго на *второмъ среднемъ вычетѣ* AB, имѣетъ высотою *третій* вычетъ CF (фиг. 418).

Доказат. Прибавимъ къ AB прямую BG, то (кн. 10, пред. 76) AG и GB будутъ среднія прямыя только въ степени соизмѣримыя, и $AG.GB$

будетъ *средняя* площадь. Послѣ извѣстнаго выше построенія остается доказать:

Фиг. 418.



1. Что CF есть *вычетъ*.

Такъ какъ $\square AG + \square GB = CK = DC.CL$ есть *средняя* площадь, то (кн. 10, пред. 23) CL есть раціональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ DC. Такъ какъ $2(AG.GB) = FK = DC.FL$ есть *средняя* площадь, то (кн. 10, пред. 23) прямая FL раціональна и несоизмѣрима по длинѣ съ DC. Но AG и GB соизмѣримы только въ степени, слѣдовательно онѣ по длинѣ несоизмѣримы. Такъ какъ мы имѣемъ:

$$AG : GB = \square AG : AG.GB$$

то $\square AG$ и $AG.GB$ несоизмѣримы. Площадь AG соизмѣрима съ $\square AG + \square GB$ (кн. 10, пред. 16) а также соизмѣримы площади $AG.GB$ и $2(AG.GB)$, слѣдовательно (кн. 10, пред. 14 и 13) $\square AG + \square GB$ несоизмѣрима съ $(AG.GB)$, т. е. CK и FK несоизмѣримы, а какъ:

$$CK : FK = CL : FL$$

то и прямыя CL и FL по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямыя CL и FL раціональны и соизмѣримы только въ степени, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) CF есть *вычетъ*.

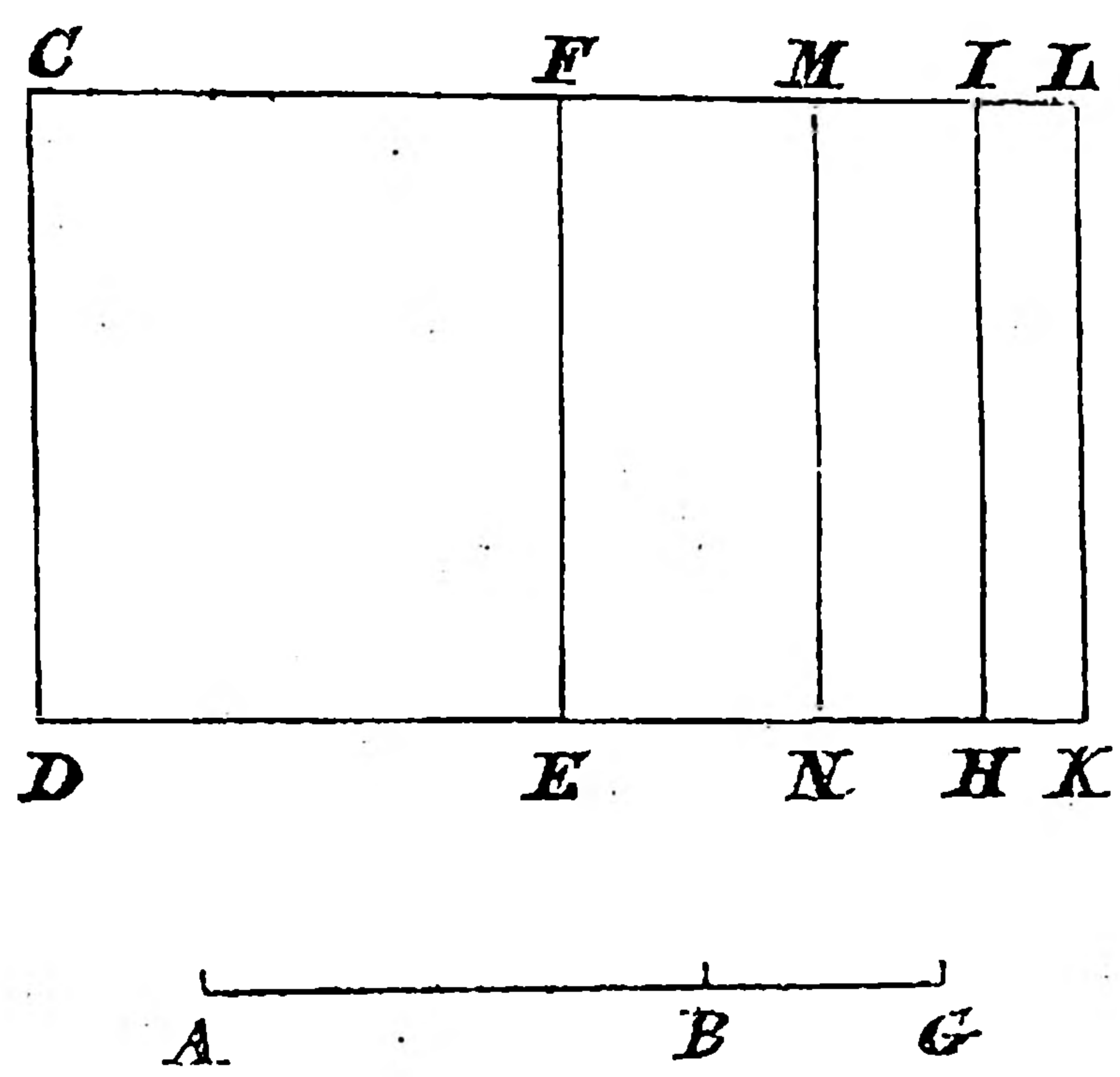
2. Что CF есть *третій вычетъ*.

Такъ какъ здѣсь $CI.IL = \frac{1}{4} FL$, а $\square AG$ и $\square GB$ соизмѣримы, т. е. CH съ IK, а также CI съ IL, то прямая CL (кн. 10, пред. 18) квадратитъ надъ FL на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ CL, а было показано, что CL и LF несоизмѣримы по длинѣ съ CD, слѣдовательно CF есть *третій вычетъ*.

Предложенiе 101. Прямоугольникъ CE, построенный на рацiональной прямой CD, коего площадь равна площади квадрата, построеннаго на *меньшей иррацiональной* AB, имѣетъ высотою *четвертый вычетъ* CF (фиг. 419).

Доказат. Прибавимъ къ AB прямую BG, то (кн. 10, пред. 77) AG и GB будутъ прямыя несоизмѣримыя въ степени, и площадь $\square AG + \square GB$ будетъ рацiональная, а $2(AG.GB)$ будетъ *средняя.* Сдѣлавъ построенiе тоже что и выше, надобно доказать:

Фиг. 419.



1. Что CF есть *вычетъ.*

Такъ какъ $\square AG + \square GB = CK = DC.CL$ есть площадь рацiональная, то (кн. 10, пред. 21) CL рацiональна и съ CD по длинѣ соизмѣрима. Такъ какъ площадь $2(AG.GB) = FK = DC.FL$ есть *средняя*, то (кн. 10, пред. 23) FL есть рацiональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ CD. Такъ какъ $\square AG + \square GB$ есть рацiональная площадь, а $2(AG.GB)$ средняя, то $\square AG + \square GB$ и $2(AG.GB)$ несоизмѣримы, т. е. площадь CK несоизмѣрима съ FK; но:

$$CK : FK = CL : FL$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямыя CL и FL по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя CL и FL суть рацiональныя только въ степени соизмѣримыя, а поэтому (кн. 10, пред. 74) CF есть *вычетъ.*

2. Что CF есть *четвертый вычетъ.*

Такъ какъ здѣсь мы снова имѣемъ:

$$CI.IL = \frac{1}{4} \square FL$$

а $\square AG$ и $\square GB$ несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы площади CH и IK; но:

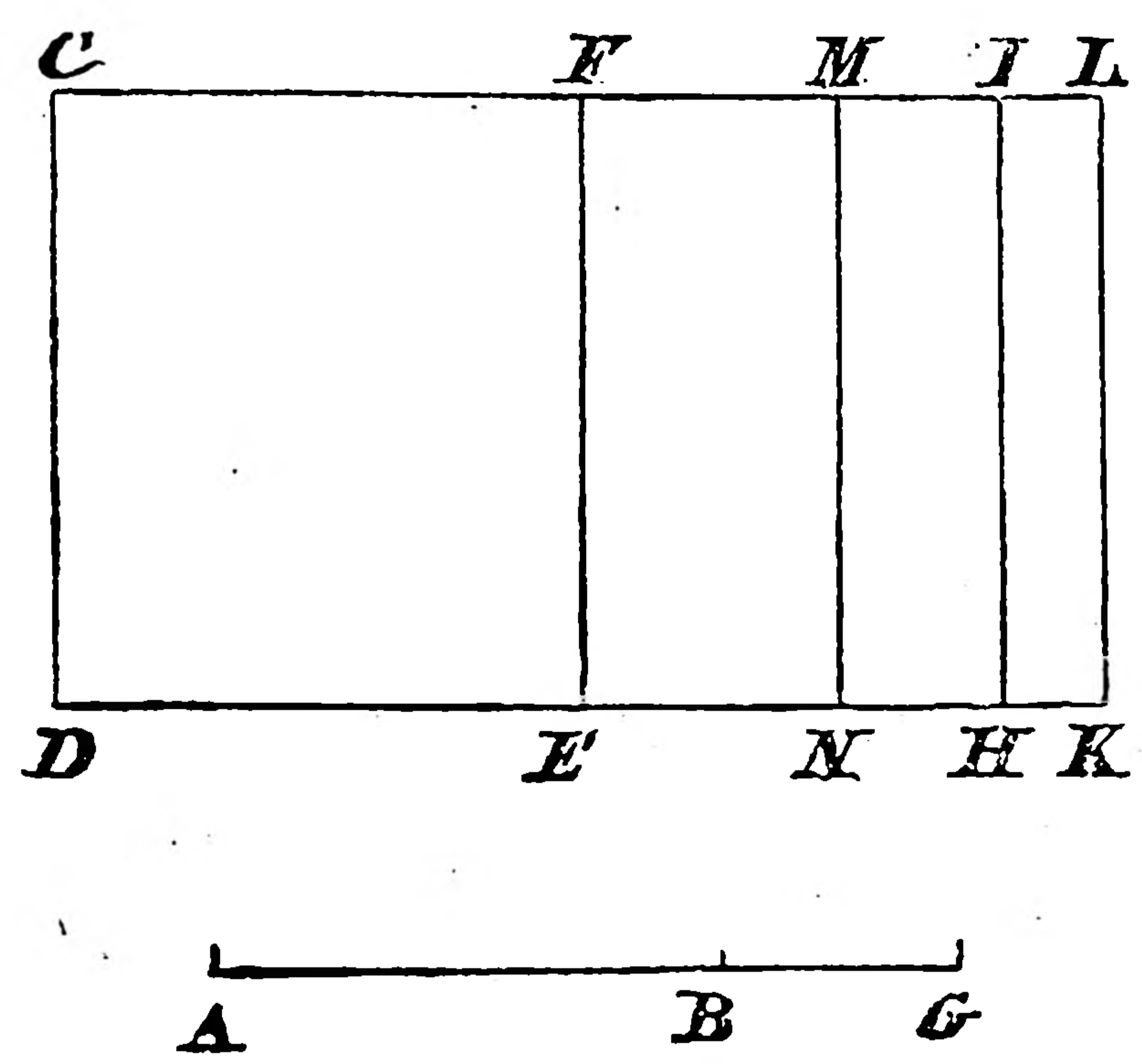
$$CH : IK = CI : IL$$

слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя CI и IL. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 19), что CL квадратитъ надъ FL на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ CL, но было показано, что CL и CD по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно CF есть *четвертый вычетъ*.

Предложеніе 102. Прямоугольникъ CE, построенный на раціональной прямой CD, коего площадь равна квадрату построенному на *составляющей съ раціональнымъ прямоугольникомъ цѣлую среднюю площадь* AB, имѣетъ высотою CF *пятый вычетъ* (фиг. 420).

Доказат. Прибавимъ къ AB прямую BG, то (кн. 10, пред. 78) AG и GB будутъ прямыя несоизмѣримыя въ степени, площадь $\square AG + \square GB$ будетъ *средняя*, а $2(AG.GB)$ раціональная. Сдѣлавъ тоже построеніе что и выше, надобно доказать:

Фиг. 420.



1. Что CF есть *вычетъ*.

Такъ какъ $\square AG + \square GB = CK = DC.CL$ есть средняя площадь, то (кн. 10, пред. 23) CL есть прямая раціональная, несоизмѣримая съ DC. Такъ какъ $2(AG.GB) = FK = DC.FL$ есть раціональная площадь, то (кн. 10, пред. 21) FL есть раціональная прямая соизмѣримая съ CD. Но площадь CK *средняя*, а FK раціональная, слѣдовательно CK и FK несоизмѣримы, а слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя CL и FL. Изъ этого видимъ, что прямыя CL и FL раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) CF есть *вычетъ*.

2. Что CF есть *пятый вычетъ*.

Здѣсь мы имѣемъ снова:

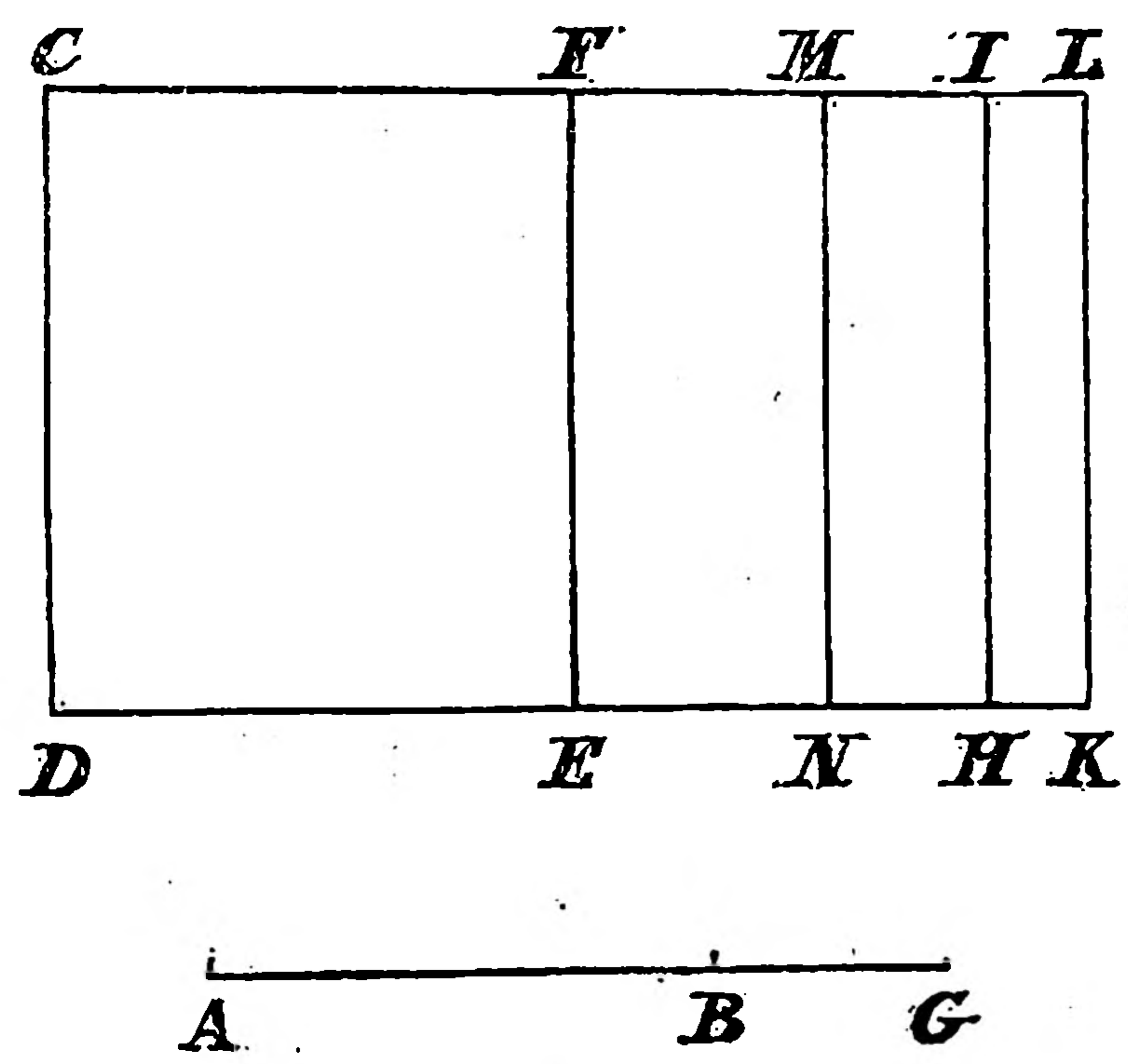
$$CI.IL = \frac{1}{4} \square FL$$

и $\square AG$ съ $\square GB$, т. е. CH съ IK несоизмѣримы, слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя CI и IL, откуда видимъ (кн. 10, пред. 19), что CL квадратитъ надъ FL на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ CL, а было показано, что прямыя FL и CD соизмѣримы, слѣдовательно CF есть *пятый вычетъ.*

Предложеніе 103. Прямоугольникъ CE, построенный на раціональной прямой CD, равный квадрату построенному на AB, *коей квадратъ съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь*, имѣетъ высотою *шестой вычетъ* CF (фиг. 421).

Доказат. Прибавимъ къ AB прямую GB, то (кн. 10, пред. 79) AG и GB будутъ несоизмѣримы въ степени; и какъ $\square AG+\square GB$ такъ и $2(AG.GB)$ суть среднія несоизмѣримыя площади. Сдѣлавъ тоже построеніе что и выше, надобно доказать:

Фиг. 421.



1. Что CF есть *вычетъ.*

Такъ какъ $\square AG+\square GB=CK=DC.CL$ есть площадь средняя, то (кн. 10, пред. 23) прямая CL раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ CD. Такъ какъ $2(AG.GB)=FK=DC.CL$ есть средняя площадь, то (кн. 10, пред. 23) FL есть раціональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ DC. Далѣе, такъ какъ площади $\square AG+\square GB$ и $2(AG.GB)$ несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы площади CK и FK, то несоизмѣримы прямыя CL и FL. Слѣдовательно прямыя CL и FL суть раціональныя только въ степени соизмѣримыя, а поэтому (кн. 10, пред. 74) CF есть *вычетъ.*

2. Что CF есть *шестой вычетъ.*

Здѣсь мы имѣемъ снова:

$$CI.IL=\frac{1}{4}\square FL$$

а $\square AG$ и $\square GB$, т. е. CH и CK несоизмѣримы, а потому и прямыя CI и IL также несоизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 19) CL квадратитъ надъ FL на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ CL, а было показано, что ни CL, ни FL съ CD по длинѣ не соизмѣримы, слѣдовательно CF есть *шестой вычетъ.*

Предложеніе 104. Каждая прямая CD по длинѣ соизмѣримая съ вычетомъ AB будетъ сама вычетомъ того же порядка (фиг. 422).

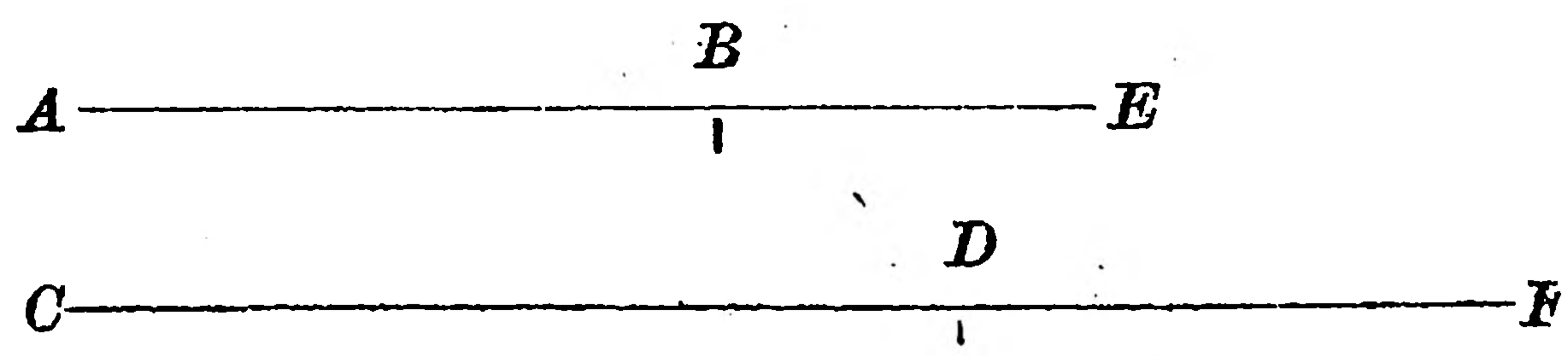
Доказат. 1. Прибавимъ къ AB прямую BE, то (кн. 10, пред. 74) AE и EB будутъ раціональны только въ степени соизмѣримы. Сдѣлаемъ:

$$AB : CD = BE : DF$$

то (кн. 5, пред. 12):

$$AE : CF = AB : CD.$$

Фиг. 422.



Такъ какъ (кн. 5, пред. 19):

$$AE : CF = BE : DF$$

и

$$AE : BE = CF : DF$$

то прямыя CF и DF будутъ раціональны только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) CD есть *вычетъ*.

2. Прямая AB можетъ быть или *первымъ*, или *вторымъ*, или *третьимъ вычетомъ*, т. е. въ пропорціи:

$$AE : EB = CF : FD$$

AE квадратитъ надъ EB на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ AE, и AE или EB, или ни одна изъ нихъ по длинѣ не соизмѣримы съ данною раціональною прямою; слѣдовательно (кн. 10, пред. 15) CF квадратитъ надъ FD на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ DF, и CF, или FD, или ни одна изъ нихъ по длинѣ не соизмѣрима съ данною раціональною прямою; слѣдовательно CD и AB суть вмѣстѣ или *первый*, или *второй*, или *третій вычетъ*. Точно также можетъ быть показано, что CD вмѣстѣ съ AB будетъ или, *четвертый*, или *пятый*, или *шестой вычетъ*. Слѣдовательно *вычеты* AB и CD всегда одного порядка.

Предложеніе 105. Каждая прямая CD по длинѣ соизмѣримая съ *среднимъ вычетомъ* AB будетъ сама *средній вычетъ* и при томъ того-же порядка (фиг. 423).

Доказат. 1. Прибавимъ къ AB прямую EB, то (кн. 10, пред. 75 и 76)

AE и EB будутъ среднія прямыя только въ степени соизмѣримыя. Сдѣлаемъ снова:

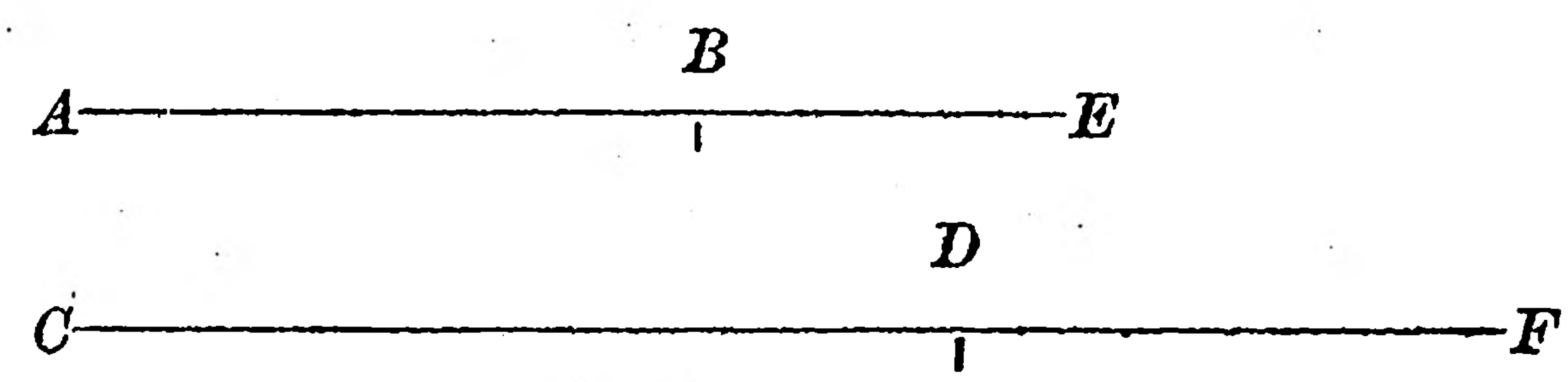
$$AB:CD=BE:DF$$

то:

$$AE:EB=CF:FD$$

слѣдовательно CF и FD будутъ среднія прямыя только въ степени соизмѣримыя, а потому прямая CD будетъ *средній вычетъ*.

Фиг. 423.



Изъ второй пропорціи слѣдуетъ (кн. 6, пред. 1 и кн. 5, пред. 11):

$$\square AE:AE.EB=\square CF:CF.FD$$

откуда:

$$\square AE:\square CF=AE.EB:CF.FD$$

Но по условію AB и CD соизмѣримы и:

$$AB:CD=AE:CF$$

слѣдовательно AE и CF также соизмѣримы, а слѣдовательно соизмѣримы квадраты $\square AE$ и $\square CF$. Откуда слѣдуетъ, что соизмѣримы и площади $AE.EB$ и $CF.FD$. Если теперь AB есть *первый*, или *второй средній вычетъ*, то (кн. 10, пред. 75 и 76) $AE.EB$ будетъ раціональная, или средняя площадь, слѣдовательно и площадь $CF.FD$ будетъ или раціональная, или *средняя*, а поэтому прямая CD вмѣстѣ съ AB будетъ или *первый*, или *второй вычетъ*.

Предложеніе 106. Каждая прямая CD по длинѣ соизмѣримая съ *малою ирраціональною* прямою AB будетъ сама *малая ирраціональная* (фиг. 424).

Доказат. Пусть все будетъ какъ выше, то AE и EB, а также и CF и FD будутъ въ степени несоизмѣримы.

Такъ какъ мы имѣемъ:

$$AE:EB=CF:FD$$

то (кн. 6, пред. 22):

$$\square AE:\square EB=\square CF:\square FD$$

откуда (кн. 5, пред. 18):

$$\square AE+\square EB:\square EB=\square CF+\square FD:\square FD$$

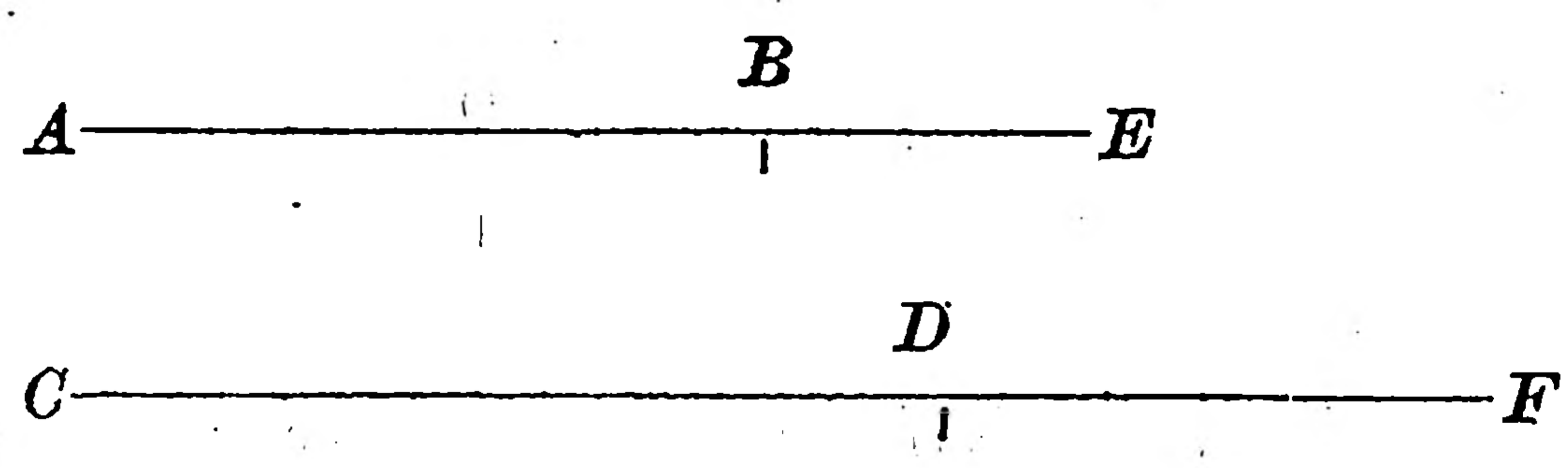
или

$$\square AE+\square EB:\square CF+\square FD=\square EB:\square FD$$

Но мы имѣемъ:

$$AB:CD=EB:FD$$

Фиг. 424.



и какъ AB и CD соизмѣримы, то EB и FD также соизмѣримы, а слѣдовательно соизмѣримы и площади $\square EB$ съ $\square FD$. А потому соизмѣримы и площади $\square AE+\square EB$ и $\square CF+\square FD$, слѣдовательно, такъ какъ (кн. 10, пред. 77) $\square AE+\square EB$ есть раціональная площадь, то и площадь $\square CF+\square FD$ также раціональна.

Такъ какъ:

$$\square AE:AE.EB=\square CF:CF.FD$$

то:

$$\square AE:\square CF=AE.EB:CF.FD$$

Но:

$$AE:CF=AB:CD$$

AB и CD соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы и AE и CF, а также соизмѣримы и площади $\square AE$ и $\square CF$. Слѣдовательно соизмѣримы площади $AE.EB$ и $EF.DF$, но такъ какъ площадь $AE.EB$ (кн. 10, пред. 77) есть *средняя*, то (кн. 10, пред. 24) и площадь $CF.FD$ есть также *средняя*. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 77) CD есть *малая ирраціональная*.

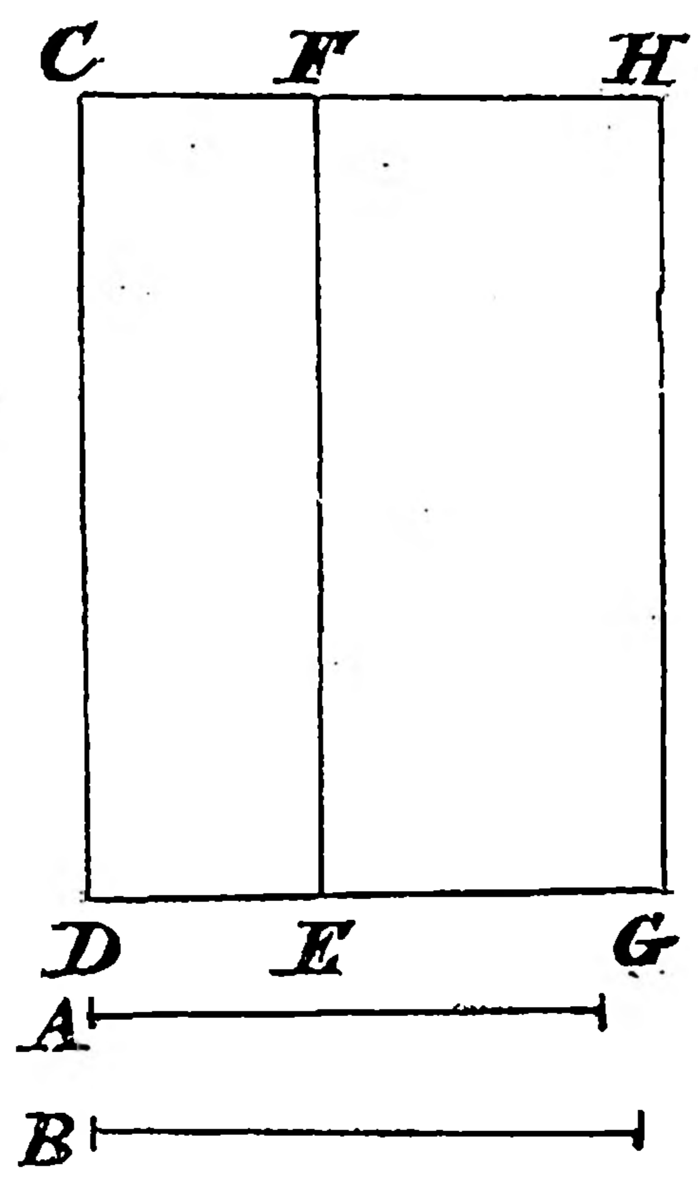
Другое доказат. Каждая прямая B, по длинѣ соизмѣримая съ *малою ирраціональною* A, есть сама *малая ирраціональная* (фиг. 425).

Пусть CD будетъ раціональная прямая, на которой построимъ прямоугольникъ $CE=DC.CF=\square A$, то (кн. 10, пред. 101) CF есть *четвертый вычетъ*. Пусть еще будетъ $FG=DC.FH=\square B$.

Такъ какъ прямыя A и B соизмѣримы, то соизмѣримы площади $\square A$ и $\square B$, т. е. соизмѣримы CE и FG, но мы имѣемъ:

$$CE : FG = CF : FH$$

Фиг. 425.

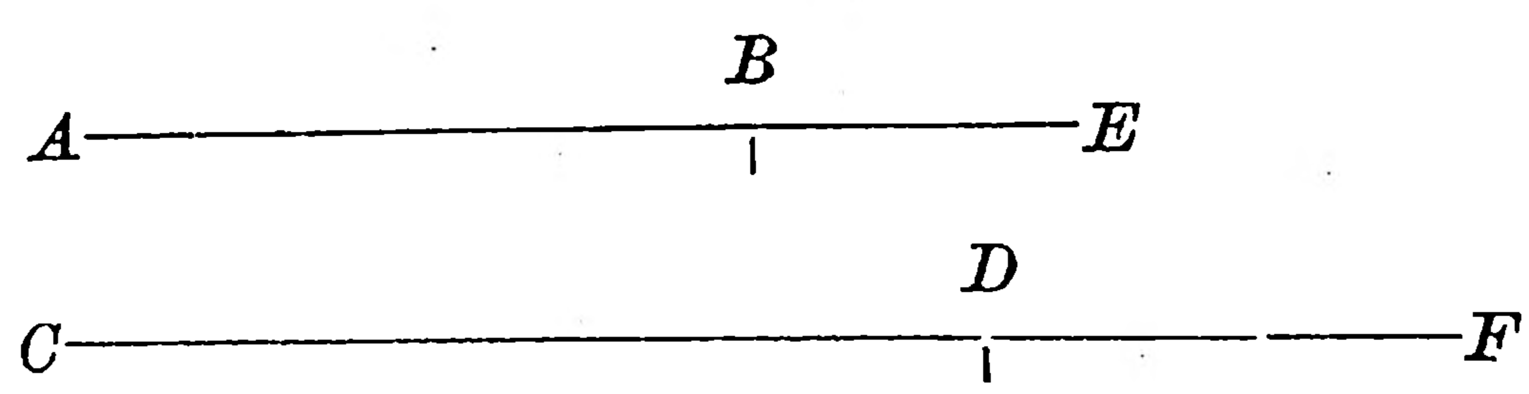


слѣдовательно CF и FH соизмѣримы, но CF есть *четвертый вычетъ*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 104) FH есть также *четвертый вычетъ*. Но CD есть раціональная прямая, а $DC.FH = \square B$, слѣдовательно (кн. 10, пред. 95) B есть *малая ирраціональная*.

Предложеніе 107. Прямоугольникъ, построенный на раціональной прямой CD равный квадрату, построенному на прямой AB, которая *съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь*, имѣетъ высотою прямую того-же свойства и порядка (фиг. 426).

Доказат. Сдѣлаемъ тоже построеніе, что и выше, то (кн. 10, пред. 78) прямыя AE и EB будутъ въ степени несоизмѣримы, площадь $\square AE + \square EB$ будетъ средняя, и прямоугольникъ $AE.EB$ будетъ раціональный.

Фиг. 426.



Теперь можно, такимъ же образомъ доказать, что:

$$CF : FD = AE : EB$$

и что площади $\square AE + \square EB$ и $\square CF + \square FD$ соизмѣримы, точно также площади $AE.EB$ и $CF.FD$ соизмѣримы, и что CF и FD несоизмѣримы въ степени, далѣе, что $\square CF + \square FD$ есть средняя площадь, а $CF.FD$

раціональная. Откуда заключаемъ (кн. 10, пред. 78), что CD есть прямая, которая съ *раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь.*

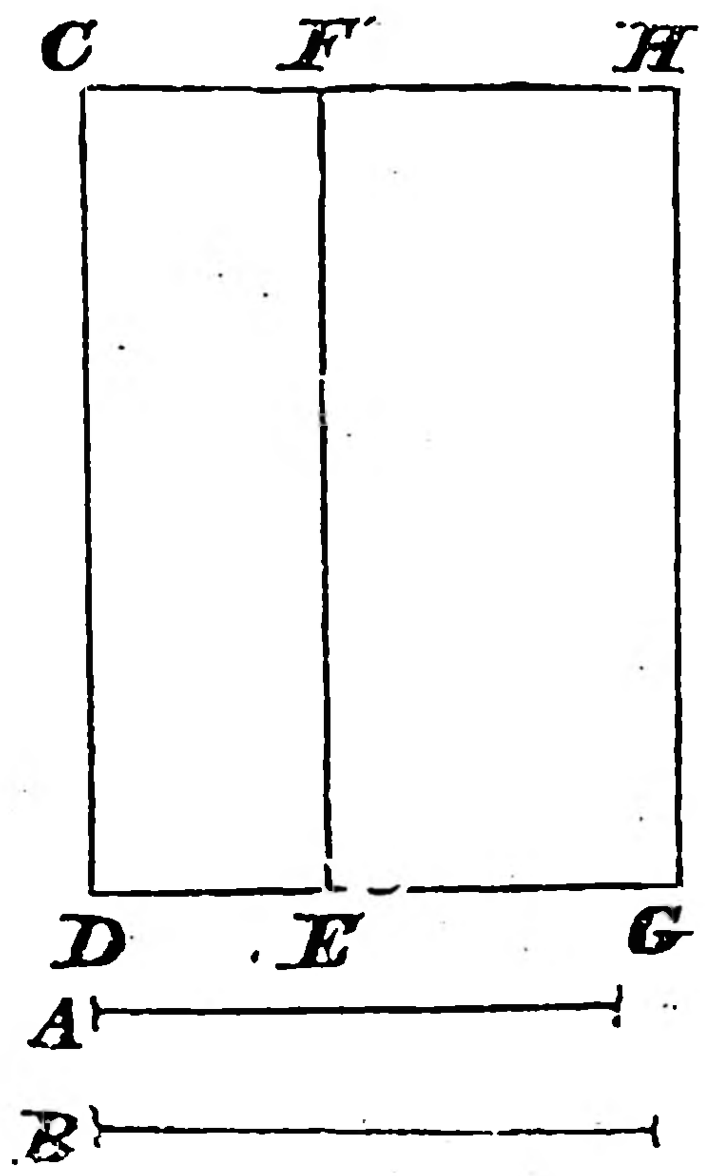
Другое доказат. Пусть A будетъ то, что была AB, и B то что была CD (фиг. 427). Пусть CD будетъ раціональная прямая и:

$$\square A = CE = DC.CF$$

то (кн. 10, пред. 102) CF будетъ *пятый вычетъ.* Пусть еще:

$$\square B = FG = DC.FH.$$

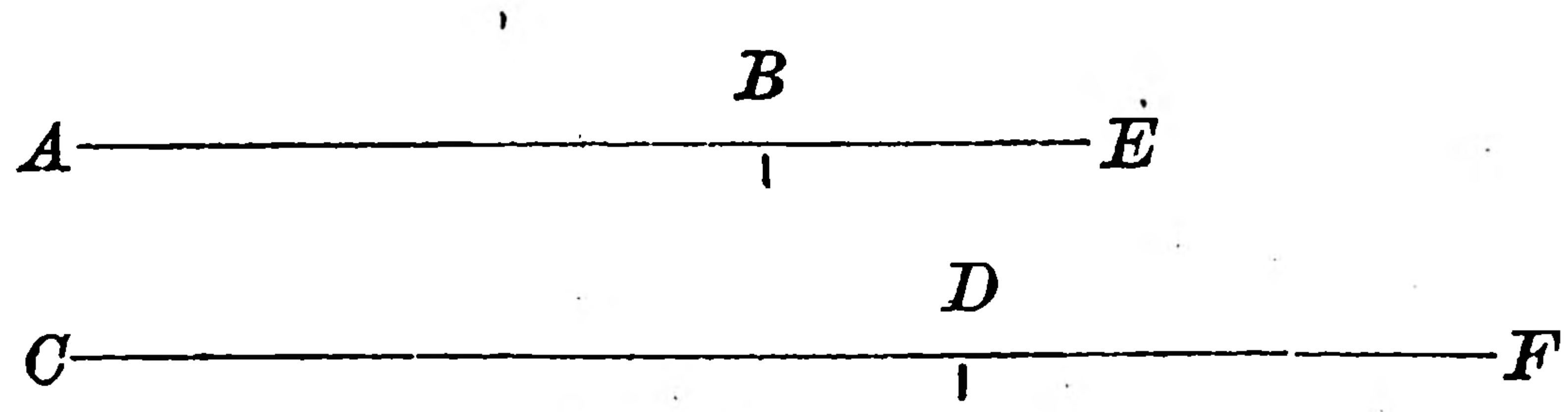
Фиг. 427.



Такъ какъ $\square A$ и $\square B$ соизмѣримы, т. е. соизмѣримы CE и FG, то соизмѣримы площади CF и FH, слѣдовательно (кн. 10, пред. 104) FH есть пятый вычетъ. Но CD есть раціональная прямая, а $CD.FH = \square B$, слѣдовательно (кн. 10, пред. 96), B есть прямая, которая съ *раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь.*

Предложеніе 108. Каждая прямая CD соизмѣримая съ прямою AB, которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь, есть сама того-же свойства (фиг. 428).

Фиг. 428.

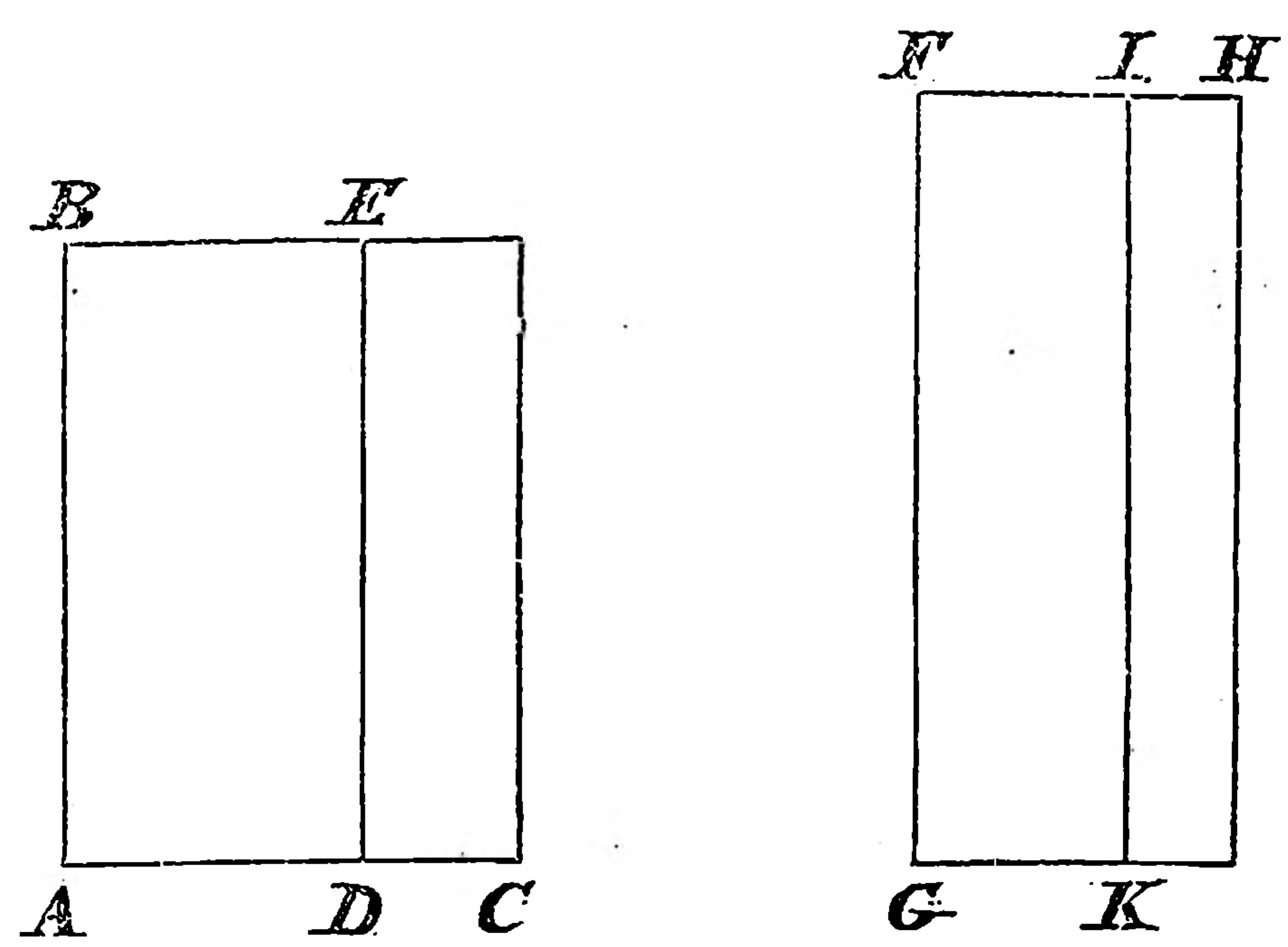


Доказат. Пусть все будетъ какъ выше, то (кн. 10, пред. 79) AE и EB будутъ несоизмѣримы въ степени, площади $\square AE + \square EB$ и $AE.EB$ будутъ обѣ среднія и несоизмѣримы. Послѣ этого, точно также, можно доказать, что CF и FD, а также $\square CF + \square FD$ и $CF.FD$ соизмѣримы съ предъидущими, слѣдовательно какъ первыя въ степени несоизмѣримы, то объ послѣднія суть среднія и несоизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 79) CD есть прямая, *которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь*.

Предложеніе 109. Если отъ раціональнаго прямоугольника BC вычтемъ средній BD, то прямая, квадратящая остатокъ CE, будетъ одна изъ двухъ ирраціональныхъ прямыхъ, или *вычетъ*, или *малая ирраціональная* (фиг. 429).

Доказат. Пусть FG будетъ раціональная прямая, на которой построимъ прямоугольники $GH{=}GF.FH{=}BC$ и $FK{=}GF.FI{=}BD$, слѣдовательно $EC{=}KH$.

Фиг. 429.



Такъ какъ BC, а также и GH суть раціональныя площади, но BD а также FK суть площади среднія, то (кн. 10, пред. 21) прямая FH будетъ раціональна и соизмѣрима по длинѣ съ GF, но (кн. 10, пред. 23) FI раціональна и несоизмѣрима по длинѣ съ FG, слѣдовательно (кн. 10, пред. 13) FH и FI по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что FH и FI суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) IH есть вычетъ, къ которому прибавлена прямая IF. Итакъ прямая FH можетъ квадратить надъ IF на квадратъ, коего сторона или по длинѣ соизмѣрима, или несоизмѣрима съ нею.

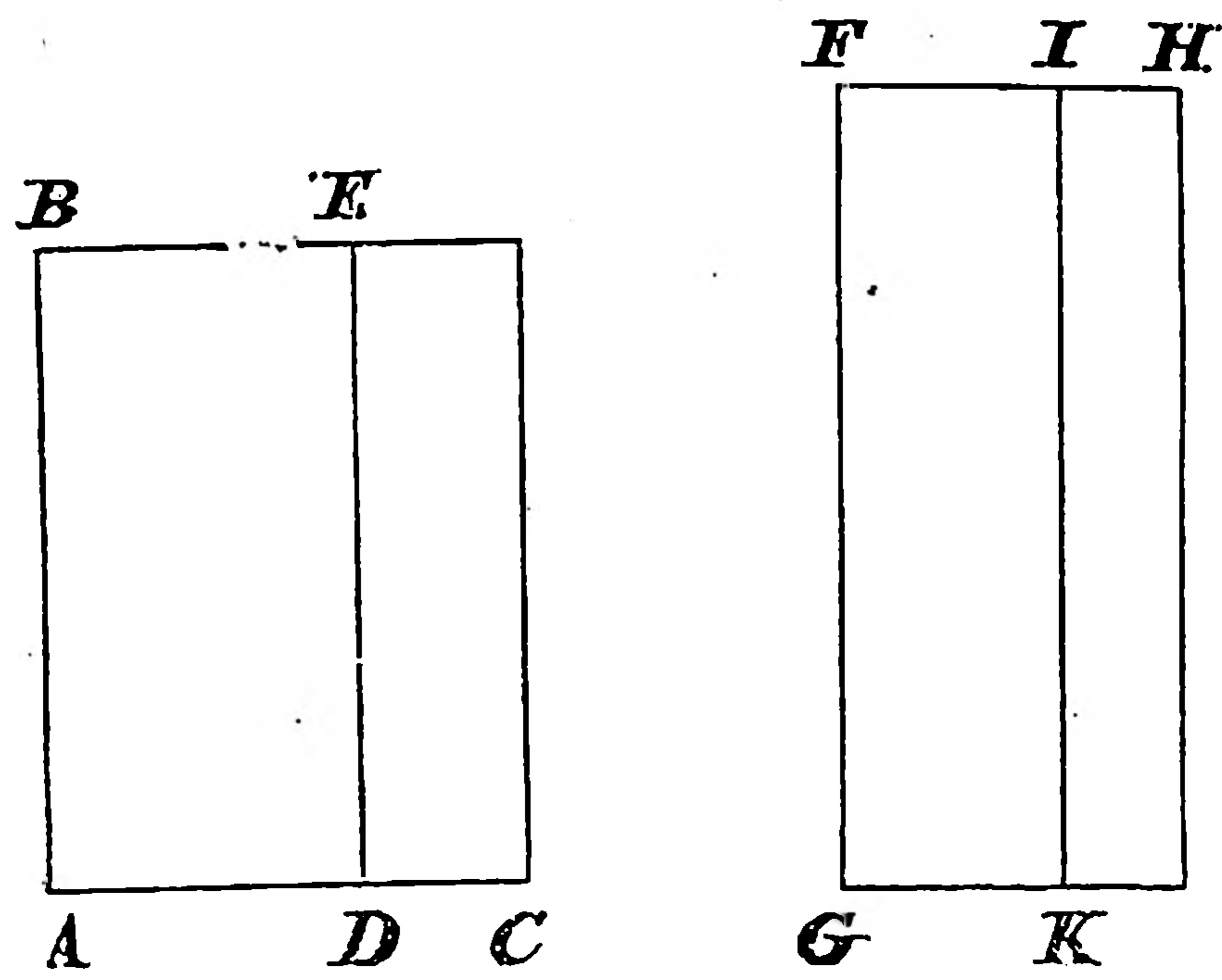
Положимъ *первое*: то, такъ какъ FH и FG соизмѣримы, IH есть *первый вычетъ*. Слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 92) прямая, квадратящая площадь KH, т. е. EC, есть *вычетъ*.

Положимъ *второе*: то, такъ какъ FH и FG несоизмѣримы по длинѣ, IH есть *четвертый вычетъ*. Слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 95) прямая квадратящая площадь KH, т. е. EC есть *малая ирраціональная*.

Предложеніе 110. Если отъ средняго прямоугольника BC вычтемъ раціональный BD, то прямая, квадратящая остатокъ CE будетъ или *первый средній вычетъ*, или та, *которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь* (фиг. 430).

Доказат. Пусть FG будетъ раціональная прямая и сдѣлаемъ тоже построеніе какъ и выше, то слѣдуетъ (кн. 10, пред. 23), что FH будетъ раціональная прямая съ FG несоизмѣримая по длинѣ, а FI (кн. 10, пред. 21) будетъ также раціональна и соизмѣрима съ FG, слѣдовательно (кн. 10, пред. 13) FH и FI по длинѣ несоизмѣримы.

Фиг. 430.



Слѣдовательно прямыя FH и FI раціональны только въ степени соизмѣримы. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что HI есть *вычетъ*, къ которому прибавлена прямая IF.

Теперь, прямая FH можетъ квадратить надъ прямою FI на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ нею.

Положимъ *первое:* то, такъ какъ FI и FG по длинѣ соизмѣримы, то HI будетъ *второй вычетъ*. Слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 93) прямая квадратящая площадь KH, т. е. EC есть *первый средній вычетъ*.

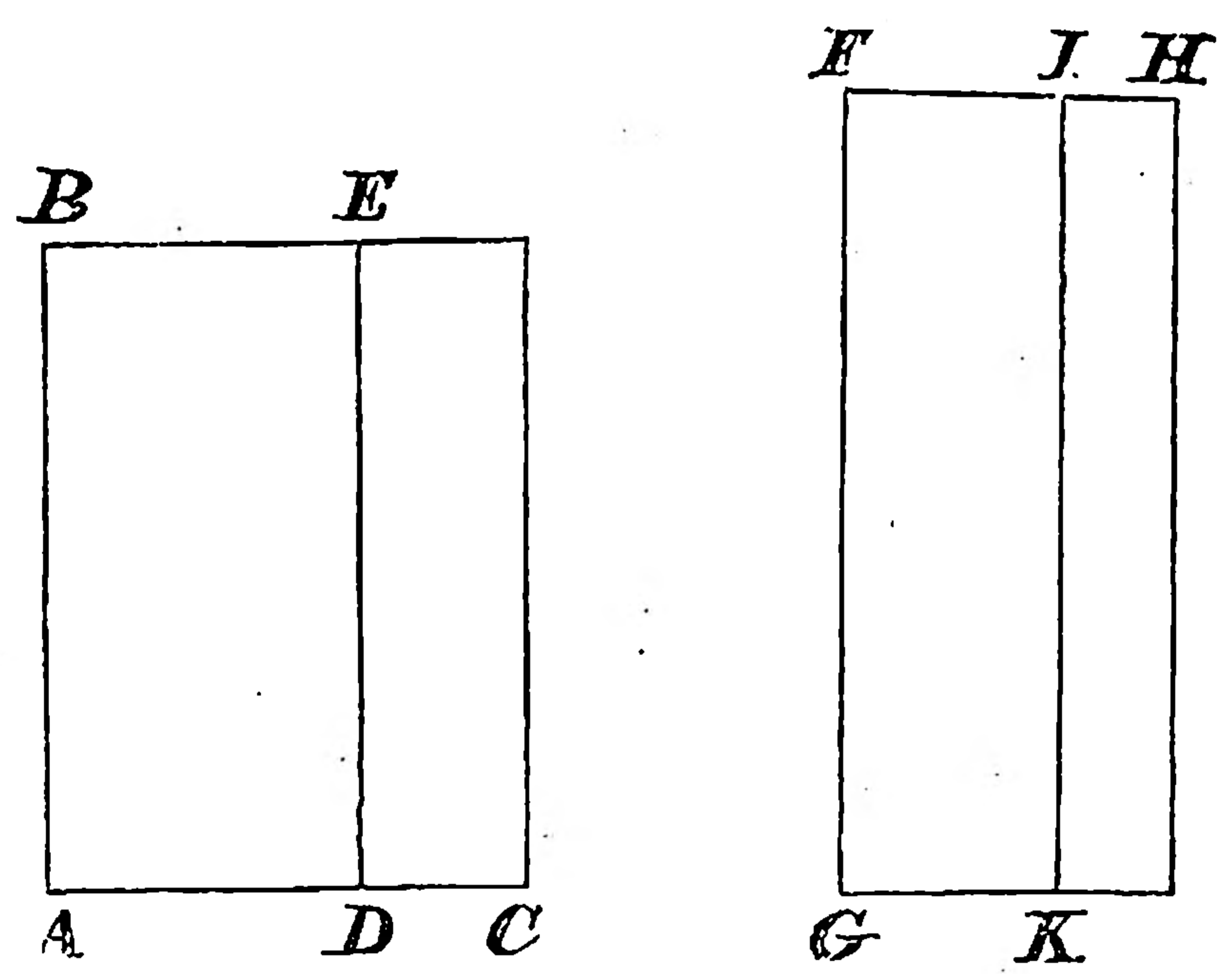
Положимъ *второе*: то, такъ какъ FI и FG по длинѣ соизмѣримы, то HI будетъ *пятый вычетъ*. Слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 96) прямая, квадратящая площадь KH, т. е. EC есть та, *которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь*.

Предложеніе 111. Если отъ *средняго* прямоугольника BC отнимемъ несоизмѣримый съ нимъ *средній* прямоугольникъ BD, то прямая, квадратящая остатокъ CE будетъ или *первый средній вычетъ*, или *прямая, которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь* (фиг. 431).

Доказат. Сдѣлаемъ тоже построеніе что и выше.

Такъ какъ BC и BD, а также GH и FK суть *среднія* несоизмѣримыя площади, то (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10) FH и FI по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямыя FH и FI суть раціональныя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) HI есть *вычетъ*, къ которому прибавлена прямая FI. Теперь FH квадратитъ надъ FI на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ нею.

Фиг. 431.



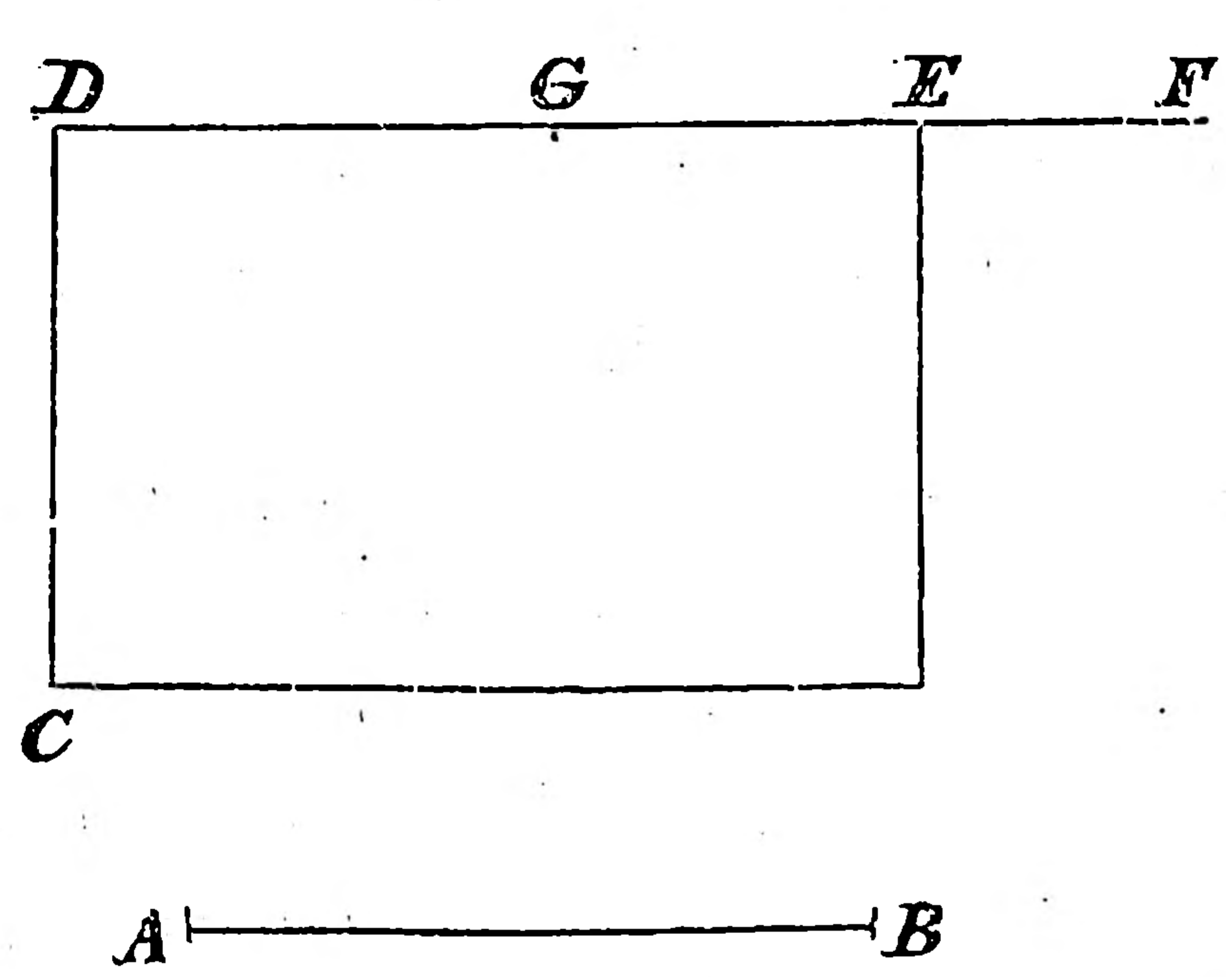
Положимъ *первое*: то, такъ какъ FH и FI съ FG по длинѣ соизмѣримы, то HI есть *третій вычетъ*. Слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 94) прямая, квадратящая площадь HK, т. е. CE есть *второй средній вычетъ*.

Положимъ *второе*: то, такъ какъ FH и FI съ FG по длинѣ несоизмѣримы, то HI есть *шестой вычетъ*. Слѣдовательно, какъ FG есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 97) прямая, квадратящая площадь KH, т. е. CE есть прямая, которая съ *среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь*.

Предложеніе 112. Вычеты отличны отъ биноміальныхъ (фиг. 432).

Доказат. Пусть, если возможно, прямая AB будетъ и *вычетъ* и *биноміальная*; пусть DC будетъ раціональная прямая, на которой построенъ прямоугольникъ $CE = DC.DE = \square AB$.

Фиг. 432.



Такъ какъ AB есть вычетъ, то (кн. 10, пред. 98) DE будетъ первый вычетъ. Прибавимъ къ DE прямую EF, то DF и FE будутъ прямыя раціональныя только въ степени соизмѣримыя; DF квадратитъ надъ EF на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ нею и DF есть прямая соизмѣримая съ CD.

Но AB есть вмѣстѣ и *биноміальная*, по допущенію, слѣдовательно (кн. 10, пред. 61) DE есть первая биноміальная. Пусть DE въ точкѣ G раздѣлена на свои *члены*, изъ коихъ DG есть большій, то DG и GE будутъ раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя; DG квадратитъ надъ GE на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ нею и DG соизмѣрима съ CD.

Слѣдовательно, какъ DG соизмѣрима съ DC, а DC съ DF, то (кн. 10, пред. 12) DF и DG по длинѣ соизмѣримы, а также соизмѣримы по длинѣ DF и FG, но такъ какъ DF есть раціональная прямая, слѣдовательно FG есть также раціональна. Далѣе, какъ DF и FG соизмѣримы, а DF и FE несоизмѣримы по длинѣ, то (кн. 10, пред. 13) FG и FE по длинѣ несоизмѣримы. Откуда слѣдуетъ, такъ какъ FE есть раціональная прямая, что FG и FE суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) EG есть *вычетъ*, но было показано, что EG есть раціональная прямая, что невозможно. Слѣдовательно *вычетъ* не можетъ быть вмѣстѣ и *биноміальною*.

Слѣдствіе. Вычеты и слѣдующія за ними *ирраціональности* отличны не только отъ *среднихъ* линій, но различны между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, прямоугольникъ построенный на раціональной прямой равный квадрату построенному на *средней* прямой имѣетъ высотою (кн. 10, пред. 23) раціональную съ основаніемъ несоизмѣримою прямую, а если онъ равенъ квадрату построенному на *вычетъ*, то высота будетъ *первый вычетъ* (кн. 10, пред. 98). Если сторона квадрата будетъ *первый средній вычетъ*, то высота прямоугольника будетъ *второй вычетъ* (кн. 10, пред. 99). Если сторона квадрата будетъ *второй средній вычетъ,* то высота прямоугольника будетъ *третій вычетъ*. Если сторона квадрата будетъ *малая ирраціональная*, то высота прямоугольника будетъ *четвертый вычетъ* (кн. 10, пред. 101). Если сторона квадрата будетъ прямая, *которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь*, то высота прямоугольника будетъ *пятый вычетъ* (кн. 10, пред. 102). Если сторона квадрата будетъ прямая, *которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь*, то высота прямоугольника есть *шестой вычетъ* (кн. 10, пред. 103). Слѣдовательно упомянутыя ирраціональныя прямыя отличаются отъ первыхъ, такъ какъ высота будетъ раціональная прямая, а между собою потому, что даютъ для высоты *вычеты* различныхъ порядковъ. Но было доказано (кн. 10, пред. 112), что *вычеты* отличны отъ *биноміальныхъ*, точно также (кн. 10, пред. 73, слѣд.) *биноміальныя* и за ними слѣдующія *ирраціональности* отличаются отъ *среднихъ* и между собою. Слѣдовательно всѣхъ различныхъ ирраціональностей числомъ тринадцать. Онѣ суть слѣдующія:

1. Среднія (пред. 22).
2. Биноміальная (пред. 37).
3. Первая биноміальная (пред. 38).
4. Вторая биноміальная (пред. 39).
5. Большая ирраціональная (пред. 40).
6. Квадратящая раціональный и средній прямоугольники (пред. 41).
7. Квадратящая двѣ среднія (пред. 42).
8. Вычеты (пред. 74).
9. Первый средній вычетъ (пред. 75).
10. Второй средній вычетъ (пред. 76).
11. Малая ирраціональная (пред. 77).
12. Которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (пред. 78).
13. Которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (пред. 79).

Предложеніе 113. Прямоугольникъ, построенный на *биноміальной BC*, равный квадрату, построенному на раціональной прямой A, имѣетъ высотою *вычетъ EF*, одного порядка съ биноміальною и коего *члены* соизмѣримы съ членами биноміальной и имѣютъ между собою отношеніе равное отношенію членовъ биноміальной (фиг. 433).

Доказат. 1. Пусть биноміальная BC въ точкѣ D раздѣлена на свои члены CD и DB, изъ коихъ $CD>DB$. И пусть:

$$\square A=BD.G$$

то, такъ какъ $\square A=BC.EF$, $BD.G=BC.EF$, откуда (кн. 6, пред. 16):

$$CB:BD=G:EF$$

Такъ какъ $CB>BD$, то $G>EF$. Пусть $G=EH$. Слѣдовательно:

$$CB:BD=EH:EF$$

откуда (кн. 5, пред. 17):

$$CD:BD=FH:EF$$

Пусть теперь будетъ:

$$FH:FE=FI:EI$$

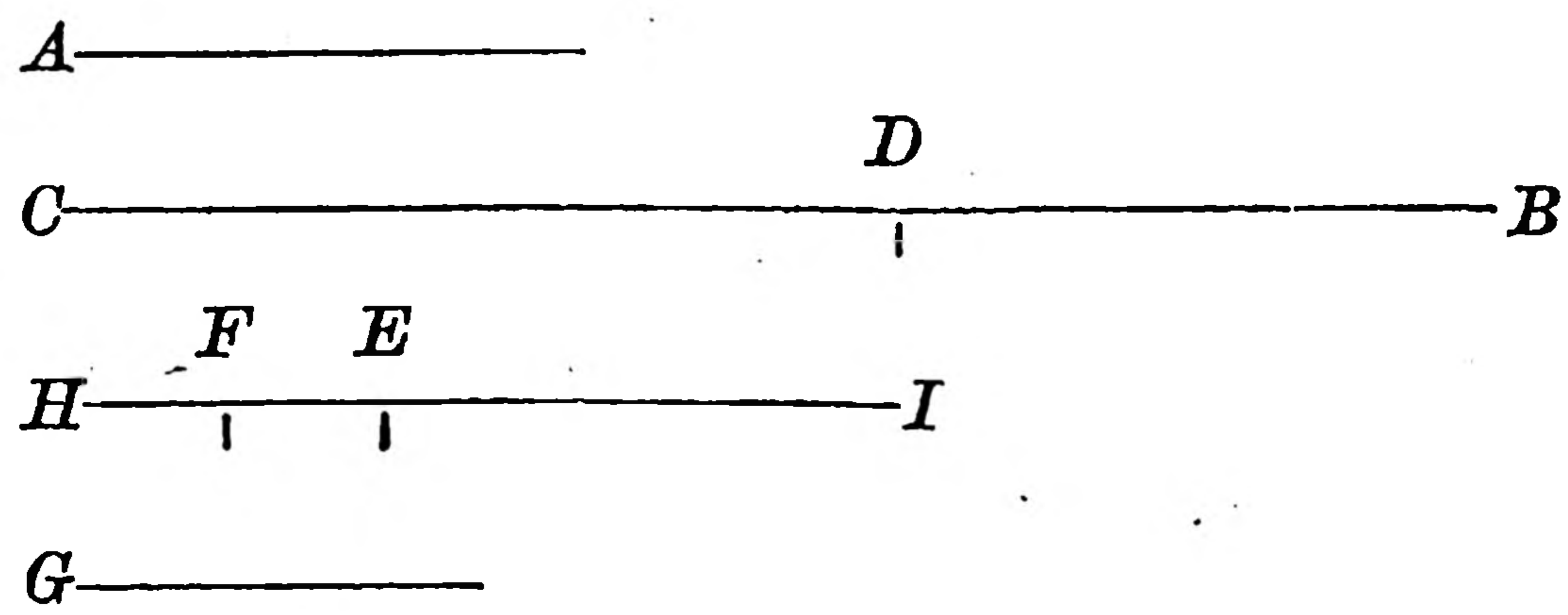
то (кн. 5, пред. 12):

$$HI:FI=FI:IE.$$

Слѣдовательно:,

$$HI:FI=CD:DB.$$

Фиг. 433.



Но (кн. 10, пред. 37) $\square CD$ и $\square DB$ соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) и $\square HI$ съ $\square FI$ также соизмѣримы. Но:

$$HI:FI=FI:IE$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square HI:\square FI=HI:IE.$$

Откуда видимъ (кн. 10, пред. 10), что HI и IE соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 16) также соизмѣримы HE и EI.

Такъ какъ $\square A=BD.G$, а $G=HE$, то:

$$\square A=BD.HE$$

но $\square A$ есть раціональная площадь, слѣдовательно $BD.HE$ есть площадь также раціональная. Но (кн. 10, пред. 37) BD есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21) HE есть также раціональная прямая съ BD соизмѣримая; откуда, такъ какъ HE и EI соизмѣримы, прямая EI раціональна и соизмѣрима съ BD.

Такъ какъ мы имѣли:

$$CD:BD=FI:IE$$

то, какъ EI раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ BD, то FI будетъ также раціональная прямая съ CD соизмѣримая. Далѣе, такъ какъ (кн. 10, пред. 37) CD и BD только въ степени соизмѣримы, то также только въ степени соизмѣримы FI и IE. Слѣдовательно прямыя FI и IE раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) EF есть *вычеть*, коего члены FI и IE, съ членами CD и BD *биноміальной* BC соизмѣримы и имъ пропорціональны.

2. Биноміальная BC можетъ быть *первою*, *второю* или *третею*, т. е. въ пропорціи:

$$CD:BD=FI:IE$$

CD квадратитъ надъ BD на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ CD, и CD или BD соизмѣримы съ данною раціональною прямою или ни CD, ни BD несоизмѣримы съ нею, то FI будетъ квадратить надъ IE на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ FI а также FI или IE будутъ или одна, или другая соизмѣримы съ данною раціональною прямою или обѣ съ нею несоизмѣримы. Слѣдовательно вычетъ EF съ биноміальною BC будетъ одного порядка или перваго, или втораго, или третьяго. Точно также можетъ быть доказано, что EF и BC будутъ въ одно время четвертаго, пятаго или шестаго порядка. Слѣдовательно биноміальная BC и вычетъ EF будутъ всегда одного порядка.

Предложеніе 114. Прямоугольникъ, построенный на *вычетѣ* BD, равный квадрату построенному на раціональной прямой A, имѣетъ высотою IH *биноміальную*, которая съ вычетомъ BD одного *порядка* и коей члены соизмѣримы съ членами вычета и имъ пропорціональны (фиг. 434).

Доказат. 1. Къ *вычету* BD прибавимъ прямую DC, то (кн. 10, пред. 74) BC и CD суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя. Пусть $\square A=BC.G$, слѣдовательно площадь $BC.G$ раціональна, но BC есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21) G раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ BC.

Такъ какъ;

$$\square A=BC.G=BD.IH$$

то (кн. 6, пред. 16):

$$BC:BD=IH:G$$

Но $BC>BD$, слѣдовательно $IH>G$. Положимъ $G=IE$, то IE и BC соизмѣримы по длинѣ. Изъ пропорціи:

$$CB:BD=IH:IE$$

слѣдуетъ:

$$BC:CD=IH:HE$$

Положимъ теперь:

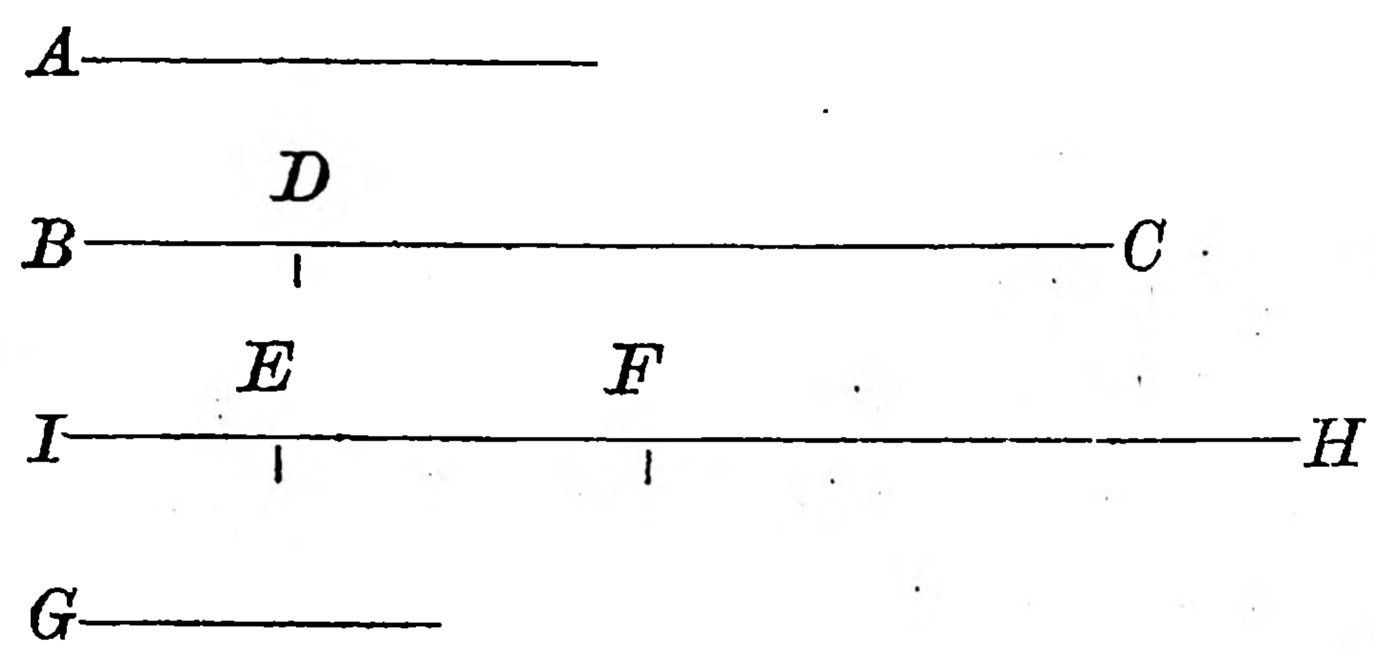
$$IH:HE=HF:FE$$

то (кн. 5, пред. 19):

$$IF:FH=IH:HE=BC:CD$$

слѣдовательно, такъ какъ BC и CD только въ степени соизмѣримы, то IF и FH также соизмѣримы только въ степени.

Фиг. 434.



Изъ пропорцій:

$$IF:FH=IH:HE=HF:FE$$

слѣдуетъ (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$IF:FE=\square IF:\square FH$$

откуда, такъ какъ $\square IF$ и $\square FH$ соизмѣримы, то IF и FE также соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 6, пред. 16) FI и IE по длинѣ соизмѣримы, но IE есть раціональная прямая соизмѣримая по длинѣ съ BC, слѣдовательно FI также раціональна и соизмѣрима по длинѣ съ BC.

Далѣе, мы имѣемъ:

$$BC:CD=IF:FH$$

откуда:

$$BC:IF=CD:FH$$

но BC и IF по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно CD и FH также по длинѣ соизмѣримы. Такъ какъ BC и CD суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, то IF и FH суть также раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) IH есть *биноміальная*, коей члены IF и FH соизмѣримы съ членами BC и CD *вычета* BD и имъ пропорціональны.

2. Точно также, какъ выше, можно показать, что биноміальная IH съ вычетомъ BD будутъ всегда одного порядка.

Предложеніе 115. Прямоугольникъ, заключенный между *вычетомъ* AB и *биноміальною* CD, коей члены соизмѣримы съ членами *вычета* и имъ пропорціональны, квадратится раціональною прямою G (фиг. 435).

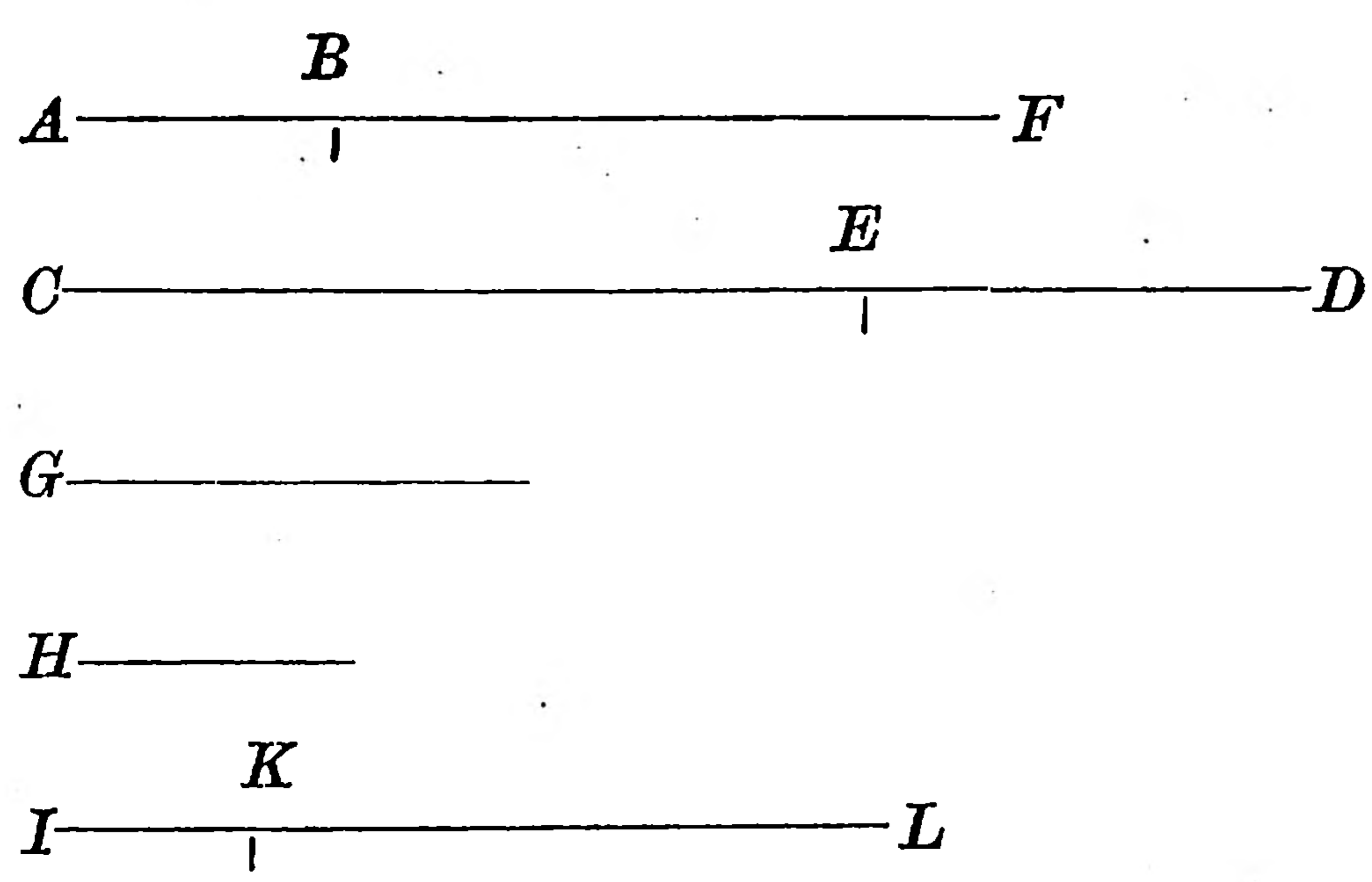
Доказат. Прибавимъ къ AB прямую BF и пусть CD въ точки E раздѣлена на свои члены CE и ED, изъ коихъ $CE>ED$. По условію члены CE и ED соизмѣримы съ членами AF и FB и:

$$CE : ED = AF : FB$$

а также $AB.CD = \square G$. Слѣдовательно надобно доказать, что G есть раціональная прямая. Пусть H будетъ раціональная прямая и пусть прямоугольникъ построенный на CD, т. е. $CD.IK = \square H$, то (кн. 10, пред. 113) IK есть *вычетъ*, коего члены IL и LK соизмѣримы съ биноміальными членами CE и ED, но:

$$CE : ED = IL : LK$$

Фиг. 435.



Слѣдовательно, такъ какъ по условію:

$$CE : ED = AF : FB$$

и

$$AF : FB = IL : LK$$

то:

$$AF : IL = FB : LK$$

откуда (кн. 5, пред. 19)

$$AB : IK = AF : IL$$

Слѣдовательно, какъ AF и IL по длинѣ соизмѣримы, то AB и IK также по длинѣ соизмѣримы. Но (кн. 6, пред. 1):

$$AB : IK = CD.AB : CD.IK$$

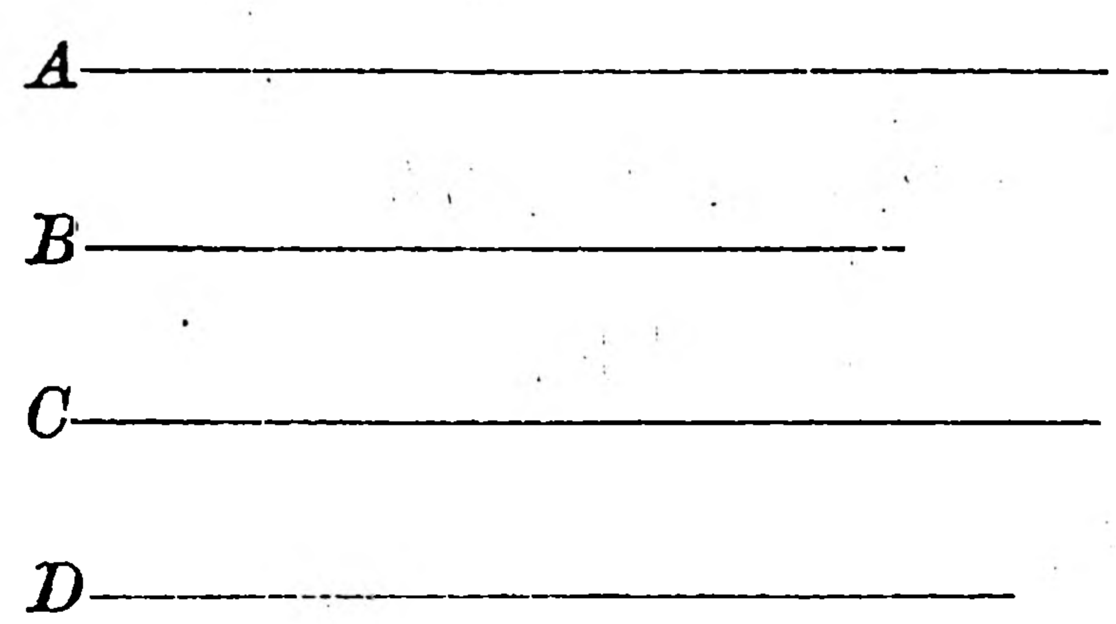
слѣдовательно $CD.AB$ и $CD.IK$ соизмѣримы, т. е. соизмѣримы и квадраты $\square H$ и $\square G$. Но $\square H$ есть раціональная площадь, слѣдовательно площадь $\square G$ и прямая G также раціональны.

Слѣдствіе. Изъ этого слѣдуетъ, что возможенъ раціональный прямоугольникъ заключенный между ирраціональными прямыми.

Предложеніе 116. Изъ какой нибудь *средней* прямой A, можно получить безчисленное множество ирраціональныхъ линій отличныхъ отъ всѣхъ предъидущихъ (фиг. 436).

Доказат. Пусть B будетъ раціональная прямая, слѣдовательно прямоугольникъ $A.B$ (кн. 10, пред. 39) будетъ ирраціональный.

Фиг. 436.



Положимъ $A.B = \square C$, то прямая C будетъ ирраціональная, но отличная отъ всѣхъ предъидущихъ. Въ самомъ дѣлѣ, ни на одной изъ нихъ построенный квадратъ не равенъ прямоугольнику у котораго бы основаніе было *средняя* прямая, что видно изъ предложеній 61, 62, 63, 64, 65 и 66 и изъ предложеній 98, 99, 100, 101, 102 и 103.

Далѣе, пусть $B.C = \square D$, то D будетъ опять ирраціональная прямая отличная отъ всѣхъ предъидущихъ, такъ какъ ни на одной изъ нихъ построенный квадратъ не даетъ въ равномъ ему прямоугольникѣ основанія C.

Это заключеніе можетъ быть продолжено до безконечности, слѣдовательно можно получить безчисленное множество ирраціональностей отличныхъ отъ всѣхъ предъидущихъ.

Предложеніе 117. Въ каждомъ квадратѣ $ABCD$ діагональ AC съ стороною AB суть прямыя по длинѣ несоизмѣримыя (фиг. 437).

Доказат. Положимъ, что AC и AB соизмѣримы. Если AC и AB соизмѣримы, то онѣ относятся между собою какъ несократимыя числа, напримѣръ EF и G, т. е.:

$$AC : AB = EF : G$$

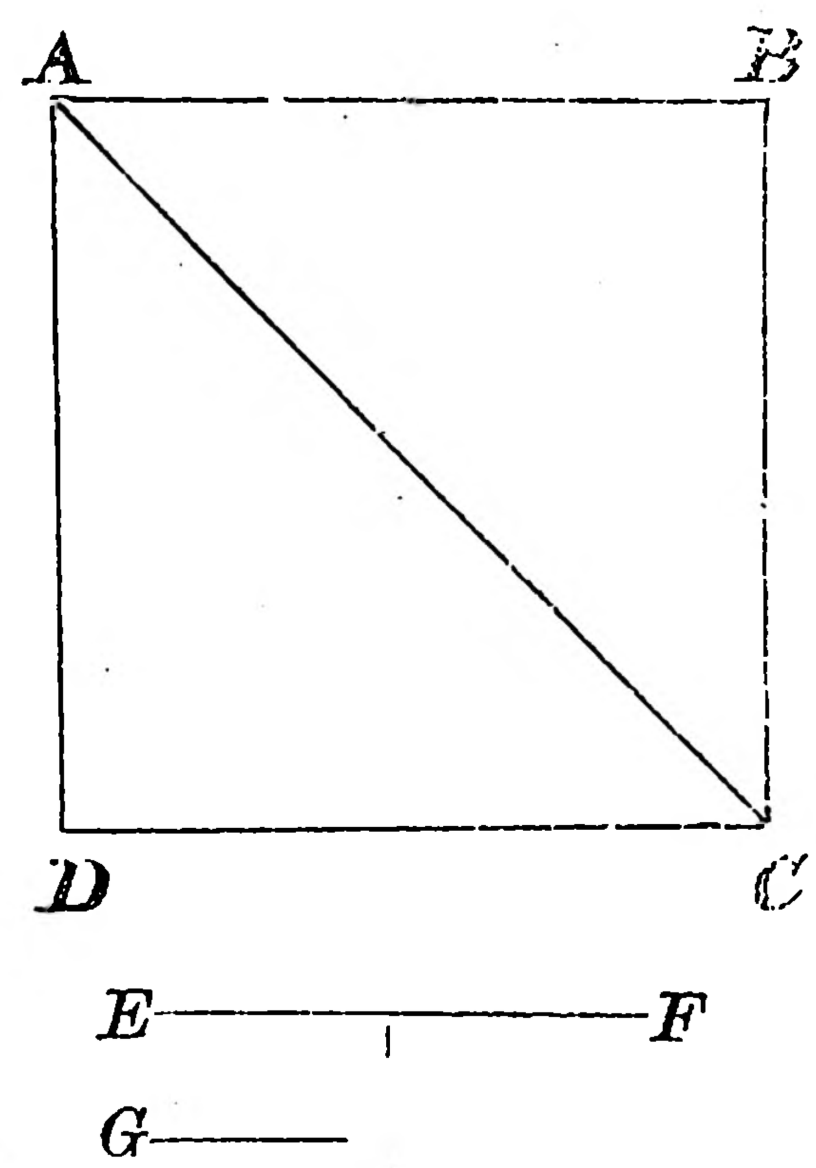
Такъ какъ $AC > AB$, то число $EF > G$, слѣдовательно оно не можетъ быть единицей. Изъ предъидущей пропорціи мы имѣемъ:

$$\square AC : \square AB = EF^2 : G^2$$

но (кн. 1, пред. 47) $\square AC = 2 \square AB$, слѣдовательно и $EF^2 = 2G^2$. Изъ этого равенства видимъ, что число EF^2 есть четное, а слѣдовательно и EF есть также четное число. Пусть оно въ точкѣ H раздѣлено пополамъ.

Такъ какъ числа EF и G несократимы, то онѣ суть взаимно простыя, но EF есть четное число, слѣдовательно G четнымъ числомъ быть не можетъ. Итакъ число G есть нечетное.

Фиг. 437.



Такъ какъ EF въ точкѣ H раздѣлена пополамъ, то $EF=2EH$ и $EF^2=4EH^2$ (кн. 8, пред. 11), но $EF^2=2G^2$, слѣдовательно $2G^2=4EH^2$, откуда $G^2=2EH^2$, а слѣдовательно G^2, а также и G суть числа четныя (кн. 9, пред. 23), что противорѣчитъ выше показанному. Слѣдовательно не можетъ быть чтобы прямыя AC и AB были соизмѣримы.

Другое доказат. Такъ какъ (кн. 1, пред. 47) $\square AC=2\square AB$, то:

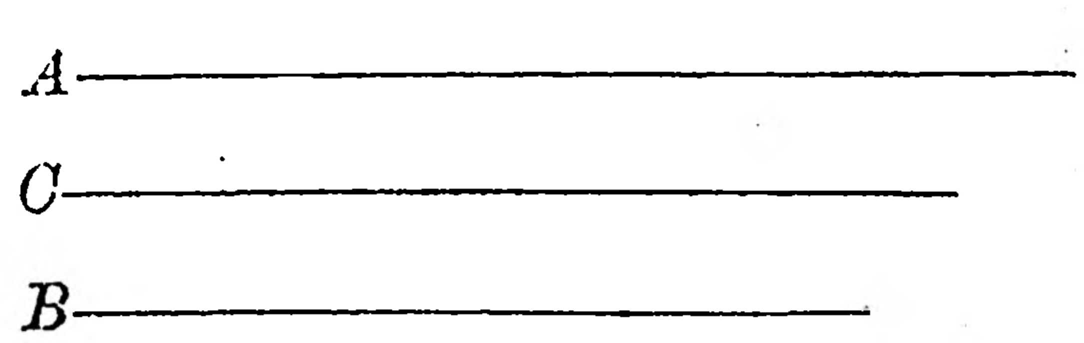
$$\square AC : \square AB = 2 : 1$$

слѣдовательно площади $\square AC$ и $\square AB$ не относятся между собою какъ квадратныя числа, а потому (кн. 10, пред. 9) прямыя AC и AB несоизмѣримы.

Примѣчаніе 12. Полагаютъ, что только второе изъ этихъ доказательствъ принадлежитъ Евклиду.

Замѣчаніе. Если найдемъ двѣ несоизмѣримыя прямыя A и B, то легко найти и несоизмѣримыя фигуры (фиг. 438).

Фиг. 438.



Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ между A и B средне-пропорціональную прямую C, то (кн. 6, пред. 20):

$$A : B = \text{фиг. } A : \text{фиг. } C$$

Эти фигуры могутъ быть квадратныя или другія, какія нибудь, подобныя прямолинейныя фигуры, или круги съ діаметрами A и C, такъ какъ будетъ показано (кн. 12, пред. 2), что площади круговъ относятся между собою какъ квадраты ихъ діаметровъ. Слѣдовательно могутъ быть найдены несоизмѣримыя фигуры, т. е. площади. Легко также видѣть, что можно найти и несоизмѣримыя тѣла. Въ самомъ дѣлѣ, построимъ на предъидущихъ площадяхъ тѣла равной высоты, онѣ могутъ быть призмы или пирамиды, конусы или цилиндры; эти тѣла будутъ относится между собою какъ ихъ основанія (кн. 11, пред. 32 и кн. 12, пред. 5, 6 и 11), что будетъ доказано ниже; слѣдовательно и тѣла будутъ соизмѣримы или несоизмѣримы, смотря потому будутъ ли ихъ основанія соизмѣримы или несоизмѣримы.

Изъ этого ясно видно, что соизмѣримость и несоизмѣримость имѣетъ мѣсто не только между линіями и площадями, но и между тѣлами.

Примѣчаніе 13. Полагаютъ, что вторая часть этого послѣдняго замѣчанія, въ которой говорится о тѣлахъ, не принадлежитъ Евклиду, а вставлена послѣ.

Примѣч. 14. Мы видѣли, что вторая книга Началъ Евклида содержитъ теоремы, которыя суть ничто иное какъ алгебраическія преобразованія, вытекающія изъ трехъ основныхъ законовъ алгебраическихъ количествъ:

Законъ перестановительный.

$$a+b=b+a, \quad \text{и} \quad ab=ba.$$

Законъ распредѣлительный:

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

Законъ повторительный:

$$a^n . a^m=a^{m+n}$$

Изъ этихъ трехъ законовъ вытекаютъ слѣдующія преобразованія алгебраическихъ фразъ:

1. $ab+ac+ad+\ldots=a(b+c+d+\ldots)$
2. $(a+b)^2=a(a+b)+b(a+b)$
3. $(a+b)\,a=ab+a^2$
4. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
5. $(a+b)^2-(a+b)^2=4ab$
6. $(2a+b)\,b+a^2=(a+b)^2$
7. $(a+b)^2+a^2=2(a+b)\,a+b^2$
8. $4(a+b)a+b^2=(2a+b)^2$
9. $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$
10. $b^2+(a+b)^2=2(\frac{1}{2}a)^2+2(\frac{1}{2}a+b)^2.$

Предложенія второй книги и суть геометрическія представленія этихъ преобразованій, т. е. это алгебра древнихъ, представленная геометрически.

Десятая книга, самая обширная, содержитъ алгебру ирраціональныхъ количествъ, представленную геометрически. Это самая трудная изъ всѣхъ книгъ элементовъ Евклида и самая замѣчательная по геометрическому анализу.

Она начинается опредѣленіемъ *соизмѣримыхъ* (*Σύμμετρα*) и *несоизмѣримыхъ* (*ἀσύμμετρα*) величинъ. Величины соизмѣримыя суть тѣ, которыя измѣряются одною и тою же мѣрою или которыя относятся между собою какъ числа. Въ противномъ случаѣ онѣ несоизмѣримы, напримѣръ a и $\sqrt{b}$, если b не есть число квадратное, суть величины несоизмѣримыя.

Соизмѣримыми въ степени (*δυνάμει σύμμετροι*) онъ называетъ такія величины, коихъ квадраты соизмѣримы, въ противномъ случаѣ онѣ суть въ *степени несоизмѣримы*, напримѣръ a и $\sqrt{b}$ суть величины всегда въ степени соизмѣримыя, напротивъ a и $\sqrt[3]{b}$, или a и $b+\sqrt{c}$ суть величины *несоизмѣримыя въ степени*.

Такимъ образомъ, съ произвольно взятой прямой линіей есть безчисленное множество прямыхъ линій, изъ коихъ однѣ соизмѣримы съ нею, а другія несоизмѣримы и при томъ частью по длинѣ, а частью и въ степени. Произвольно взятая прямая называется *раціональною* (*ῥητή*).

Раціональными Евклидъ называетъ всѣ линіи, которыя съ взятою соизмѣримы по длинѣ или только въ степени.

Ирраціональными (*ἄλογοι*) Евклидъ называетъ тѣ, которыя съ взятою прямою *несоизмѣримы*.

Евклидъ подъ *ирраціональными* величинами разумѣетъ нѣчто другое, что разумѣлъ Діофантъ и, что разумѣемъ мы. Мы называемъ ирраціональными величинами тѣ, которыя Евклидъ называетъ несоизмѣримыми. Разница состоитъ въ томъ, что Евклидъ раціональными величинами называетъ и тѣ, которыя соизмѣримы только въ степени. Слѣдовательно по Евклиду раціональныя величины суть не только a и b, но и $\sqrt{b}$, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ квадратъ отношенія $a:\sqrt{b}$ есть соизмѣримая величина.

Квадратъ взятой раціональной прямой называется *раціональнымъ* и всѣ площади съ нимъ соизмѣримыя называются *раціональными*.

Площади же несоизмѣримыя съ этимъ квадратомъ называются *ирраціональными*. *Ирраціональными* называются и прямыя квадратящія *ирраціональныя* площади (кн. 10, опр. 11) (*αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι*).

Десятую книгу по содержанію можно раздѣлить на четыре отдѣла:

1. Предложенія относящіяся къ общимъ свойствамъ соизмѣримости и несоизмѣримости (отъ 1 до 21).

2. О среднихъ прямыхъ (отъ 22 до 35).

3. Ирраціональныя прямыя, получаемыя сложеніемъ (отъ 36 до 72) и вычитаніемъ (отъ 73—111).

4. Предложенія отъ 112 до конца.

Переведемъ нѣкоторыя условія и предложенія на нашъ алгебраическій языкъ.

Отдѣлъ 1. Предложенія отъ 1 до 18 не представляетъ ничего особеннаго.

Предложеніе 11 приписываютъ математику Теететусу.

18-е предложеніе можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Предложеніе 18. Если на большей изъ двухъ прямыхъ AB и CD, $CD>AB$, построимъ (фиг. 439) прямоугольникъ CF равный $\frac{1}{4}\, AB^2$ и при томъ такъ, чтобы дополненіе его было квадратъ, т. е. чтобы $DE=EF$ и если при этомъ прямыя CE и ED соизмѣримы, то прямая $\sqrt{CD^2-AB^2}$ будетъ соизмѣрима съ CD, напротивъ если CE и ED будутъ несоизмѣримы, то и прямыя $\sqrt{CD^2-AB^2}$ и CD будутъ также несоизмѣримы.

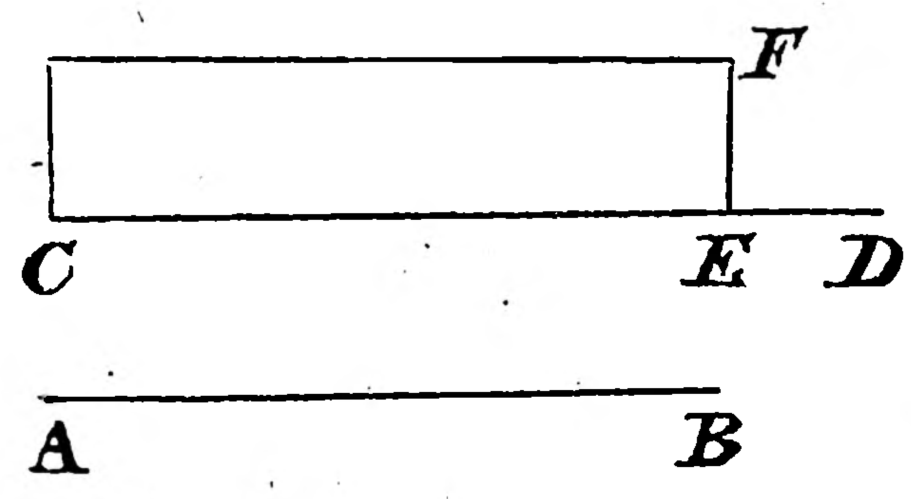
Доказат. Если CE и ED соизмѣримы то онѣ относятся какъ числа, положимъ:

$$CE : ED = m : n$$

но по условію мы имѣемъ:

$$CE.EF = CE.ED = \tfrac{1}{4} AB^2$$

Фиг. 439.



слѣдовательно:

$$ED = \tfrac{1}{2} AB \sqrt{\frac{n}{m}}, \quad CE = \tfrac{1}{2} AB \sqrt{\frac{m}{n}}$$

откуда:

$$CD = \tfrac{1}{2} AB \left(\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}} \right) = \tfrac{1}{2} AB \frac{m+n}{\sqrt{mn}}$$

Слѣдовательно:

$$\sqrt{CD^2 - AB^2} = \tfrac{1}{2} AB \frac{m-n}{\sqrt{mn}}$$

изъ двухъ послѣднихъ выраженій мы имѣемъ:

$$\sqrt{CD^2 - AB^2} : CD = m - n : m + n$$

т. е. прямыя $\sqrt{CD^2 - AB^2}$ и CD относятся какъ числа, слѣдовательно по длинѣ соизмѣримы.

Отдѣлъ 2. Первыя ирраціональныя прямыя, которыя Евклидъ разсматриваетъ и называетъ *средними* ($\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$) онъ опредѣляетъ такъ: прямая, квадратящая площадь прямоугольника, коего стороны суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, называется *среднею* ($\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta$).

Формы раціональныхъ величинъ соизмѣримыхъ только въ степени суть: a и $\sqrt{b}$ или $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$. Площадь прямоугольника между ними будетъ $a\sqrt{b}$ или $\sqrt{ab}$, слѣдовательно, *средняя прямая* будетъ $\sqrt{a\sqrt{b}}$ или $\sqrt{\sqrt{ab}}$. Эти формы неотличаются одна отъ другой, такъ какъ первую изъ нихъ можно написать въ формѣ второй $\sqrt{\sqrt{a^2 b}}$. При этомъ ни a, ни b не должны быть полными квадратами.

Предложеніе 23. Прямоугольникъ, построенный на раціональной прямой c, коего площадь равна площади квадрата построеннаго на средней прямой $\sqrt{a\sqrt{b}}$ или $\sqrt[4]{ab}$ имѣетъ высоту $x = \frac{a\sqrt{b}}{c}$ или $x = \frac{\sqrt{ab}}{c}$.

Предложеніе 25. Прямоугольникъ, коего стороны суть *средніе* по длинѣ соизмѣримыя прямыя, будетъ самъ *средній*. Средніе соизмѣримыя прямыя имѣютъ форму $m\sqrt[4]{ab}$ и $n\sqrt[4]{ab}$, а площадь прямоугольника между ними будетъ $mn\sqrt{ab}$.

Предложеніе 26. Прямоугольникъ, коего стороны суть *средніе* только въ степени соизмѣримыя прямыя будетъ или *раціональный* или *средній*. Стороны такого прямоугольника будутъ, очевидно $\sqrt{a\sqrt{b}}$ и $\sqrt{c\sqrt{b}}$, а площадь его $\sqrt{abc}$, слѣдовательно, если abc будетъ полный квадратъ, то прямоугольникъ будетъ *раціональный*, въ противномъ случаѣ онъ *средній*.

Предложенiе 27. Разность $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$ или $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ не можетъ быть *рацiональною.*

Предложенiе 28. Найти двѣ *среднiя* прямыя соизмѣримыя только въ степени, коихъ прямоугольникъ былъ бы *рацiональнымъ*?

Стороны такого прямоугольника могутъ быть $\sqrt{a\sqrt{b}}$ и $\sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{a}}$ или $\sqrt[4]{ab}$ и $\sqrt{b\sqrt{\frac{b}{a}}}$. Какъ первыя двѣ такъ и послѣднiя двѣ среднiя прямыя, очевидно соизмѣримы въ степени, такъ какъ ихъ квадраты суть:

$$a\sqrt{b} \text{ и } \frac{b\sqrt{b}}{a} \text{ или } \sqrt{ab} \text{ и } b\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{b}{a}\sqrt{ab}$$

Площадь прямоугольника между этими парами прямыхъ есть b величина рацiональная.

Предложенiе 29. Найти двѣ *среднiя* прямыя только въ степени соизмѣримыя, коихъ прямоугольникъ былъ бы *среднiй*?

Стороны такого прямоугольника могутъ быть:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \text{ и } \sqrt{\frac{ac}{b}\sqrt{b}} \quad \text{или} \quad \sqrt[4]{ab} \quad \text{и} \quad \sqrt{c\frac{\sqrt{ab}}{b}}$$

Очевидно, что ихъ квадраты:

$$a\sqrt{b} \text{ и } \frac{ac}{b}\sqrt{b} \text{ или } \sqrt{ab} \text{ и } c\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

соизмѣримы и площади прямоугольниковъ будутъ $a\sqrt{c}$ и $\sqrt{ac}$.

Слѣдствiе 1. Найти два квадратныхъ числа коихъ сумма была бы число квадратное? Возьмемъ два какiя нибудь, числа m и n, то мы всегда имѣемъ:

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

Слѣдствiе 2. Найти два квадратныхъ числа, коихъ сумма не есть число квадратное?

$$(m^2-n^2-1)^2+(2mn)^2.$$

Предложенiе 30. Найти двѣ рацiональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большею?

$$a \text{ и } \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}=\sqrt{a^2-\frac{a^2c^2}{b^2}}$$

гдѣ b^2-c^2 не есть число квадратное. Или еще проще:

$$a \text{ и } \sqrt{a^2-b^2}$$

Предложенiе 31. Найти двѣ рацiональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большею?

$$a \text{ и } \sqrt{a^2-b}.$$

Предложенiе 32. Найти двѣ *среднiя* только въ степени соизмѣримыя прямыя, коихъ прямоугольникъ былъ бы раціональный и изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ большею?

$$\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{и} \quad \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}}} \tag{1}$$

$$\sqrt[4]{a(a-b^2)} \quad \text{и} \quad \frac{a-b^2}{\sqrt[4]{a(a-b^2)}} \tag{2}$$

Слѣдствіе. Если большая изъ прямыхъ по длинѣ несоизмѣрима съ квадратящею, то:

$$\sqrt{a\sqrt{a^2-b}} \quad \text{и} \quad \frac{a^2-b}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b}}} \tag{1}$$

$$\sqrt[4]{a(a-b)} \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{\sqrt[4]{a(a-b)}} \tag{2}$$

Предложеніе 33. Найти двѣ *среднія* только въ степени соизмѣримыя прямыя, коихъ прямоугольникъ *средній* и изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона соизмѣрима или несоизмѣрима съ большею?

Большая соизмѣрима съ квадратящею:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}} \tag{1}$$

$$\sqrt[4]{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt[4]{ab}} \tag{2}$$

$$\sqrt{b\sqrt{a}} \quad \text{и} \quad \frac{b\sqrt{a-c^2}}{\sqrt{b\sqrt{a}}} \tag{3}$$

Большая несоизмѣрима съ квадратящею:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a^2-c)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}} \tag{1}$$

$$\sqrt[4]{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a-c)}}{\sqrt[4]{ab}} \tag{2}$$

$$\sqrt{b\sqrt{a}} \quad \text{и} \quad \frac{b\sqrt{a-c}}{\sqrt{b\sqrt{a}}} \tag{3}$$

Предложеніе 34. Найти двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ раціональна, а прямоугольникъ средній?

$$\sqrt{\frac{a^2+a\sqrt{b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{b}}{2}} \tag{1}$$

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{ab}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{a-\sqrt{ab}}{2}} \tag{2}$$

Сумма квадратовъ есть a^2 или a, а прямоугольники $a\sqrt{\frac{a^2-b}{4}}$ или $\sqrt{\frac{a^2-ab}{4}}$.

Предложеніе 35. Найти двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ есть *средняя*, а прямоугольникъ *раціональный*?

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}} \qquad (2)$$

Сумма квадратовъ есть $a\sqrt{a^2-b}$ или $(a-b)\sqrt{a-b}$, а прямоугольникъ $\frac{a^2-b}{2}$ или $\frac{a-b}{2}$.

Предложеніе 36. Найти двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ и прямоугольники суть *средція* несоизмѣримыя между собою?

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \qquad (2)$$

$$\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{2}} \qquad (3)$$

Сумма квадратовъ есть:

$$a\sqrt{b}, \qquad \sqrt{ab}, \qquad b\sqrt{a}$$

а прямоугольники:

$$\frac{\sqrt{b(a^2-c)}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{(a-c)b}}{2}, \qquad \frac{b\sqrt{a-c}}{2}$$

Отдѣлъ 3. Съ 37 предложенія Евклидъ излагаетъ предложенія относительно ирраціональностей, полученныхъ чрезъ сложеніе несоизмѣримыхъ только по длинѣ величинъ (*Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων*), а съ 74 предложенія онъ излагаетъ ирраціональности, полученныя чрезъ вычитаніе несоизмѣримыхъ только по длинѣ величинъ (*Δευτέρα τάξις ἑτέρων λόγων, τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν*). Первыя онъ называетъ *биноміальными* (*ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων*), а вторыя называетъ *вычетами* (*ἀποτομή*).

Биноміальныя имѣютъ форму:

$$a+\sqrt{b} \quad \text{или} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

а вычеты имѣютъ форму:

$$a-\sqrt{b} \quad \text{или} \quad \sqrt{a}-\sqrt{b} \quad \text{или} \quad \sqrt{a}-b$$

Очевидно, что какъ первыя такъ и вторыя по длинѣ и въ степени несоизмѣримы, а слѣдовательно *ирраціональны*.

Предложенія 37. 74. Если сложимъ двѣ раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, то получимъ ирраціональную прямую, которая называется *биноміальною*, если вычтемъ, то получимъ *вычетъ*.

Предложенія 38. 75. Если двѣ, только въ степени соизмѣримыя, среднія прямыя, коихъ прямоугольникъ раціональный, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую *первую бимедіальную* (ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη) въ первомъ случаѣ и *первый средній вычетъ* (ἡ μέσης ἀποτομὴ πρώτη) во второмъ случаѣ.

Первая бимедіальная и первый средній вычетъ.

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{a}} \quad \text{или} \quad \sqrt[4]{ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

или еще:

$$\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}} \pm \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}}}\,, \quad \sqrt[4]{a(a-b^2)} \pm \frac{a-b^2}{\sqrt[4]{a(a-b^2)}}\,.$$

Предложенія 39. 76. Если двѣ, только въ степени соизмѣримыя *среднія прямыя*, коихъ прямоугольникъ *средній*, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую въ первомъ случаѣ *вторую бимедіальную* (ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα), и *второй средній вычетъ* (ἡ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα) во второмъ случаѣ.

Вторая бимедіальная и второй средній вычетъ.

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \sqrt{\frac{ac}{b}\sqrt{b}} \quad \text{или} \quad \sqrt[4]{ab} \pm \sqrt{\frac{c\sqrt{ab}}{b}}$$

или еще:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}}\,, \quad \sqrt[4]{ab} \pm \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt[4]{ab}}\,, \quad \sqrt{b\sqrt{a}} \pm \frac{\sqrt{b(a-c^2)}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$$

и т. д.

Предложенія 40. 77. Если двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ *раціональна*, а прямоугольникъ *средній*, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую въ первомъ случаѣ *большую ирраціональную* (ἡ μείζων), и *малую ирраціональную* (ἡ ἐλάσσων) во второмъ случаѣ.

Большая ирраціональная и малая ирраціональная.

$$\sqrt{\frac{a^2+a\sqrt{b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{b}}{2}} \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{a+\sqrt{ab}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{ab}}{2}}$$

Предложенія 41. 78. Если двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ средняя, и прямоугольникъ раціональный, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую, которая называется въ первомъ случаѣ *раціональною и среднею степенящею* (ἡ ῥητὸν μέσον δυναμένη), и *которая съ раціональною даетъ цѣлую среднюю площадь* (ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα) во второмъ случаѣ.

Раціональная и средняя степенящая и которая съ раціональною даетъ цѣлую среднею площадь.

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

или

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}.$$

Если возвысимъ оба эти выраженія въ квадратъ, то получимъ:

$$a\sqrt{a^2-b} \pm (a^2-b) \quad \text{и} \quad a\sqrt{a-b} \pm (a-b)$$

Составъ этихъ выраженій и послужилъ къ ихъ названію. Если возмемъ знакъ $+$, то это будетъ сумма двухъ площадей: одна *раціональная*, а другая *средняя*. Если возьмемъ знакъ $-$, то квадратъ, предъидущихъ выраженій сложенный съ *раціональною* площадью a^2-b или $a-b$ даетъ *среднюю* площадь $a\sqrt{a^2-b}$ или $a\sqrt{a-b}$.

Предложенія 42. 79. Если двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ и прямоугольникъ суть *среднія*, сложимъ или вычтемъ, то получимъ въ первомъ случаѣ прямую которою называютъ *степенящую двѣ среднія площади* (*ἡ δύο μέσα δυναμένη*), а во второмъ случаѣ прямую, *которой квадратъ съ среднею площадью даетъ цѣлую среднюю площадь* (*ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα*).

Таковы:

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}. \qquad (2)$$

$$\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}} \pm \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{2}} \qquad (3)$$

Если эти прямыя возвысимъ въ квадратъ, то получимъ:

$$a\sqrt{b} \pm \sqrt{(a^2-c)\,b} \qquad (1)$$

$$\sqrt{ab} \pm \sqrt{(a-c)\,b} \qquad (2)$$

$$b\sqrt{a} \pm b\sqrt{a-c} \qquad (3)$$

Изъ формы этихъ выраженій и произошли ихъ названія.

Если возьмемъ знакъ $+$, то квадратъ состоитъ изъ двухъ *среднихъ* площадей, а если возьмемъ знакъ $-$, то квадратъ сложенный съ среднимъ прямоугольникомъ $\sqrt{(a^2-c)b}$, или $\sqrt{(a-c)\,b}$, или $b\sqrt{a-c}$ даетъ средній прямоугольникъ: $a\sqrt{b}$, или $\sqrt{ab}$, или $b\sqrt{a}$.

Предложенія 43—48 и 80—85. Въ этихъ предложеніяхъ доказывается, что всѣ ирраціональности, полученныя чрезъ сложеніе или вычитаніе могутъ разложится на ихъ составныя части—члены ($\grave{o}\nu\acute{o}\mu\alpha\tau\alpha$) только въ одной точкѣ. Эти предложенія, выраженныя алгебраически даютъ уравненіе $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$ или $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, которыя какъ извѣстно изъ алгебры могутъ существовать, только тогда когда $x=a$, $y=b$.

Предложенія 49—54 и 86—91. Даютъ построеніе шести родовъ биноміальныхъ и вычетовъ.

Общее выраженіе *биноміальной* или *вычета* есть $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$. Смотря потому будутъ ли a или b полными квадратами или ни одно изъ нихъ, и въ каждомъ изъ этихъ трехъ случаевъ большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона соизмѣрима или несоизмѣрима съ большимъ членомъ. Евклидъ дѣлитъ *биноміальныя* и *вычеты* на шесть порядковъ.

I. Большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ коего сторона соизмѣрима по длинѣ съ большимъ членомъ.

1) Большій членъ соизмѣримъ съ данною раціональною прямою, т. е. есть раціональная прямая. Это будетъ *первая биноміальная* или *первый вычетъ*, смотря по знаку:

$$a\pm\sqrt{a^2-d^2} \quad \text{или} \quad a\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-c^2}$$

2) Меньшій членъ есть раціональная прямая. Это будетъ *вторая биноміальная* или *второй вычетъ.*

$$\sqrt{a^2+b^2}\pm a \quad \text{или} \quad \frac{ab}{\sqrt{b^2-c^2}}\pm a$$

3) Оба члена несоизмѣримы. Это *третяя биноміальная* или *третій вычетъ.*

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{\frac{a(b^2-c^2)}{b^2}} \quad \text{или} \quad \sqrt{a}\pm\sqrt{a-ad^2}$$

II. Большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большимъ членомъ.

1) Большій членъ есть раціональная прямая. Это *четвертая биноміальная* или *четвертый вычетъ.*

$$a\pm\sqrt{a^2-d}$$

2) Меньшій членъ раціональный. Это будетъ *пятая биноміальная* или *пятый вычетъ.*

$$\sqrt{a^2+d}\pm a$$

3) Оба члена несоизмѣримы. Это будетъ *шестая биноміальная* или *шестой вычетъ.*

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{a-d}.$$

Предложенія 55—60 и 92—97. Въ этихъ предложеніяхъ Евклидъ геометрически извлекаетъ квадратные корни изъ *биноміальныхъ* и *вычетовъ* различныхъ порядковъ и показываетъ, что результатомъ всегда будетъ одна изъ ирраціональностей; отъ пред. 37 до 41 и отъ 74 до 80.

Эту операцію онъ дѣлаетъ такъ: беретъ раціональную прямую и строитъ прямоугольникъ, коего другая сторона есть одна изъ *биноміальныхъ* или одинъ изъ *вычетовъ* и показываетъ, что сторона квадрата коего площадь равна, построенному прямоугольнику есть одна изъ выше упомянутыхъ ирраціональностей.

Примѣръ 1. Если примемъ раціональную прямую за 1, то площадь прямоугольника построеннаго на *первой биноміальной* или *первомъ вычетѣ* и на единицѣ будетъ $a \pm \sqrt{a^2-b^2}$, а квадратный корень изъ нея будетъ сторона квадрата:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

т. е. просто *биноміальная* или *вычетъ.*

Примѣръ 2. Квадратный корень изъ *четвертой биноміальный* или *четвертаго вычета* будетъ *большая ирраціональная*:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-d}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{d}}{2}}$$

Предложенія 61—66 и 98—103 суть обратныя предъидущимъ, а именно: что квадраты шести ирраціональностей сложенныхъ даютъ *биноміальныя* различныхъ порядковъ, а квадраты шести ирраціональностей вычитаемыхъ даютъ шесть *вычетовъ* различныхъ порядковъ.

Отдѣлъ 4. Предложеніе 113. Прямоугольникъ построенный на одной изъ биноміальныхъ, равный квадрату, построенному на раціональной прямой имѣетъ высотою одинъ изъ вычетовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ $d^2 = x(a+\sqrt{b})$ или $d^2 = x(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, откуда:

$$x = \frac{d^2(a-\sqrt{b})}{a^2-b} \text{ или } x = \frac{d^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

оба суть *вычеты.*

Такъ какъ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$, то прямоугольникъ между *биноміальною* и *вычетомъ* есть *раціональный.*

Предложеніе 115. Прямоугольникъ, построенный на *биноміальной* и *вычетѣ,* коихъ члены по членно соизмѣримы и пропорціональны, будетъ раціональный.

Пусть $a+\sqrt{b}$ будетъ одна сторона прямоугольника, то по условію другая будетъ $ma-m\sqrt{b}$. Слѣдовательно прямоугольникъ будетъ:

$$m(a^2-b).$$

Предложеніе 117. Послѣднее предложеніе десятой книги, содержитъ доказательство, что діогональ квадрата съ его стороною суть величины несоизмѣримыя.

Дается два доказательства изъ коихъ думаютъ, что первое не принадлежитъ Евклиду, а было вставлено однимъ изъ комментаторовъ или же Теономъ, который переработывалъ элементы Евклида; другое гораздо проще. Первое основано на томъ, что число въ одно время не можетъ быть четнымъ и нечетнымъ, а второе, что квадратъ діагонали относится къ квадрату стороны какъ 2:1. Впрочемъ, съ этимъ мнѣніемъ высказаннымъ Нессельманомъ, Бретшнейдеръ несогласенъ.

Десятая книга Евклида есть единственная, которая даетъ намъ понятіе о ирраціональной ариѳметикѣ у древнихъ. Діогенъ Лаертскій упоминаетъ еще, что Демокритъ прежде Евклида писалъ объ ирраціональныхъ величинахъ въ сочиненіи, которое носило названіе *περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν*.

За этимъ въ теченіи цѣлыхъ восемнадцати столѣтій теорія ирраціональныхъ величинъ оставалась въ забвеніи, и только въ концѣ XV столѣтія ими началъ заниматься Лука Пачіоли (Lucas Pacioli di Borgo).

КНИГА XI.

Книга первая „О тѣлахъ".

Опредѣленія.

1. *Тѣломъ* (Στερεόν) называется то, что имѣетъ длину, ширину и глубину.

Примѣч. 1. Отъ словъ *στερεόν* (тѣло) и *μέρος* (мѣра) произошло названіе *Стереометрія*, той части геометріи, которая занимается изслѣдованіемъ свойствъ тѣлъ.

2. Предѣлы тѣла суть *поверхности.*

3. *Прямая линія* перпендикулярна къ *плоскости,* если она образуетъ прямые углы со всѣми прямыми линіями, лежащими въ этой плоскости и проходящими чрезъ нее.

4. *Плоскость перпендикулярна къ плоскости,* если прямыя линіи перпендикулярныя къ пересѣченію этихъ плоскостей и лежащія въ одной изъ нихъ перпендикулярны и къ другой.

5. *Наклоненіемъ прямой линіи* къ плоскости называется острый уголъ, который она составляетъ съ прямой линіей проведенной чрезъ двѣ точки изъ коихъ одна есть пересѣченіе ея съ плоскостью, а другая точка пересѣченіе перпендикуляра, опущеннаго изъ какой нибудь ея точки на плоскость.

6. *Наклоненіемъ плоскости къ плоскости* называется острый уголъ, составленный двумя перпендикулярами, возставленными изъ какой нибудь точки линіи пересѣченія трехъ плоскостей, къ самимъ плоскостямъ.

7. Двѣ пары плоскостей имѣютъ *одинаковые углы наклоненія,* если вышеупомянутые углы наклоненія равны.

8. *Параллельными плоскостями* называются такія, которыя никогда не встрѣчаются.

9. *Подобными* тѣлами называются такія, которыя ограничены, однимъ и тѣмъ же числомъ подобныхъ плоскостей.

10. *Равными* и *подобными* тѣлами, называются такія, которыя ограничены одинаковымъ числомъ равныхъ и подобныхъ плоскостей.

Примѣч. 2. Опредѣленіе это, собственно говоря, не есть опредѣленіе, а предложеніе, требующее доказательства. Пейраръ (Peyrard) доказалъ это опредѣленіе для случая, когда тѣлесные углы, составлены не болѣе какъ изъ трехъ плоскихъ угловъ; а мы докажемъ ниже это предложеніе для выпуклыхъ тѣлъ съ какими бы то нибыло тѣлесными углами.

Робертъ Симсонъ утверждаетъ, что 10 опредѣленіе несправедливо для всѣхъ случаевъ, а потому многія изъ доказательствъ XI книги и нѣкоторыя доказательства XII книги имѣютъ въ своемъ основаніи ложное начало; на основаніи этого онъ опускаетъ это опредѣленіе и замѣняетъ его тремя теоремами, помѣщенными имъ вслѣдъ за предложеніемъ 22. Для доказательства того, что 10 опредѣленіе несправедливо въ нѣкоторыхъ случаяхъ, Симсонъ предполагаетъ два тѣла, имѣющихъ одинаковое число подобныхъ и равныхъ сторонъ, въ одномъ изъ этихъ тѣлъ одинъ уголъ *вогнутый*, въ другомъ же всѣ углы *выпуклые*. Но не очевидно-ли, что Евклидъ имѣлъ въ виду только тѣла не имѣющія вогнутыхъ угловъ? Неужели нужно было это оговорить? Это опредѣленіе вполнѣ вѣрно для всѣхъ случаевъ, когда углы тѣла суть выпуклые.

Предложеніе, поставленное Симсономъ на мѣсто этого опредѣленія, выражено слѣдующимъ образомъ:

„Тѣла, составленныя подобными плоскостями, равными по числу и по величинѣ и подобно расположенными, коихъ тѣлесные углы, составлены не болѣе, какъ изъ трехъ плоскихъ угловъ, равны и подобны между собою".

Предложеніе это заключаетъ лишнее условіе; изъ того что два тѣла ограничены одинаковымъ числомъ равныхъ и подобныхъ сторонъ, прямо слѣдуетъ, что стороны этихъ тѣлъ одинаково расположены въ каждомъ изъ нихъ. Это подобно тому, если бы мы сказали, что треугольники, составленные равными и подобно расположенными сторонами равны и подобны между собою.

Предложеніе Симсона состоитъ изъ двухъ случаевъ; если приложить одну изъ сторонъ перваго тѣла къ соотвѣтствующей стороны второго, то можетъ случиться, что остальныя стороны перваго тѣла совмѣстятся съ остальными сторонами втораго тѣла, или-же можетъ случится, что первое тѣло будетъ находиться внѣ втораго. Симсонъ доказываетъ только первый случай, и совершенно ничего не говоритъ о второмъ, который лежитъ въ основаніи доказательствъ предложеній 28 и 40 книги XI, и доказательствъ предложеній 3 и 4 книги XII: а потому всѣ эти доказательства имѣютъ дѣйствительно ложное начало въ силу поправокъ сдѣланныхъ Симсономъ.

Удивленный, что геометры въ теченіи XIII столѣтіи вѣрили въ справедливость 10 опредѣленія, Симсонъ говоритъ: „Но, что же должны мы сказать если это опредѣленіе невѣрно? Не должны-ли мы сознаться, что геометры въ теченіи XIII вѣковъ были въ заблужденіи, относительно этого элементарнаго предложенія? Пусть это намъ послужитъ урокомъ быть скромными и сознать какъ трудно быть всегда осмотрительными, какъ нашъ умъ слабъ, въ виду того, что мы не можемъ оградить себя отъ ошибокъ, въ началахъ наукъ, которыя по справедливости называютъ самыми точными".

Эти послѣднія слова Симсона могутъ служить примѣромъ, какъ нужно быть осторожнымъ при поправкѣ тѣхъ истинъ, которыя были приняты геометрами, въ теченіи цѣлыхъ тринадцати вѣковъ!

11. *Тѣлесный уголъ* есть взаимное наклоненіе, по крайней мѣрѣ, трехъ прямыхъ линій, не лежащихъ въ одной плоскости, но встрѣчаю-

щихся въ одной точкѣ. Или: тѣлесный уголъ есть тотъ, который ограниченъ по крайней мѣрѣ тремя плоскими углами, не лежащими въ одной плоскости, но имѣющими вершину въ одной точкѣ.

12. *Пирамида* (Πυραμίς) есть тѣло, ограниченное плоскостями, проведенными отъ какой нибудь плоскости къ точкѣ, лежащей внѣ этой послѣдней.

13. *Призма* (Πρίσμα) есть тѣло, ограниченное плоскостями, изъ коихъ двѣ противолежащія равны, подобны и параллельны, остальныя же суть параллелограммы.

14. *Шаръ* (Σφαῖρα), описанъ полукругомъ, вращающимся на неподвижномъ діаметрѣ.

15. *Ось шара* есть неподвижная прямая линія, около которой вращается полукругъ.

16. *Центръ шара* есть центръ вращающагося полукруга.

17. *Діаметръ шара*, есть прямая линія проходящая чрезъ его центръ, предѣломъ которой служитъ поверхность шара.

18. *Конусъ* (Κῶνός) описанъ прямоугольнымъ треугольникомъ, вращающимся около неподвижной перпендикулярной стороны. Смотря потому, будетъ ли неподвижная перпендикулярная сторона равна, больше или меньше другой вращающейся, мы получаемъ *прямоугольный*, *тупоугольный* или *остроугольный конусъ*.

19. *Ось конуса*, есть неподвижный перпендикуляръ, около котораго вращается треугольникъ.

20. *Основаніе конуса*, есть кругъ описанный движеніемъ перпендикулярной стороны.

21. *Цилиндръ* (Κόλινδρος) происходитъ отъ вращенія прямоугольнаго параллелограмма, около неподвижной стороны.

22. *Ось цилиндра*, есть неподвижная сторона, около которой вращается параллелограммъ.

23. *Основанія цилиндра* суть круги, ограниченныя противолежащими вращающимися сторонами.

24. *Подобные конусы и цилиндры* суть тѣ, въ которыхъ оси и діаметры основаній пропорціональны.

25. *Кубъ* (Κύβος) есть тѣло ограниченное шестью равными квадратами.

26. *Тетраедръ* (Τέτράεδρον) есть тѣло, ограниченное четырьмя равными и равносторонними треугольниками.

27. *Октаедръ* (Οκτάεδρον) есть тѣло, ограниченное осьмю равными и равносторонними треугольниками.

28. *Додекаедръ* (Δωδεκάεδρον) есть тѣло, ограниченное двѣнадцатью равными и равносторонними пятиугольниками.

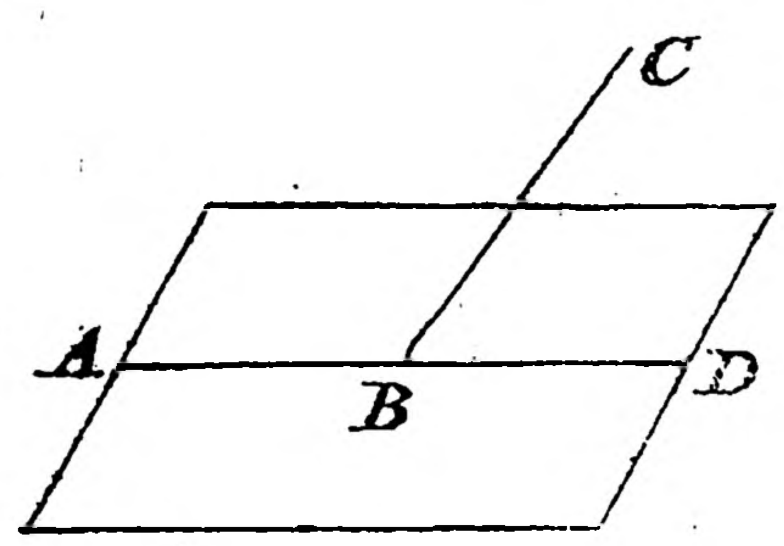
29. *Икосаедръ* (Εἰκοσάεδρον) есть тѣло, ограниченное двадцатью равными и равносторонними треугольниками.

Примѣч. 3. Параллелепипедомъ называется тѣло ограниченное по парно параллельными плоскостями.

Предложенія.

Предложеніе 1. Части прямой линіи не могутъ лежать, одна надъ плоскостью, а другая въ самой плоскости (фиг. 440).

Фиг. 440.



Доказат. Если это возможно, то пусть ABC будетъ прямая линія, которой части: AB и BC лежатъ, первая въ плоскости, а вторая надъ плоскостью. Продолжимъ часть AB, лежащую въ плоскости, до точки D: тогда отрѣзокъ AB есть общій двумъ прямымъ линіямъ ABC и ABD, что невозможно, такъ какъ двѣ прямыя линіи могутъ или пересѣкаться только въ одной точкѣ, или совпадать всѣми своими частями. А потому невозможно, чтобы часть прямой лежала въ плоскости, а другая внѣ ея.

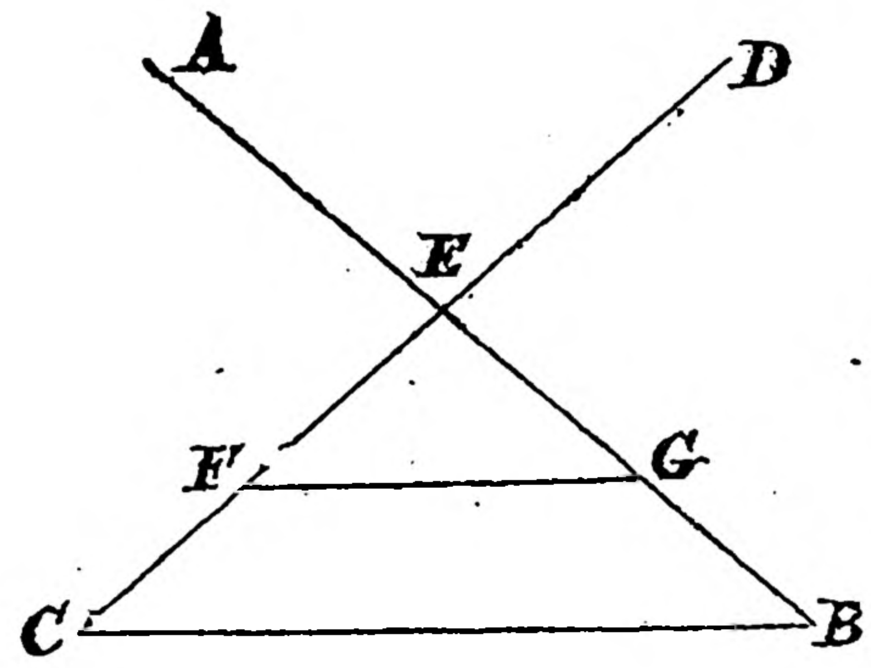
Примѣч. 4. Это предложеніе дѣлается лишнимъ, если принять опредѣленіе плоскости, которое мы даемъ въ примѣчаніи 5. Кромѣ этого само доказательство Евклида неосновательно. Въ самомъ дѣлѣ, онъ полагаетъ, что продолженіе BC части AB, находящейся въ плоскости, находится внѣ плоскости, а потомъ говоритъ: продолжимъ часть AB въ плоскости до точки D. Если BC есть продолженіе части AB, то уже нельзя сказать: продолжимъ AB въ плоскости до точки D. Это предложеніе Евклидъ могъ доказать, основываясь на своемъ опредѣленіи плоскости (кн. 1, опр. 7), сказавъ что плоскость не была бы расположена одинаково относительно прямой ABC.

Предложеніе 2. Двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи AB и CD лежатъ въ одной плоскости; точно также всякій треугольникъ лежитъ въ одной плоскости (фиг. 441).

Доказат. На прямыхъ линіяхъ EC и EB возьмемъ произвольныя точки F и G, и проведемъ прямыя FG и GB.

Если предположимъ, что часть EFG треугольника ECB лежитъ въ какой нибудь плоскости, а остальная часть $FCBG$ надъ этой послѣдней, то части EF или EG прямыхъ EC или EB лежатъ въ этой плоскости, другія же части FC или GB надъ ней, что (кн. 11, пред. 1) невозможно. А потому

Фиг. 441.



цѣлый треугольникъ ECB лежитъ въ одной плоскости, въ которой лежатъ EB и EC, а слѣдовательно (кн. 11, пред. 1) AB и CD.

Примѣч. 5. Опредѣленіе плоскости Евклида также темно какъ и опредѣленіе прямой. Новѣйшіе геометры дали нѣсколько опредѣленій плоскости.

Лежандръ опредѣляетъ *плоскость*, говоря что это есть поверхность, на которой прямая, имѣя двѣ общія точки съ ней, совмѣщается всѣми своими точками.

Казалось бы съ перваго взгляда, что опредѣленіе плоскости Евклида (кн. 1, опред. 7) совпадаетъ съ этимъ послѣднимъ, но пред. 1, кн. 10 противорѣчитъ этому заключенію.

Гуель (Höuel) прибавляетъ къ этому: и что, какая нибудь, часть этой поверхности можетъ совмѣститься на той же поверхности или прямо, или обратно, т. е. послѣ поворота около двухъ ея точекъ.

Бальтцеръ говоритъ, что плоскость есть поверхность, которая образуется движеніемъ прямой, проходящей чрезъ данную точку и скользящей по данной прямой.

Такъ какъ на основаніи этого опредѣленія нельзя доказать, что прямая, имѣющая съ поверхностью двѣ общія точки, вся въ ней помѣщается, то онъ принимаетъ это послѣднее свойство какъ *аксіому плоскости.*

Такъ какъ на основаніи первой части опредѣленія Гуеля или аксіомы плоскости Бальтцера, легко доказать вторую часть опредѣленія Гуеля и показать, что поверхность, образуемая движеніемъ прямой, проходящей чрезъ данную точку и скользящей по данной прямой есть плоскость, то мы и примемъ это опредѣленіе. Итакъ *плоскость есть такая поверхность, на которой прямая, имѣющая двѣ общія точки съ ней, вся на ней помѣщается.*

Предложеніе. Чрезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой можно провести только одну плоскость, т. е. тремя точками плоскость вполнѣ опредѣляется.

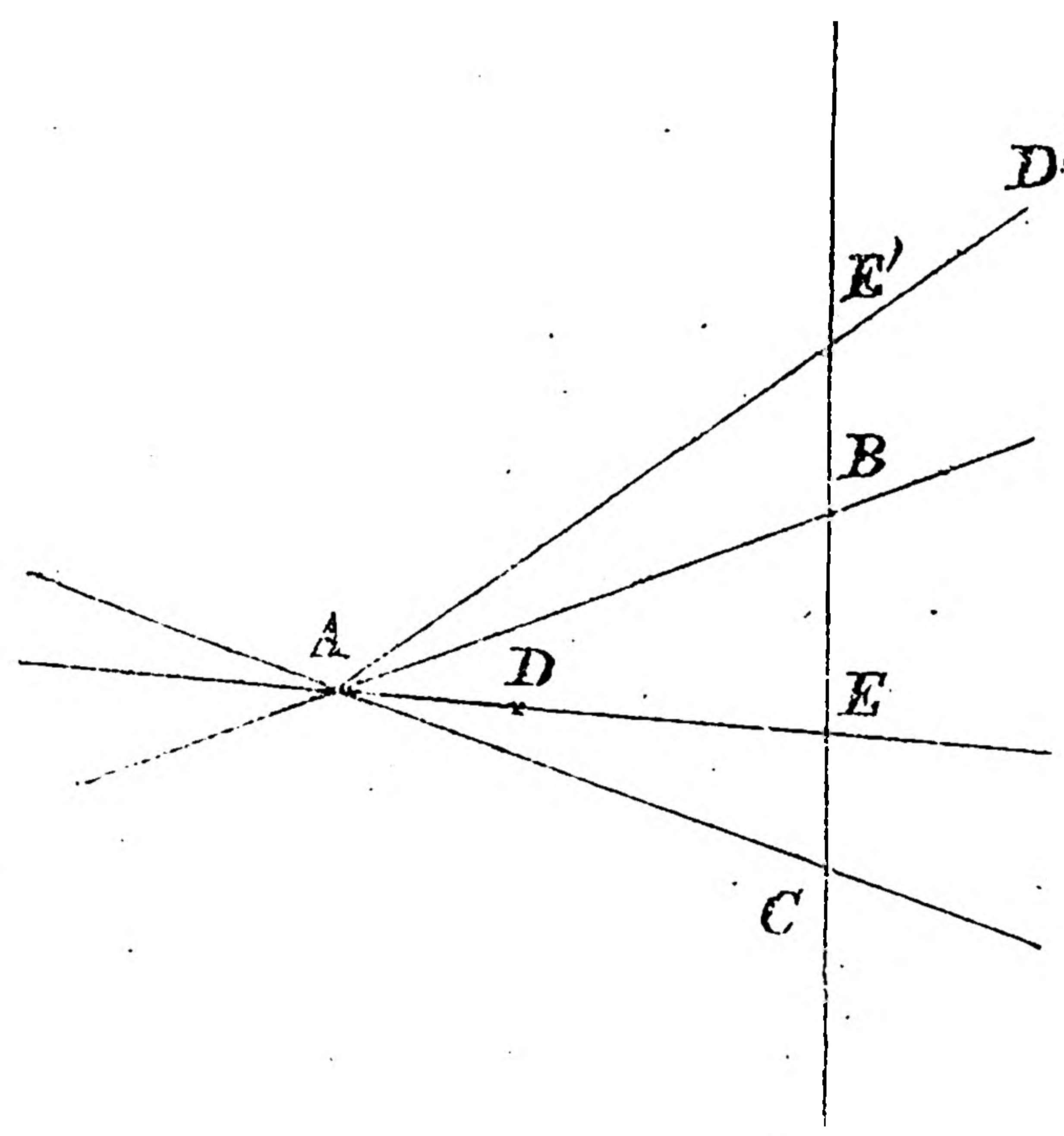
Доказат. Пусть точки A, B и C будутъ общія двумъ различнымъ плоскостямъ α и β.

Прямыя AB, AC, BC, соединяющія точки A и B, A и C, C и B, имѣя по двѣ общія точки съ плоскостями α и β, будутъ совмѣщаться съ обѣими плоскостями. Эти три прямыя дѣлятъ каждую плоскость α и β на семь частей, изъ коихъ одна замкнутая ABC, а остальныя открытыя.

Возьмемъ, какую нибудь, точку D на плоскости α внутри замкнутой ея части и покажемъ, что эта точка лежитъ и въ плоскости β. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ чрезъ точки A и D прямую AD, эта прямая, находясь вся въ плоскости α, пересѣчетъ прямую

BC, лежащую въ плоскостяхъ α и β, напримѣръ въ точкѣ E. Такъ какъ точки A и E лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ α и β, то и вся прямая AE лежитъ въ плоскостяхъ α и β, а слѣдовательно и точка D, на ней лежащая, находится какъ въ плоскости α, такъ и въ плоскости β. Итакъ всѣ точки замкнутой части ABC находятся въ обѣихъ плоскостяхъ α и β.

Фиг. 440.



Возьмемъ еще точку D' на плоскости α въ незамкнутой ея части. Соединимъ эту точку съ одною изъ точекъ A, B, C, такъ выбранною, чтобы эта прямая пересѣкала остальную прямую. Пусть эта точка будетъ A, то AD' должна пересѣчь прямую BC и положимъ, что она ее пересѣкаетъ въ точкѣ E'.

Такъ какъ точки A и E' находятся обѣ въ плоскостяхъ α и β, то и вся прямая AD' будетъ лежать въ обѣихъ плоскостяхъ, а слѣдовательно и точка D', на ней лежащая, находится какъ въ плоскости α, такъ и въ плоскости β. Откуда видимъ, что всѣ точки плоскости α совмѣщаются со всѣми точками плоскости β.

Слѣдствіе 1. Прямая и точка внѣ прямой опредѣляютъ плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на прямой двѣ, какія нибудь точки, чрезъ эти точки и чрезъ данную проведемъ плоскость, эта плоскость вполнѣ опредѣляется и содержитъ данную прямую. Легко также видѣть, что каждая прямая, проходящая чрезъ данную точку и упирающаяся на данную прямую вся лежитъ въ плоскости опредѣляемой прямою и точкою. Откуда образованіе плоскости движеніемъ прямой.

Слѣдствіе 2. Двѣ пересѣкающіяся прямыя опредѣляютъ плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, точка пересѣченія прямыхъ и двѣ точки произвольно взятыя, одна на одной, а другая на другой прямой, вполнѣ опредѣляютъ плоскость, въ которой лежатъ обѣ данныя пересѣкающіяся прямыя.

Слѣдствіе 3. Всякую фигуру на плоскости можно передвинуть по плоскости, въ какое нибудь другое мѣсто плоскости безъ всякаго измѣненія.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ три точки на взятой плоской фигурѣ и перенесемъ эту фигуру въ другое мѣсто плоскости, совмѣстимъ три точки фигуры съ плоскостью, то очевидно всѣ точки фигуры совмѣстятся съ точками плоскости, такъ какъ въ противномъ случаѣ чрезъ три точки проходило бы двѣ плоскости, что невозможно. Легко, точно также видѣть, что взятая фигура, повороченная и другой стороной совмѣстится съ плоскостью, въ какомъ нибудь другомъ ея мѣстѣ.

Слѣдствіе 4. Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія. Въ самомъ дѣлѣ, если возьмемъ на пересѣченіи двухъ плоскостей двѣ, какія нибудь точки и проведемъ чрезъ эти точки прямую, то эта прямая будетъ находится въ обѣихъ плоскостяхъ, слѣдовательно она есть ихъ пересѣченіе.

Дюгамель опредѣляетъ плоскость такъ: *плоскость есть поверхность образованная движеніемъ прямой перпендикулярной къ другой прямой около которой она вращается.*

Принявъ это опредѣленіе плоскости, легко показать, что прямая, имѣющая двѣ общія точки съ плоскостью вся съ ней совмѣщается.

Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что произвольно взятая точка M на перпендикулярѣ AK, образующемъ въ своемъ движеніи плоскость, находится въ равномъ разстояніи отъ двухъ точекъ B и C, прямой BC, для которыхъ $AB=AC$, A есть точка въ которой прямая BC встрѣчаемъ плоскость. Возьмемъ еще другую точку N на перпендикулярѣ AK въ другомъ его положеніи и проведемъ прямую MN, то легко видѣть, что треугольники BMN и CMN равны.

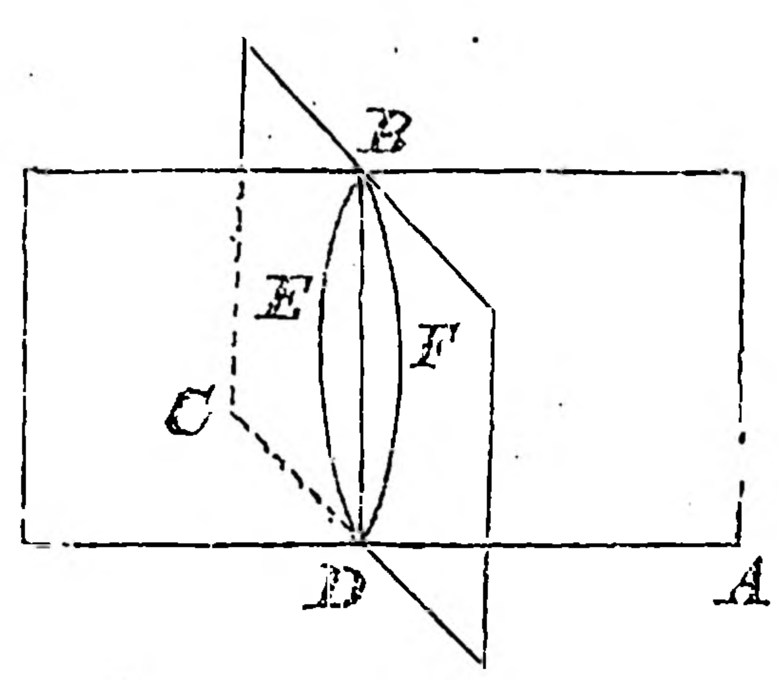
На прямой MN возьмемъ произвольно точку X, то очевидно, треугольники $XBN=XNC$, откуда $XB=XC$, т. е. прямая XA перпендикулярна къ BC, слѣдовательно точка X, прямой MN, находится въ плоскости MNA. Читателя просятъ составить чертежъ.

Такое опредѣленіе плоскости, какъ видимъ, требуетъ предварительныхъ понятій объ углахъ, о равенствѣ треугольниковъ. Дюгамель въ своемъ сочиненіи „Des méthodes dans les sciences de raisonnement", и даетъ эти предварительныя свѣдѣнія прежде опредѣленія плоскости. Дюгамель замѣчаетъ, что опредѣленіе плоскости Лежандра и другихъ геометровъ заключаетъ безчисленное множество условій, которыя прямая должна выполнить на плоскости, и существуетъ-ли такого рода поверхность? Но противъ этого послѣдняго можно сказать, что тотъ же вопросъ можно предложить и относительно опредѣленія прямой.

Мнѣ кажется, что несравненно логичнѣе опредѣлить плоскость, какъ это дѣлаетъ Бальтцеръ, и потомъ принять за аксіому свойство плоскости, что прямая имѣющая двѣ общія точки съ плоскостью вся на ней совмѣщается, а не доказывать это свойство, какъ дѣлаетъ это Дюгамель, вводя предварительныя понятія, которыя не имѣютъ надлежащей ясности для начинающихъ изученіе геометріи.

Предложеніе 3. Двѣ плоскости AB и BC пересѣкаются по прямой линіи BD (фиг. 442).

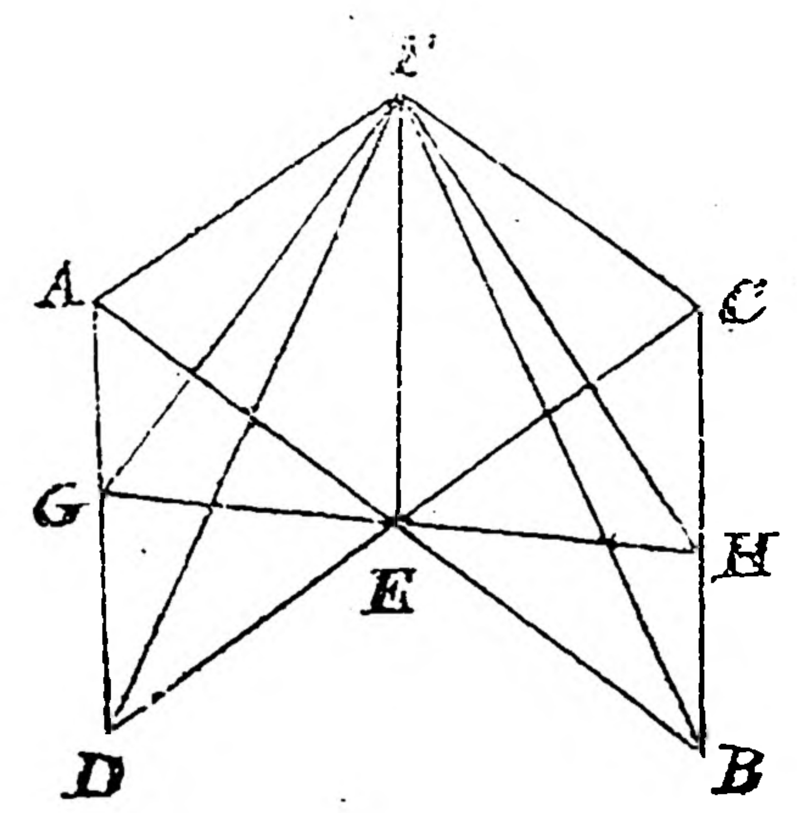
Фиг. 442.



Доказат. Пусть пересѣченіе BD, общее плоскостямъ, не будетъ прямая линія; отъ точки D къ точкѣ B въ плоскости AB проведемъ прямую линію DFB, а въ плоскости BC прямую линію DEB, прямыя эти имѣютъ двѣ общія точки, а слѣдовательно заключаютъ пространство $BEDF$, что (кн. 1, пред. 12) невозможно. А потому DFB и DEB не суть прямыя линіи, по этой же причинѣ ни одна изъ прямыхъ проведенныхъ изъ точки D къ точкѣ B, кромѣ прямой DB взаимнаго пересѣченія этихъ плоскостей, не будетъ прямая линія. Слѣдовательно пересѣченіе это есть прямая линія.

Предложеніе 4. Прямая линія EF перпендикулярная, въ точкѣ пересѣченія E, двумъ прямымъ линіямъ AB и CD, перпендикулярна къ плоскости проходящей чрезъ эти двѣ прямыя линіи (фиг. 443).

Фиг. 443.



Доказат. Отложимъ $EB=EA$ и $ED=EC$; проведемъ въ плоскости прямыхъ AB и CD чрезъ точку E въ произвольномъ направленіи прямую GEH; точно также проведемъ AD и CB и изъ произвольно взятой точки F на прямой EF проведемъ прямыя FA, FG, FD; FB, FH, FC. Въ $\triangle AED$ и $\triangle BEC$, $AE=EB$, $ED=EC$, $\angle AED=\angle BEC$ (кн. 1, пред. 15). Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) $AD=CB$ и $\angle DAE=\angle EBC$.

А потому въ $\triangle AGE$ и $\triangle BHE$, $\angle DAE=\angle EBC$, и (кн. 1, пред. 15) $\angle AEG=\angle BEH$, кромѣ того $AE=EB$. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 26) $GE=EH$ и $AG=BH$.

Въ $\triangle FEA$ и $\triangle FEB$, углы при точкѣ E суть прямые, кромѣ того $AE=EB$, $EB=EF$. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) $FA=FB$.

По той же причинѣ въ $\triangle FED$ и $\triangle FEC$, прямая $FD=FC$.

Изъ этого слѣдуетъ, что въ $\triangle FAD$ и $\triangle FBC$ прямыя $FA=FB$ и $FD=FC$. Но мы имѣли, что $AD=BC$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) $\angle FAD=\angle FBC$.

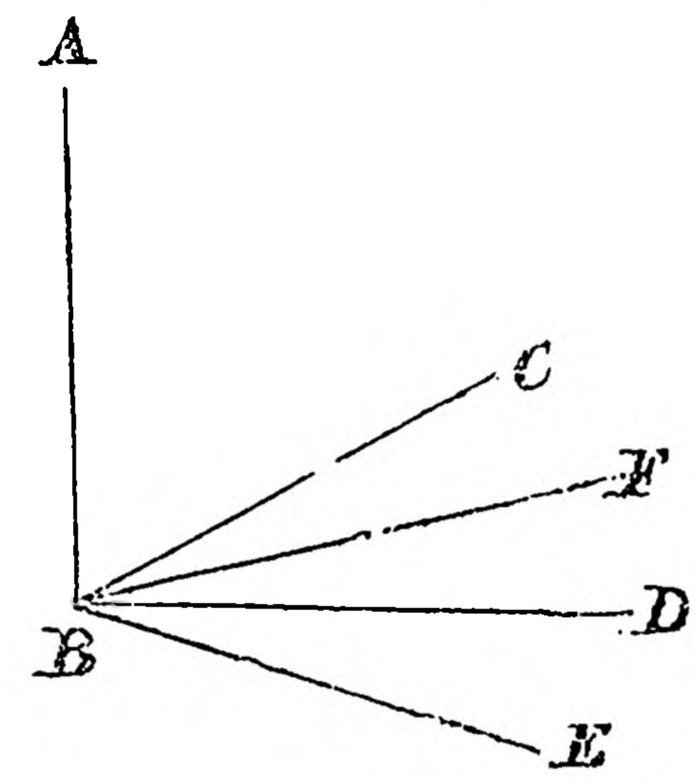
Изъ этого слѣдуетъ, что въ $\triangle FAG$ и $\triangle FBH$, $\angle FAD=\angle FBC$. Но мы имѣли, что $AG=BH$ и $FA=FB$. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) $FG=FH$.

Изъ этого слѣдуетъ наконецъ, что въ $\triangle FEG$ и $\triangle FEH$, $FG=FH$; сторона FE общая обоимъ треугольникамъ. Но мы имѣли выше $GE=EH$; слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) $\angle GEF=\angle HEF$, а потому EF перпендикулярна къ GEH, въ точкѣ E.

Подобнымъ же образомъ можно показать что прямая EF перпендикулярна ко всякой прямой GEH, проходящей чрезъ точку E, лежащей въ плоскости, проведенной чрезъ прямыя AB и DC. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 3) прямая EF перпендикулярна къ этой плоскости.

Предложеніе 5. Три прямыя линіи BC, BD, BE, исходящія изъ одной точки B лежатъ въ одной плоскости, если прямая перпендикулярна въ этой точкѣ этимъ тремъ прямымъ (фиг. 444).

Фиг. 444.

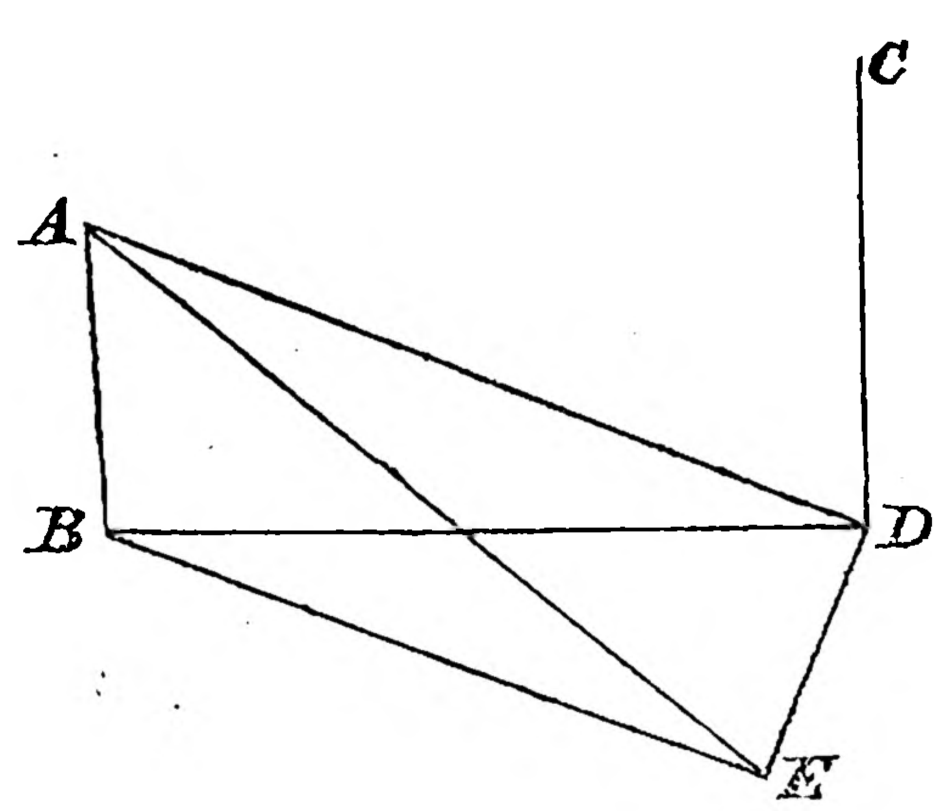


Доказат. Если бы этого не было, то пусть BD и BE лежатъ въ плоскости, а BC надъ плоскостью. Продолживъ плоскость проходящую по прямымъ AB и BC до встрѣчи съ плоскостью, проходящую по прямымъ BD и BE, пусть она встрѣтитъ эту послѣднею по прямой линіи BF (кн. 11, пред. 3), прямыя AB, BC, BF лежатъ въ одной плоскости.

Но AB перпендикулярна къ BD и BE слѣдовательно (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна и къ BF, слѣдовательно $\angle ABF = d$, а по условію $\angle ABC = d$. А слѣдовательно $\angle ABF = \angle ABC$, что невозможно (кн. 1, пред. 9). А потому прямая BC находится не въ другой, а въ одной и той же плоскости, какъ и прямыя BD и BE.

Предложеніе 6. Двѣ прямыя AB и CD, перпендикулярныя къ одной и той же плоскости, параллельны (фиг. 445).

Фиг. 445.

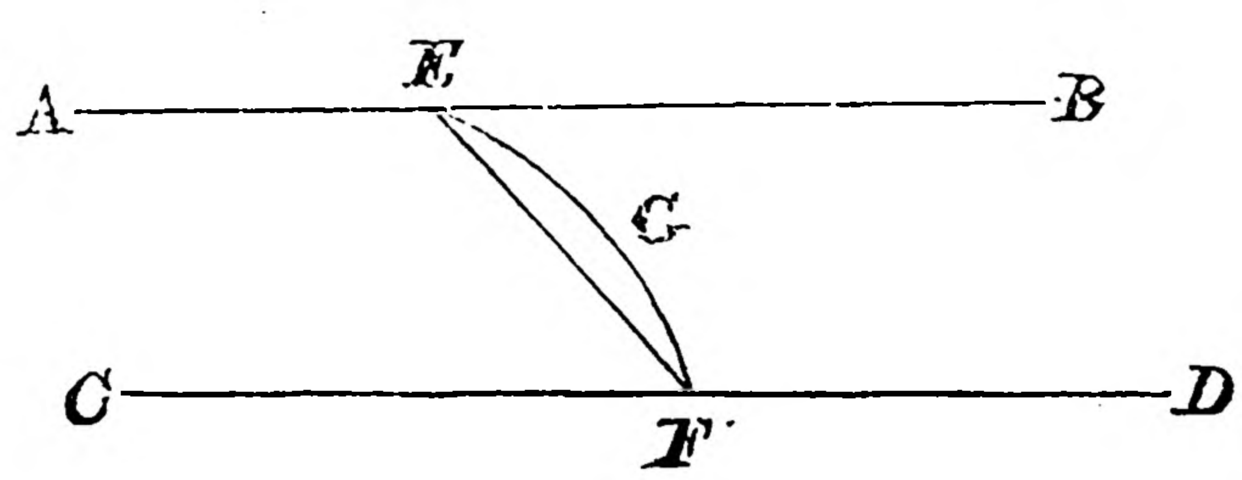


Доказат. Пусть B и D суть точки пересѣченія перпендикуляра съ плоскостью. Проведемъ прямую BD, и возставимъ къ BD, въ точкѣ D, перпендикуляръ DE въ этой же плоскости; сдѣлаемъ $DE = AB$; проведемъ еще прямыя BE, AE, AD.

Такъ какъ прямая AB перпендикулярна къ плоскости, то (кн. 11, пред. 3) уголъ $\angle ABD$ и $\angle ABC$ суть прямые. По этой же причинѣ $\angle CDB$ и $\angle CDE$ также прямые. Но $AB=DE$ и $BD=BD$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) $AD=BE$. Изъ этого слѣдуетъ, что $DE=AB$, $AD=BE$, $AE=AE$; а потому (кн. 1, пред. 8) $\angle EDA=\angle ABE=d$; слѣдовательно ED перпендикулярна къ DA, а также къ DB и DC. Слѣдовательно (кн. 11, пред. 5) BD, DA, DC лежатъ въ одной и той же плоскости, что и AB (кн. 11, пред. 2). Но $\angle ABD$ и $\angle BDC$ суть прямые, слѣдовательно (кн. 1, пред. 28) AB и CD параллельны.

Предложеніе 7. Прямая линія, соединяющая двѣ точки E и F двухъ параллельныхъ линій AB и CD, лежитъ въ одной съ ними плоскости (фиг. 446).

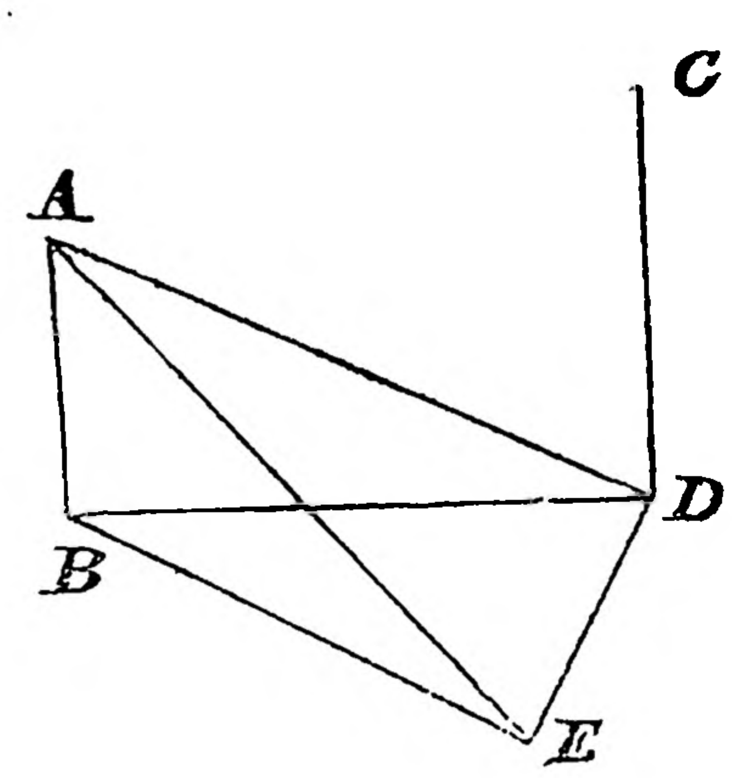
Фиг. 446.



Доказат. Если это не имѣетъ мѣста, то пусть она находится надъ плоскостью, какъ напримѣръ EGF. Чрезъ эту послѣднею проведемъ плоскость, которая (кн. 11, пред. 3) пересѣчетъ нижнюю плоскость по линіи EF, которая съ прямой EGF заключаетъ пространство, что невозможно (кн. 1, пред. 12). А потому прямая линія, проведенная между точками E и F, лежитъ не надъ, а въ той же самой плоскости, въ которой лежатъ параллельныя прямыя AB и CD.

Предложеніе 8. Если изъ двухъ параллельныхъ линій AB и CD, одна перпендикулярна къ плоскости, то и другая CD перпендикулярна къ той же самой плоскости (фиг. 447).

Фиг. 447.



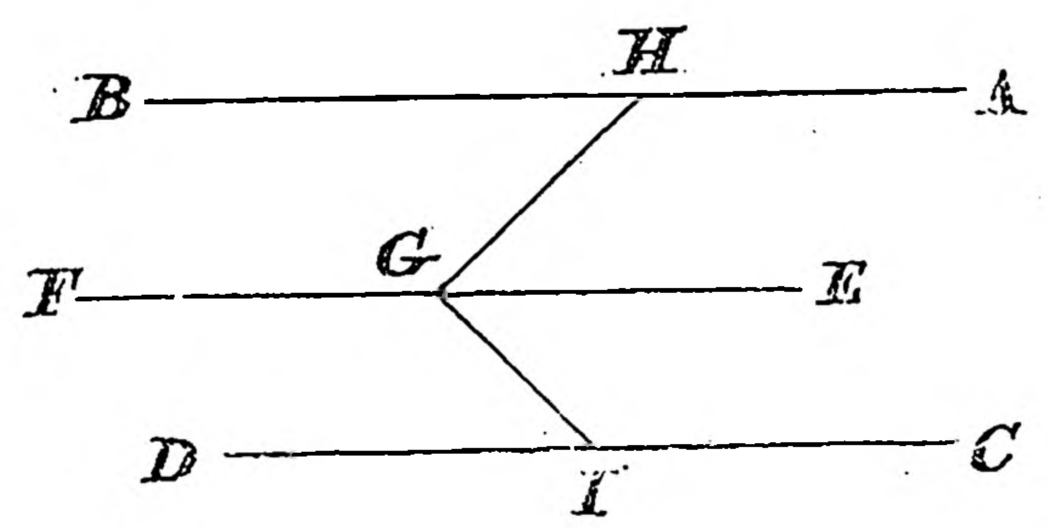
Доказат. Пусть B и D будутъ точки встрѣчи параллельныхъ линій съ плоскостью. Проведемъ BD; прямыя AB, BD, DC лежатъ въ одной плоскости (кн. 11, пред. 7). Возставимъ перпендикуляръ DE, въ точкѣ D, къ прямой DB, лежащей въ первой плоскости, отложимъ $DE=AB$ и проведемъ прямыя BE, AE, AD.

Такъ какъ AB перпендикулярна къ основной плоскости, а прямыя AB и CD параллельны, то $\angle ABD = \angle ABE = d$ (кн. 11, опред. 3) и $\angle ABD + \angle CDB = 2d$ (кн. 1, пред. 29). Но $\angle ABD = d$, слѣдовательно $\angle CDB = d$, а потому прямая CD перпендикулярна къ прямой DB.

Такъ какъ $\angle ABD = \angle EDB = d$, прямая $AB = DE$, $BD = BD$, то (кн. 1, пред. 4) $AD = BE$. А потому $DE = AB$, $AD = BE$, $AE = AE$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) $\angle ABE = \angle EDA$. Но $\angle ABE = d$, а потому $\angle EDA = d$, и прямая ED перпендикулярна къ прямой DA; но такъ какъ $\angle BDE = d$, то прямая ED перпендикулярна также къ прямой DB, слѣдовательно (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна къ плоскости, проведенной чрезъ прямыя DB и DA, а потому она перпендикулярна (кн. 1, пред. 3) и къ прямой DC, которая лежитъ въ одной плоскости съ треугольникомъ ADB. Изъ этого слѣдуетъ, что CD перпендикулярна къ DE, но мы видѣли, что CD перпендикулярна къ DB, слѣдовательно (кн. 11, пре. 4) она перпендикулярна къ плоскости, въ которой лежатъ DE и DB, т. е. къ плоскости прямой AB.

Предложеніе 9. Прямыя AB и CD параллельныя прямой EF, не лежащей съ ними въ одной плоскости параллельны между собою (фиг. 448).

Фиг. 448.

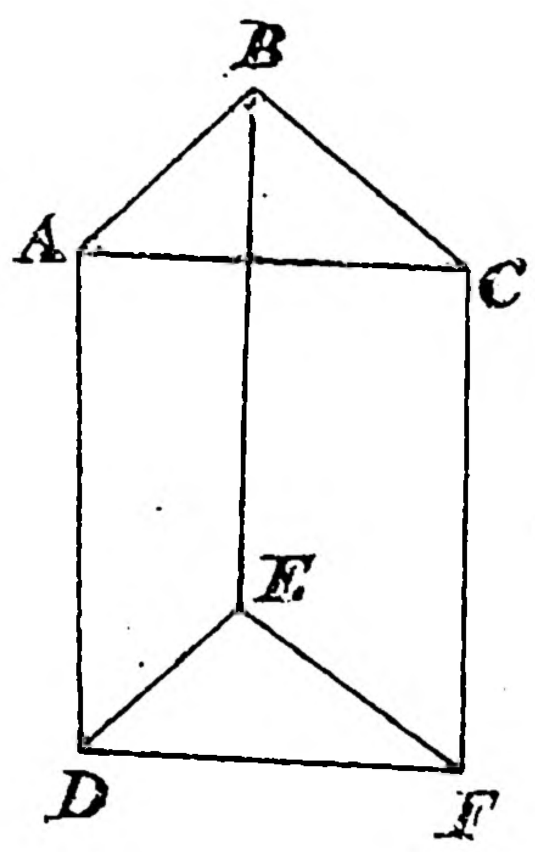


Доказат. Возьмемъ на прямой EF произвольную точку G, въ этой точки возставимъ перпендикуляры къ прямой EF, одинъ GH, лежащій въ плоскости, проведенной чрезъ прямыя EF и AB; другой GI въ плоскости, проведенной чрезъ прямыя EF и CD. Изъ этого слѣдуетъ, что прямая EF перпендикулярна къ прямымъ GH и GI, а потому (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна къ плоскости проведенной чрезъ прямыя GH и GI; кромѣ того она параллельна прямой AB, изъ этого слѣдуетъ (кн. 11, пред. 8) что AB также перпендикулярна къ этой плоскости. По той же причинѣ и прямая CD перпендикулярна къ этой же плоскости. Слѣдовательно (кн. 11, пред. 6) AB и CD параллельны.

Предложеніе 10. Два угла ABC и DEE, лежащіе въ различныхъ плоскостяхъ, коихъ стороны AB и DE, BC и EF параллельны, равны между собою (фиг. 449).

Доказат. Отложимъ $AB=DE$, $BC=EF$ и проведемъ прямыя AD, CF, BE; AC, DF.

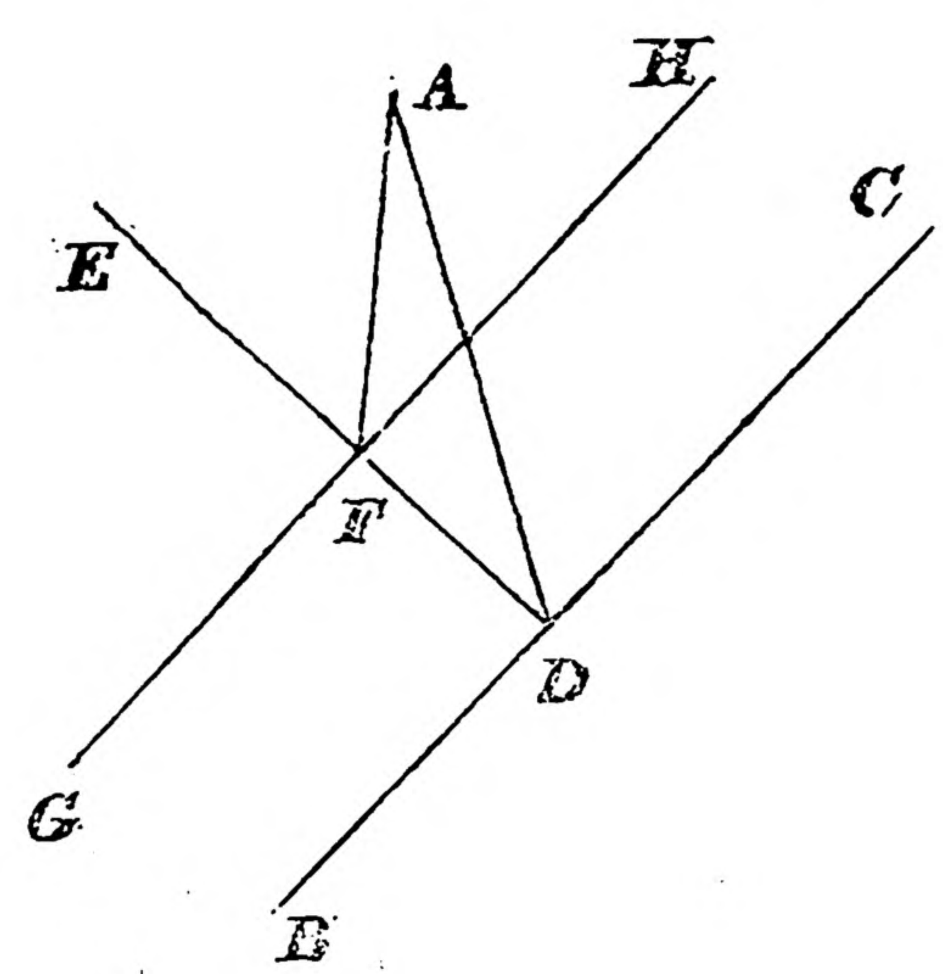
Фиг. 449.



Такъ какъ AB и DE равны и параллельны, то (кн. 1, пред. 33) прямыя AD и BE также равны и параллельны. По той же причинѣ CF и BE также равны и параллельны. Слѣдовательно (кн. 11, пред. 9 и кн. 1, пред. 1) AD и CF равны и параллельны, а потому (кн. 1, пред. 33) AC и DF равны и параллельны. Итакъ $AC=DF$, $AB=DE$, $BC=EF$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) $\angle ABC=\angle DEF$.

Предложеніе 11. Изъ данной точки A, надъ данной плоскостью, опустить на нее перпендикуляръ (фиг. 450)?

Фиг. 450.

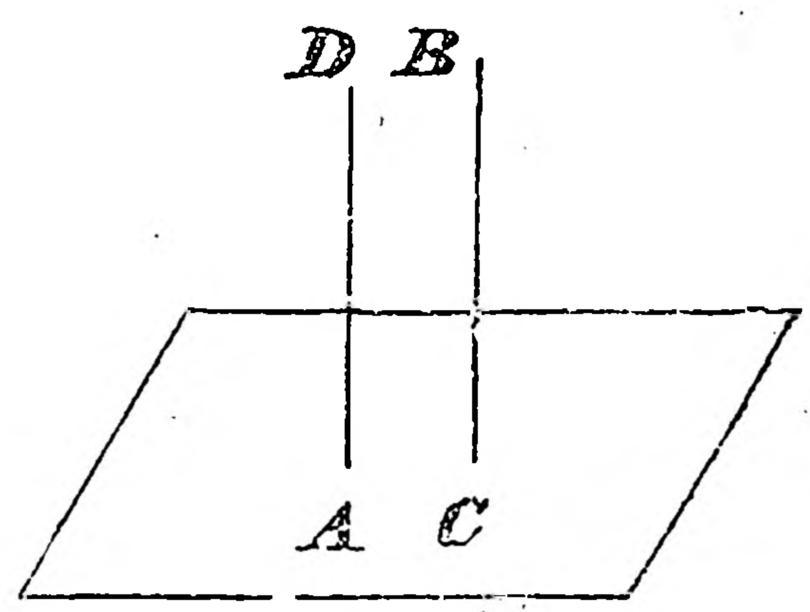


Рѣшеніе. Въ данной плоскости проведемъ произвольную прямую BC и опустимъ на нее перпендикуляръ AD (кн. 1, пред. 12). Если AD перпендикулярна къ данной плоскости, то задача рѣшена. Если же прямая AD не перпендикулярна къ данной плоскости, то возставимъ въ данной плоскости къ прямой BC въ точкѣ D перпендикуляръ DE, а изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AF на прямую DE, этотъ перпендикуляръ AF будетъ искомый.

Чрезъ точку F проведемъ прямую GH параллельную прямой BC. Такъ какъ прямая BC перпендикулярна къ прямымъ DE и DA, то она перпендикулярна къ плоскости, проведенной чрезъ DE и DA (кн. 11, пред. 4), но GH параллельна прямой BC, а потому прямая GH также перпендикулярна къ этой плоскости (кн. 11, пред. 8), слѣдовательно она перпендикулярна къ прямой FA, которая пересѣкаетъ прямую GH въ точкѣ F, лежащей въ плоскости проведенной чрезъ прямыя DE и DA (кн. 11, опред. 3). Слѣдовательно AF перпендикулярна къ GH; но по предъидущему она также перпендикулярна къ DE, а потому она перпендикулярна къ плоскости проведенной чрезъ прямыя GH и DE (кн. 11, пред. 4), т. е. къ данной плоскости.

Предложеніе 12. Изъ данной точки A, лежащей въ данной плоскости, возставить къ ней перпендикуляръ (фиг. 451)?

Фиг. 451.

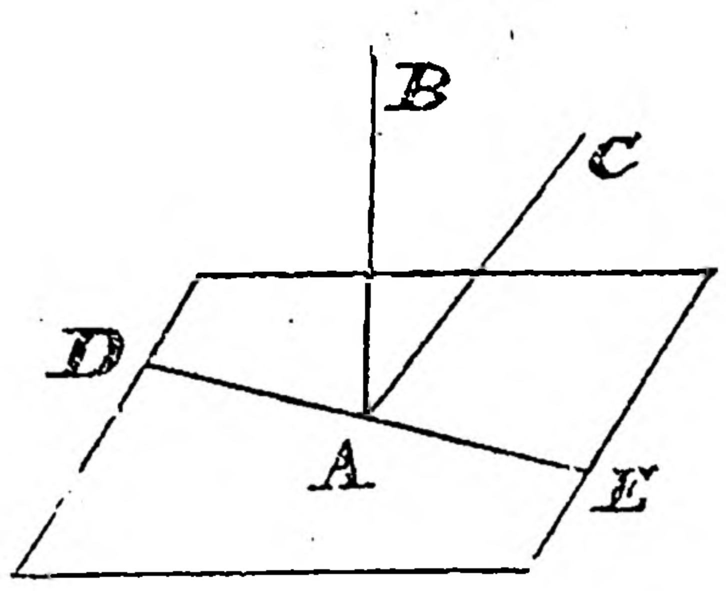


Рѣшеніе. Надъ плоскостью возьмемъ произвольную точку B, и изъ нея (кн. 11, пред. 11) опустимъ перпендикуляръ BC на данную плоскость, чрезъ точку A проведемъ прямую AD параллельную BC, это и будетъ искомый перпендикуляръ.

Въ самомъ дѣлѣ, AD и BC параллельны, а прямая CB перпендикулярна къ данной плоскости, слѣдовательно и прямая AD будетъ перпендикулярна къ данной плоскости (кн. 11, пред. 8).

Предложеніе 13. Изъ точки A, лежащей въ плоскости, нельзя возставить къ ней два перпендикуляра, лежащіе по одну и ту же сторону плоскости (фиг. 452).

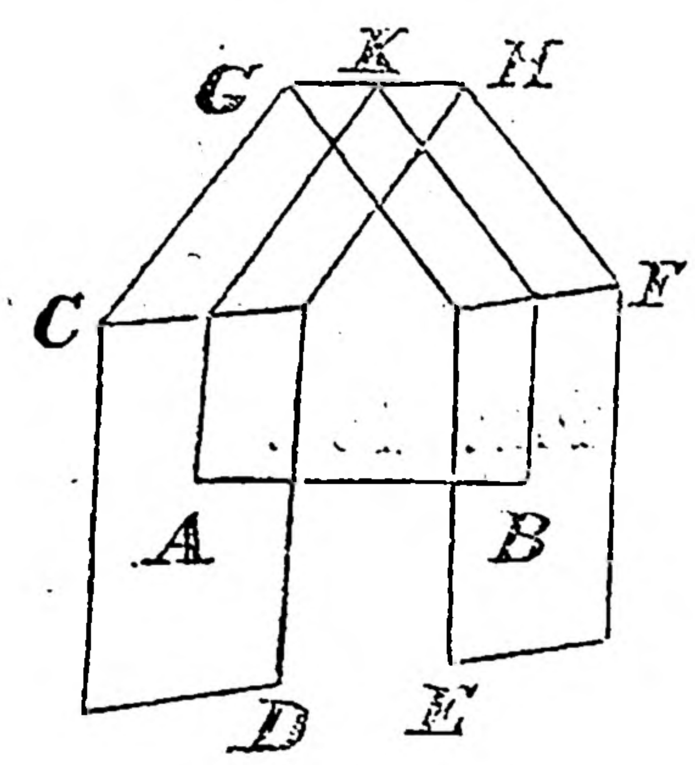
Фиг. 452.



Доказат. Пусть, если возможно, въ точкѣ A возставлены два перпендикуляра AB и AC, лежащіе по одну сторону плоскости. Проведемъ чрезъ эти перпендикуляры плоскость, то она пересѣчетъ данную плоскость по прямой линіи DAE (кн. 11, пред. 3), слѣдовательно прямыя AB, AC и AE лежатъ въ одной плоскости. Но $\angle BAE$ и $\angle CAE$ суть прямые, такъ какъ прямыя AB и AC перпендикулярны къ данной плоскости, въ которой лежитъ прямая AE; а потому $\angle BAE = \angle CAE$, что невозможно (кн. 1, пред. 9), такъ какъ они лежатъ въ одной плоскости. Слѣдовательно невозможно, чтобы одновременно прямыя AB и AC были перпендикулярны къ одной и той же плоскости, въ точкѣ A.

Предложеніе 14. Двѣ плоскости CD и EF, къ которымъ перпендикулярна одна и таже прямая AB, параллельны между собою (фиг. 453).

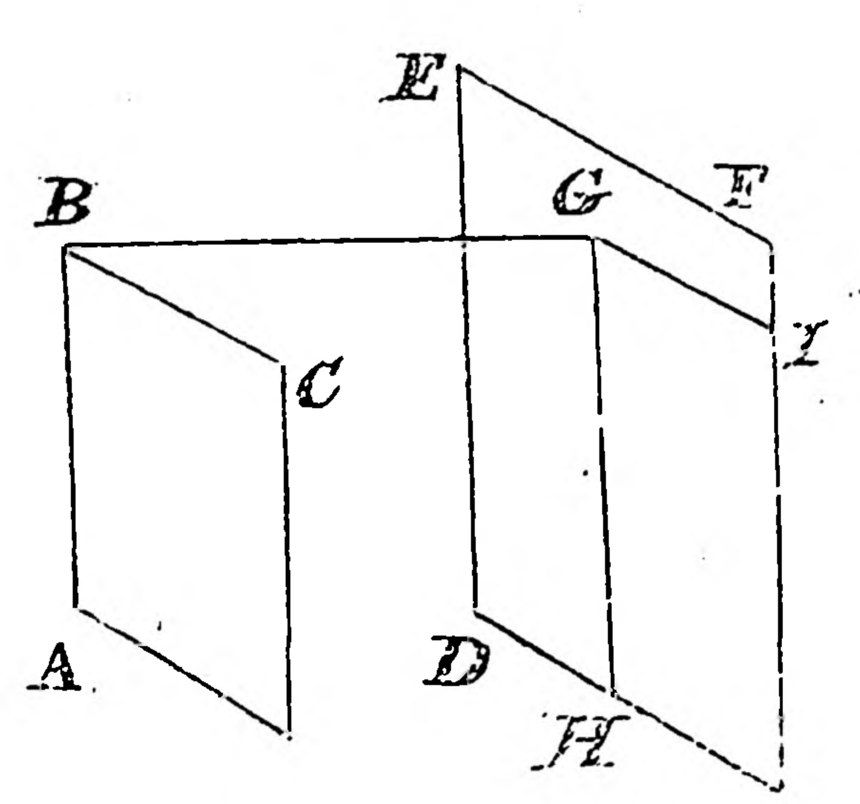
Фиг. 453.



Доказат. Если бы онѣ были непараллельны, то продолживъ ихъ на достаточное разстояніе, онѣ встрѣтятся и пересѣкутся по прямой линіи GH (кн. 11, пред. 3). На прямой GH возьмемъ произвольную точку K, и проведемъ прямыя линіи KA и KB, лежащія въ продолженныхъ плоскостяхъ CD и EF. Такъ какъ AB перпендикулярна къ EF, то она также перпендикулярна къ BK, а потому $\angle ABK = d$. По той же причинѣ $\angle BAK = d$. Слѣдовательно въ $\triangle KAB$ сумма двухъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, что невозможно (кн. 1, пред. 17). Изъ этого слѣдуетъ, что плоскости CD и EF по продолженіи не встрѣчаются, а потому онѣ параллельны (кн. 11, опред. 8).

Предложеніе 15. Если прямыя линіи, составляющія стороны двухъ угловъ ABC и DEF, лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ, параллельны, то плоскости AC и DE, въ которыхъ лежатъ эти углы, также параллельны (фиг. 454).

Фиг. 454.

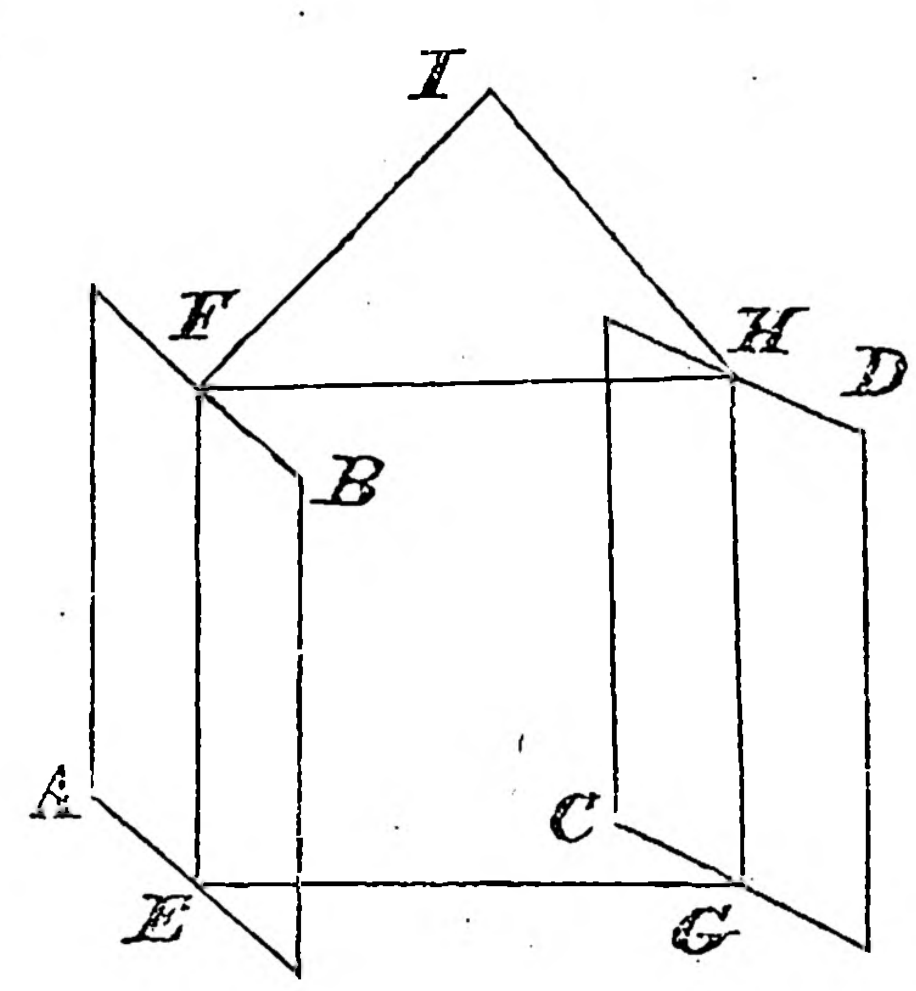


Доказат. Изъ точки B опустимъ (кн. 11, пред. 11) перпендикуляръ BG на плоскость DF; чрезъ точку G проведемъ въ этой плоскости прямыя ED и EF параллельныя GH и GI.

Такъ какъ BG перпендикулярна къ плоскости DF, то $\angle BGH = d = \angle BGI$ (кн. 11, опред. 3). Но прямая AB параллельна ED, а ED параллельна GH, слѣдовательно AB параллельна GH (кн. 11, пред. 9), а потому $\angle BGH + \angle ABG = 2d$ (кн. 1, пред. 29). Слѣдовательно $\angle ABG = d$, а потому GB перпендикулярна къ BA, по той же причинѣ она перпендикулярна къ BC; слѣдовательно она перпендикулярна къ плоскости AC (кн. 11, пред. 4). Но по предъидущему GB перпендикулярна къ плоскости DF. Слѣдовательно плоскости AC и DF параллельны (кн. 11, пред. 14).

Предложеніе 16. Пересѣченія EF и GH двухъ параллельныхъ плоскостей AB и CD третьею $EFGH$, параллельны между собою (фиг. 455).

Фиг. 455.



Доказат. Пусть EF и GH не будутъ параллельны, то онѣ встрѣтятся (такъ какъ онѣ лежатъ въ одной плоскости) по достаточномъ продолженіи, напримѣръ въ точкѣ I. Такъ какъ прямая линія EFI вся лежитъ въ плоскости AB, то точка I, которая принадлежитъ прямой EFI, также лежитъ въ плоскости AB (кн. 11, пред. 1). По той же причинѣ точка I лежитъ и въ плоскости CD, а потому плоскости AB и CD по достаточномъ продолженіи встрѣчаются, что противорѣчитъ нашему положенію. По той же причинѣ EF и GH не могутъ встрѣтится и по другую сторону, а потому онѣ параллельны.

Предложеніе 17. Двѣ прямыя линіи AB и CD параллельными плоскостями GH, IK и LM, разсѣкаются на части пропорціональныя (фиг. 456).

Доказат. Пусть прямыя AB и CD разсѣкаются прямыми GH, IK и LM въ точкахъ A, E, B; C, F и D. Проведемъ прямыя AC, BD и DA, изъ коихъ послѣдняя въ точкѣ N пересѣкаетъ плоскость IK; затѣмъ проведемъ прямыя EN и NF.

Но такъ какъ линіи пересѣченія EN и BD параллельныхъ плоскостей IK и LM, плоскостью $ENBD$, параллельны (кн. 11, пред. 16), то слѣдуетъ (кн. 6, пред. 2), что:

$$AE:EB=AN:ND$$

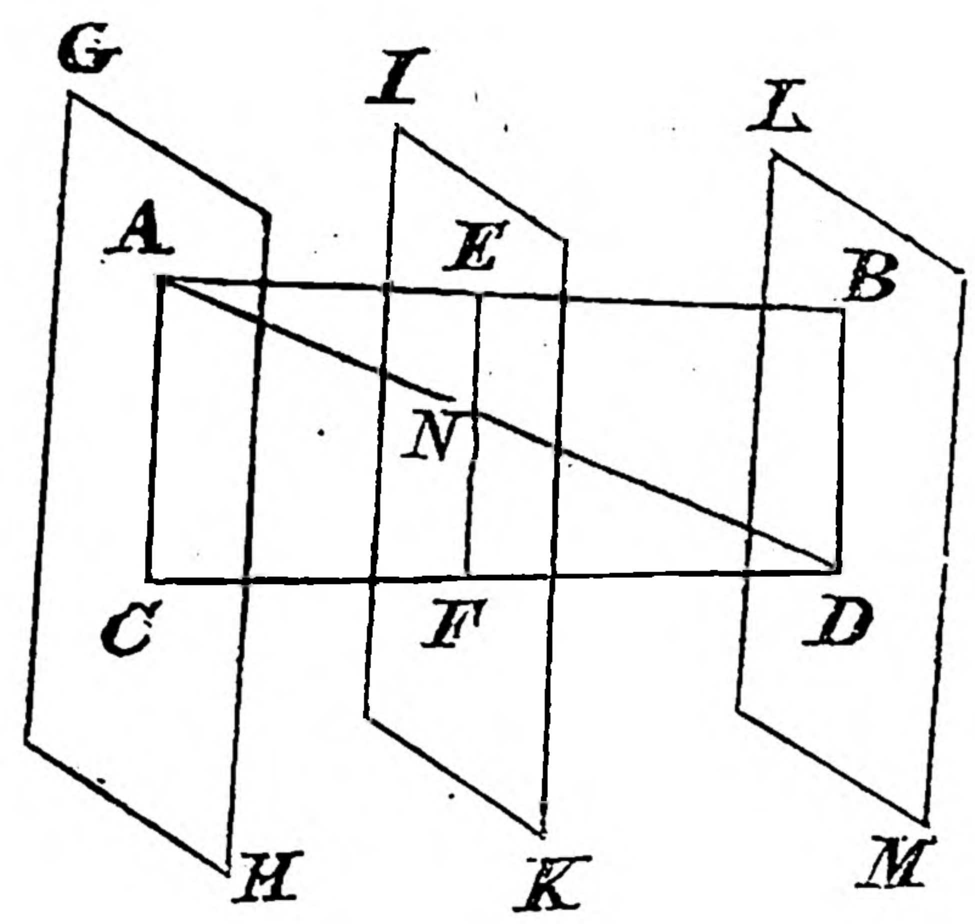
По той же причинѣ:

$$AN:ND=CF:FD$$

Слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AE:EB=CF:FD.$$

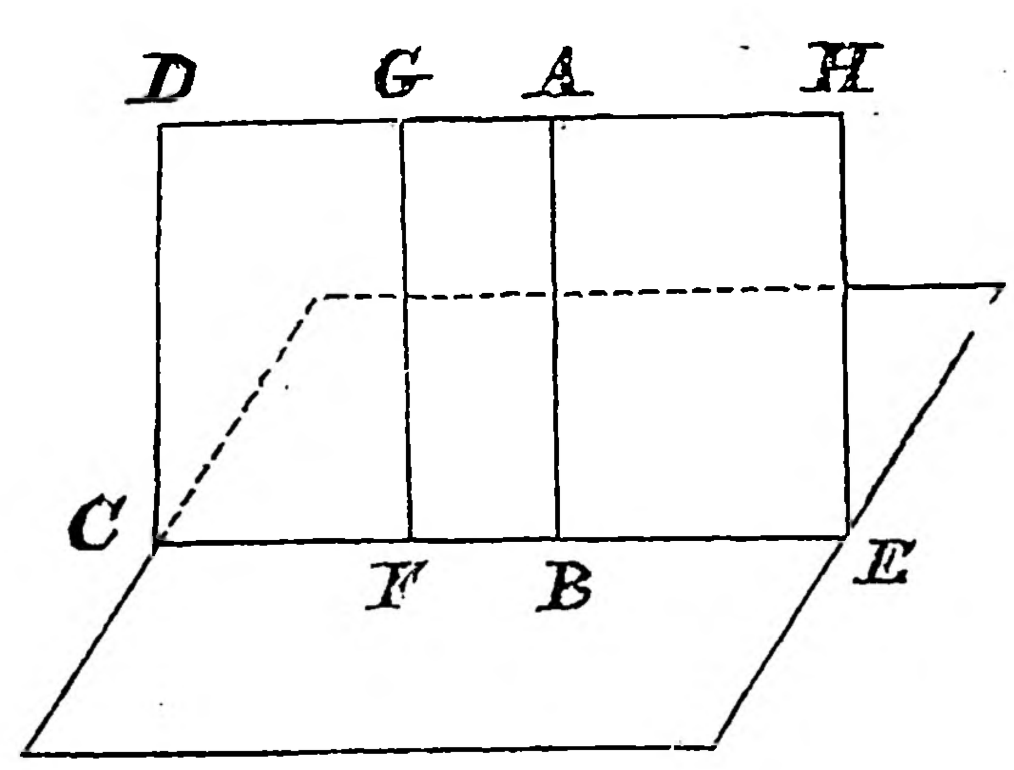
Фиг. 456.



Предложенiе 18. Если прямая линiя AB, перпендикулярна къ какой нибудь плоскости, то всѣ плоскости проходящiя чрезъ эту линiю перпендикулярны данной плоскости (фиг. 457).

Доказат. Чрезъ прямую AB проведемъ произвольную плоскость DE, которая пересѣкаетъ данную плоскость по прямой линiи EC (кн. 11, пред. 3). Къ прямой EC, лежащей въ плоскости DE, возставимъ перпендикуляръ FG, слѣдовательно $\angle GFE=d$. Но прямая AB перпендикулярна къ дан-

Фиг. 457.

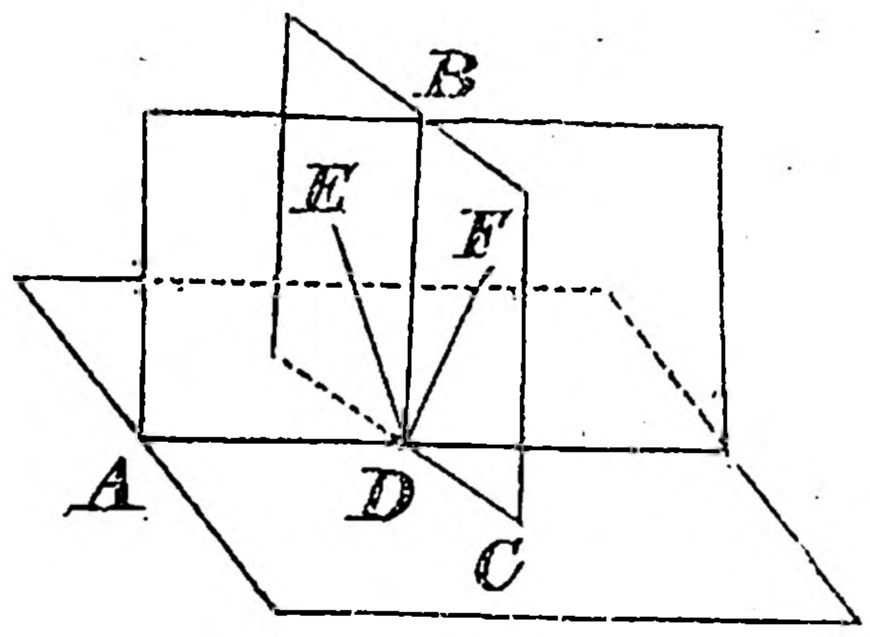


ной плоскости, а потому $\angle ABE=d$ (кн. 11, опред. 3). Слѣдовательно прямыя AB и FG параллельны (кн. 1, пред. 28). Изъ этого слѣдуетъ, что прямая FG (равно какъ и всякiй другой перпендикуляръ, возставленный къ прямой CE въ плоскости DE) перпендикулярна къ данной плоскости (кн. 11, пред. 8), а потому (кн. 11, опред. 4) и плоскость DE (проходящая чрезъ прямую AB) перпендикулярна къ данной плоскости.

Предложенiе 19. Если двѣ пересѣкающiяся плоскости AB и BC

перпендикулярны къ третьей, то и линія ихъ взаимнаго пересѣченія BD, перпендикулярна этой плоскости (фиг. 458).

Фиг. 458.



Доказат. Пусть DB не перпендикулярна къ данной плоскости, слѣдовательно она не перпендикулярна къ прямымъ DA и DC: пусть DE въ плоскости AB перпендикулярна къ DA и DF, лежащая въ плоскости BC перпендикулярна къ DC. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 4) прямыя DE и DF были бы перпендикулярны къ данной плоскости, что невозможно (кн. 11, пред. 13). Слѣдовательно никакая другая прямая, кромѣ прямой DB, не можетъ быть перпендикулярна къ данной плоскости.

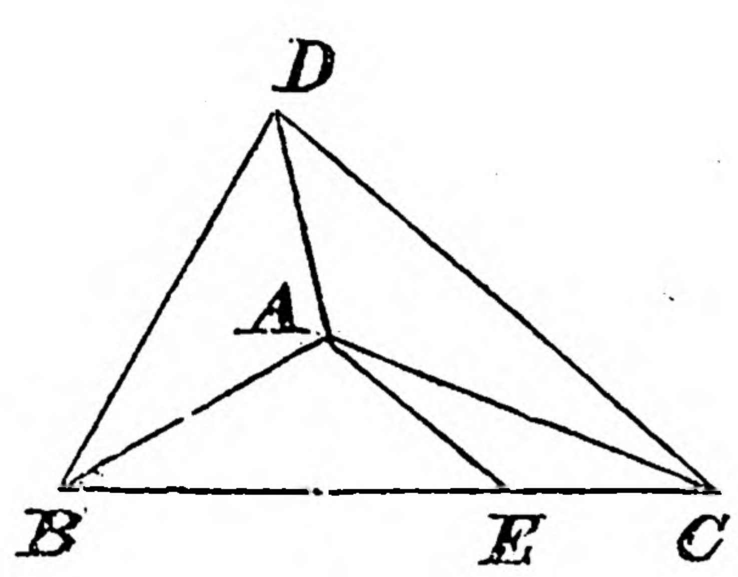
Примѣч. 6. Если изъ точки взятой внутри двуграннаго угла опустимъ на его стороны перпендикуляры, то уголъ между этими перпендикулярами будетъ дополнять уголъ между плоскостями до двухъ прямыхъ угловъ, т. е. если чрезъ A назовемъ уголъ между плоскостями, а чрезъ B уголъ между перпендикулярами, то мы будемъ имѣть:

$$A + B = 2d.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если проведемъ плоскость по двумъ перпендикулярамъ, то эта плоскость будетъ перпендикулярна къ пересѣченію плоскостей, составляющихъ двугранный уголъ, пересѣченія ея съ гранями угла будетъ уголъ двухъ плоскостей, стороны его будутъ перпендикулярны къ перпендикулярамъ, опущеннымъ изъ взятой точки на стороны угла, слѣдовательно здѣсь образуется четыреугольникъ въ которомъ два угла будутъ прямые, а слѣдовательно сумма остальныхъ равна $2d$.

Предложеніе 20. Сумма двухъ изъ плоскихъ угловъ BAC, CAD и DAB, образующихъ тѣлесный уголъ A, всегда больше третьяго (фиг. 459).

Фиг. 459.

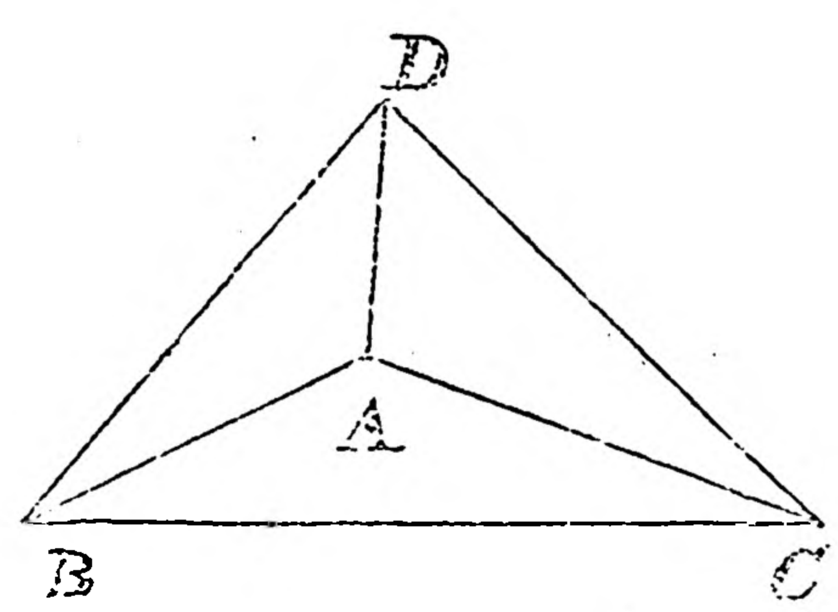


Доказат. Если эти три угла равны, то очевидно, что сумма двухъ изъ нихъ больше третьяго. Если же они неравны: пусть $\angle BAC$ больше каждаго изъ двухъ другихъ. Сдѣлаемъ $\angle BAE = \angle BAD$ и $AE = AD$. Проведемъ чрезъ точку E прямую BEC, которая пересѣчетъ прямыя AB и AC въ точкахъ B и C, проведемъ еще прямыя DB и DC.

Такъ какъ $\angle BAE = \angle BAD$, $AE = AD$, $AB = AB$, то $BE = BD$ (кн. 1, пред. 4). Но $BD + DC > BE + EC$ (кн. 1, пред. 20), а потому $DC > EC$; такъ какъ $AD = AE$, AC общая и $DC > EC$, то $\angle DAC > \angle EAC$ (кн. 1, пред. 25); но $\angle DAB = \angle BAE$, слѣдовательно $\angle DAC + \angle DAB > \angle BAC$ (кн. 1, пред. 4).

Предложеніе 21. Во всякомъ тѣлесномъ углѣ A, составленномъ изъ плоскихъ угловъ $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle DAB$, сумма этихъ послѣднихъ меньше четырехъ прямыхъ (фиг. 460).

Фиг. 460.



Доказат. На прямыхъ AB, AC и AD возьмемъ произвольныя точки B, C и D, и проведемъ прямыя BC, CD и DB.

Такъ какъ тѣлесный уголъ B составленъ изъ трехъ плоскихъ угловъ CBA, ABD и DBC, то (кн. 11, пред. 20) $\angle CBA + \angle ABD > \angle DBC$. По той же причинѣ въ тѣлесномъ углѣ C, $\angle BCA + \angle ACD > \angle DCB$, а въ тѣлесномъ углѣ D, $\angle CDA + \angle ADB > \angle BDC$. Слѣдовательно $\angle CBA + \angle ABD + \angle BCA + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADB > \angle DBC + \angle DCB + \angle BDC$. Но сумма послѣднихъ трехъ угловъ равна $2d$ (кн. 1, пред. 32). А потому сумма первыхъ шести изъ вышенаписанныхъ угловъ $> 2d$. Но сумма трехъ угловъ, въ каждомъ изъ треугольниковъ ABC, ACD и ADB равна двумъ прямымъ, а потому сумма всѣхъ девяти угловъ этихъ трехъ треугольниковъ равна $6d$. Но сумма шести угловъ: $\angle CBA + \angle ABD + \angle BCA + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADB > 2d$, слѣдовательно сумма остальныхъ трехъ угловъ $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB < 4d$. Подобнымъ же образомъ доказывается это предложеніе для тѣлеснаго угла A, составленнаго не изъ трехъ, а изъ большаго числа плоскихъ угловъ.

Примѣч. 7. Если внутри триграннаго угла возьмемъ точку и изъ нея опустимъ на стороны двуграннаго угла перпендикуляры, то они образуютъ триграиный уголъ, который называется *дополнительнымъ* даннаго угла.

Если чрезъ A, B, C означимъ плоскіе углы, составляющіе данный триграиный уголъ, чрезъ A', B', C' означимъ плоскіе углы, составляющіе дополнительный триграный уголъ, чрезъ a, b, c двугранные углы даннаго триграннаго, и наконецъ чрезъ a', b', c' означимъ двугранные углы дополнительнаго триграннаго угла, то мы будемъ имѣть очевидно:

$$A+a'=2d, \qquad A'+a=2d$$

$$B+b'=2d, \qquad B'+b=2d$$

$$C+c'=2d, \qquad C'+c=2d.$$

Если сложимъ первыя три уравненія то найдемъ:

$$a'+b'+c'+A+B+C=6d$$

откуда:

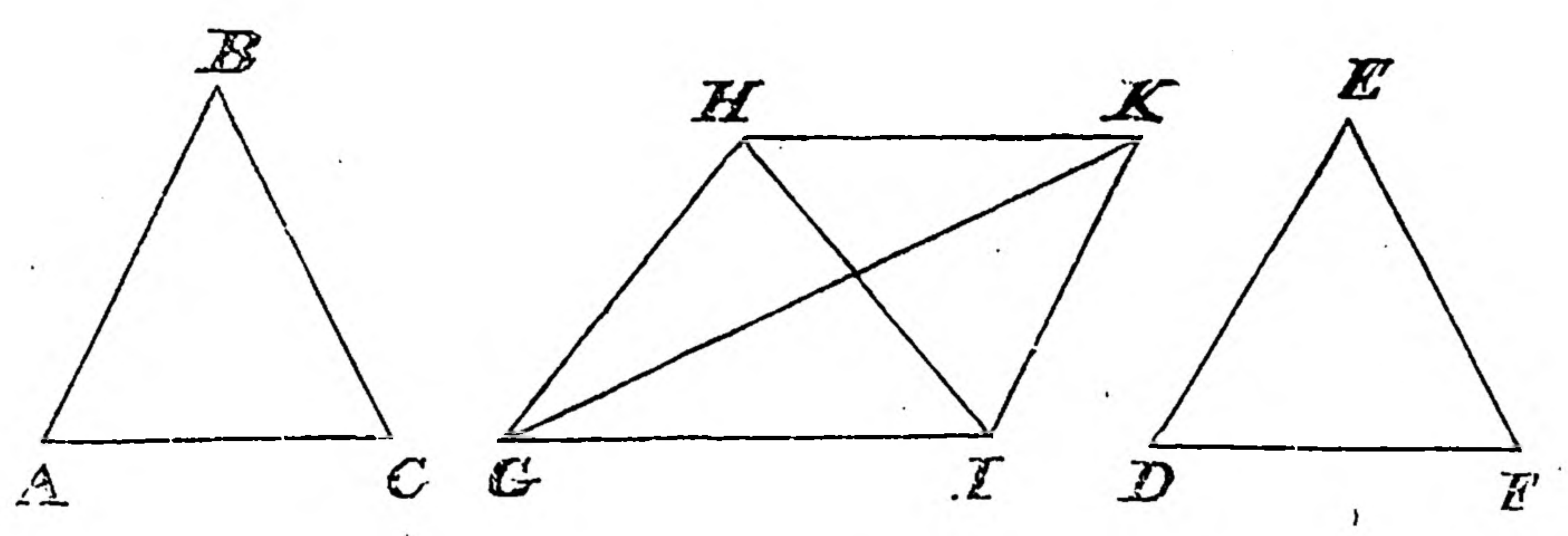
$$a'+b'+c'=6d-(A+B+C)$$

Такъ какъ $A+B+C<4d$, то очевидно что $a'+b'+c'>2d$ и $<6d$, т. е. во всякомъ триграннОмъ углѣ сумма двугранныхъ угловъ больше двухъ прямыхъ и меньше шести прямыхъ.

Легко видѣть, что сумма двугранныхъ угловъ во всякомъ многогранномъ углѣ заключается между $2dn$ и $2d(n-2)$, гдѣ n есть число сторонъ многограннаго угла.

Предложеніе 22. Если сумма двухъ изъ трехъ плоскихъ угловъ $\angle ABC$, $\angle DEF$ и $\angle GHI$ больше третьяго, и если прямыя линіи составляющія эти углы сдѣлаемъ равными; то изъ прямыхъ линій AC, DF и GI, соединяющихъ оконечности равныхъ прямыхъ, можно построить треугольникъ (фиг. 461).

Фиг. 461.



Доказат. Здѣсь нужно (кн. 1, пред. 22) только доказать, что сумма двухъ изъ этихъ прямыхъ AC, DF и GI больше третьей.

Положимъ, что всѣ три плоскіе углы $\angle ABC$, $\angle DEF$ и $\angle GHI$ равны между собою, то равны также между собою и прямыя AC, DF и GI (кн. 1, пред. 4); а потому сумма двухъ изъ нихъ, очевидно, меньше третьей.

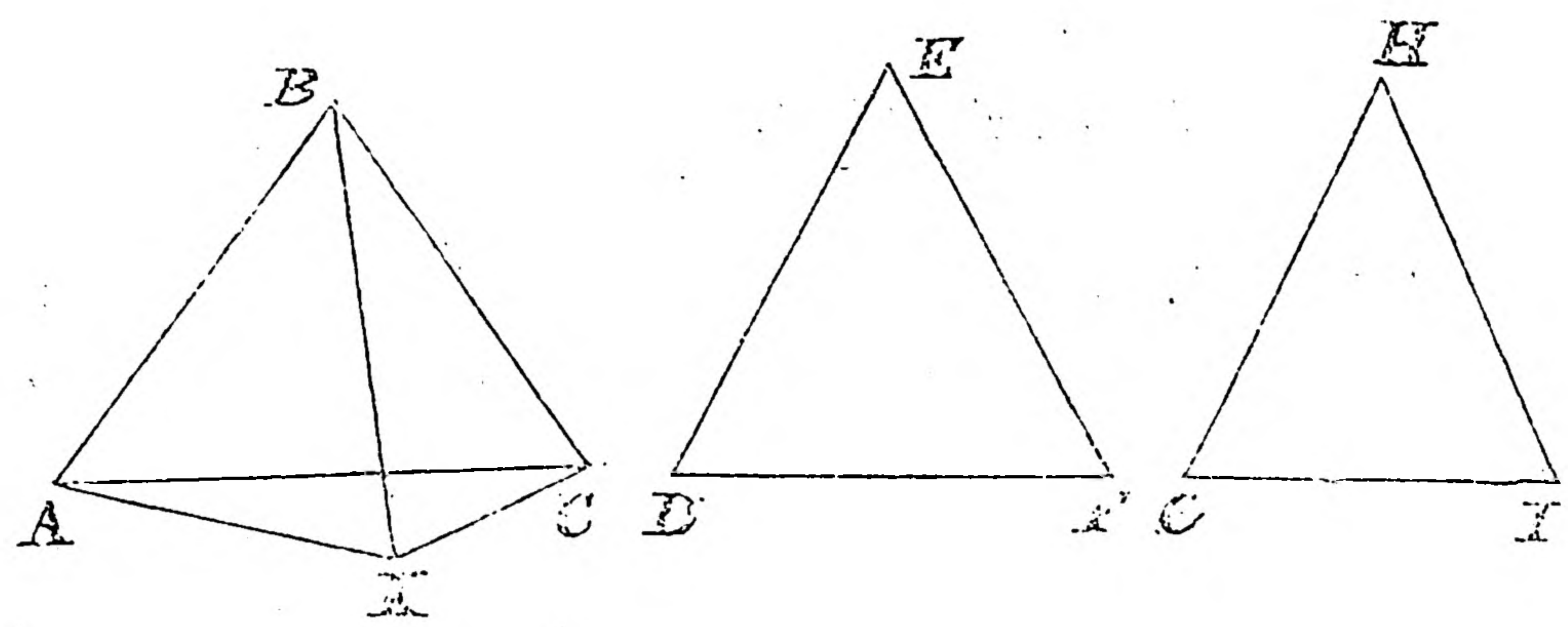
Положимъ, что плоскіе углы неравны: отъ точки H, на прямой HI отложимъ $\angle IHK=\angle ABC$, отложимъ $HK=HI$ и проведемъ прямыя GK и KI.

Такъ какъ $\angle ABC = \angle IHK$, и $AB = HI = BC = HK$, то (кн. 1, пред. 4) $AC = IK$.

Но $\angle ABC + \angle GHI$, т. е. $\angle GHK > \angle DEF$, и $GH = DE = HK = EF$, то $GK > DF$ (кн. 1, пред. 24). Но мы имѣемъ также (кн. 1, пред. 20) $GI + IK$, т. е. $GI + AC > GK$. Слѣдовательно, тѣмъ болѣе $GI + AC > DF$.

Другое доказат. Пусть $\angle ABC$, одинъ изъ трехъ неравныхъ угловъ, больше каждаго изъ остальныхъ $\angle DEF$ и $\angle GHI$, то сторона AC больше (кн. 1, пред. 24) каждой изъ остальныхъ DF и GI, а потому очевидно, что $AC + DF > GI$, и $AC + GI > DF$; остается еще доказать, что $DF + GI > AC$ (фиг. 462).

Фиг. 462.

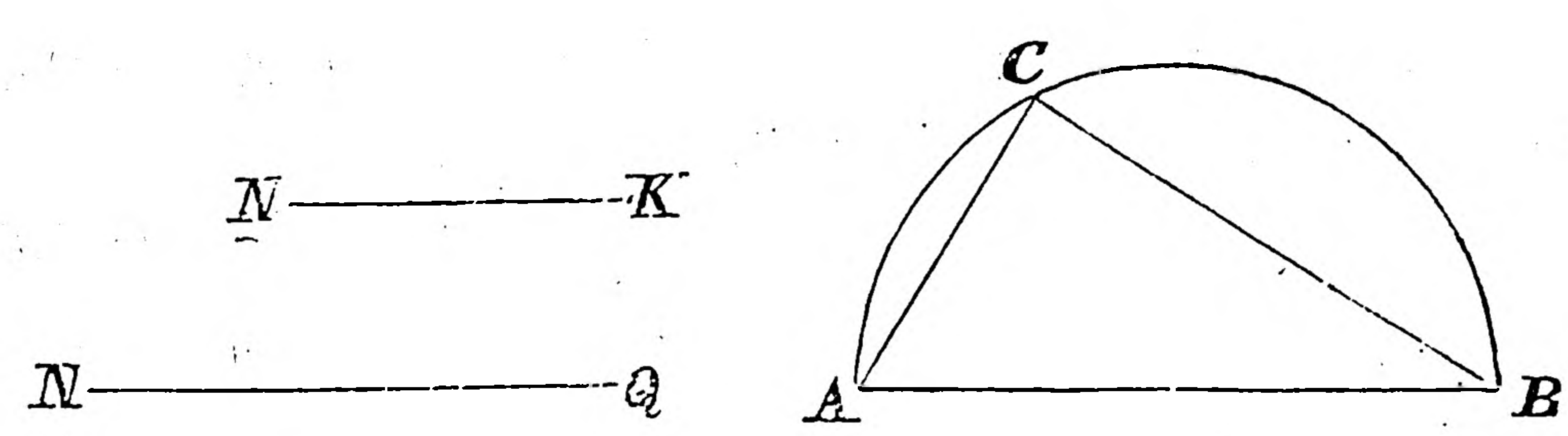


На прямой AB, въ точкѣ B, отложимъ $\angle ABK = \angle GHI$ (кн. 1, пред. 23), сдѣлаемъ $BK = HI$, и проведемъ AK и KC. Поэтому $\angle ABK = \angle GHI$, и $AB = GH = BK = HI$, а потому $AK = GI$ (кн. 1, пред. 4).

Но такъ какъ $\angle E + \angle GHI > \angle ABC$, и $\angle GHI = \angle ABK$, то $\angle E > \angle CBK$; кромѣ того $CB = EF = BK = ED$, слѣдовательно $DF > CK$ (кн. 1, пред. 24). А потому изъ выше сказаннаго слѣдуетъ, что $GI = AK$. слѣдовательно, $DF + GI > CK + AK$, но $CK + AK > AC$ (кн. 1, пред. 20), поэтому тѣмъ болѣе, $DF + GI > AC$.

Слѣдствіе. По даннымъ двумъ прямымъ линіямъ AB и NK, изъ коихъ $AB > NK$, найти такую прямую NQ, чтобы квадратъ построенный на прямой AB былъ бы больше квадрата построеннаго на прямой NK, на $\square NQ$ (фиг. 463).

Фиг. 463.



На прямой AB опишемъ полукругъ, впишемъ въ него прямую $AC = NK$ и проведемъ CB, то CB и будетъ искомая NQ.

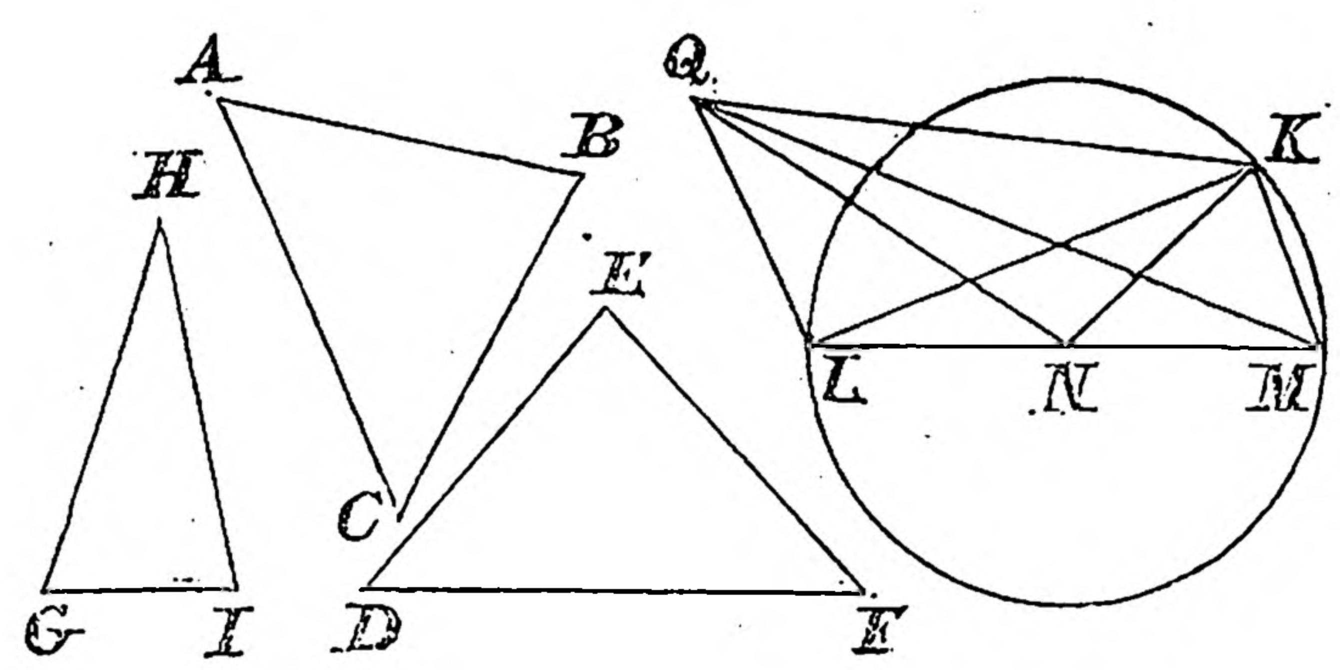
Такъ какъ $\angle ACB = d$ (кн. 3, пред. 31), то $\square AB = \square AC + \square CB$

(кн. 1, пред. 47), но $AC=NK$, слѣдовательно $\square AB=\square NK+\square BC$, откуда слѣдуетъ, что $\square AB>\square BC$, слѣдовательно $BC=NQ$.

Предложеніе 23. Изъ трехъ данныхъ плоскихъ угловъ $\angle ABC$, $\angle DEF$ и $\angle GHI$, сумма которыхъ меньше четырехъ прямыхъ, и изъ коихъ сумма двухъ какихъ нибудь изъ нихъ больше третьяго, составить тѣлесный уголъ (фиг. 464)?

Рѣшеніе. На сторонахъ этихъ угловъ отложимъ равныя части AB, BC, ED, EF, HG, HI и проведемъ прямыя AC, DF и GI; изъ трехъ послѣднихъ прямыхъ можно построить треугольникъ (кн. 11, пред. 22).

Фиг. 464.



Пусть $\triangle KLM$, будетъ этотъ треугольникъ, въ немъ $KL=AC$, $LM=DF$, $MK=GI$. Около $\triangle KLM$ опишу кругъ (кн. 4, пред. 5); центръ N этого круга упадетъ или внутри, или внѣ, или наконецъ на одну изъ сторонъ $\triangle KLM$. Проведемъ прямыя NK, NL и NM, то во первыхъ нужно доказать, что $AB>NK$, а во вторыхъ построить искомый тѣлесный уголъ надъ $\triangle KLM$.

Первая часть. Докажемъ, что $AB>NK$, такъ какъ AB не можетъ быть ни равна, ни меньше NK.

1. Если центръ N круга упадетъ на одну изъ сторонъ LM треугольника KLM.

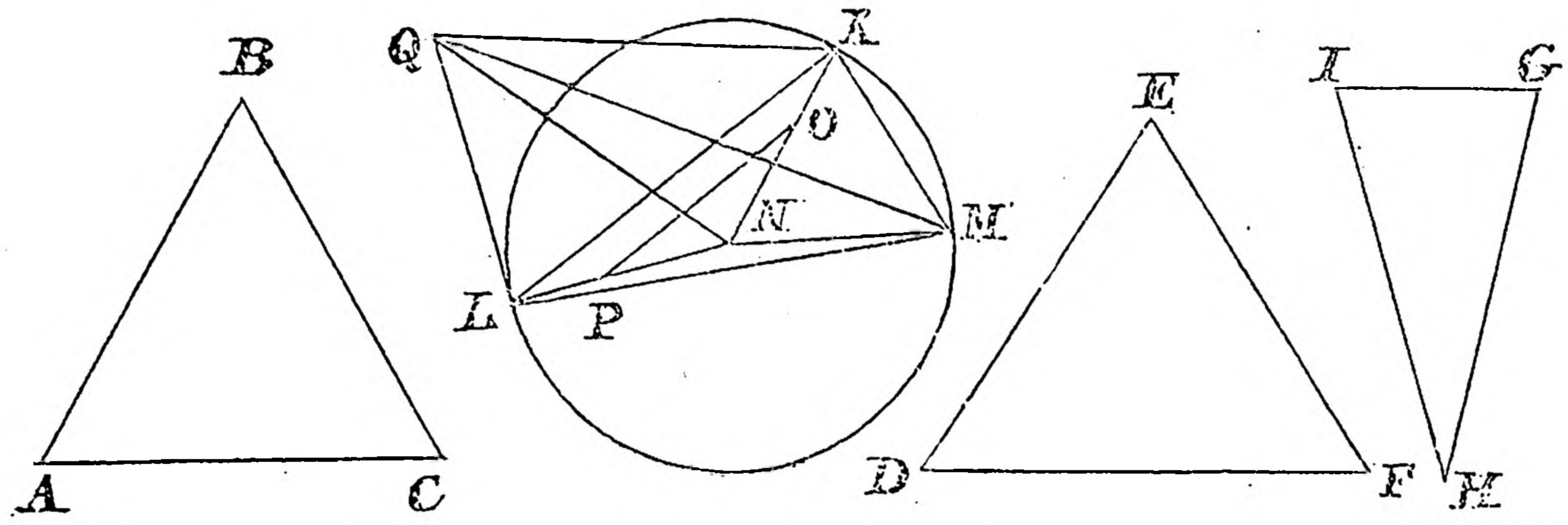
Если бы $AB=NK$, то $DE+EF=LN+NM=LM$, потому что $AB=$ $=DE=EF$ и $NK=LN=NM$. Слѣдовательно $LM=DF$. А потому $DE+$ $+EF=DF$, что невозможно (кн. 1, пред. 20). Изъ этого слѣдуетъ, что AB не равна NK. Если бы было $AB<NK$, то изъ предъидущаго слѣдовало бы, что $DE+EF<DF$, что еще менѣе возможно. А потому не можетъ быть $AB<NK$.

2. Если центръ N падаетъ внутри $\triangle KLM$ (фиг. 465).

Если бы $AB=NK$, то $BC=NL$, а какъ $AC=KL$, то $\angle ABC=$ $=\angle KNL$ (кн. 1, пред. 8). По той же причинѣ $\angle DEF=\angle LNM$ и $\angle GHI=\angle MNK$. Слѣдовательно $\angle ABC+\angle DEF+\angle GHI=\angle KNL+$ $+\angle LNM+\angle MNK$; но сумма послѣднихъ трехъ угловъ равна четыремъ прямымъ (кн. 1. пред. 15, слѣд.), слѣдовательно и сумма трехъ первыхъ угловъ также равна четыремъ прямымъ, что противорѣчитъ положенію, что сумма ихъ $<4d$. А потому не можетъ быть, что $AB=NK$.

Если бы было $AB<NK$, то сдѣлавъ $NO=AB$, $NP=BC$ проведемъ прямую OP. Такъ какъ $AB=BC$, то $NO=NP$ и $OK=PL$, слѣдовательно OP параллельна KL (кн. 6, пред. 2), а потому $\triangle NOP$ и $\triangle NKL$ равноугольны

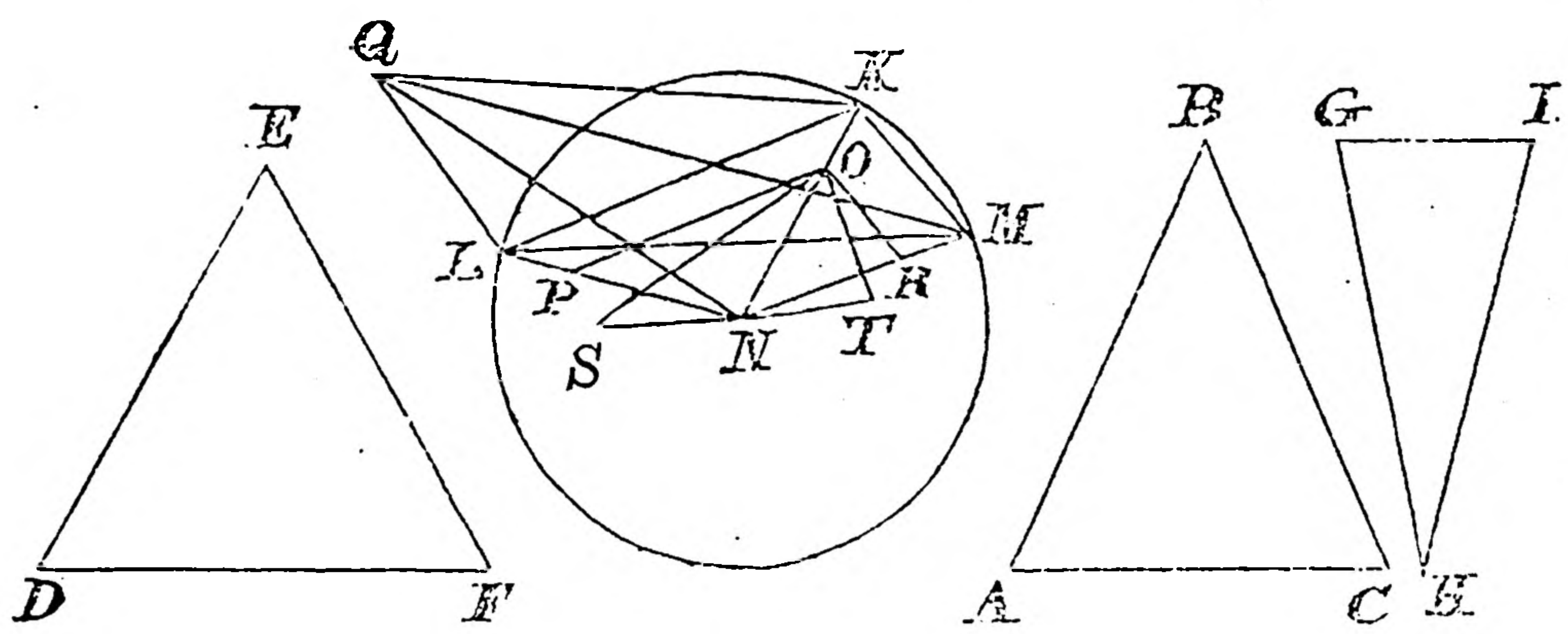
Фиг. 465.



(кн. 1, пред. 29), слѣдовательно $NK:NO=KL:OP$ (кн. 6, пред. 4 и кн. 5, пред. 16), но $NK>NO$, а потому $KL>OP$; но $KL=AC$, слѣдовательно $AC>OP$. Но мы имѣли, что $AB=ON$ и $BC=NP$, слѣдовательно $\angle ABC>\angle ONP$ (кн. 1, пред. 25). Точно также можно показать, что $\angle DEF>\angle LNM$ и $\angle GHI>\angle MNK$. Слѣдовательно сумма трехъ угловъ $\angle ABC$, $\angle DEF$, $\angle GHI$ больше суммы трехъ угловъ около точки N, а потому эта сумма больше четырехъ прямыхъ, что противорѣчитъ нашему положенію. А потому не можетъ быть $AB<NK$.

3. Если точка N лежитъ внѣ $\triangle KLM$ (фиг. 466).

Фиг. 466.



Если бы $AB=NK$, то, такъ какъ $AB=NK=NL=BC$ и $AC=LK$, $\angle ABC=\angle LNK$ (кн. 1, пред. 8); по той же причинѣ $\angle GHI=\angle KNM$, слѣдовательно $\angle LNM=\angle ABC+\angle GHI$. Итакъ $\angle ABC+\angle GHI>\angle DEF$. Слѣдовательно $\angle LNM>\angle DEF$. Но, $DE=LN=EF=NM$, и $DF=LM$, то $\angle LNM=\angle DEF$ (кн. 1, пред. 8), что противорѣчитъ предъидущему $\angle LNM>\angle DEF$. Слѣдовательно не можетъ быть $AB=NK$.

Если бы было $AB<NK$, то сдѣлавъ $NO=AB$, $NP=BC$ проведемъ прямую OP. Такъ какъ $AB=BC$, то $NO=NP$ и $OK=PL$, а потому OP параллельна KL, слѣдовательно $\triangle NOP$ и $\triangle NKL$ равноугольны, а потому:

$$NK:NO=KL:OP$$

слѣдовательно, какъ $NK>NO$, то $KL>OP$. Но $KL=AC$, слѣдовательно $AC>OP$. Но мы имѣли, что $AB=ON$ и $BC=NP$, слѣдовательно $\angle ABC>\angle ONP$. Пусть $NR=NO=NP$, проведемъ прямую OR, то по той же причинѣ $\angle GHI>\angle ONR$. На прямой NK построимъ углы $\angle KNS=\angle ABC$ и $\angle KNT=\angle GHI$, отложимъ прямыя NS и NT равныя каждая прямой NO, проведемъ OS, OT и ST. Такъ какъ $AB=ON=BC=NS$, и $\angle ABC=\angle ONS$: то AC, т. е. $KL=OS$. По той же причинѣ $KM=OT=GI$. Изъ этого слѣдуетъ, что $LK=OS$, $KM=OT$, но ($\angle POR$, т. е.) $\angle LKM>\angle SOT$, поэтому $LM>ST$ (кн. 1, пред. 24), слѣдовательно $DF>ST$. Но какъ $NS=DE$, $NT=EF$ и $DF>ST$, то $\angle DEF>\angle SNT$ (кн. 1, пред. 25). Но мы имѣли, что $\angle SNT=\angle ABC+\angle GHI$. Слѣдовательно $\angle DEF>$ $>\angle ABC+\angle GHI$, что очевидно противорѣчитъ нашему положенію. А потому не можетъ быть $AB>NK$.

Вторая часть. Построеніе искомаго тѣлеснаго угла (фиг.464, 465 и 466). Изъ выше приведеннаго доказательства видно, что во всѣхъ случаяхъ $AB>KN$; возставимъ (кн. 11, пред. 12) къ плоскости круга KLM, въ точкѣ N, перпендикуляръ NQ, отложимъ на немъ длину такую, чтобы $\square AB=$ $=\square KN+\square NQ$ (кн. 11, пред. 22, слѣд.), и проведемъ прямыя QK, QL и QM, то при точкѣ Q будетъ искомый тѣлесный уголъ.

Прямая NQ перпендикулярна къ плоскости KLM, слѣдовательно она перпендикулярна къ темъ прямымъ линіямъ NL, NK и NM. Поэтому при точкѣ N прямые углы, и $KN=NL$, $QN=QN$, слѣдовательно $KQ=QL$ (кн. 1, пред. 4), по той же причинѣ $QM=QK$, а потому $QK=QL=QM$. Но $\square AB=\square KN+\square NQ$ и такъ какъ $\angle QNK=d$, то $\square QK=\square KN+$ $+\square NQ$, а потому $\square AB=\square QK$, слѣдовательно $AB=QK=QL=QM$. Такъ какъ $QK=AB$, $QL=BC$, $KL=AC$, то $\angle KQL=\angle ABC$ (кн. 1, пред. 8). По той же причинѣ $\angle LQM=\angle DEF$ и $\angle MQK=\angle GHI$. Слѣдовательно при точкѣ Q построенъ искомый тѣлесный уголъ, ограниченный плоскими углами $\angle KQL$, $\angle LQM$, $\angle MQK$, равными даннымъ плоскимъ угламъ $\angle ABC$, $\angle DEF$ и $\angle GHI$.

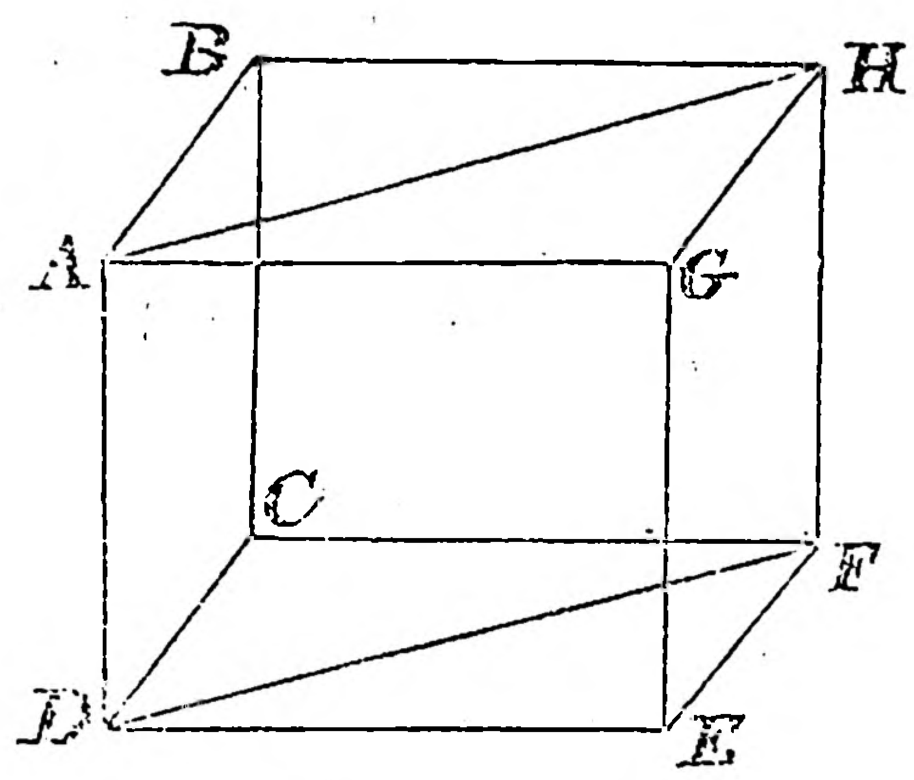
Предложеніе 24. Если тѣло $CDGH$, ограниченно (попарно шестью) параллельными плоскостями, то эти послѣднія суть параллелограммы; всякія двѣ противолежащія площади AC, GF; BG, CE; FB, AE равны другъ другу (и подобны). (фиг. 467).

Первая часть. Такъ какъ BG и CE параллельны и пересѣчены AC, то AB и CD параллельны (кн. 11, пред. 16). Но BF и AE также параллельны и пересѣчены AC, а потому AD и BC параллельны. Слѣдовательно AC есть параллелограмъ. Точно такимъ же образомъ доказывается, что GF, а также BG, CE и FB, AE суть параллелограммы.

Вторая часть. Въ плоскостяхъ BG и CE проведемъ діагонали AH

и DF. Такъ какъ AB параллельна DC и BH параллельна CF, то $\angle ABH = \angle DCF$ (кн. 11, пред. 10). А потому $AB=DC$ и $BH=CF$ (кн. 1,

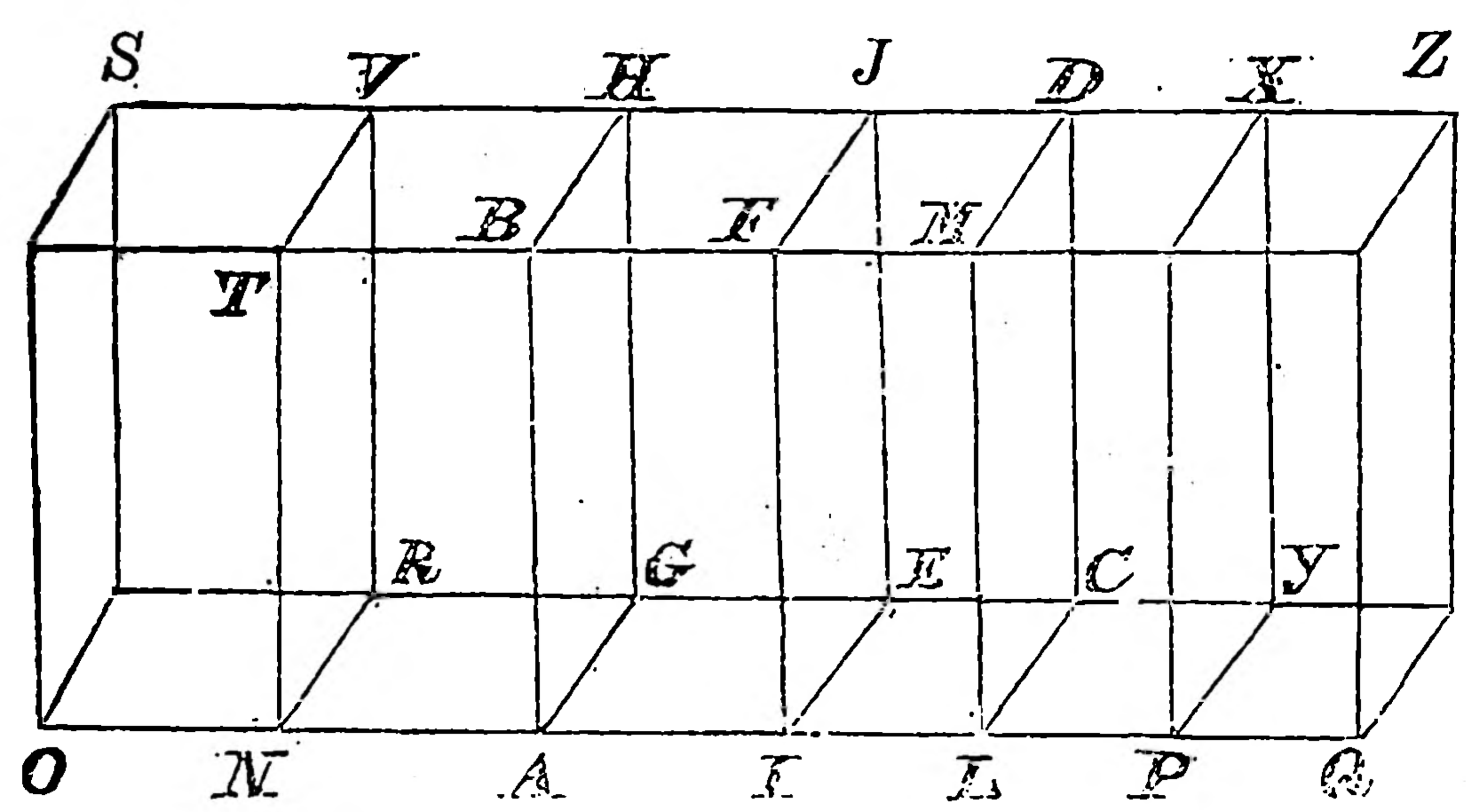
Фиг. 467.



пред. 34). Слѣдовательно $\triangle ABH \cong \triangle DCF$ (кн. 1, пред. 4), поэтому $2\triangle ABH = 2\triangle DCF$, слѣдовательно $BG=CE$ (кн. 1, пред. 34). (Но, кромѣ того, $AB=DC=GH=EF$, $AG=DE=BH=CF$, и углы въ BG соотвѣтственно равны угламъ въ CE, то также $BG \cong CE$). Подобнымъ же образомъ доказывается, что $AC \cong GF$ и $FB \cong AE$.

Предложеніе 25. Параллелепипедъ $ABCD$ разсѣченъ плоскостью EF, параллельной двумъ противолежащимъ плоскостямъ AH и DL: то отсѣченныя тѣла AJ и ID, относятся между собою какъ ихъ основанія AE и IC (фиг. 468).

Фиг. 468.

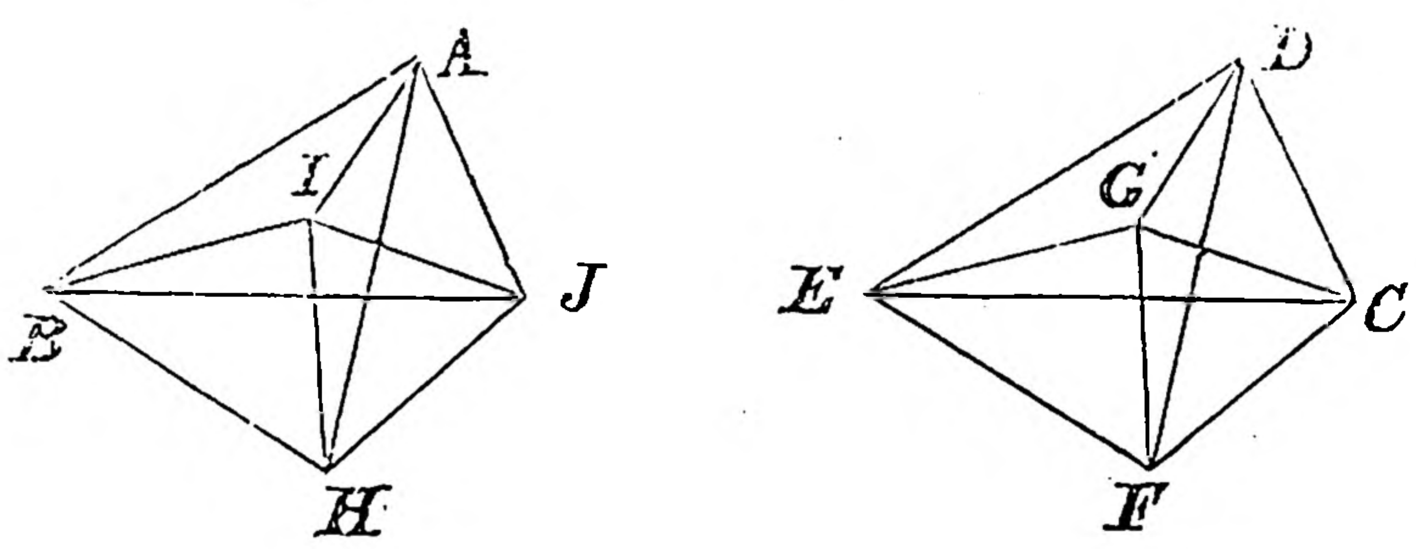


Доказат. Продолжимъ AL въ обѣ стороны; возьмемъ произвольное число отрѣзковъ LP, PQ равныхъ LI, а также произвольное число отрѣзковъ AN, NO равныхъ AI; дополнимъ параллелограммы AR, RO, LY, YQ, а также тѣла NH, OV, LY, PZ. Такъ какъ $IA=AN=NO$, то $EA=AR=RO$ и $EH=HR=RS$ (кн. 1, пред. 36), точно также $AH=NV=OS$ (кн. 11, пред. 24). А потому во всѣхъ трехъ тѣлахъ JA, AV, VO, выше поименованныя, другъ противъ друга лежащія, плоскости равны и подобны. Слѣдовательно эти три тѣла равны (кн. 11, опред. 10). По той же причинѣ три тѣла ID, DP, PZ также равны. Слѣдовательно OJ такое же кратное отъ AJ, какъ OE отъ AE, а JQ такое кратное отъ ID, какъ

EQ отъ IC. Но если $OE \gtreqless EQ$, то $OJ \gtreqless JQ$. Слѣдовательно (кн. 5, опред. 5) $AJ : ID = AE : IC$.

Предложеніе 26. При данной прямой AB, и при данной на ней точкѣ B, построить тѣлесный уголъ, равный данному тѣлесному углу D (фиг. 469)?

Фиг. 469.



Рѣшеніе. Пусть данный тѣлесный уголъ D, составленъ изъ плоскихъ угловъ EDC, EDF и FDC. Изъ произвольной точки F прямой DF, опустимъ перпендикуляръ FG, на плоскость, проходящую чрезъ ED и DC, встрѣчающій эту плоскость въ точкѣ G, проведемъ DG. На прямой AB, въ точкѣ A построимъ уголъ $\angle BAJ = \angle EDC$, и (въ плоскости, проведенной чрезъ BA и AJ) $\angle BAI = \angle EDG$; сдѣлаемъ $AI = DG$; къ плоскости проведенной чрезъ $\angle BAJ$, въ точкѣ I возставимъ перпендикуляръ IH (кн. 11, опред. 12), отложимъ $IH = GF$ и проведемъ AH, то тѣлесный уголъ при A равенъ данному тѣлесному углу при D.

Отложивъ $AB = DE$ и проведя HB, IB, FE, GE: то, такъ какъ FG перпендикулярна къ данной плоскости, $\angle FGD$, $\angle FGE$ будутъ прямые (кн. 11, опред. 3), по той же причинѣ $\angle HIA$ и $\angle HIB$ будутъ также прямые.

Такъ какъ $AI = DG$, $AB = DE$ и $\angle BAI = \angle EDG$; то $BI = EG$ (кн. 1, пред. 4). Точно также, $IH = GF$, и при точкахъ I и G углы прямые. Слѣдовательно $BH = EF$ (кн. 1, пред. 4). Далѣе, $AI = DG$, $IH = GF$, при точкахъ I и G углы также прямые, а потому $AH = DF$. Но $AB = DE$, слѣдовательно $\angle BAH = \angle EDF$ (кн. 1, пред. 8).

Отложимъ $AJ = DC$, и проведемъ IJ, HJ, GC, FC. Такъ какъ $\angle BAJ = \angle EDC$, и $\angle BAI = \angle EDG$: то $\angle IAJ = \angle GDC$. Но $AI = DG$ и $AJ = DC$, слѣдовательно $IJ = GC$ (кн. 1, пред. 4). Но $IH = GF$ и углы при точкахъ I и G прямые, слѣдовательно $HJ = FC$. Но $HA = FD$ и $AJ = DC$, слѣдовательно $\angle HAJ = \angle FDC$ (кн. 1, пред. 8).

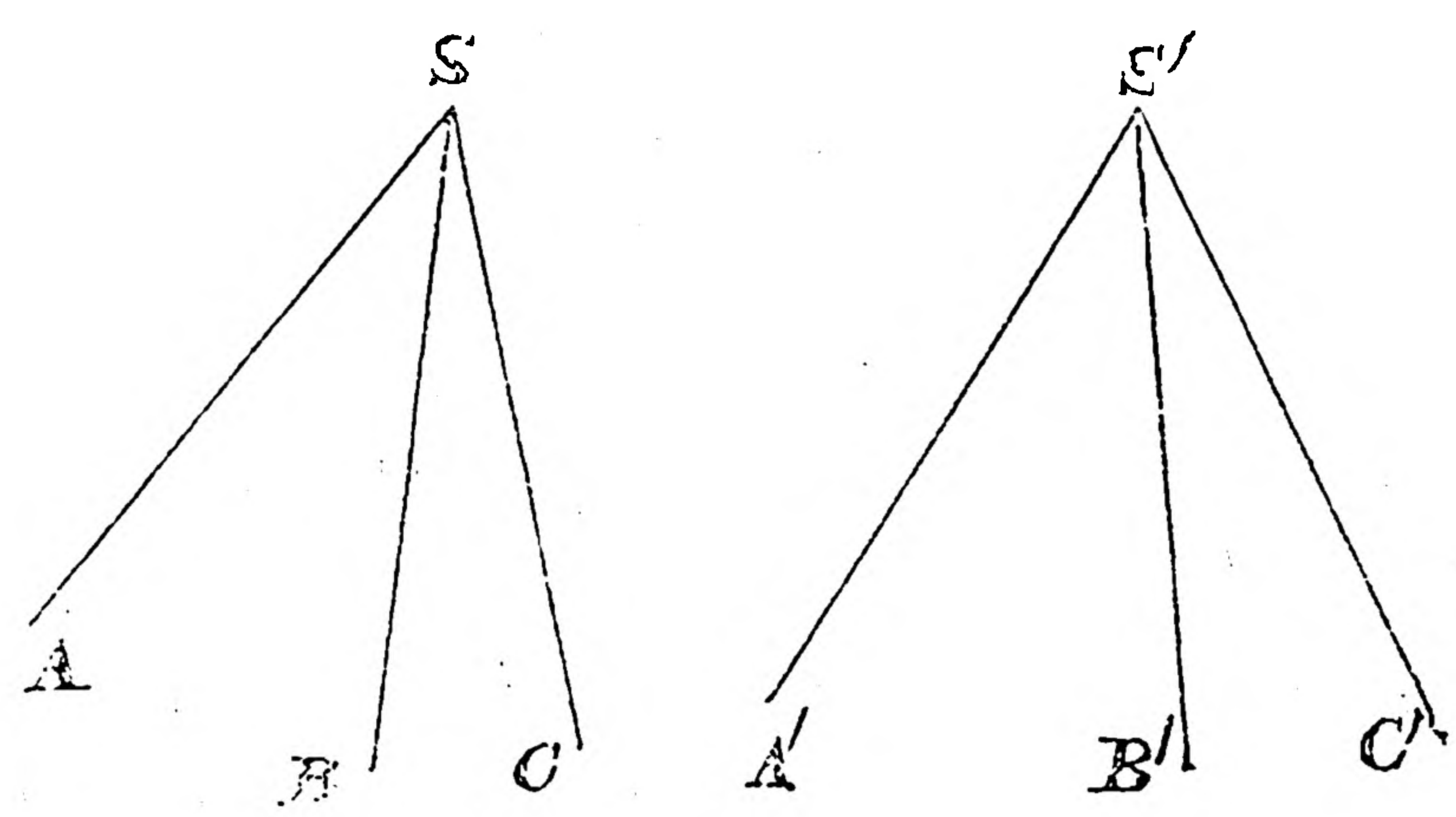
А потому $\angle BAH = \angle EDF$, $\angle HAJ = \angle FDC$, а по предъидущему $\angle BAJ = \angle EDC$, слѣдовательно тѣлесный уголъ при точкѣ A, составленный плоскими углами $\angle BAH$, $\angle HAJ$, $\angle BAJ$, равными плоскимъ угламъ $\angle EDF$, $\angle FDC$, $\angle EDC$, равенъ данному тѣлесному углу при точкѣ D.

Примѣч. 8. Это предложеніе заканчивается заключеніемъ, что трогранные углы равны, если плоскіе, ихъ составляющіе, углы равны, т. е. если въ трогранномъ углѣ, плоскіе углы равны, то и двугранные углы равны. Это предложеніе у Евклида не доказанно, поэтому я здѣсь покажу всѣ условія равенства трогранныхъ угловъ:

1. Два трогранные углы, равны, когда имѣютъ по одному равному двугранному углу заключенному между равными плоскими углами каждый каждому (фиг. 470).

Доказат. Пусть двугранный уголъ AS равенъ двугранному углу $A'S'$. Пусть плоскій уголъ $ASB=A'S'B'$ и плоскій уголъ $ASC=A'S'C'$. Я говорю, что углы S и S' совмѣстятся.

Фиг. 470.



Нанесемъ уголъ S' на S такъ, чтобы грань $A'S'C'$ совмѣстилась съ гранью ASC, то такъ какъ углы двугранные AS и $A'S'$ равны, то и грань $A'S'B'$ совмѣстится съ гранью ASB и по равенству ихъ ребро $S'B'$ совпадетъ съ ребромъ SB. Слѣд. и т. д.

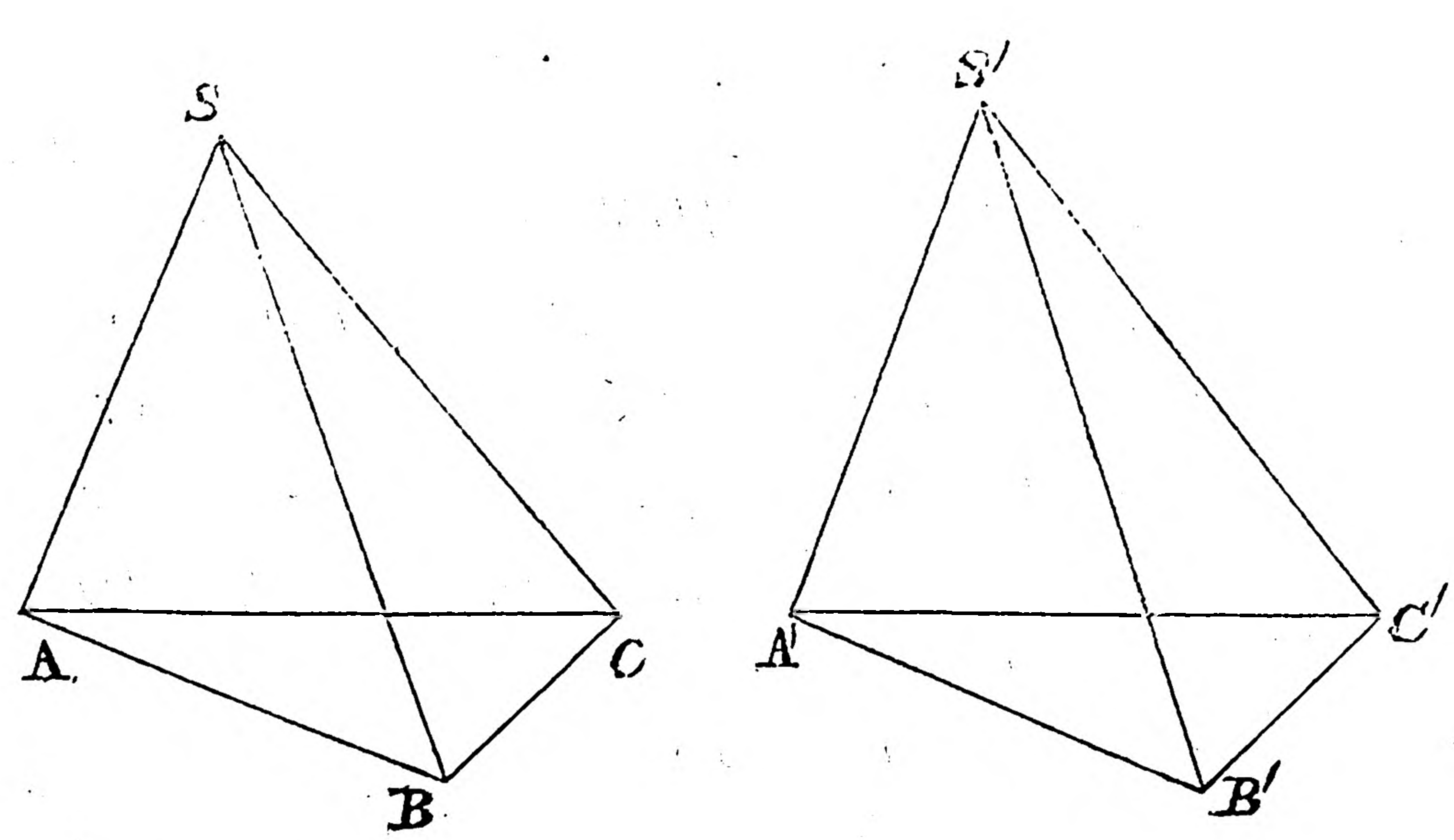
Замѣтимъ, что если бы равныя грани равныхъ двугранныхъ угловъ AS и $A'S'$ были расположены въ обратномъ порядкѣ, то углы S и S' совмѣстить невозможно, хотя они равны. Такіе углы называются *симметричными.*

2. Два двугранные угла равны, когда имѣютъ по одному равному плоскому углу и двумъ равнымъ, каждый каждому двуграннымъ угломъ, прилежащимъ плоскому.

Доказат. Для доказательства этого предложенія поступаютъ какъ выше. Тоже замѣчаніе относительно симметріи.

3. Два трогранные угла равны, когда они составлены изъ равныхъ, каждый каждому, плоскихъ угловъ.

Фиг. 471.



Доказат. Надобно только показать, что сходственные двугранные углы равны, напримѣръ, что двугранный уголъ SA равенъ двугранному углу $S'A'$, тогда этотъ случай сводится на первый.

Для этого на ребрахъ AS и $A'S'$ возьмемъ точки A и A' такъ, чтобы $AS=A'S'$. Чрезъ эти точки проведемъ плоскости ACB и $A'C'B'$ перпендикулярныя къ ребрамъ AS и $A'S'$. Пересѣченія этихъ плоскостей съ ребрами SB, SC и $S'B'$, $S'C'$ образуетъ два треугольника ABC и $A'B'C'$, которые будутъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что $\triangle ASC=\triangle A'S'C'$ и $\triangle ASB=\triangle A'S'B'$, откуда и $\triangle BSC=\triangle B'S'C'$. Слѣдовательно $AC=A'C'$, $AB=A'B'$ и $BC=B'C'$, поэтому $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$. Изъ равенства этихъ треугольниковъ мы имѣемъ $\angle BAC=\angle B'A'C'$, слѣдовательно двугранные углы AS и $A'S'$ равны. Слѣд. и т. д.

Если бы плоскіе углы, составляющіе триграные были равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ, то углы S и S' не совмѣстимы, хотя равны. Въ этомъ случаѣ онѣ называются *симметричными.*

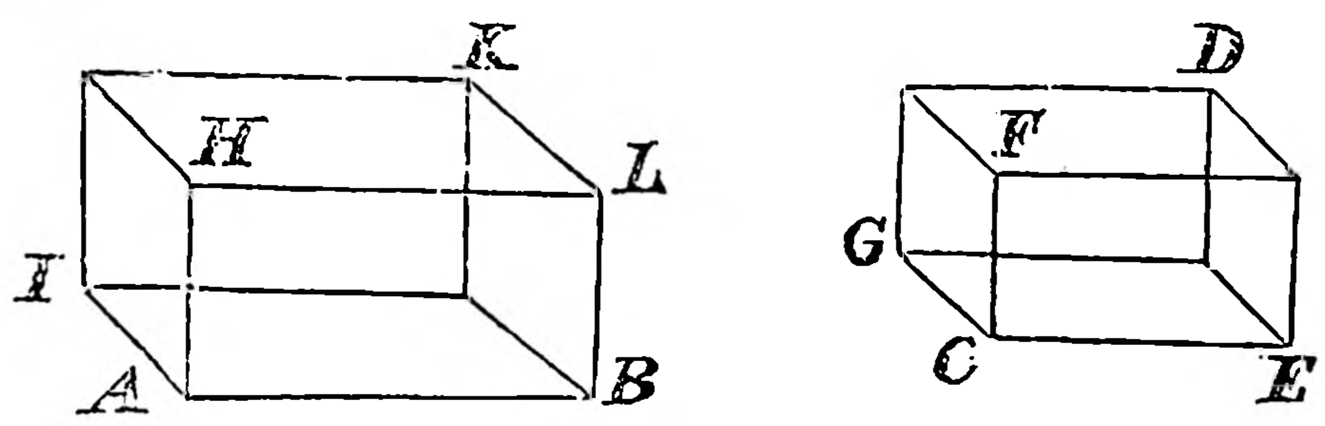
4. Два триграные угла равны когда три двугранные угла одного равны тремъ двуграннымъ угламъ другаго, каждый каждому.

Доказат. Дополнительные триграныхъ угловъ имѣютъ плоскіе равные углы, а если плоскіе углы дополнительнаго триграннаго угла равны, то двугранные углы данныхъ триграныхъ угловъ равны. Слѣд. и т. д.

Если двугранные углы одного триграннаго угла равны двуграннымъ угламъ другаго триграннаго угла, но расположены въ обратномъ порядкѣ, то такіе углы *симметричны*, равны во всѣхъ частяхъ, но несовмѣстимы.

Предложеніе 27. На данной прямой линіи AB построить параллелепипедъ подобный и подобно расположенный данному параллелепипеду CD (фиг. 472)?

Фиг. 472.



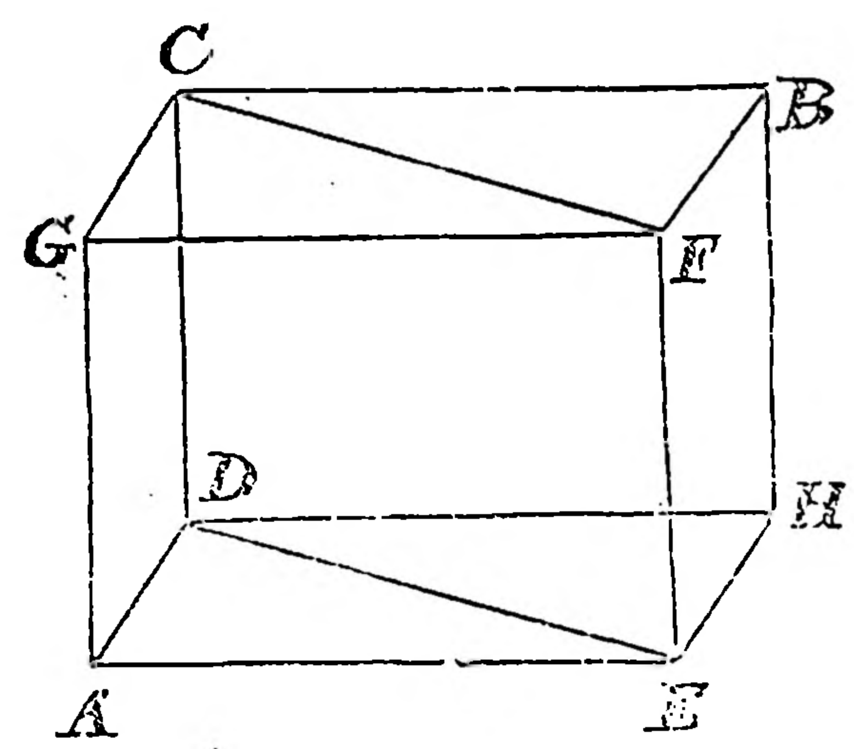
Рѣшеніе. На прямой AB, какъ на ребрѣ, въ точкѣ A, построимъ тѣлесный уголъ, равный тѣлесному углу при C (кн. 11, пред. 26), ограниченный плоскими углами $\angle BAH=\angle ECF$, $\angle HAI=\angle FCG$, и $\angle IAB=\angle GCE$. Сдѣлаемъ: $EC:CG=BA:AI$ (кн. 6, пред. 12), равно какъ $CG:CF=IA:AH$, откуда получимъ (кн. 5, пред. 22) $EC:CF=AB:AH$. Если построимъ параллелограмъ BH и параллелепипедъ AK, то этотъ послѣдній будетъ требуемый.

Такъ какъ $EC:CG=BA:AI$, и $\angle ECG=\angle BAI$, то $BI \backsim EG$ (кн. 6, пред. 4 и кн. 1, пред. 33); по той же самой причинѣ $IH \backsim GF$ и $HB \backsim FE$. А потому три плоскости тѣла AK подобны тремъ плоскостямъ, одинаково расположеннымъ, тѣла CD. Но въ обѣихъ тѣлахъ плоскости, противолежащія вышесказаннымъ плоскостямъ соотвѣтственно равны и подобны (кн. 11, пред. 24), слѣдовательно $AK \backsim CD$ (кн. 11, опред. 9).

Предложеніе 28. Всякій параллелепипедъ AB, плоскостью $CDEF$, пересѣкающею двѣ противолежащія плоскости GB и AH по ихъ діагоналямъ CF и DE, дѣлится пополамъ (фиг. 473).

Доказат. Такъ какъ $\triangle CGF = \triangle CBF$, и $\triangle DAE = \triangle DHE$ (кн. 1, пред. 34), равно какъ $CA = BE$ и $GE = CH$ (кн. 11, пред. 24); то призма

Фиг. 473.

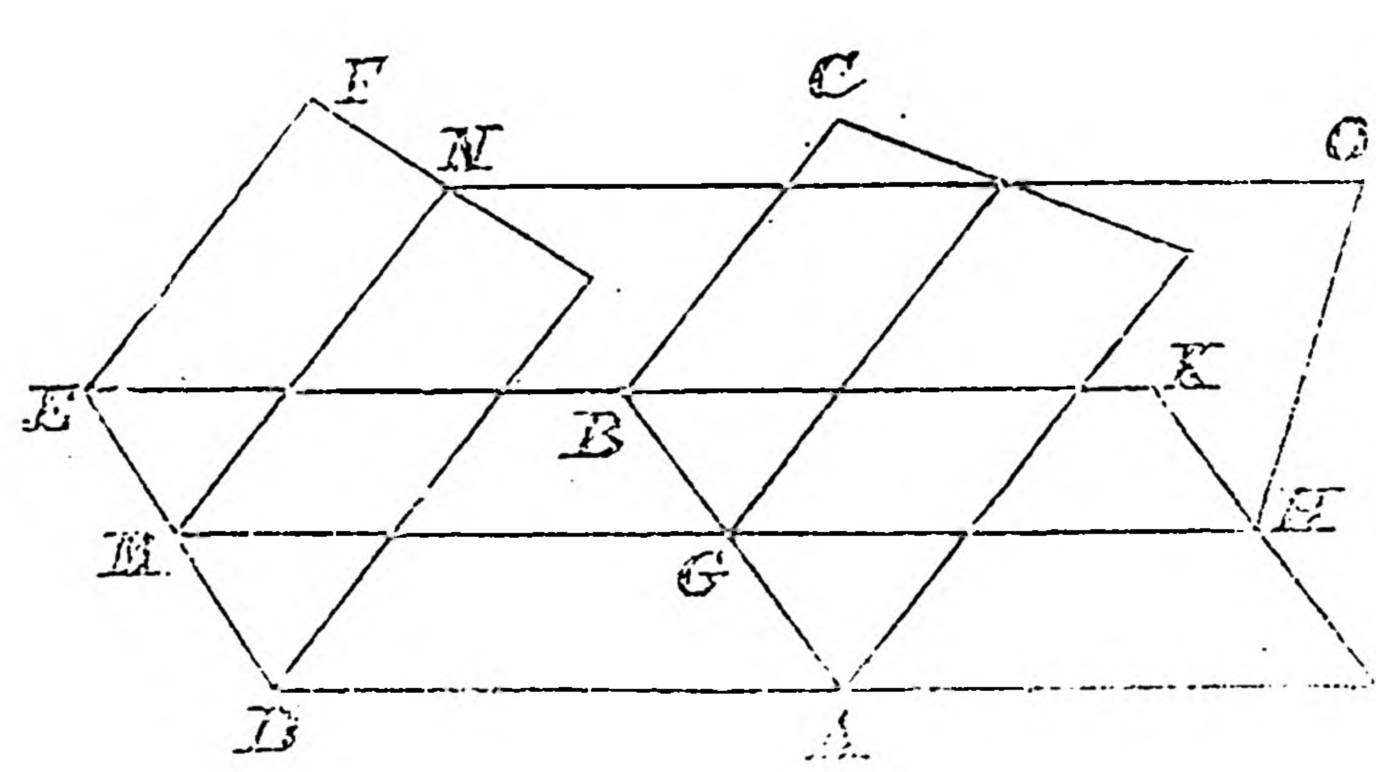


$CGFEDA$, ограниченная треугольниками CGF и EDA и параллелограммами CE (кн. 11, пред. 16), GE, AC равна (кн. 11, опред. 10) призмѣ $FCBHED$, ограниченной треугольниками FCB и HED и параллелограммами CE, CH, BE; слѣдовательно параллелепипедъ AB плоскостью $CDEF$ дѣлится пополамъ.

Примѣч. 9. Если мы желаемъ доказать это предложеніе на основаніи дополненій сдѣланныхъ къ 10 опредѣленію, то это можно сдѣлать на основаніи слѣдующихъ соображеній.

1. Параллельныя плоскости ABC, DEF, имѣютъ къ одной и той же плоскости DK, одинаковое наклоненіе (фиг. 474).

Фиг. 474.

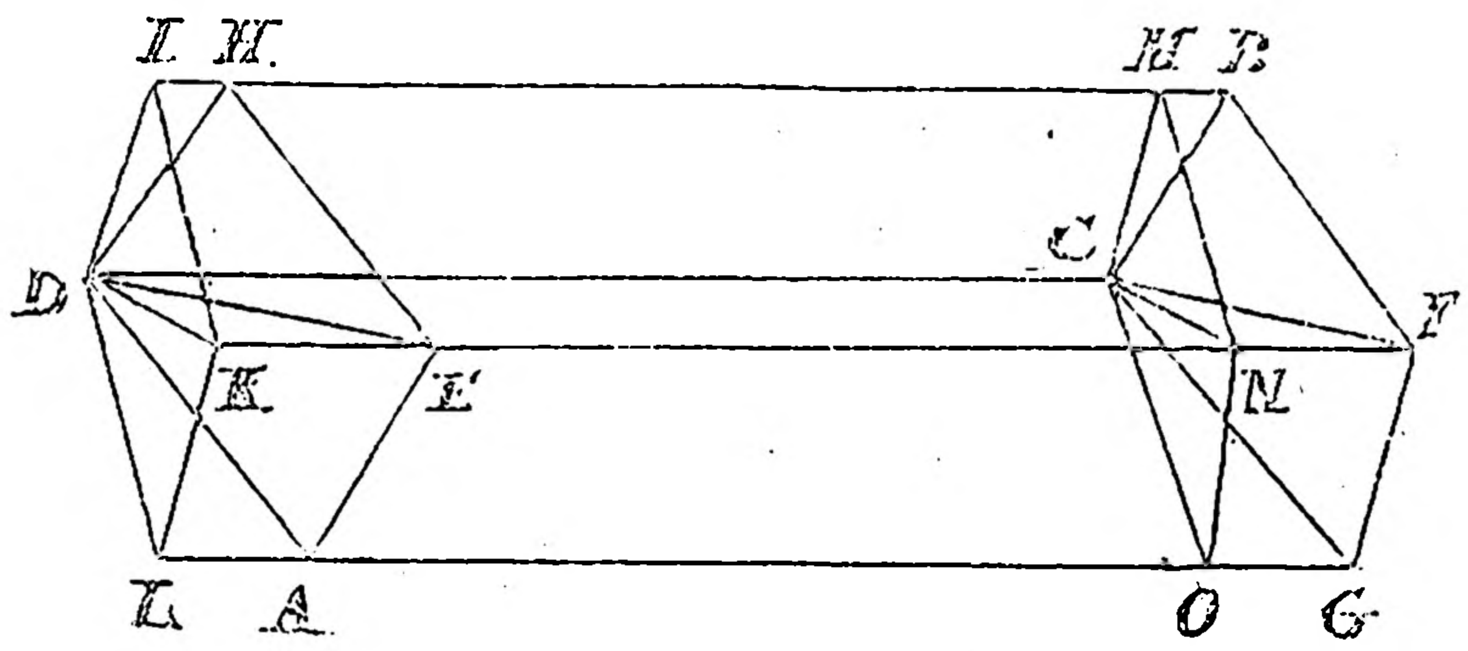


Доказат. Пусть ABC и DEF плоскостью DK пересѣкаются по прямымъ AB и DE. Въ произвольной точкѣ G прямой AB, возставимъ къ ней, въ плоскости DK перпендикуляръ GH, и въ плоскокости AC перпендикуляръ GL; LGH будетъ наклоненіемъ плоскостей AC и DK. Продолжимъ HG до M, и продолжимъ также плоскость, проведенную чрезъ GL, GH, до пересѣченія ея MN съ плоскостью DF. Слѣдовательно AB и DE параллельны (кн. 11, пред. 16). Но AB перпендикулярна къ GL и GH, слѣдовательно и къ плоскости, въ которой онѣ лежатъ; слѣдовательно и DE перпендикулярна къ этой плоскости, а потому $\angle DMN$, $\angle DMG$ суть углы прямые, а $\angle NMG$ есть наклоненіе плоскостей DF и DK. Слѣдовательно NM и GL параллельны (кн. 11, пред. 16), откуда $\angle LGH = \angle NMG$. А потому плоскости AC и DF одинаково наклонены къ плоскости DK.

2. Всякій параллелепипедъ AB, діагональною плоскостью $CDEF$, дѣлится пополамъ (фиг. 475).

Доказат. Если ребра перпендикулярны къ основной плоскости, то призмы могутъ быть сложены одна съ другой, и совершенно равны между собою.

Фиг. 475.

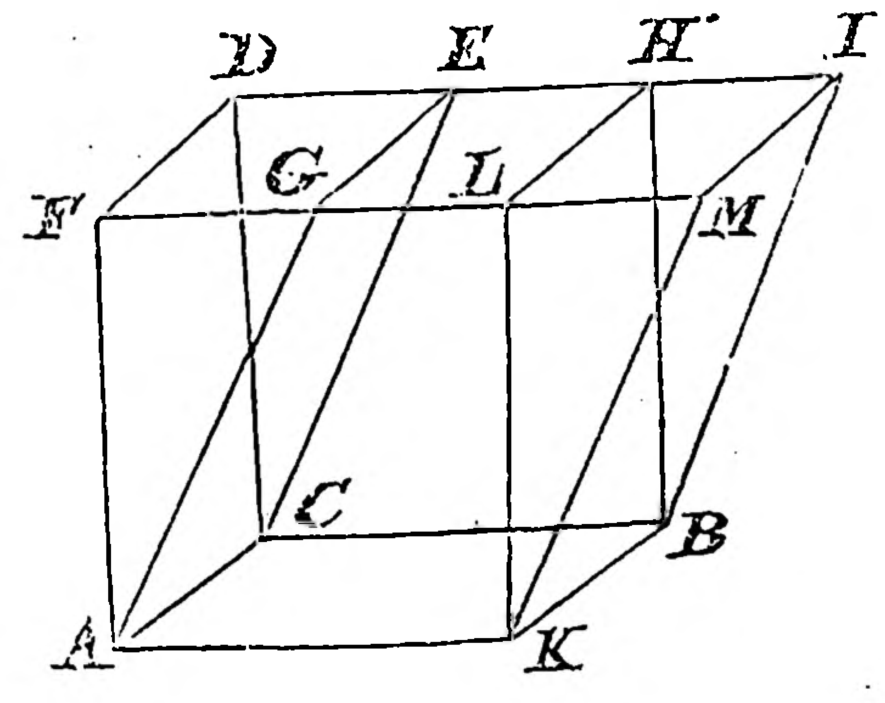


Если же ребра не перпендикулярны къ AH; то проведя чрезъ точку D плоскость перпендикулярную DC, ребра AG, EF, HB будутъ также перпендикулярны къ ней. Эта плоскость пересѣчетъ плоскости BE по IK, FA по KL, DG по DL, DB по DI, DF по DK. Плоскость ей параллельная, проведенная чрезъ C, пересѣчетъ тѣ же самыя плоскости по MN, NO, OC, CM, CN.

Тѣла $CFGON$, $DEALK$ равны и подобны; потому что $OF \cong LE$, $CFG \cong DEA$, $CFN \cong DEK$, $CNO \cong DKL$, $CGO \cong DAL$. Равныя плоскости въ одномъ и томъ же порядкѣ слѣдуетъ одна за другой. Двѣ соотвѣтствующія другъ другу плоскости имѣютъ одинаковое наклоненіе, такъ какъ CFG, DEA, равно какъ и CNO, DKL, будучи параллельными плоскостями имѣютъ одинаковое наклоненіе къ FL. Далѣе, CFN, DEK, какъ части плоскости DF, равно какъ CGO, DAL, какъ части плоскости DG, имѣютъ одинаковыя наклоненія къ LF и т. д. Слѣдовательно тѣла могутъ быть сложены, а потому онѣ равны и подобны. Точно такимъ же образомъ $CBFNM$ и $DHEKI$ равны и подобны между собою. Слѣдовательно $DEACNO + CNOFG = DEACNO + DEALK$, или призма $DEACGF =$ призмѣ $DKLCNO$. Точно такимъ же образомъ призма $DHECBF =$ призмѣ $DIKCMN$. Призмы $DKLCNO$, $DIKCMN$, какъ половины параллелепипеда LM, ребра котораго перпендикулярны къ LI, равны между собою; слѣдовательно также равны между собою призмы $DEACFG$, $DHECBF$. А потому параллелепипедъ AB плоскостью $CDEF$ дѣлится пополамъ.

Предложеніе 29. Параллелепипеды AH и AI, имѣющіе одинаковыя высоты и одно и тоже основаніе AB, коихъ ребра AF, AG, KL, KM и CD, CE, BH, BI, стоящія на основной плоскости оканчиваются на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ FM, DI, равны между собою (фиг. 476).

Фиг. 476.



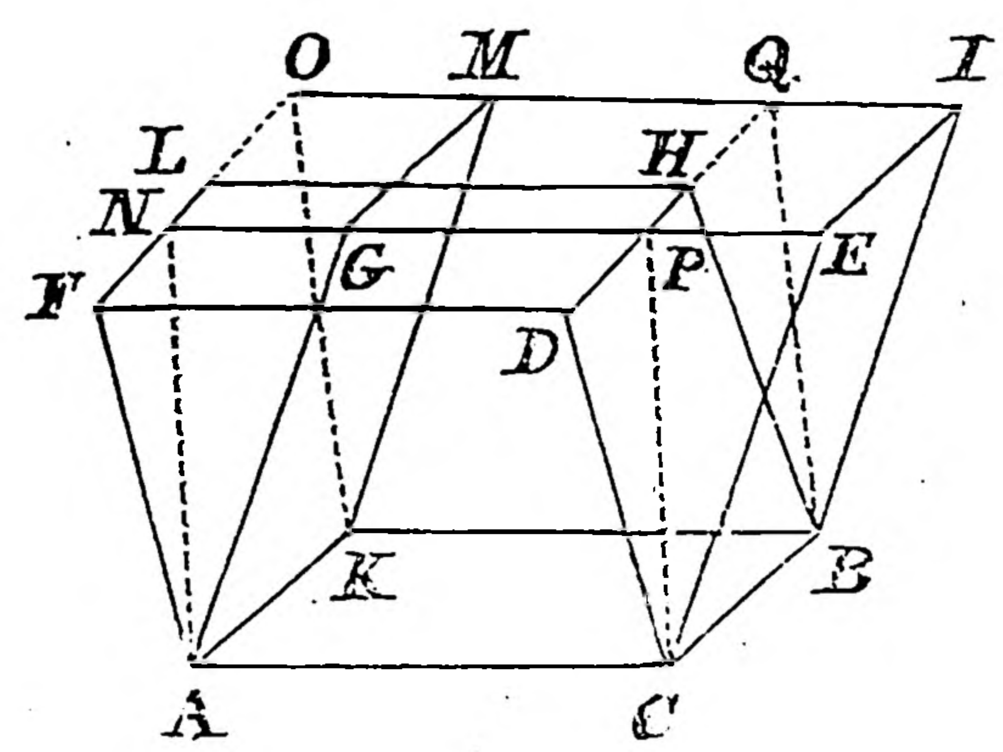
Доказат. Такъ какъ CH, CI суть параллелограммы: то $CB=DH=EI$

(кн. 1, пред. 34); слѣдовательно, отнявъ EH, $DE=HI$, а потому $\triangle DEC=$ $=\triangle HIB$ (кн. 1, пред. 8) и $DG=HM$ (кн. 1, пред. 36). По той же причинѣ $\triangle AFG=\triangle KLM$, и $CF=BL$, $CG=BM$. Слѣдовательно призма $EFAC$=призмѣ $ILKB$ (кн. 11, опред. 10); а потому, придавъ къ обѣимъ тѣло $ABHG$, получимъ $AH=AI$.

Примѣч. 10. Легко доказать что призмы $EFAC$, $ILKB$ могутъ быть сложены.

Предложеніе 30. Параллелепипеды $ABHF$, $ABIG$, имѣющіе одинаковыя высоты и одно и тоже основаніе AB, коихъ ребра AF, AG, CD, CE и KL, KM, HB, BI, стоящія на основной плоскости, оканчиваются не на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ, равны между собою (фиг. 477).

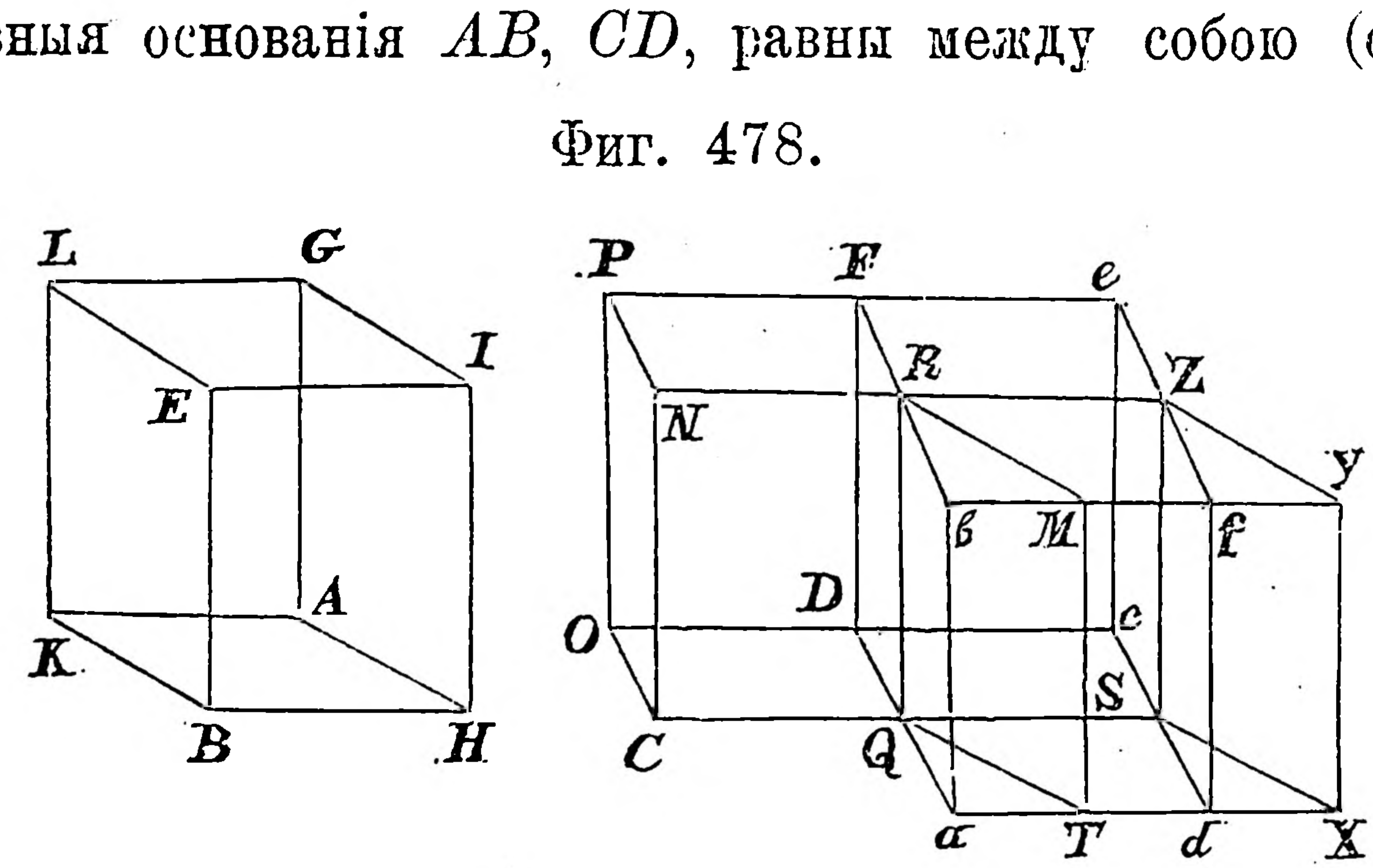
Фиг. 477.



Доказат. Продолжимъ EG, IM, FL, DH до тѣхъ поръ, пока они не встрѣтятся въ N, O, Q, и проведемъ NA, OK, PC, QB: то образуется третій параллелепипедъ $ABQN$, имѣющій съ двумя предъидущими одну и туже высоту и одно и тоже основаніе. Но ребра третьяго и перваго оканчиваются на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ FO, DQ, а ребра третьяго и втораго на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ NE, OI. Слѣдовательно $ABHF=$ $=ABQN$ и $ABQN=ABIG$ (кн. 11, пред. 29); а потому $ABHF=ABIG$.

Предложеніе 31. Параллелепипеды $ABEG$, $CDFN$, имѣющіе равныя высоты и равныя основанія AB, CD, равны между собою (фиг. 478).

Фиг. 478.



Доказат. Случай первый. Пусть ребра AG, HI, BE, KL; OP, DF,

CN, QR, стоящія на плоскости основанія, къ ней перпендикулярны; поэтому углы AKB, CQD равны между собою или же неравны.

1. Если эти углы неравны, напр. $\angle AKB < \angle CQD$. Продолжимъ CQ до S, построимъ при QS, въ точкѣ Q, уголъ $SQT = AKB$, сдѣлаемъ $QS = AK$, $QT = KB$; построимъ параллелограммъ TS, и параллелепипедъ $TSZM$.

Изъ этого построенія слѣдуетъ, что $QS = AK$, $QT = KB$ и $\angle SQT = \angle AKB$, а потому параллелограммы TS, HK равны и подобны. Но $QS = AK$, $QR = KL$, и эти линіи заключаютъ прямые углы, слѣдовательно параллелограммы QZ, AL равны и подобны. По той же причинѣ параллелограммы RT, KE также равны и подобны. Слѣдовательно три параллелограмма тѣла ZT равны и подобны тремъ параллелограммамъ тѣла AE, а потому также равны и подобны между собою параллелограммы противолежащіе первымъ (кн. 11, пред. 24), слѣдовательно $ST = AE$ (кн. 11, опред. 10).

Продолжимъ DQ, XT до ихъ встрѣчи въ a, чрезъ S проведемъ Sd параллельную Da; продолжимъ OD, dS, до ихъ пересѣченія въ c, и построимъ тѣла Za, Qe.

Тѣла Za, ZT имѣютъ общее основаніе ZQ, параллельное плоскости aY, и равной высоты, боковыя же ихъ ребра Qa, QT; Sd, SX; Rb, RM, Zf, ZY оканчиваются на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ линіяхъ aX, bY, то $Za = ZT$ (кн. 11, пред. 29). Но по выше доказанному $ZT = AE$, слѣдовательно $Za = AE$.

Такъ какъ $ST = Sa$ (кн. 1, пред. 35), а $ST = AB = CD$, то $Sa = CD$, слѣдовательно $CD : DS = Sa : DS$ (кн. 5, пред. 7).

Такъ какъ тѣло Ce разсѣкается, плоскостью FQ, параллельной CP и Se, то $CD : DS = CF : Qe$ (кн. 11, пред. 25). Точно также тѣло ae разсѣкается плоскостью QZ, параллельной De и af, то $Sa : DS = Za : Qe$ (кн. 11, пред. 25). Но мы имѣли выше: $CD : DS = Sa : DS$, слѣдовательно $CF : Qe = Za : Qe$ (кн. 5, пред. 11), а потому $CF = Za$ (кн. 5, пред. 9). Но по выше доказанному $Za = AE$; слѣдовательно $CF = AC$.

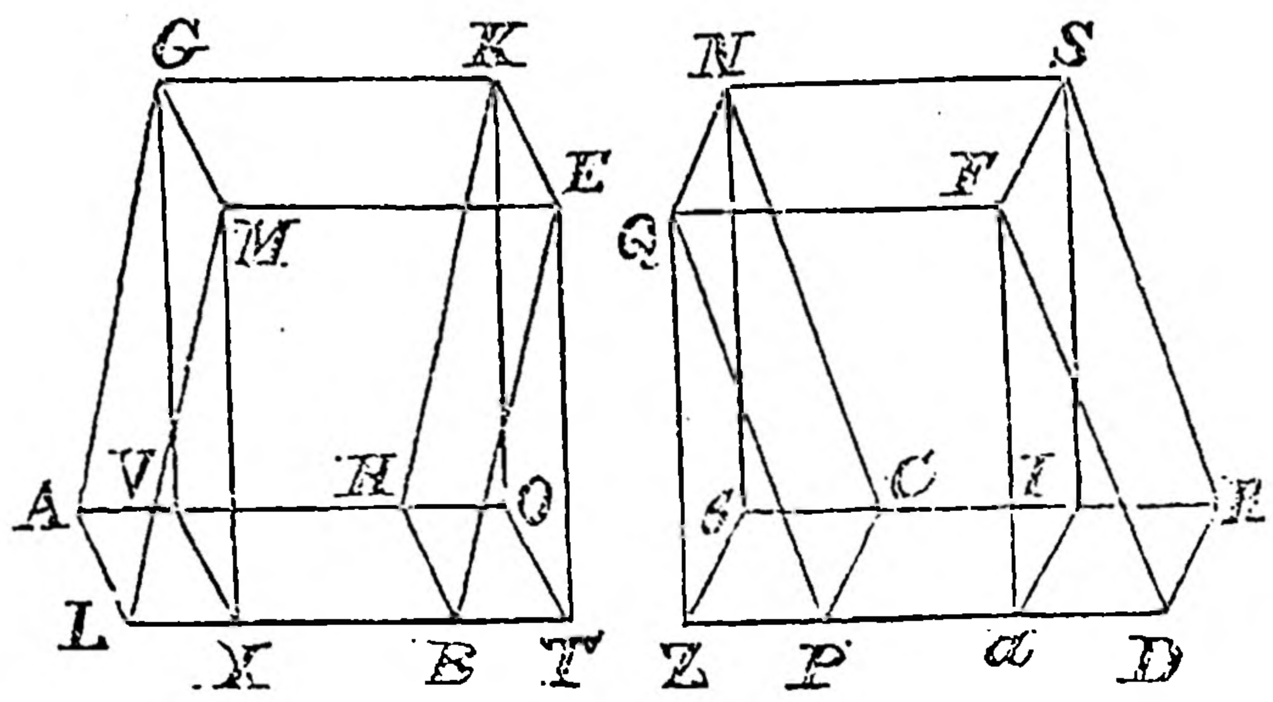
2. Если углы AKB и CQD равны. Продолживъ CQ, DQ, такъ чтобы $QS = AK$, и $Qa = KB$. $\angle SQa = \angle CQD = \angle AKB$ (кн. 1, пред. 15), слѣдовательно, подобно предъидущему, можно доказать, что $AE = Za$, и $CF = Za$, а потому и $CF = AE$.

Случай второй. Ребра AG, HK, BE, LM; PQ, CN, RS, DF, стоящія на плоскостяхъ основаній, къ нимъ не перпендикулярны (фиг. 479).

Опустимъ изъ точекъ K, G, M, E и S, N, Q, F на плоскости основаній AB, CD перпендикуляры KO, GV, MX, ET; SI, Nb, QZ, Fa, и проведемъ OT, VX, TX, OV; aI, Zb, Za, bI.

Такъ какъ тѣла KX, SZ лежатъ на равныхъ основаніяхъ, имѣютъ

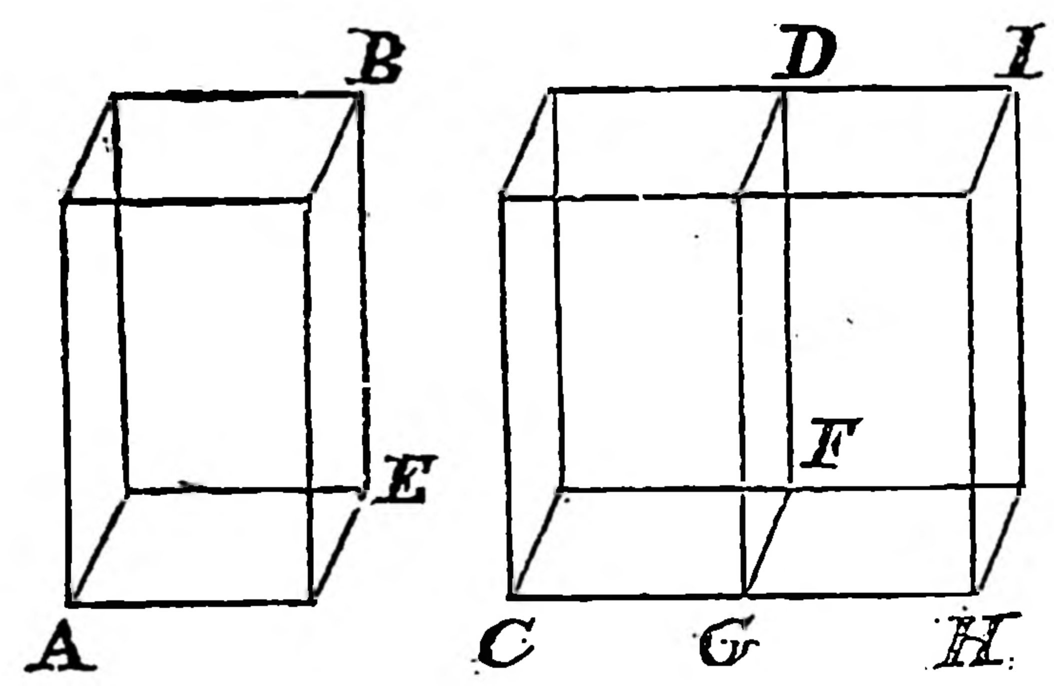
Фиг. 479.



равныя высоты, ребра же ихъ перпендикулярны къ плоскостямъ основаній, то они, на основаніи перваго случая, равны. А потому $KX=AE$ и $SZ=CF$ (кн. 11, пред. 30), слѣдовательно $AE=CF$.

Предложеніе 32. Параллелепипеды AB и CD, имѣющіе равныя высоты, относятся между собою какъ площади основаній AE и CF (фиг. 480).

Фиг. 480.



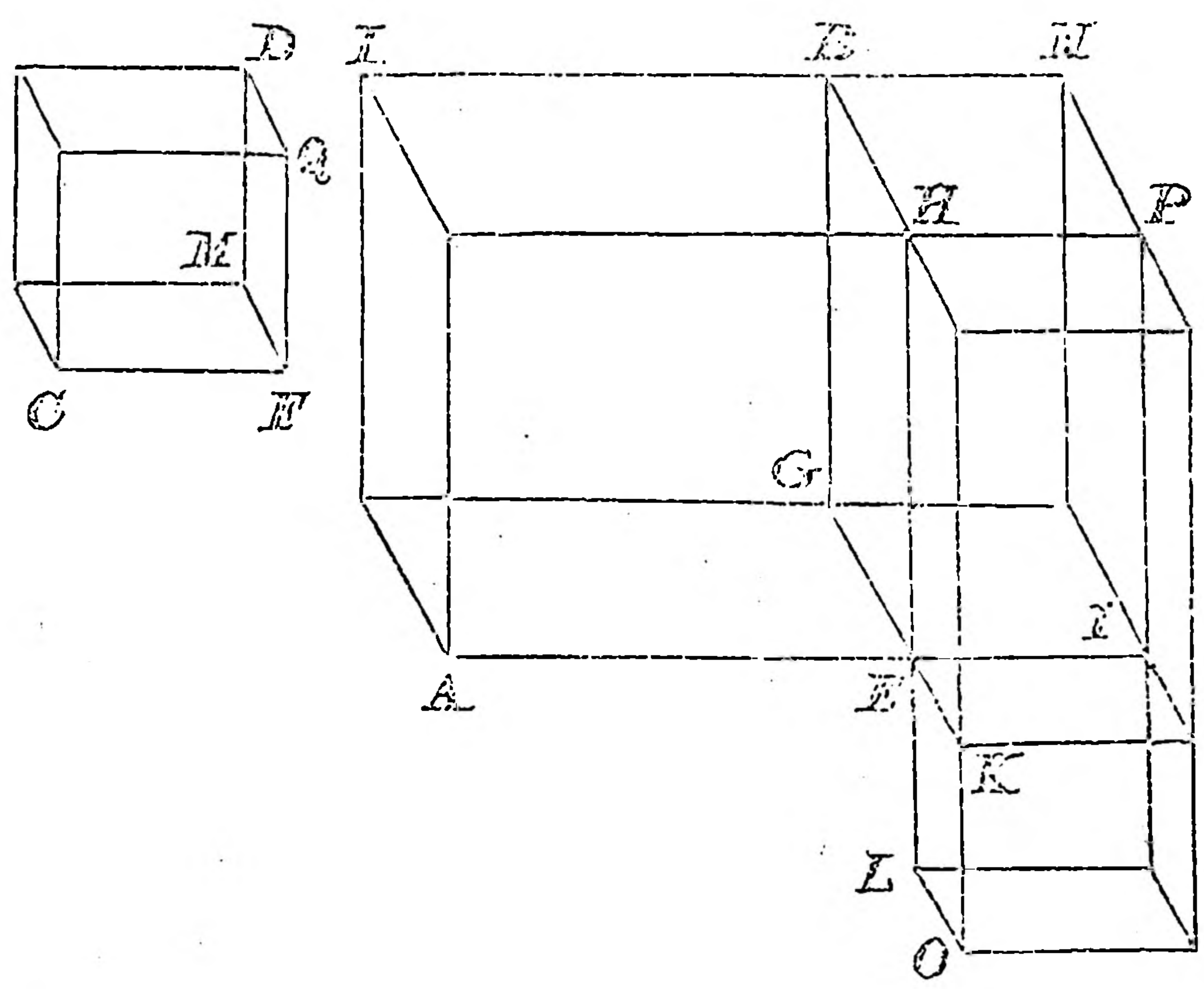
Доказат. На GF построимъ параллелограмъ $FH=AE$ (кн. 1, пред. 45) и построивъ тѣло GI, найдемъ что $AB=GI$ (кн. 11, пред. 31).

Такъ какъ тѣло CI разсѣкается плоскостью DG, параллельной HI, то $GI:CD=FH:CF$ (кн. 11, пред. 25). Но $AB=GI$, и $AE=FH$, слѣдовательно $AB:CD=AE:CF$.

Предложеніе 33. Подобные параллелепипеды AB и CD, относятся между собою какъ утроенное отношеніе сходственныхъ сторонъ AE и CF (фиг. 481).

Доказат. Продолжимъ AE, GE, HE, до тѣхъ поръ пока $EI=CF$, $EK=FM$, $EL=FQ$. Построимъ параллелограмъ IK, равно какъ и тѣло IO; построимъ также параллелограмъ GI, и на площадяхъ основаній GI и IK, построимъ тѣла EN, KP, равной высоты съ тѣломъ AB. Тѣла AB и CD подобны, а потому углы AEG, CFM равны, слѣдовательно также $\angle IEK=\angle CFM$, но $EI=CF$, и $EK=FM$, изъ этого слѣдуетъ, что IK, CM равны и подобны (кн. 6, опред. 1). По той же причинѣ IL, CQ, равно какъ и OE, DF равны и подобны. А потому три параллелограмма тѣла IO равны и подобны тремъ параллелограммамъ тѣла CD, равно какъ и противолежащіе первымъ (кн. 11, пред, 24); слѣдовательно IO, CD равны и подобны (кн. 11, опред. 10).

Фиг. 481.



Такъ какъ $AB \backsim CD$, то:

$AE:CF=EG:FM=EH:FQ$ (кн. 11, опред. 9 и кн. 6, опред. 1)

но:

$$CF=EI,\ FM=EK,\ FQ=EL$$

слѣдовательно:

$$AE:EI=EG:EK=EH:EL$$

Но:

$$\left.\begin{array}{l} AE:EI=AG:GI \\ EG:EK=GI:IK \\ EH:EL=PE:IL \end{array}\right\} \text{(кн. 6, пред. 1)}$$

Слѣдовательно:

$$AG:GI=GI:IK=PE:IL$$

Но:

$$\left.\begin{array}{l} AG:GI=AB:EN \\ GI:IK=EN:PK \\ PE:IL=PK:IO \end{array}\right\} \text{(кн. 11, пред. 32)}$$

Слѣдовательно:

$$AB:EN=EN:PK=PK:IO$$

а потому:

$$AB:IO=(AB:EN)^3$$

но:

$$AB:EN=AG:GI=AE:EI$$

слѣдовательно:

$$AB : IO = (AE : EI)^3$$

Но мы имѣли:

$$IO = CD \quad \text{и} \quad EI = CF$$

Слѣдовательно:

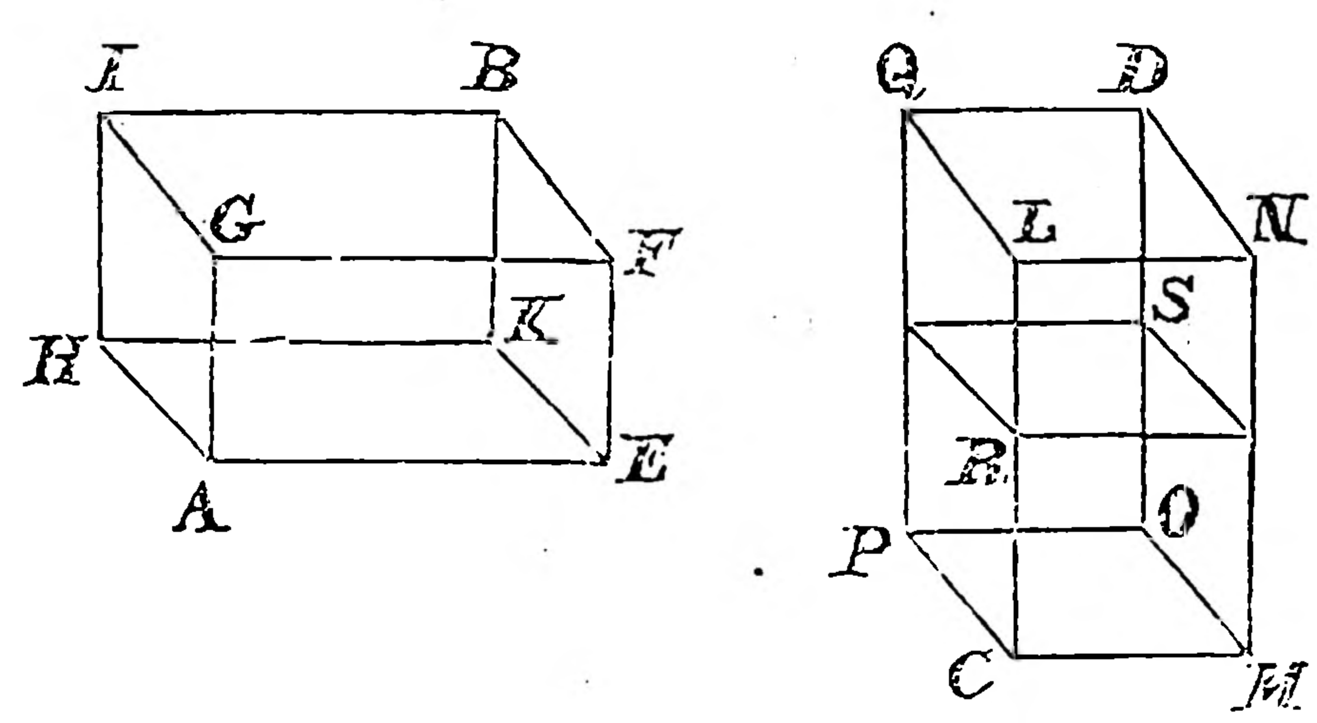
$$AB : CD = (AE : CF)^3$$

Замѣчаніе. Отсюда слѣдуетъ, что изъ четырехъ, находящихся въ непрерывной пропорціи, прямыхъ линій, первая относится къ четвертой, какъ параллелепипедъ построенный на первой относится къ подобному и подобно расположенному параллелепипеду, построенному на второй, потому что отношеніе первой къ четвертой равно утроенному отношенію первой ко второй.

Предложеніе 34. Въ равныхъ параллелепипедахъ AB и CD, площади основаній AK и CO обратно пропорціональны высотамъ. А если площади основаній AK и CO обратно пропорціональны высотамъ, то параллелепипеды AB и CD, равны.

Первый случай. Пусть ребра AG, EF, KB, HI, и CL, MN, OD, PQ перпендикулярны къ площадямъ основаній AK и CO, то высоты тѣлъ будутъ AG и CL (фиг. 482).

Фиг. 482.



1. Если $AB = CD$, то $AK : CO = CL : AG$.

a) Площади основаній равны. Такъ какъ $AK = CO$ и $AB = CD$, то $CL = AG$; въ противномъ бы случаѣ AB и CD были бы неравны (кн. 11, пред. 31), что противорѣчитъ положенію. А потому очевидно что, $AK : CO = CL : AG$.

b) Площади основаній неравны. Пусть $AK > CO$, то $CL > AG$, потому что $AB = CD$; въ противномъ бы случаѣ AB и CD не могутъ быть равными, что противорѣчитъ положенію. Сдѣлаемъ $CR = AG$, и построимъ параллелепипедъ CS.

Такъ какъ $AB = CD$, то:

$$AB : CS = CD : CS \text{ (кн. 5, пред. 7)}$$

Но:

$$AB : CS = AK : CO \text{ (кн. 11, пред. 32)}$$

и

$CD : CS = CQ : PR = CL : CR$ (кн. 11, пред. 25 и кн. 6, пред. 1)

слѣдовательно:

$$AK : CO = CL : CR$$

слѣдовательно и $AK : CO = CL : AG$, потому что $CR = AG$.

2. Если $AK : CO = CL : AG$, то $AB = CD$.

a) Площади основаній равны. Такъ какъ $AK = CO$, и $AK : CO = CL : AG$, то $CL = AG$, слѣдовательно $AB = CD$ (кн. 11, пред. 32).

b) Площади основаній неравны. Пусть $AK > CO$, а потому $CL > AG$. Сдѣлаемъ $CR = AG$, и построимъ параллелепипедъ CS.

Такъ какъ $CR = AG$, то получимъ на основаніи нашего положенія:

$$AK : CO = CL : CR$$

Но:

$$AK : CO = AB : CS \text{ (кн. 11, пред. 32)}$$

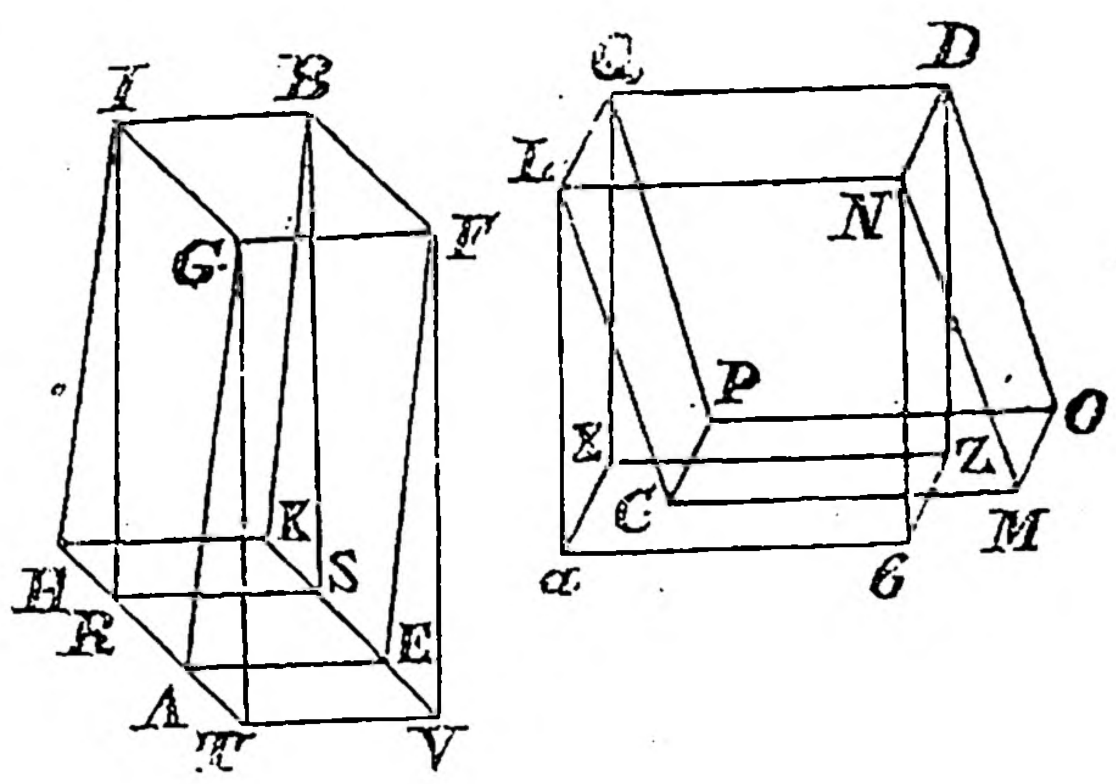
и

$CL : CR = CQ : PR = CD : CS$ (кн. 6, пред. 1 и кн. 11, пред. 25).

Слѣдовательно: $AB : CS = CD : CS$; а потому $AB = CD$ (кн. 5, пред. 9).

Второй случай. Пусть ребра AG, EF, KB, HI и CL, MN, OD, PQ не перпендикулярны къ площадямъ основаній AK и CO (фиг. 483).

Фиг. 483.



На плоскости основаній AK и CO опустимъ перпендикуляры изъ точекъ G, F, B, I и L, N, D, Q, которые пересѣкутъ эти плоскости въ точкахъ T, V, S, R и a, b, Z, X. Построимъ параллелепипеды BT и Da; тѣла BT и AB имѣютъ высотою TG, а Da и CD имѣютъ высотою aL (кн. 6, опред. 4).

1. Если $AB = CD$, то $AK : CO = aL : TG$.

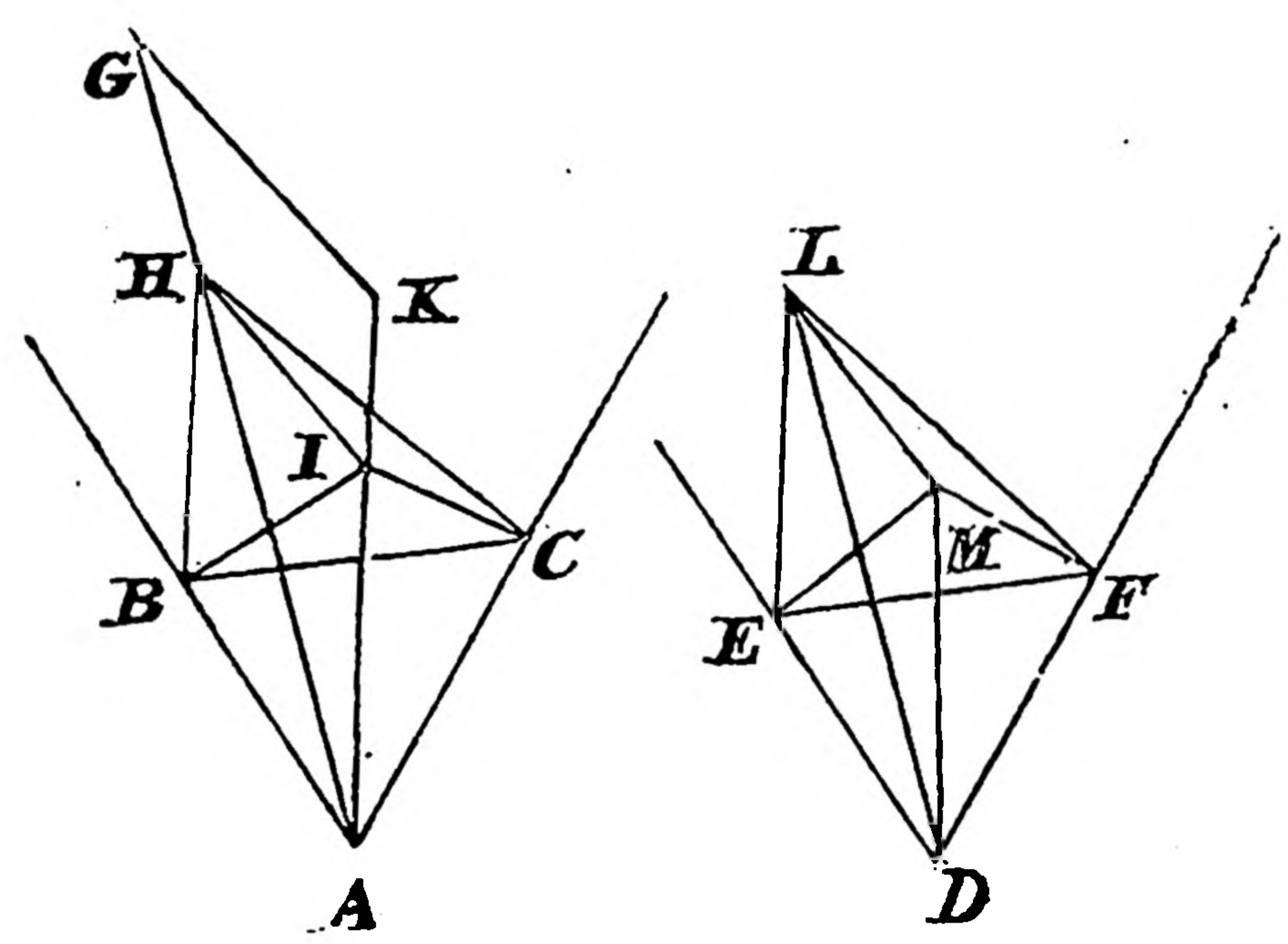
Такъ какъ $AB = CD$, а $AB = BT$ (кн. 11, пред. 30) и $CD = Da$, то $BT = Da$, слѣдовательно, на основаніи перваго случая, $TS : aZ = aL : TG$. Но $TS = AK$ и $aZ = CO$ (кн. 11, пред. 24), слѣдовательно $AK : CO = aL : TG$.

2. Если $AK : CO = aL : TG$, то $AB = CD$.

Такъ какъ $AK = TS$, и $CO = aZ$ (кн. 11, пред. 24), то получимъ на основаніи нашего положенія $TS : aZ = aL : TG$, слѣдовательно, на основаніи перваго случая $TB=Da$. Но $TB=AB$ и $Da=CD$ (кн. 11, пред. 30), слѣдовательно $AB=CD$.

Предложеніе 35. Если чрезъ вершины A и D двухъ плоскихъ угловъ $\angle BAC$ и $\angle EDF$ проведемъ двѣ прямыя линіи AG и DL, образующія, со сторонами данныхъ угловъ, равные углы $\angle BAG$, $\angle EDL$ и $\angle GAC$, $\angle LDF$, и если изъ произвольныхъ точекъ G и L, выше сказанныхъ прямыхъ, опустимъ перпендикуляры GK и LM на плоскости данныхъ угловъ, и если чрезъ основанія ихъ A и D проведемъ прямыя KA и MD, то эти послѣднія прямыя съ проведенными AG и DL образуютъ равные углы $\angle KAG$ и $\angle MDL$ (фиг. 484).

Фиг. 484.



Доказат. Отложимъ $AH=DL$ и чрезъ точку H проведемъ прямую HI параллельную GK; прямая HI встрѣчающая плоскость проведенную чрезъ BAC въ точкѣ I, равно какъ и прямая GK къ ней перпендикулярны (кн. 11, пред. 8). Изъ точекъ I, M опустимъ на прямыя AB, AC, DE, DF перпендикуляры IB, IC, ME, MF, и проведемъ прямыя HC, CB, BH, LF, FE, EL. Такъ какъ HI перпендикулярна къ плоскости проведенной чрезъ BAC, слѣдовательно она перпендикулярна къ прямымъ IA, IB, IC (кн. 11, опред. 3), то (кн. 1, пред. 47) $\square HA=\square HI+\square IA$, но $\square IA=\square IC+\square CA$, слѣдовательно $\square HA=\square HI+\square IC+\square CA$; а потому, такъ какъ $\square HI+\square IC=\square HC$, то и $\square HA=\square HC+\square CA$, слѣдовательно $\angle HCA=d$ (кн. 1, пред. 48). По той же причинѣ $\angle LFD=d$. Слѣдовательно $\angle HCA=\angle LFD$. Но по положенію $\angle HAC=\angle LDF$, и $AH=DL$, слѣдовательно $AC=DF$ (кн. 1, пред. 26).

Далѣе, такъ какъ $\square AH=\square AI+\square IH$, но $\square AI=\square AB+\square BI$, то $\square AH=\square AB+\square BI+\square IH$; слѣдовательно, такъ какъ $\square BI+\square IH=\square BH$, то и $\square AH=\square AB+\square BH$, а потому $\angle ABH=d$ (кн. 1, пред. 48). По той же причинѣ $\angle DEL=d$. Слѣдовательно $\angle ABH=\angle DEL$. Но по положенію $\angle BAH=\angle EDL$ и $AH=DL$, слѣдовательно $AB=DE$ (кн. 1, пред. 26).

Итакъ $AB=DE$, $AC=DF$, а по положенію $\angle BAC=\angle EDF$; то

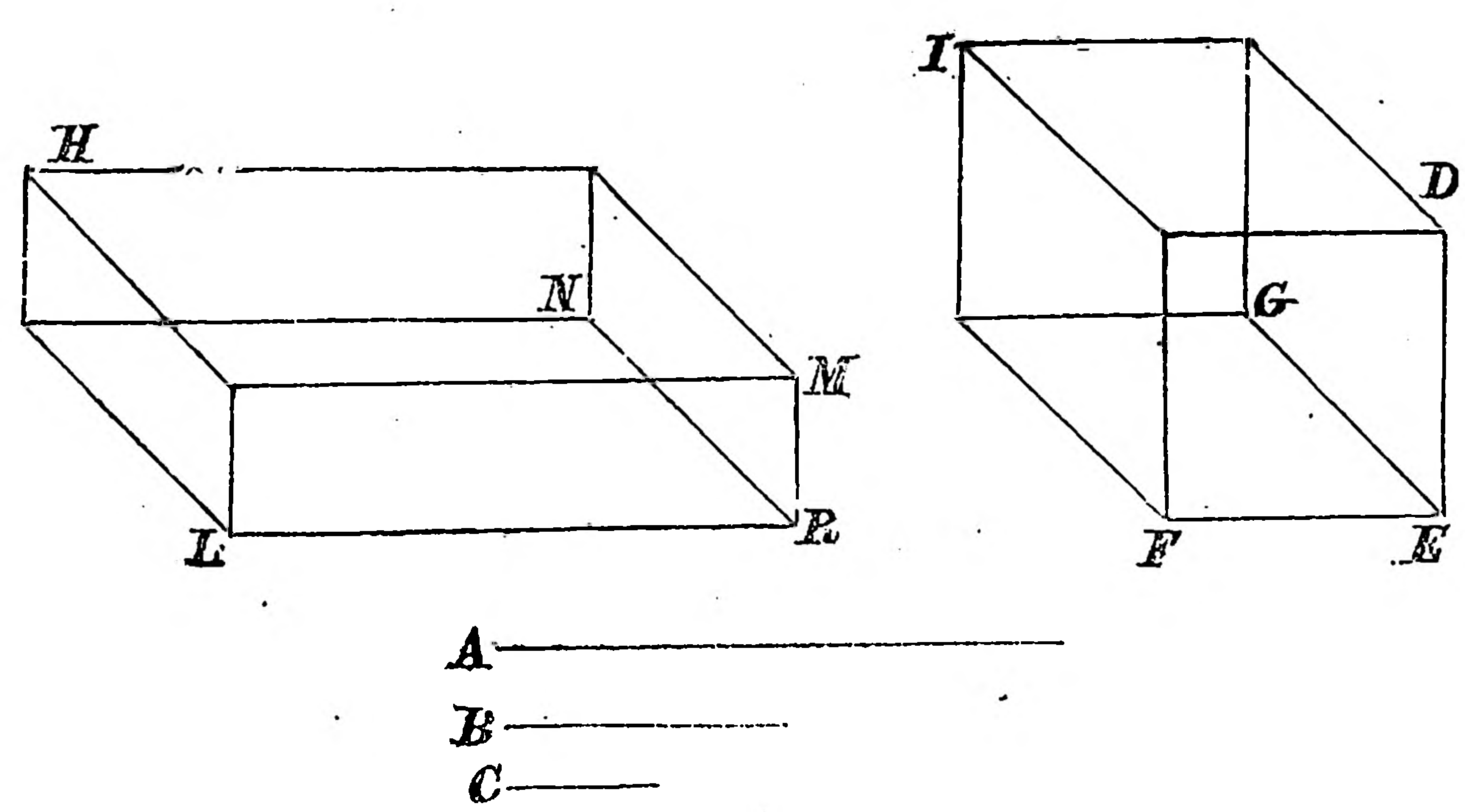
$BC=EF$ и $\angle ACB=\angle DFE$ (кн. 1, пред. 4); слѣдовательно, такъ какъ $\angle ICA=\angle MFD=d$, то и $\angle BCI=\angle EFM$. По той же причинѣ $\angle CBI=$ $=\angle FEM$, слѣдовательно $CI=FM$ (кн. 1, пред. 26). Но $AC=DF$ и $\angle ICA=\angle MFD$, а потому $AI=DM$ (кн. 1, пред. 4), слѣдовательно $\square AI=\square DM$.

Такъ какъ $\angle AIH$ и $\angle DML$ суть углы прямые, то $\square AH=\square AI+$ $+\square IH$ и $\square DL=\square DM+\square ML$; но $AH=DL$, а потому $\square AH=\square DL$, слѣдовательно $\square AI+\square IH=\square DM+\square ML$. Но по предъидущему $\square AI=$ $=\square DM$, слѣдовательно $\square IH=\square ML$, откуда $IH=ML$. Но по предъидущему $AI=DM$ и $HA=DL$, слѣдовательно $\angle HAI=\angle LDM$ (кн. 1, пред. 8).

Слѣдствіе. Отсюда ясно, что если изъ вершинъ A и D двухъ равныхъ плоскихъ угловъ BAC и EDF, проведемъ равныя прямыя AH и DL, образующія со сторонами данныхъ угловъ углы равные, то перпендикуляры HI и LM, опущенные изъ оконечностей H и L, проведенныхъ прямыхъ, будутъ равны.

Предложеніе 36. Если три прямыя A, B и C пропорціональны, то параллелепипедъ построенный на этихъ трехъ прямыхъ равенъ равноугольному параллелепипеду, построенному на средней B (фиг. 485).

Фиг. 485.

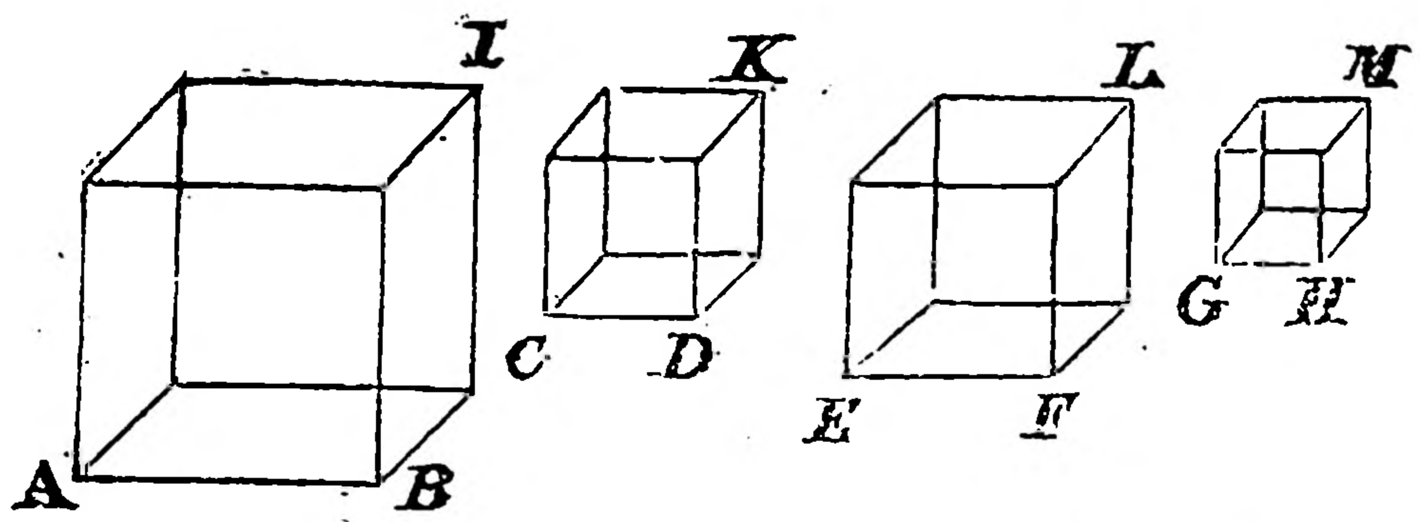


Доказат. Пусть E будетъ тѣлесный уголъ, составленный изъ трехъ плоскихъ угловъ $\angle DEG$, $\angle GEF$ и $\angle FED$. Отложимъ на каждой изъ прямыхъ DE, GE, EF части равныя B, и построимъ параллелепипедъ EI. Далѣе, пусть RL равна A; при прямой KL, въ точки K построимъ тѣлесный уголъ, составленный плоскими углами $\angle MRN$, $\angle NRL$, $\angle LRM$, равный тѣлесному углу E (кн. 11, пред. 26); отложимъ $RN=B$ и $RM=C$, и построимъ параллелепипедъ RH.

Такъ какъ $A:B=B:C$ и $A=RL$, $B=RN=EF=EG=ED$ и $C=RM$, то $RL:EF=ED:RM$. Но $\angle LRM=\angle DEF$, слѣдовательно параллелограммъ $ML=DF$ (кн. 6, пред. 14). Такъ какъ, чрезъ вершины $\angle DEF$ и $\angle LRM$, въ точкахъ E и R, проведены равныя прямыя EG и RN, такія, что $\angle LRN=\angle FEG$ и $\angle MRN=\angle DEG$, то перпендикуляры, опущенные изъ точекъ G и N на плоскости угловъ DEF и MRL, равны (кн. 11, пред. 35, слѣд.), а потому тѣла EI и RH равной высоты. Но по предъидущему площади ихъ основаній DF и ML равны, слѣдовательно $RH=EI$ (кн. 11, пред. 31).

Предложеніе 37. Если четыре прямыя линіи AB, CD, EF, GH пропорціональны, то построенные на нихъ параллелепипеды AI, CK, EL, GM подобные и подобно расположенные будутъ пропорціональны. Если построенные на четырехъ прямыхъ подобные и подобно расположенные параллелепипеды пропорціональны, то и прямыя линіи также пропорціональны (фиг. 486).

Фиг. 486.

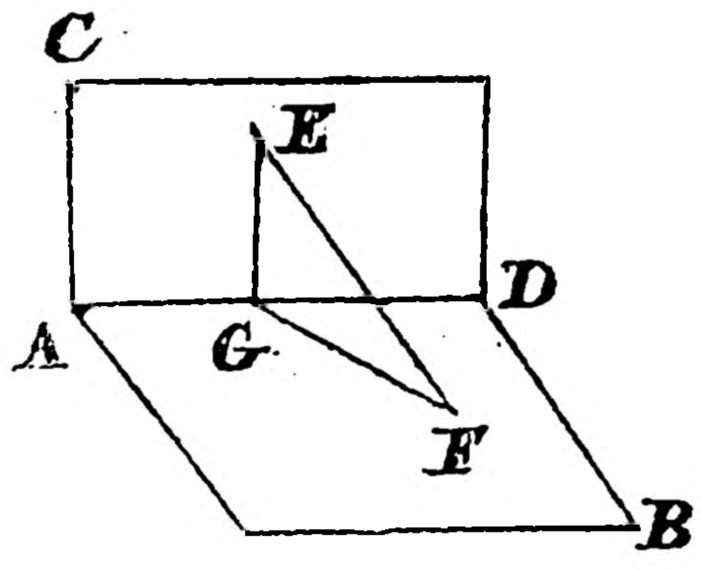


Доказат. 1. Такъ какъ $AI \backsim CK$, то $AI:CK=(AB:CD)^3$ (кн. 11, пред. 33). По той же причинѣ $EL:GM=(EF:GH)^3$. Но по положенію $AB:CD=EF:GH$, слѣдовательно $AI:CK=EL:GM$.

2. Такъ какъ $AI:CK=(AB:CD)^3$ и $EL:GM=(EF:GH)^3$ (кн. 11, пред. 33), и по положенію $AI:CK=EL:GM$, то $AB:CD=EF:GH$.

Предложеніе 38. Если двѣ плоскости AB и CD взаимно перпендикулярны, то перпендикуляръ, опущенный изъ произвольной точки E одной изъ плоскостей, на другую, встрѣчаетъ прямую AD взаимнаго пересѣченія двухъ плоскостей (фиг. 487).

Фиг. 487.

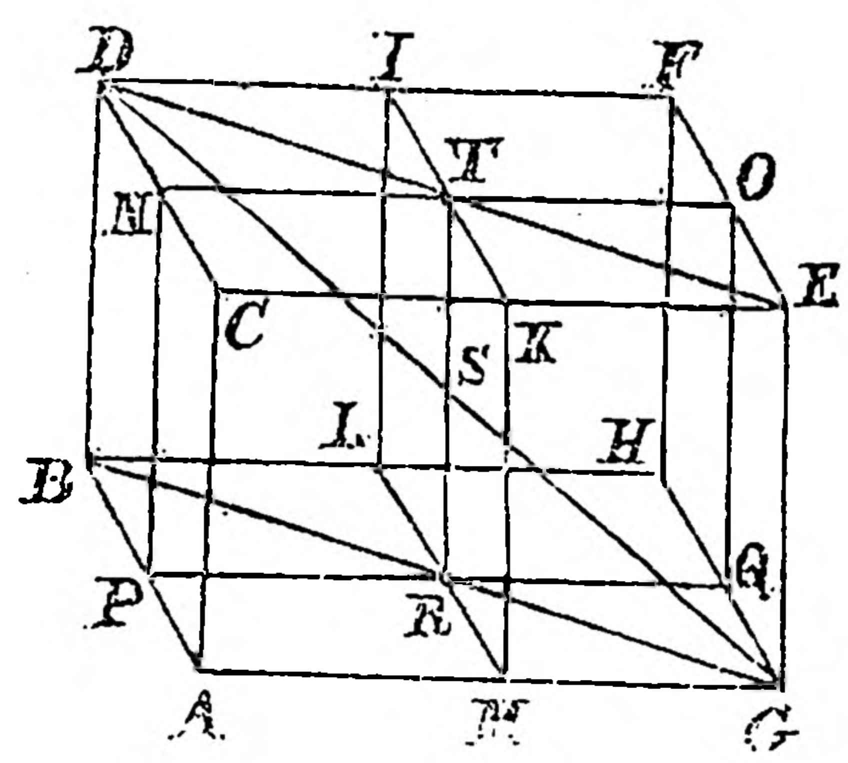


Доказат. Пусть этотъ перпендикуляръ не встрѣчаетъ плоскость AB на прямой AD, а пройдетъ внѣ этой послѣдней, какъ напр. прямая EF; изъ точки

F, плоскости AB, опустимъ перпендикуляръ FG на прямую AD, онъ будетъ перпендикуляренъ къ плоскости CD (кн. 11, опред. 4). Проведемъ EG, то $\angle FGE=d$, но $\angle EFG=d$, слѣдовательно въ $\triangle EFG$ два угла$=2d$, что невозможно (кн. 1, пред. 17). Слѣдовательно, перпендикуляръ опущенный изъ точки E на плоскость AB, не можетъ упасть внѣ прямой AD, а потому пересѣкаетъ ее.

Предложеніе 39. Если мы раздѣлимъ пополамъ противолежащія стороны AH и CF параллелепипеда AF, и проведемъ чрезъ точки дѣленія I, K, M, L, O, N, P, Q плоскости IM, NQ, то прямая пересѣченія TR этихъ плоскостей и діогональ параллелепипеда взаимно дѣлятся пополамъ (фиг. 488).

Фиг. 488.



Доказат. Проведемъ DT, TE, BR и RG. Такъ какъ DN и OE параллельны то $\angle DNT=\angle TOE$ (кн. 1, пред. 29). Но $DN=OE$, и $NT=TO$, слѣдовательно $DT=TE$ и $\angle NTD=\angle OTE$ (кн. 1, пред. 4), а потому DTE есть прямая линія (кн. 1, пред. 14). По той же причинѣ $BR=RG$, и BRG также прямая линія.

Такъ какъ CA равна и параллельна какъ DB, такъ и EG, то DB также равна и параллельна EG (кн. 11, пред. 9). Слѣдовательно DE и GB равны и параллельны (кн. 1, пред. 33), откуда прямыя DG и TR лежатъ въ одной плоскости (кн. 11, пред. 7).

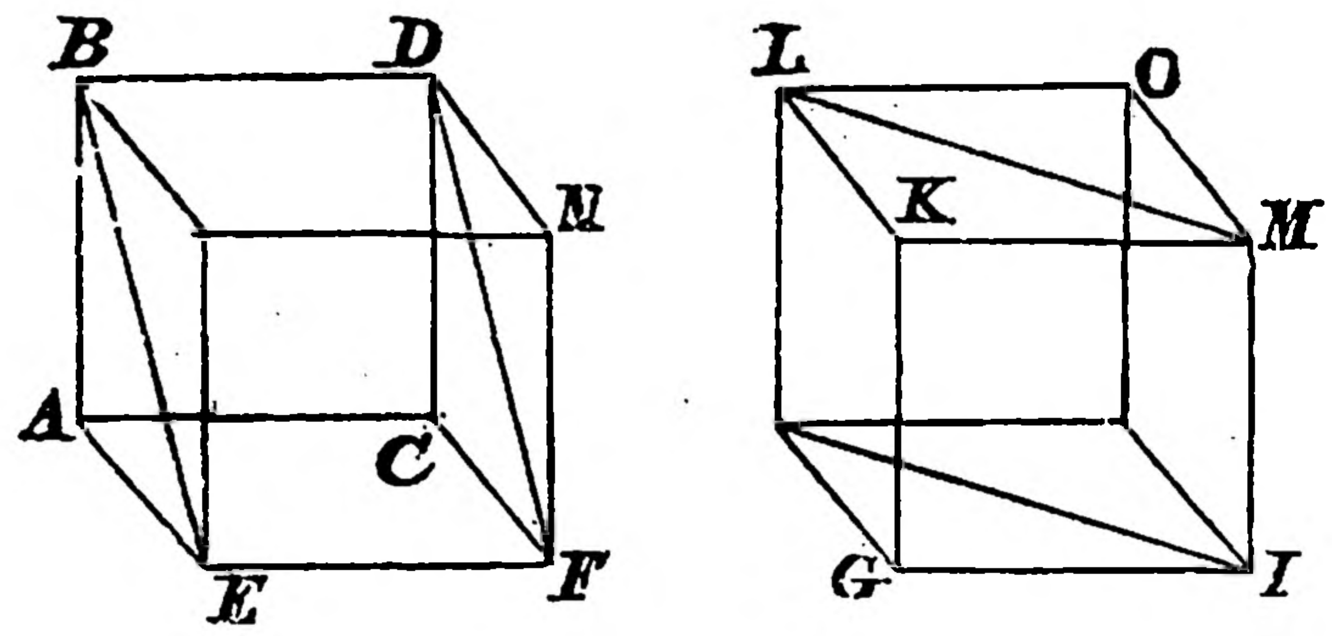
Такъ какъ DE и BG равны и параллельны, и $DT=TE$, $BR=RG$, то $DT=GR$. Но $\angle TDS=\angle SGR$ (кн. 1, пред. 29) и $\angle DST=\angle RSG$ (кн. 1, пред. 15), слѣдовательно $TS=SR$ и $DS=SG$ (кн. 1, пред. 26), а потому обѣ прямыя TR и DG, въ точкѣ S, взаимно дѣлятся пополамъ.

Предложеніе 40. Двѣ призмы $AEBCFD$ и $HGIMKL$ равной высоты, изъ коихъ одна имѣетъ основаніемъ параллелограмъ $AEFC$, а другая треугольникъ GHI, котораго удвоенная площадь равна площади параллелограмма, равны между собою (фиг. 489).

Доказат. Построимъ параллелепипеды ED и GO. По положенію параллелограмъ $AF=2\triangle GHI$ и $HI=2\triangle GHI$ (кн. 1, пред. 34), а потому

AF=*HI*; слѣдовательно, такъ какъ высоты равны, параллелепипеды *ED* и *GO* (кн. 11, пред. 31), а потому и ихъ половины равны. Но *AEFCBD*

Фиг. 489.



есть половина *ED*, а *GHIMKL* половина *GO* (кн. 11, пред. 28), слѣдовательно *AEFCBD*=*GHIMKL*.

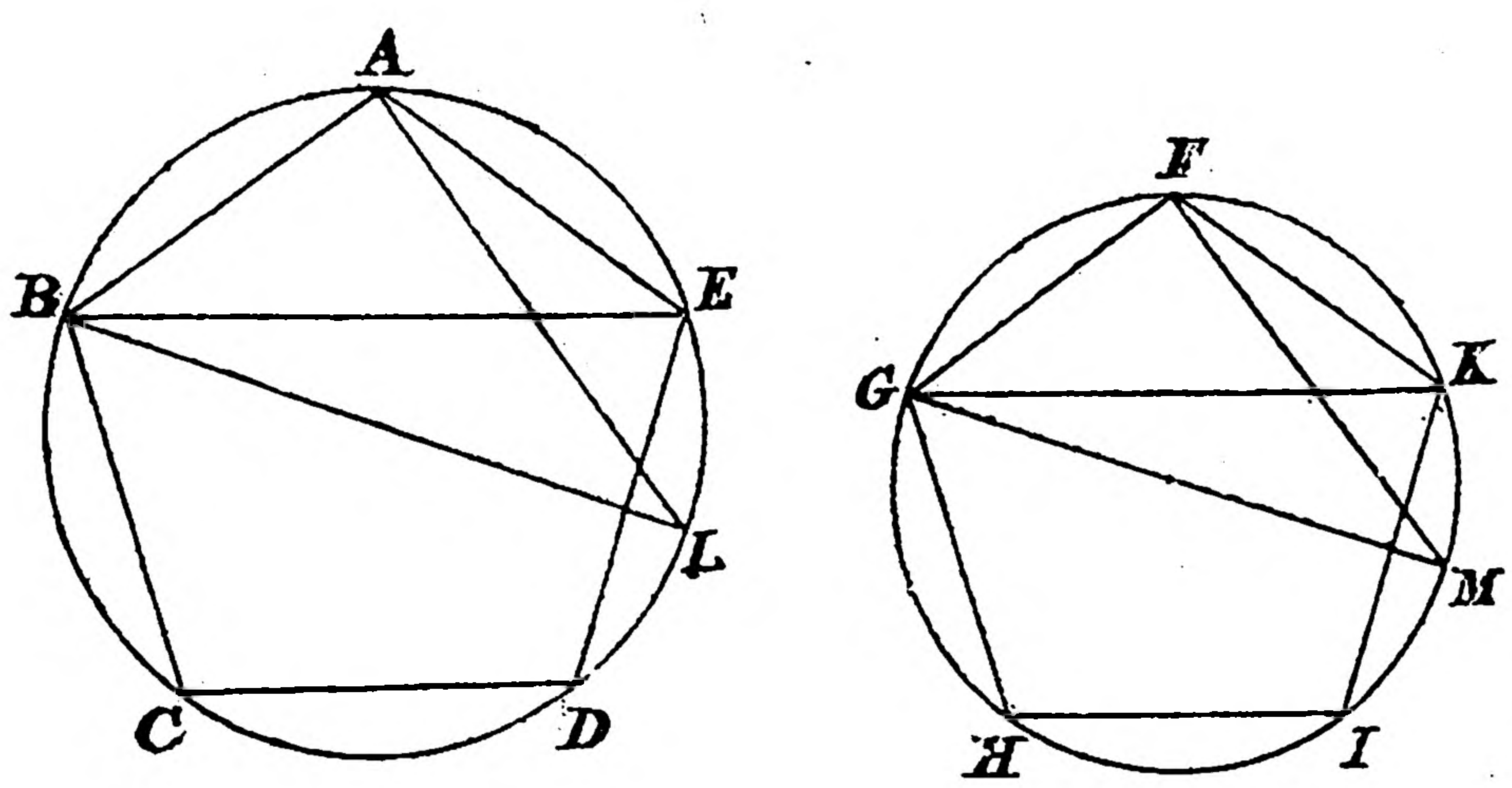
КНИГА XII.

Книга вторая „О тѣлахъ".

Предложенія.

Предложеніе 1. Подобные, вписанные въ круги многоугольники $ABCDE$ и $FGHIK$, относятся между собою, какъ квадраты діаметровъ BL и GM (фиг. 490).

Фиг. 490.



Доказат. Проведемъ прямыя BE, AL, GK, FM. Такъ какъ многоугольники подобны, то $\angle BAE = \angle GFK$ и $BA : AE = GF : FK$ (кн. 6, опред. 1); а потому треугольники ABE и FGK равноугольны (кн. 6, пред. 6), слѣдовательно $\angle AEB = \angle FKG$. Но $\angle AEB = \angle ALB$ и $\angle FKG = \angle FMG$ (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно $\angle ALB = \angle FMG$; но $\angle BAL = d = \angle GFM$ (кн. 3, пред. 31), слѣдовательно и $\angle ABL = \angle FGM$. Изъ этого слѣдуетъ что треугольники ABL и FGM равноугольны. Слѣдовательно:

$$BL : GM = BA : GF$$

а потому:

$$(BL : GM)^2 = (BA : GF)^2$$

Но:

$$(BL : GM)^2 = \square BL : \square GM \text{ (кн. 6, пред. 20)}$$

и

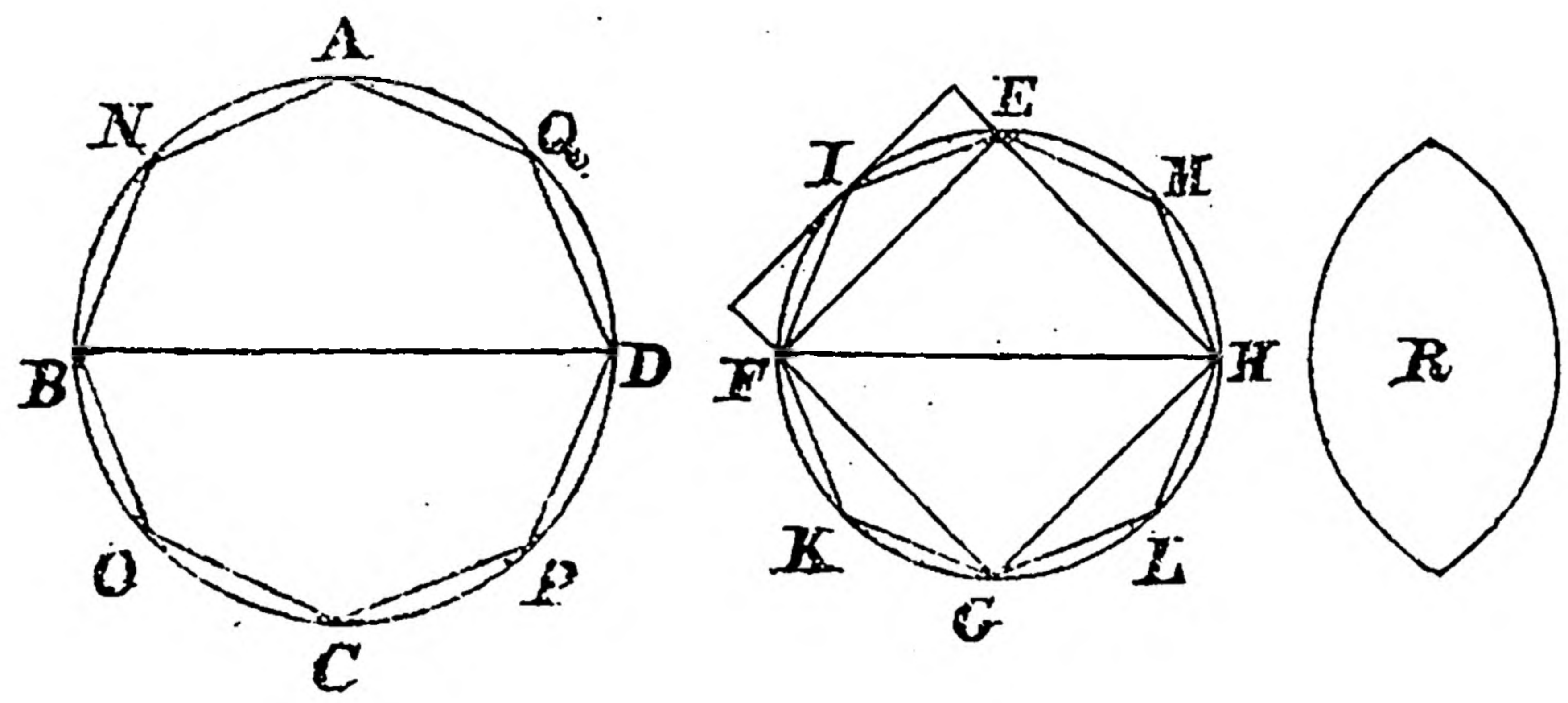
$$(BA : GF)^2 = ABCDE : FGHIK$$

Слѣдовательно также:

$$ABCDE : FGHIK = \square BL : \square GM.$$

Предложеніе 2. Круги $ABCD$ и $EFGH$ относятся между собою какъ квадраты ихъ діаметровъ BD и FH (фиг. 491).

Фиг. 491.



Доказат. Если бы не было $\square BD : \square FH =$ кр. $ABCD$: кр. $EFGH$, то пусть $\square BD : \square FH =$ кр. $ABCD : R$, гдѣ R есть площадь, которая или меньше или больше круга $EFGH$.

Случай первый. Пусть площадь $R <$ кр. $EFGH$, и $\square BD : \square FH =$ $=$ кр. $ABCD : R$.

Впишемъ въ кругъ $EFGH$ квадратъ $EFGH$ (кн. 4, пред. 6); то этотъ послѣдній будетъ больше полукруга. Чрезъ точки E, F, G, H проведемъ касательныя, то внутренній квадратъ $EFGH$ равенъ половинѣ внѣшняго (кн. 1, пред. 41). Но кругъ меньше внѣшняго квадрата, слѣдовательно внутренній квадратъ болѣе половины круга.

Раздѣлимъ пополамъ дуги EF, FG, GH, HE въ точкахъ I, K, L, M и проведемъ прямыя EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME, то каждый изъ полученныхъ треугольниковъ IFE, KGF, LHG, MEH больше половины сегмента въ который онъ вписанъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы проведемъ чрезъ точки I, K, L, M касательныя, и построимъ параллелограммы на EF, FG, GH, HE; то каждый изъ поименованныхъ треугольниковъ равенъ половинѣ параллелограмма, въ которомъ онъ находится. Но каждый сегментъ менѣе соотвѣтствующаго ему параллелограмма, слѣдовательно каждый изъ упомянутыхъ треугольниковъ болѣе половины соотвѣтствующаго ему сегмента.

Продолжая, такимъ образомъ, далѣе подобное дѣленіе пополамъ дугъ круга, и дѣлая при каждомъ дѣленіи вышеупомянутое построеніе, получимъ сегменты, EI, IF, FK и т. д., сумма которыхъ меньше избытка круга $EFGH$ надъ площадью R (кн. 10, пред. 1). Слѣдовательно, такимъ образомъ полученный многоугольникъ $EIFKGLHM>R$.

Въ кругъ $ABCD$ впишемъ многоугольникъ $ANBOCPDQ$ подобный многоугольнику $EIFKGLHM$, то $\square BD:\square FH=$мног.$ANB...$: мног.$EIF...$ (кн. 12, пред. 1). Но мы предположили, что $\square BD:\square FH=$кр.$ABCD:R$, слѣдовательно кр. $ABCD:R=$ мног. ANB : мног. $EIF....$ Но очевидно кр.$ABCD>$мног. $ANB....$ Слѣдовательно $R>$мног. $EIF....$ (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ предъидущему $R<EIF...$ А потому не можетъ быть $\square BD:\square FH=$кр.$ABCD:R$, когда $R<$кр. $EFGH$.

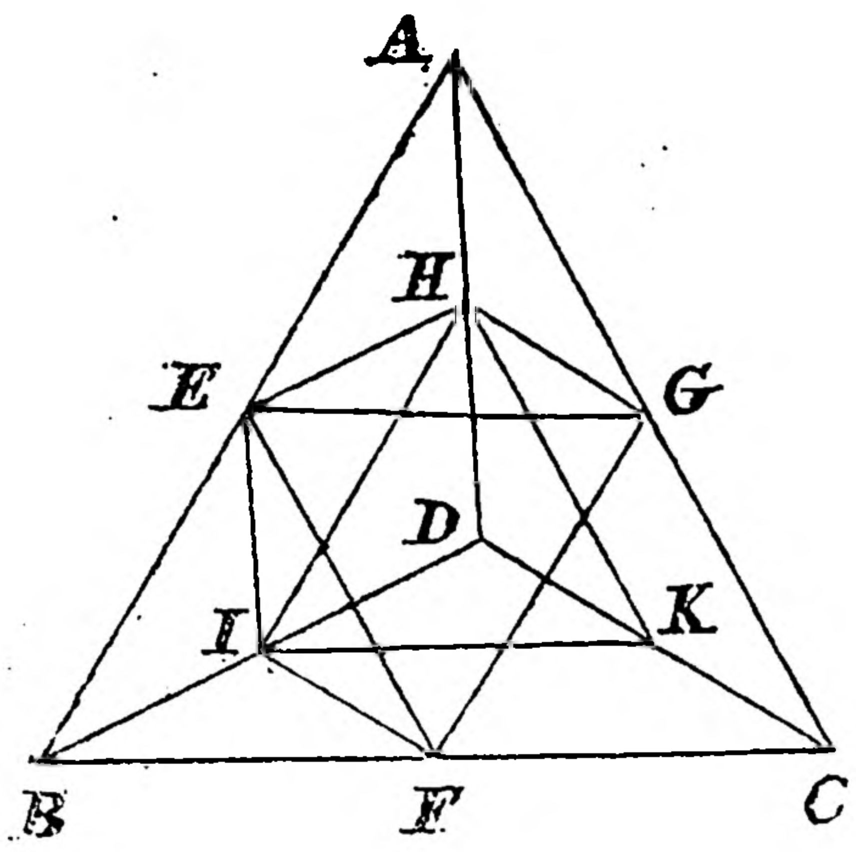
По той же причинѣ не можетъ быть $\square FH:\square BD=$кр.$EFGH:Z$, когда площадь $Z<$кр.$ABCD$.

Случай второй. Пусть площадь $R>$кр. $EFGH$ и $\square BD:\square FH=$ $=$кр. $ABCD:R$, слѣдовательно также $\square FH:\square BD=R:$кр. $ABCD$.

Пусть $R:$кр.$ABCD=$кр. $EFGH:Z$, но $R>$кр. $EFGH$, а потому кр.$ABCD>Z$ (кн. 5, пред. 14). Но мы положили, что $\square FH:\square BD=$ $=R:$кр. $ABCD$, слѣдовательно $\square FH:\square BD=$кр. $EFGH:Z$, что невозможно, на основанiи перваго случая, такъ какъ $Z<$кр. $ABCD$. А потому не можетъ быть $\square BD:\square FH=$кр. $ABCD:R$, при $R>$кр. $EFGH$, а также, на основанiи перваго случая, при положенiи $R<$кр. $EFGH$. Слѣдовательно $\square BD:\square FH=$кр. $ABCD:$ кр. $EFGH$.

Предложенiе 3. Всякая треугольная пирамида $ABCD$, можетъ быть разбита на двѣ равныя и подобныя другъ другу треугольныя пирамиды, подобныя каждая цѣлой, и на двѣ равныя призмы, которыя вмѣстѣ взятыя больше половины цѣлой пирамиды (фиг. 492).

Фиг. 492.



Доказат. Пусть основанiе пирамиды будетъ треугольникъ ABC, а ея вершина D. Раздѣлимъ пополамъ прямыя AB, BC, CA, AD, DB, DC въ точкахъ E, F, G, H, I, K. Проведемъ прямыя EH, EG, GH, образуемъ треугольную пирамиду $AEGH$; далѣе проведя прямыя HI, IK, KH образуемъ треугольную пирамиду $HIKD$; наконецъ проведя прямыя

IF, FG образуемъ призму $EBFGHI$ на основаніи $EBFG$ и призму $GFCKHI$ на основаніи FGC. Требуется доказать:

1. Что обѣ треугольныя пирамиды $AEGH$ и $HIKD$ съ вершинами H и D и съ основаніями AEG и HIK, равны и подобны между собою.

Такъ какъ $AE=EB$, и $AH=HD$, то EH параллельна прямой BD (кн. 6, пред. 2); по той же причинѣ HI параллельна AB; а потому $HEBI$ есть параллелограмъ, слѣдовательно $HI=EB$ (кн. 1, пред. 34); а потому, такъ какъ $EB=AE$, то и $AE=HI$. Но $AH=HD$ и $\angle EAH=\angle IHD$ (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно $\triangle AEH \cong \triangle HID$ и $EH=ID$ (кн. 1, пред. 4 и кн. 6, пред. 6). По той же причинѣ $\triangle AHG \cong \triangle HKD$ и $KD=GH$.

Изъ этого слѣдуетъ, что HE равна и параллельна DI, HG равна и параллельна KD, а потому $\angle EHG=\angle IDK$ (кн. 11, пред. 10), слѣдовательно $\triangle EHG \cong \triangle IDK$ (кн. 1, пред. 4 и кн. 6, пред. 6). По той же причинѣ $\triangle AEG \cong \triangle HIK$.

Изъ этого видно, что пирамиды $AEGH$ и $HIKD$ образованы одинаковымъ числомъ, равныхъ и подобныхъ плоскостей, а потому онѣ равны и подобны между собою (кн. 11, опред. 10).

2. Что построенныя пирамиды $AEGH$ и $HIKD$ подобны цѣлой $ABCD$.

Такъ какъ HI параллельны AB; то треугольники ADB и HDI равноугольны (кн. 1, пред. 29), а потому ихъ стороны пропорціональны (кн. 6, пред. 4), слѣдовательно треугольники ADB и HDI подобны (кн. 6, опред. 1). По той же причинѣ треугольники BDC, DIK и ADC, DHK также подобны.

Такъ какъ BA параллельна IH и AC параллельна HK, то $\angle BAC= =\angle IHK$ (кн. 11, пред. 10), а такъ какъ $HI=BE=EA$ и $HK=CG=GA$, то $BA:AC=IH:HK$ (кн. 5, пред. 15), слѣдовательно $\triangle ABC \backsim \triangle HIK$ (кн. 6, пред. 6). Изъ этого слѣдуетъ, что пирамиды $ABCD$ и $HIKD$ подобны (кн. 11, опред. 9), слѣдовательно онѣ подобны и пирамидѣ $AEGH$, потому что эта послѣдняя подобна пирамидѣ $HIKD$, на основаніи первой части этой теоремы.

3. Что призмы $EBFGHI$ и $GFCKHI$, которыя мы получимъ, отнявъ отъ цѣлой пирамиды обѣ вышепоименованныя маленькія пирамиды, равны между собою.

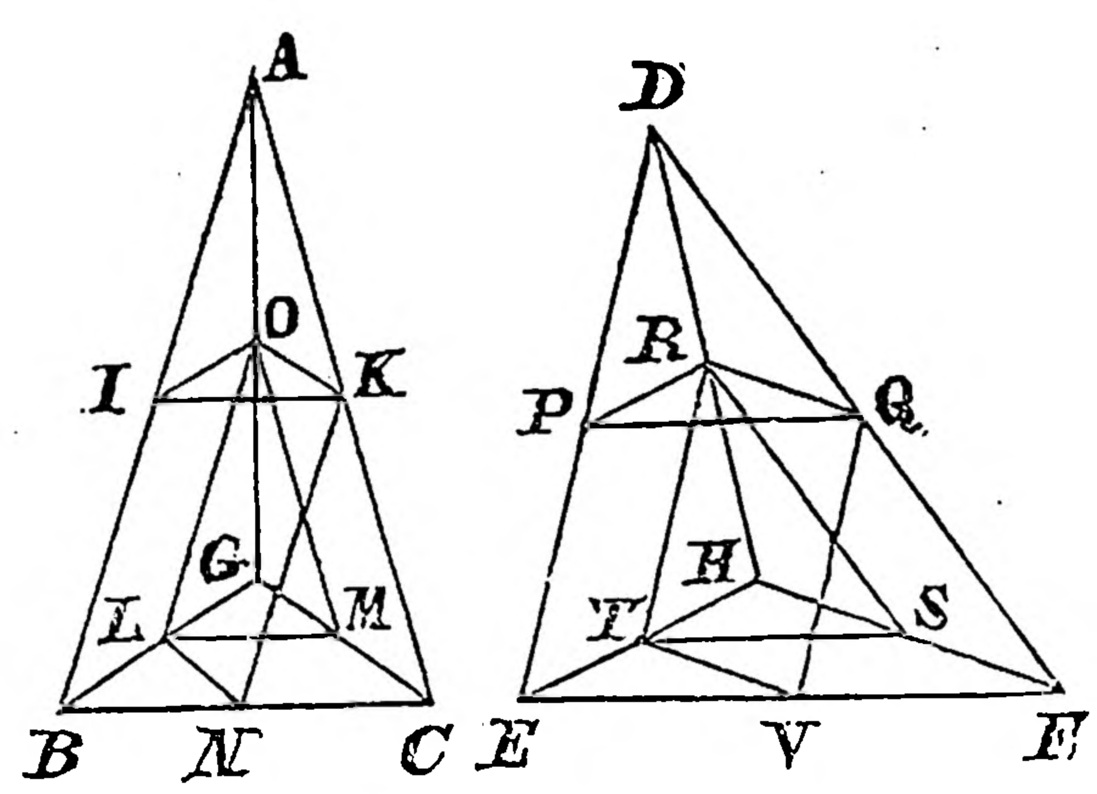
Такъ какъ $BF=FC$, то $EBFG=2\triangle GFC$ (кн. 1, пред. 41), а потому сказанныя призмы имѣютъ одинаковыя высоты, такъ какъ въ первой площади основанія $EBGF$ противолежитъ прямая HI, а во второй площади основанія GFC противолежитъ площадь IKH. Слѣдовательно эти призмы равны (кн. 11, пред. 40).

4. Что обѣ призмы $EBFGHI$ и $GFCKHI$ вмѣстѣ взятыя больше половины цѣлой пирамиды $ABCD$.

Проведя EF, EI образуемъ пирамиду $EBFI$ съ основаніемъ EBF и вершиной I, очевидно, что призма $EBFGHI>$пирамиды $EBFI$. Но пирамиды $EBFI$ и $AEGH$, какъ составленныя одинаковымъ числомъ равныхъ и подобныхъ плоскостей, равны и подобны между собою. Слѣдовательно призма $EBFGHI>$пирамид.$AEGH$. Но мы имѣли, что призма $EBFGHI=$призмѣ $FGCKHI$, и пир. $AEGH=$пир. $HIKD$. Слѣдовательно призма $FGCKHI>$пир.$HIKD$. А потому призма $EBFGHI+$призма $GFCKHI>$пир.$AEGH+$пир. $HIKD$. Изъ этого слѣдуетъ, что цѣлая пирамида $ABCD$ раздѣлена на двѣ неравныя части, изъ которыхъ большая заключаетъ обѣ призмы, а меньшая—обѣ пирамиды. Слѣдовательно обѣ призмы, вмѣстѣ взятыя, меньше половины цѣлой пирамиды.

Предложеніе 4. Если разложимъ двѣ треугольныя пирамиды $ABCG$ и $DEFG$, одинаковой высоты, на двѣ равныя, другъ другу и цѣлой подобныя пирамиды, и на двѣ равныя призмы, и если разложимъ полученныя пирамиды снова подобнымъ же образомъ, то продолжая подобное разложеніе далѣе, мы получимъ, что всѣ призмы одной изъ пирамидъ относятся ко всѣмъ соотвѣтственнымъ призмамъ другой пирамиды, какъ площадь основанія ABC, одной изъ нихъ относится къ площади основанія DEF другой (фиг. 493).

Фиг. 493.

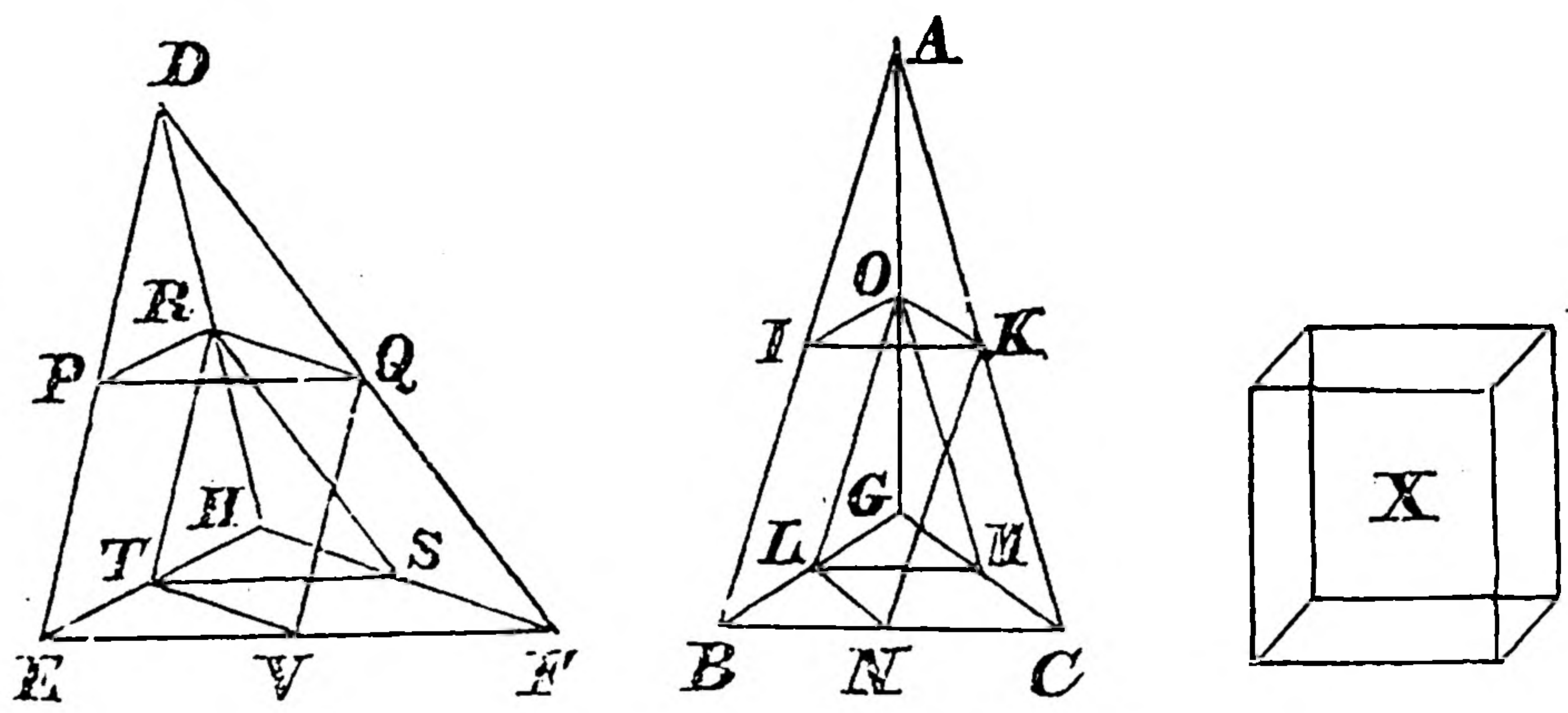


Доказат. Такъ какъ обѣ пирамиды $ABCG$ и $DEFH$ одинаковой высоты, то очевидно, перпендикуляры, опущенные изъ точекъ G, H на плоскости ABC и DEF, равны. Но, перпендикуляръ, опущенный изъ точки G и прямая GC параллельными плоскостями ABC и OLM, разсѣкаются на пропорціональныя части (кн. 11, пред. 17); изъ этого слѣдуетъ, что вышеупомянутый перпендикуляръ опущенный изъ точки G, плоскостью OLM дѣлится пополамъ, такъ какъ GC плоскостью OLM въ точкѣ M дѣлится пополамъ. По той же причинѣ перпендикуляръ, опущенный изъ точки H на плоскость DEF дѣлится пополамъ плоскостью RTS. Но вышеупомянутые перпендикуляры равны, а потому равны и половины ихъ. Слѣдовательно призмы $KNCMLO$ и $QVFSTR$ имѣютъ одинаковыя высоты, а потому онѣ относятся между собою какъ площади основаній KNC и QVF (кн. 11, пред. 28 и 32). Но призмы, въ каждой изъ пирамидъ $ABCG$ и $DEFH$, равны между собою, а потому: призма $IKNBLO$: призмѣ $KNCMLO=$ $=$призма $EPQVTR$: призмѣ $QVFSTR$; или призма $IKNBLO+$призма $KNCMLO$: призмѣ $EPQVTR+$призма $QVFSTR=$призма $KNCMLO$: призмѣ $QVFSTR$ (кн. 5, пред. 18, 16). Слѣдовательно: $\triangle KNC : \triangle QVF=$призма $EPQVTR$: призмѣ $QVFSTR$.

Такъ какъ $BN=NC$ и $AK=KC$, то NK параллельна AB (кн. 6, пред. 2); а потому $\triangle ABC \backsim \triangle KNC$ (кн. 6, пред. 4). По той же причинѣ $\triangle DEF \backsim \triangle QVF$. Но $BC=2CN$ и $EF=2FV$, а потому $BC : CN = EF : FV$. Слѣдовательно $\triangle ABC : \triangle KNC = \triangle DEF : \triangle QVF$ (кн. 6, пред. 22), или же $\triangle ABC : \triangle DEF = \triangle KNC : \triangle QVF=$призма $IKNBLO+$призма $KNCMLO$: призмѣ $EPQVTR+$призма $QVFSTR$, на основаніи выше доказаннаго. Разлагая подобнымъ же образомъ полученныя маленькія пирамиды $OLMG$ и $BTSH$, будемъ имѣть какъ выше, что площади основаній OLM, RST относятся между собою какъ призмы въ обѣихъ вышесказанныхъ пирамидахъ. Итакъ $\triangle OLM : \triangle RST = \triangle ABC :$ $: \triangle DEF$, а потому $\triangle ABC : \triangle DEF = 2$ приз. въ $ABCG : 2$ приз. въ $DEFH = 2$ приз. въ $OLMG : 2$ приз. въ $RTSH$, слѣдовательно и какъ $\triangle ABC : \triangle DEF = 4$ приз. въ $ABCG : 4$ приз. въ $DEFH$. Точно такимъ же образомъ доказывается и для призмъ $AIKO$ и $DPQR$, и вообще для всѣхъ слѣдующихъ дѣленій одного и того же порядка.

Предложеніе 5. Треугольныя пирамиды $ABCG$ и $DEFH$, одинаковой высоты, относятся между собою какъ площади основаній ABC и DEF (фиг. 494).

Фиг. 494.



Доказат. Если бы не было $\triangle ABC : \triangle DEF=$пир. $ABCG$: пир. $DEFH$, то мы имѣли бы $\triangle ABC : \triangle DEF=$пир. $ABCG : X$, гдѣ тѣло X больше или меньше пир. $DEFH$.

Первый случай. Пусть тѣло $X<$пир. $DEFH$, и пусть $\triangle ABC :$ $: \triangle DEF=$пир. $ABCG : X$.

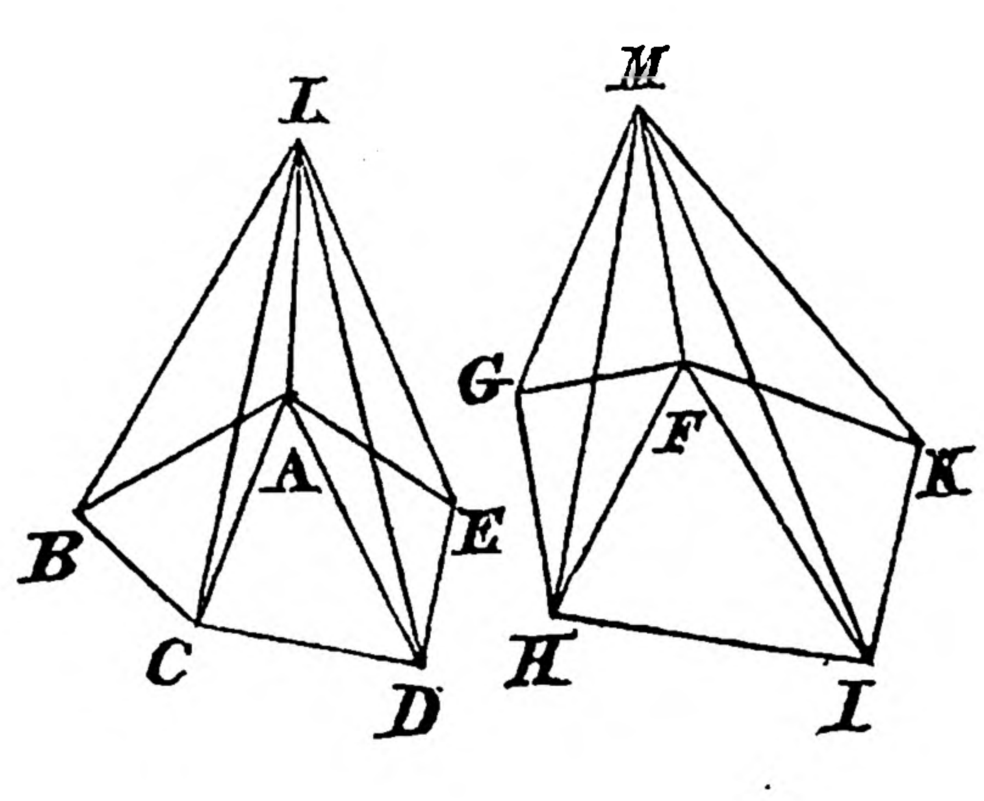
Разложимъ пир. $DEFH$ на двѣ меньшія равныя, подобныя между собою и подобныя цѣлой и на двѣ равныя призмы (кн. 12, пред. 3), такъ что обѣ призмы вмѣстѣ взятыя меньше половины цѣлой пирамиды $DEFH$. Эти меньшія пирамиды разложимъ подобнымъ же образомъ, и будемъ продолжать такое разложеніе, до тѣхъ поръ пока мы дойдемъ до такихъ пирамидъ, которыя, вмѣстѣ взятыя, меньше чѣмъ избытокъ пир. $DEFH$ надъ тѣломъ X (кн. 10, пред. 1). Пусть эти пирамиды будутъ $DPQR$ и $RTSH$, то остающіяся въ пир. $DEFH$ призмы больше тѣла X.

Пусть другая пир. $ABCG$ разложена подобнымъ же образомъ на тоже число пирамидъ, то $\triangle ABC : \triangle DEF =$ приз. въ $ABCG$: призмѣ въ $DEFH$ (кн. 12, пред. 4). Но мы положили, что $\triangle ABC : \triangle DEF =$ пир. $ABCG : X$, слѣдовательно пир. $ABCG : X =$ призм. въ $ABCG$: призм. въ $DEFH$. Но пир. $ABCG >$ приз. въ $ABCG$, слѣдовательно $X >$ приз. въ $DEFH$ (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ предъидущему положенію, приз. въ $DEFH > X$. А потому не имѣетъ мѣста пропорція $\triangle ABC : \triangle DEF =$ пир. $ABCG : X$, когда $X <$ пир. $DEFH$. По той же причинѣ не можетъ быть $\triangle DEF : \triangle ABC =$ $=$ пир. $DEFH : Z$, при $Z <$ пир. $ABCG$.

Второй случай. Пусть $X >$ пир. $DEFH$ и $\triangle ABC : \triangle DEF =$ пир. $ABCG : X$, а потому и $\triangle DEF : \triangle ABC = X :$ пир. $ABCG$. Пусть $X :$ пир. $ABCG =$ пир. $DEFH : Z$, слѣдовательно и $X :$ пир. $DEFH =$ пир. $ABCG : Z$, а потому $Z <$ пир. $ABCG$ (кн. 5, пред. 14). Но мы положили, что $\triangle DEF : \triangle ABC = X :$ пир. $ABCG$, слѣдовательно $\triangle DEF : \triangle ABC =$ пир. $DEFH : Z$, что на основаніи перваго случая невозможно. А потому невозможно, чтобы $\triangle ABC : \triangle DEF =$ пир. $ABCG : X$, при $X >$ пир. $DEFH$, а на основаніи перваго случая также невозможно, при $X <$ пир. $DEFH$. Слѣдовательно $\triangle ABC : \triangle DEF =$ пир. $ABCG :$ пир. $DEFH$.

Предложеніе 6. Многоугольныя пирамиды $ABCDEL$, $FGHIKM$, равной высоты, относятся между собою какъ площади ихъ основаній $ABCDE$ и $FGHIK$ (фиг. 495).

Фиг. 495.



Доказат. Раздѣлимъ эти основанія на треугольники ABC, ACD, ADE, FGH, FHI, FIK, и проведемъ чрезъ CAL, DAL, HFM,

IFM плоскости, то многоугольныя пирамиды разобьются на треугольныя.

Такъ какъ $\triangle ABC : \triangle ACD =$ пир. $ABCL$: пир. $ACDL$ (кн. 12, пред. 5), то:

$$ABCD : \triangle ACD = \text{пир.} ABCDL : \text{пир.} ACDL \text{ (кн. 5, пред. 18).}$$

Но мы имѣемъ также:

$$\triangle ACD : \triangle ADE = \text{пир.} ACDL : \text{пир.} ADEL$$

Откуда сравнивая послѣднія двѣ пропорціи, получимъ:

$$ABCD : \triangle ADE = \text{пир.} ABCDL : \text{пир.} ADEL \text{ (кн. 5, пред. 22),}$$

а потому необходимо:

$$ABCDE : \triangle ADE = \text{пир.} ABCDEL : \text{пир.} ADEL$$

По той же причинѣ:

$$FGHIK : \triangle FIK = \text{пир.} FGHIKM : \text{пир.} FIKM$$

а потому также:

$$\triangle FIK : FGHIK = \text{пир.} FIKM : \text{пир.} FGHIKM$$

Такъ какъ:

$$\triangle ADE : \triangle FIK = \text{пир.} ADEL : \text{пир.} FIKM$$

а на основаніи предъидущаго:

$$ABCDE : \triangle ADE = \text{пир.} ABCDEL : \text{пир.} ADEL.$$

Откуда сравнивая эти пропорціи, получимъ:

$$ABCDE : \triangle FIK = \text{пир.} ABCDEL : \text{пир.} FIKM$$

но по предъидущему:

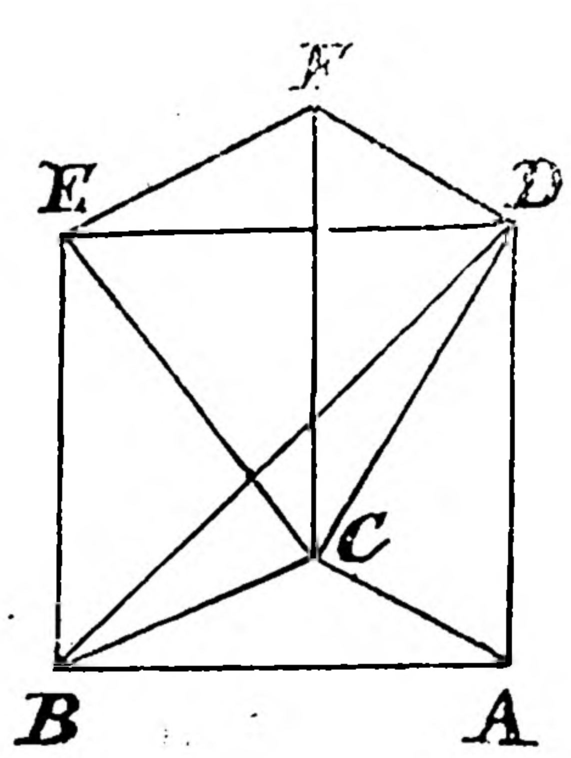
$$\triangle FIK : FGHIK = \text{пир.} FIKM : \text{пир.} FGHIKM$$

Слѣдовательно, получимъ:

$$ABCDE : FGHIK = \text{пир.} ABCDEL : \text{пир.} FGHIKM$$

Предложеніе 7. Всякая трехсторонняя призма $ABCDEF$, можетъ быть разложена на три равныя треугольныя пирамиды (фиг. 496).

Фиг. 496.



Доказат. Проведемъ прямыя BD, EC, CD.

Такъ какъ $ABED$ есть параллелограмъ (кн. 11, опред. 13), то $\triangle ABD = \triangle EDB$ (кн. 1, пред, 34), слѣдовательно пирамиды $ABDC$ и $EDBC$ имѣя вершины въ точкѣ C равны (кн. 12, пред. 5). Но пир. $EDBC$ и пир. $EBCD$ суть одна и таже пирамида, слѣдовательно пир. $ABDC$=пир. $EBCD$.

Далѣе, такъ какъ $FCBE$ параллелограмъ, то $\triangle EBC = \triangle ECF$ (кн. 1, пред. 34), слѣдовательно пирамиды $EBCD$ и $ECFD$ имѣя вершины въ точкѣ D равны (кн. 12, пред. 5). Но мы имѣли пир. $EBCD$=пир. $ABDC$. Слѣдовательно пир. $ECFD$=пир. $ABCD$. Изъ этого слѣдуетъ, что призма $ABCDEF$ разбита на три равныя треугольныя пирамиды $ABDC$, $BECD$, $ECFD$.

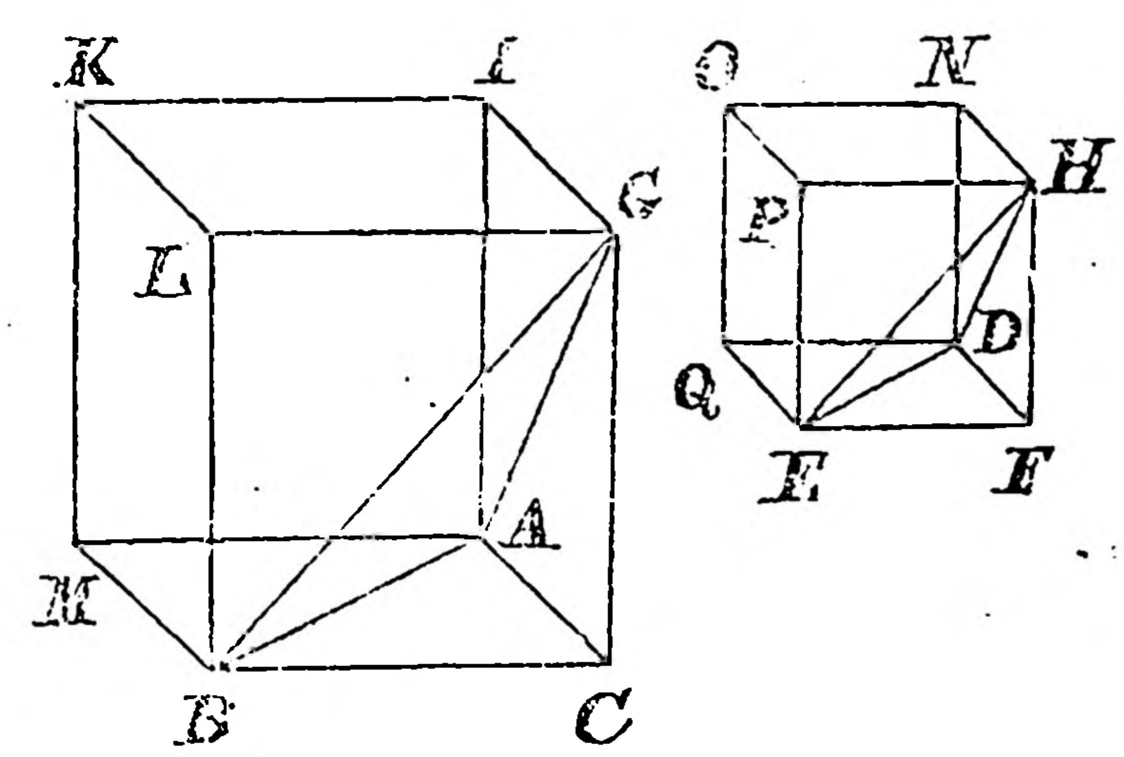
Замѣчаніе. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что всякая пирамида есть треть призмы, имѣющей съ ней одно и тоже основаніе и равныя высоты.

Въ самомъ дѣлѣ пир. $ABDC$ съ пир. $CABD$ равны; но пирам. $ABDC = \frac{1}{3}$ приз. $ABCDFE$, слѣдовательно также пир. $CABD = \frac{1}{3}$ призм. $ABCDEF$.

Если призма многосторонняя, то она можетъ быть разбита на трехстороннія.

Предложеніе 8. Подобныя треугольныя пирамиды $ABCG$, $DEFH$ относятся между собою какъ тройное (кубы) отношеніе соотвѣтствующихъ сторонъ BC и EF (фиг. 497).

Фиг. 497.

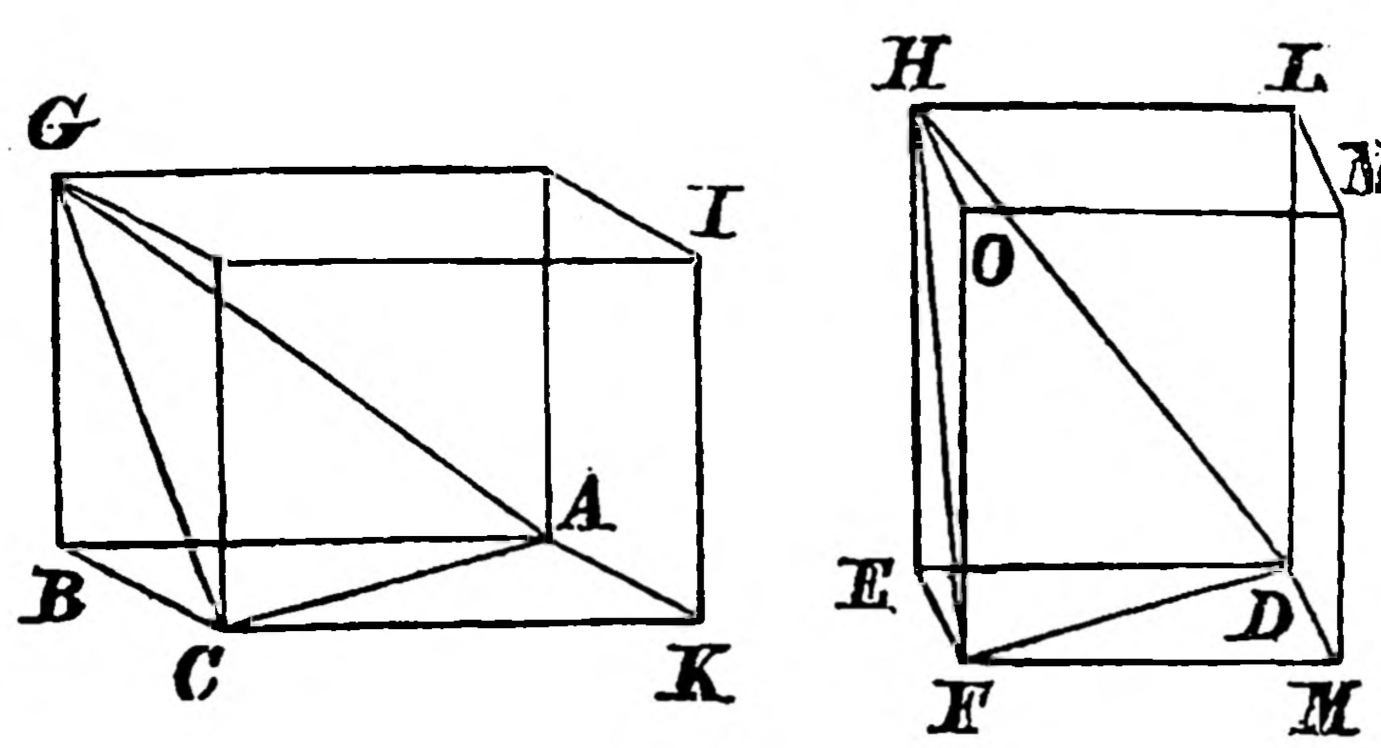


Доказат. Построимъ параллелепипеды BI, EN. Такъ какъ пир. $ABCG \sim$ пир. $DEFH$, то $\angle BCA = \angle EFD$, $\angle ACG = \angle DFH$, $\angle BCG = \angle EFH$, и $BC : EF = AC : DF = GC : HF$ (кн. 11, опред. 9), слѣдовательно $CM \sim FQ$, $CI \sim FN$, $CL \sim FP$ (кн. 6, опред. 1). Но въ обоихъ параллелепипедахъ стороны, лежащія противъ трехъ вышеупомянутыхъ плоскостей, равны и подобны (кн. 11, пред. 24). А потому $BI \sim EN$ (кн. 11, опред. 9), слѣдовательно $BI : EN = (BC : EF)^3$ (кн. 11, пред. 33). Но призма есть половина параллелепипеда, а пирамида треть призмы, слѣдовательно пирамида есть шестая часть параллелепипеда, а потому $BI : EN$=пир. $ABCG$: пир. $DEFH$ (кн. 5, пред. 15). Слѣдовательно также пир. $ABCG$: пир. $DEFH = (BC : EF)^3$.

Замѣчаніе. Изъ этого предложенія также слѣдуетъ, что многоугольныя подобныя пирамиды относятся между собою какъ тройное отношеніе соотвѣтствующихъ сторонъ. Разложивъ подобныя многоугольныя площади основаній на одинаковое число подобныхъ треугольниковъ (кн. 6, пред. 20), т. е. разложивъ многоугольныя пирамиды на треугольныя, то одна изъ треугольныхъ пирамидъ данной многоугольной относится къ треугольной пирамидѣ другой многоугольной, какъ всѣ треугольныя пирамиды одной ко всѣмъ треугольнымъ пирамидамъ другой, т. е. какъ одна многоугольная пирамида къ другой многоугольной. Но такъ какъ треугольныя пирамиды относятся между собою какъ тройное отношеніе соотвѣтствующихъ сторонъ, то въ такомъ же отношеніи находятся и многоугольныя пирамиды.

Предложеніе 9. Въ равныхъ треугольныхъ пирамидахъ $ABCG$, $DEFH$, площади основаній ABC, DEF находятся въ обратномъ отношеніи высотъ. Если же площади основаній ABC, DEF находятся въ обратномъ отношеніи высотъ, то пирамиды $ABCG$, $DEFH$, равны между собою (фиг. 498).

Фиг. 498.



Доказат. Построимъ параллелепипеды BI, EN.

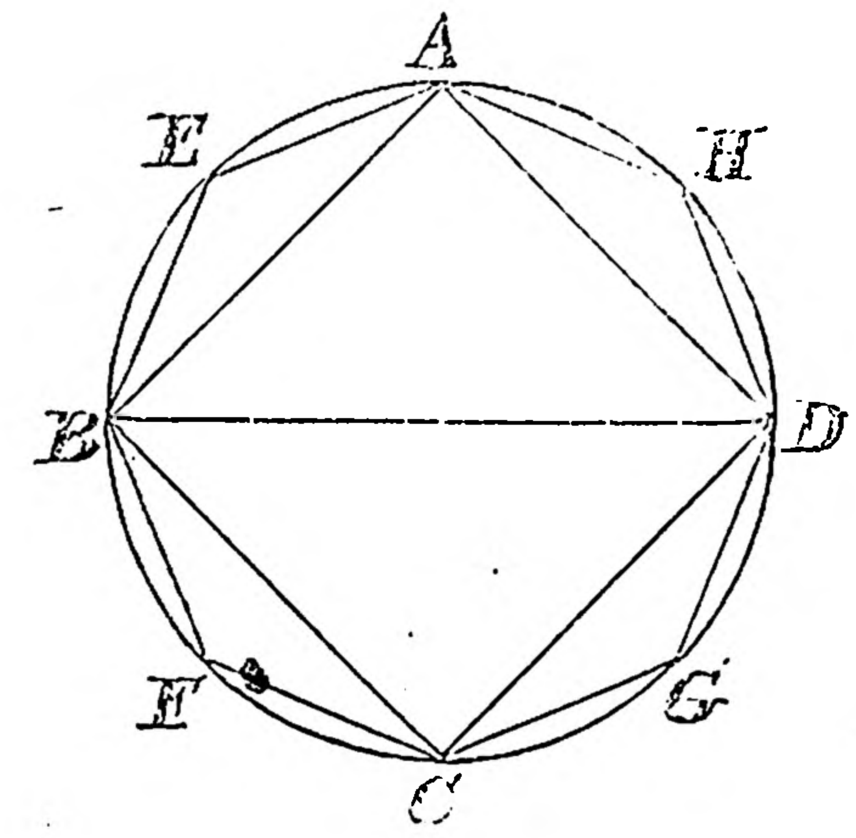
1. Пусть пир. $ABCG$=пир. $DEFH$, то, такъ какъ $BI=6$ пир. $ABCG$, и $EN=6$ пир. $DEFH$, $BI=EN$, слѣдовательно (кн. 11, пред. 34) BK : EM=высота въ EN : высотѣ въ BI=высота пир. $DEFH$: высотѣ пир. $ABCG$. Но $BK:EM=\triangle ABC:\triangle DEF$, слѣдовательно также $\triangle ABC$: $\triangle DEF$=высота пир. $DEFH$: высотѣ пир. $ABCG$.

2. Пусть $\triangle ABC:\triangle DEF$=высота пир. $DEFH$: высотѣ пир. $ABCG$. Такъ какъ $\triangle ABC:\triangle DEF=BK:EM$, то $BK:EM$=высота пир. $DEFH$: высотѣ пир. $ABCG$, или $BK:EM$=высота въ EN : высотѣ въ BI, слѣдовательно $BI=EN$ (кн. 11, пред. 34). Но $BI=6$ пир. $ABCG$ и EN=6 пир. $DEFH$, слѣдовательно пир. $ABCG$=пир. $DEFH$.

Предложеніе 10. Всякій конусъ есть треть цилиндра, имѣющаго съ нимъ равную высоту и общее основаніе $ABCD$ (фиг. 499).

Доказат. Если бы цилиндръ не былъ равенъ утроенному конусу, то цилиндръ или больше, или меньше трижды взятого конуса.

Фиг. 499.



Первый случай. Цилиндръ больше утроеннаго конуса.

Впишемъ квадратъ $ABCD$ въ кругъ, служащій основаніемъ цилиндру и конусу, этотъ квадратъ будетъ больше половины круга. На квадратѣ построимъ призму, равной высоты съ цилиндромъ, эта призма будетъ больше половины цилиндра.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы опишемъ квадратъ около круга, то внутренній квадратъ равенъ половинѣ внѣшняго. Но призмы, построенныя на этихъ квадратахъ, имѣющія равныя высоты съ цилиндромъ, относятся между собою какъ площади основаній, слѣдовательно призма, построенная на внутреннемъ квадратѣ, равна половинѣ призмы построенной на внѣшнемъ квадратѣ. Но такъ какъ цилиндръ меньше призмы на внѣшнемъ, то призма построенная на внутреннемъ квадратѣ $ABCD$ больше половины цилиндра.

Раздѣлимъ пополамъ дуги круга AB, BC, CD, DA, въ точкахъ E, F, G, H и соединимъ точки дѣленія, то каждый изъ полученныхъ такимъ образомъ треугольниковъ, какъ напр. AEB, больше половины соотвѣтствующей ему половины сегмента (кн. 12, пред. 2). Построивъ на каждомъ изъ этихъ треугольниковъ призмы одинаковой высоты съ цилиндромъ, то каждая изъ нихъ больше половины соотвѣтствующаго отрѣзка цилиндра.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы чрезъ точки E,.... проведемъ прямыя параллельныя къ AB,....., построимъ параллелограммы, и на этихъ послѣднихъ построимъ параллелепипеды, одинаковой высоты съ цилиндромъ, то каждая изъ призмъ, построенныхъ на треугольникахъ AEB,.... равна половинѣ такого параллелепипеда, а половина параллелепипеда больше отрѣзка цилиндра, слѣдовательно призма больше половины отрѣзка цилиндра.

Раздѣливъ снова пополамъ дуги круга AE,..... и продолжая далѣе построеніе подобное предъидущему, мы наконецъ дойдемъ до такихъ отрѣзковъ цилиндра, которые больше избытка цилиндра надъ утроеннымъ конусомъ (кн. 10, пред. 1). Пусть эти отрѣзки цилиндра будутъ надъ

AE, *EB*,...., то остающаяся многосторонняя призма съ основанiемъ *AEB*...., и равной высоты съ цилиндромъ, больше утроеннаго конуса. Но извѣстно также, что эта многосторонняя призма равна утроенной пирамидѣ, имѣющей съ конусомъ одно и тоже основанiе и одинаковую высоту (кн. 12, пред. 7, замѣч.). Слѣдовательно такая пирамида больше конуса съ основанiемъ *ABCD*. Но такъ какъ эта пирамида заключена въ конусѣ, то она меньше конуса. Это противорѣчитъ одно другому. Слѣдовательно цилиндръ не можетъ быть больше утроеннаго конуса.

Второй случай. Пусть цилиндръ меньше утроеннаго конуса, то обратно конусъ больше одной трети цилиндра.

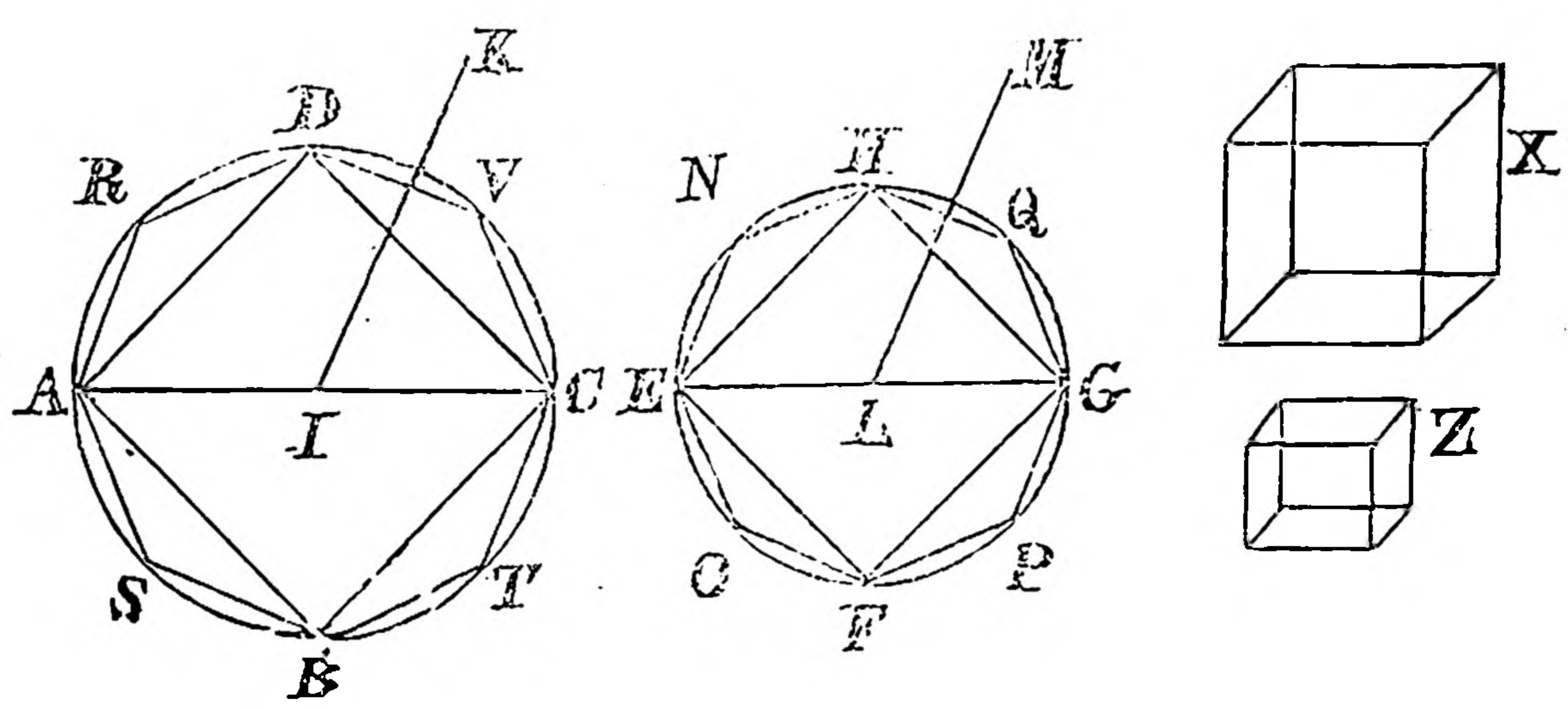
Пусть снова въ кругъ вписанъ квадратъ *ABCD*, то этотъ послѣднiй больше половины круга. Построимъ на квадратѣ пирамиду, одинаковой высоты съ конусомъ, то эта послѣдняя больше половины конуса.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ, какъ въ первомъ случаѣ, около круга описанъ квадратъ, то внутреннiй квадратъ равенъ половинѣ внѣшняго. Построивъ на обоихъ квадратахъ призмы, одинаковой высоты съ конусомъ, которыя будутъ относиться между собою какъ площади ихъ основанiй (кн. 11, пред. 32), то внутренняя призма равна половинѣ внѣшней, а также третяя часть первой равна половинѣ третьей части второй, т. е. пирамида построенная на внутреннемъ квадратѣ равна половинѣ пирамиды построенной на внѣшнемъ квадратѣ. Но послѣдняя, какъ заключающая конусъ, больше конуса. Слѣдовательно пирамида построенная на внутреннемъ квадратѣ *ABCD*, имѣющая одинаковую высоту съ конусомъ, больше половины конуса.

Раздѣлимъ снова пополамъ дуги круга *AB*,... и проведемъ *AE*,...., такъ что каждый изъ треугольниковъ, какъ напр. *AEB*, былъ бы больше половины соотвѣтствующаго отрѣзка круга; построимъ на каждомъ изъ этихъ треугольниковъ *AEB*,.... пирамиды одинаковой высоты съ конусомъ, то каждая изъ нихъ больше соотвѣтствующаго ей отрѣзка конуса. Продолжая далѣе подобное дѣленiе пополамъ дугъ круга и подобное построенiе, мы наконецъ дойдемъ до такихъ отрѣзковъ конуса, которые меньше избытка конуса надъ третьей частью цилиндра (кн. 10, пред. 1). Пусть эти отрѣзки будутъ надъ *AE*, *EB*,...., то остающаяся пирамида на основанiи *AEBF*...., одинаковой высоты съ конусомъ, больше третьей части цилиндра. Но эта пирамида есть третяя часть призмы, одинаковой высоты и одинаковой площади основанiя съ цилиндромъ (кн. 12, пред. 7, замѣч.). Слѣдовательно призма на основанiи *AEBF*.... больше цилиндра, на кругѣ *ABCD*, одинаковой съ нимъ высоты. Но она заключена въ цилиндрѣ, а потому она меньше его, что противорѣчитъ предъидущему. Слѣдовательно цилиндръ не можетъ быть меньше утроеннаго конуса; но по прежде доказанному онъ не можетъ быть и больше, а потому конусъ есть третяя часть цилиндра.

Предложеніе 11. Конусы AK, EM, и цилиндры одинаковой высоты IK, LM, относятся между собою, какъ площади ихъ основаній $ABCD$, $EFGH$ (фиг. 500).

Фиг. 500.



Доказат. Если бы этого не было, то:

$$ABCD : EFGH = \text{кон. } AK : X$$

гдѣ тѣло X должно быть или меньше, или больше конуса EM.

Первый случай. Пусть тѣло $X <$ конуса EM, такъ что конусъ $EM = X + Z$.

Впишемъ въ кругъ $EFGH$ квадратъ $EFGH$, то этотъ послѣдній больше половины круга. На этомъ квадратѣ построимъ пирамиду FM, одинаковой высоты съ конусомъ EM, то она больше половины конуса, потому что она равна половина пирамиды, равной съ ней высоты, построенной на описанномъ квадратѣ (кн. 12, пред. 6), а конусъ меньше послѣдней.

Раздѣливъ пополамъ дуги круга EF, FG,.... и дѣлая такое же построеніе какъ для втораго случая предъидущаго предложенія, и продолжая такимъ образомъ далѣе, мы наконецъ дойдемъ до такихъ отрѣзковъ конуса, которые меньше Z (кн. 10, пред. 1). Пусть это будутъ отрѣзки надъ HN,..., то остающаяся пирамида FM на основаніи HNE,...., одинаковой высоты съ конусомъ EM, больше X.

Впишемъ въ кругъ $ABCD$ многоугольникъ DRA...., подобный и подобно расположенный многоугольнику HNE...., и на немъ построимъ пирамиду BK, одинаковой высоты съ конусомъ AK.

Такъ какъ (кн. 12, пред. 1):

$$\square AC : \square EG = \text{мног. } DRA.... : \text{мног. } HNE....$$

и (кн. 12, пред. 2):

$$\square AC : \square EG = \text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH$$

то (кн. 5, пред. 11):

$$кр.\ ABCD : кр.\ EFGH = мног.\ DRA.... : мног.\ HNE....$$

Но мы положили, что:

$$кр.\ ABCD : кр.\ EFGH = кон.\ AK : X$$

а потому и:

$$мног.\ DRA... : мног.\ HNE... = кон.\ AK : X.$$

Но (кн. 12, пред. 6):

$$мног.\ DRA.... : мног.\ HNE... = пир.\ BK : пир.\ FM$$

Слѣдовательно:

$$кон.\ AK : X = пир.\ BK : пир.\ FM.$$

Но пирамида лежитъ внутри конуса, а потому конусъ $AK >$ пир. BK. Изъ этого слѣдуетъ, что и $X >$ пир. FM (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ предъидущему, что пир. $FM > X$. Слѣдовательно не можетъ быть:

$$кр.\ ABCD : кр.\ EFGH = кон.\ AK : X$$

при $X <$ конуса EM.

Такимъ же точно образомъ можно доказать, что не можетъ быть:

$$кр.\ EFGH : кр.\ ABCD = кон.\ EM : Y$$

при $Y <$ конуса AK.

Второй случай. Пусть $X >$ конуса EM, то изъ пропорціи:

$$кр.\ ABCD : кр.\ EFGH = кон.\ AK : X$$

будемъ имѣть обратно:

$$кр.\ EFGH : кр.\ ABCD = X : кон.\ AK.$$

Пусть будетъ:

$$X : кон.\ AK = кон.\ EM : Y$$

гдѣ $Y <$ конуса AK, то:

$$кр.\ EFGH : кр.\ ABCD = кон.\ EM : Y$$

что, на основаніи перваго случая, невозможно. А потому не можетъ быть:

$$кр.\ ABCD : кр.\ EFGH = кон.\ AK : X$$

при $X >$ конуса EM, и на основаніи перваго случая, также невозможно, при $X <$ конуса EM. Слѣдовательно необходимо:

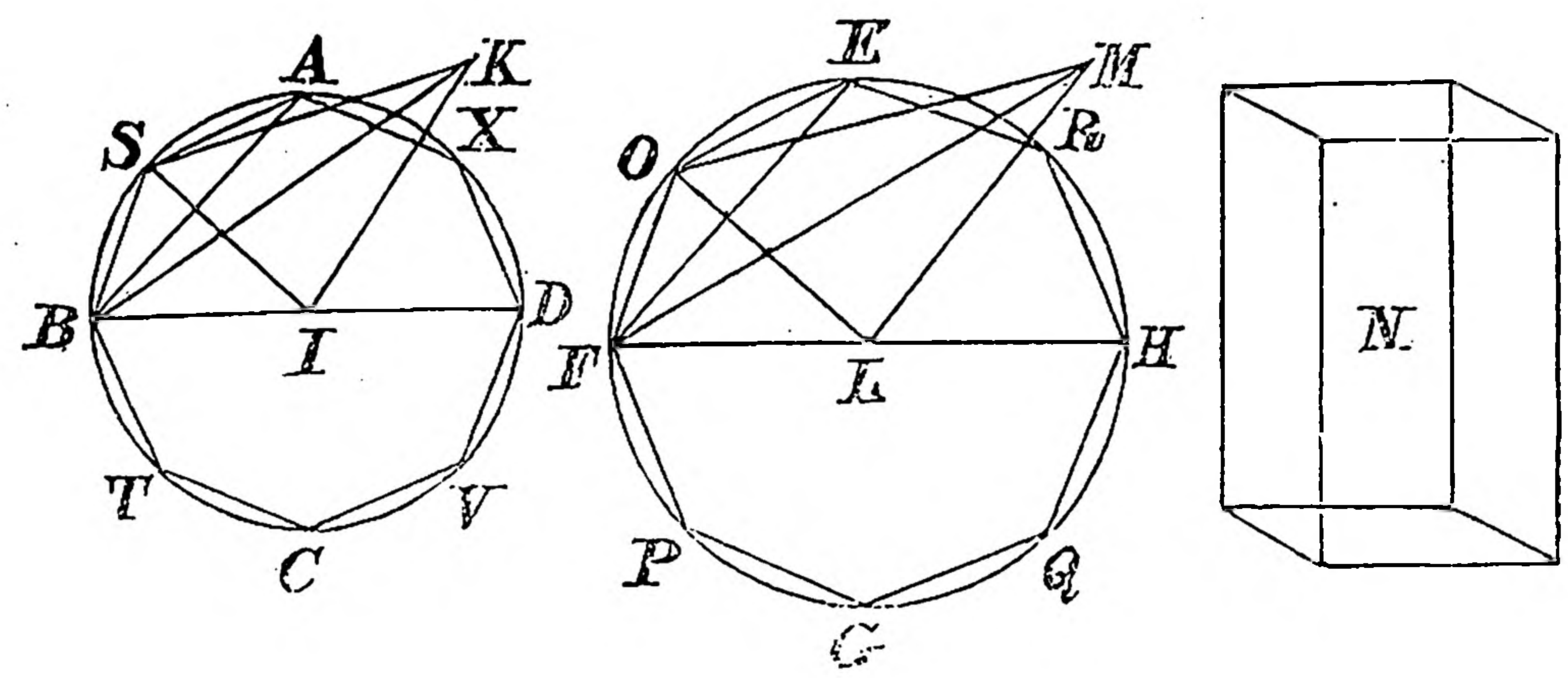
$$кр.\ ABCD : кр.\ EFGH = кон.\ AK : кон.\ EM.$$

Такъ какъ цилиндры въ три раза больше конусовъ, одинаковой съ ними высоты и одинаковаго основанія (кн. 12, пред. 10), то они относятся между собою какъ конусы, слѣдовательно:

$$кр.\ ABCD : кр.\ EFGH = цил.\ на\ ABCD : цил.\ на\ EFGH.$$

Предложеніе 12. Подобные конусы BK, FM, а также подобные цилиндры относятся между собою какъ утроенное (кубы) отношеніе діаметровъ BD, FH ихъ основаній (фиг. 501).

Фиг. 501.



Доказат. Если бы этого не было, то пусть:

$$(BD:EH)^3 = \text{кон. } BK:N$$

гдѣ тѣло N, или меньше, или больше конуса FM.

Случай первый. Пусть будетъ $N <$ конуса FM.

Сдѣлаемъ тоже построеніе, какъ при началѣ перваго случая предъидущаго предложенія: то мы получимъ пирамиду GM, которой вершина будетъ M, а основаніе будетъ площадь многоугольника EOF...., пирамида эта больше тѣла N.

Впишемъ въ кругъ $ABCD$ многоугольникъ ASB.... подобный многоугольнику EOF..., и на этомъ многоугольникѣ построимъ пирамиду CK, коей вершина K. Пусть одна изъ боковыхъ поверхностей пирамиды CK будетъ $\triangle KSB$, а пирамиды GM треугольникъ MOF. Проведемъ IS, LO.

Такъ какъ конусъ $BK \backsim$ конусу FM, то $BD:FH=IK:LM$ (кн. 11, опред. 24); но $BD:FH=BI:FL$, слѣдовательно $BI:FL=IK:LM$, или $BI:IK=FL:LM$. Но при точкахъ I и L углы прямые, т. е. $\angle BIK = \angle FLM$. Слѣдовательно $\triangle BIK \backsim \triangle FLM$ (кн. 6, пред. 6).

Далѣе $BI:IS=FL:LO$, а на основаніи подобія многоугольниковъ, $\angle BIS = \angle FLO$, а потому $\triangle BIS \backsim FLO$ (кн. 6, пред. 6).

Мы имѣли что $BI:IK=FL:LM$, но $BI=IS$ и $FL=LO$, а потому $IS:IK=LO:LM$. Но $\angle SIK = \angle OLM = d$. Слѣдовательно $\triangle KSI \backsim \triangle MOL$ (кн. 6, пред. 6).

Такъ какъ $\triangle BIK \backsim \triangle FLM$, слѣдовательно $KB:BI=MF:FL$; и $\triangle BIS \backsim \triangle FLO$, слѣдовательно $BI:BS=FL:FO$; сравнивая эти пропорціи, получимъ: $KB:BS=MF:FO$, или $SB:KB=OF:MF$.

Такъ какъ $\triangle KSI \backsim \triangle MOL$, то $KS:SI=MO:OL$, а $\triangle BIS \backsim FLO$, слѣдовательно $SI:IB=OL:OF$; сравнивая эти пропорціи, получимъ: $KS:BS=MO:OF$. Но мы имѣли прежде $SB:KB=OF:MF$. Слѣдовательно сравнивая эти пропорціи $KS:KB=MO:MF$.

А потому стороны треугольниковъ KSB, MOF пропорціональны. Слѣдовательно $\triangle KSB \backsim \triangle MOF$ (кн. 6, пред. 5); слѣдовательно пир. $BISK \backsim$ $\backsim$ пир. $FLOM$ (кн. 11, опред. 9); откуда (кн. 12, пред. 8):

$$\text{пир. } BISK : \text{пир. } FLOM = (BI : FL)^3 = (BD : FH)^3$$

Проведя изъ остальныхъ точекъ окружностей $ABCD$, $EFGH$, къ центрамъ I, L, прямыя линіи, и построивъ, на полученныхъ такимъ образомъ треугольникахъ пирамиды, коихъ вершины будутъ въ K, M, то на основаніи предъидущаго слѣдуетъ, что отношеніе каждой соотвѣтствующей пары такихъ пирамидъ равно утроенному отношенію $BD : FH$, т. е. что отношенія всѣхъ такихъ паръ равны между собою. Слѣдовательно (кн. 5, пред. 12):

$$\text{пир. } BISK : \text{пир. } FLOM = \text{всѣ пир. на } ABCD : \text{всѣмъ пир. на } EFGH =$$

$$= \text{цѣлая пир. } CK : \text{цѣлой пир. } GM.$$

Слѣдовательно:

$$(BD:FH)^3 = \text{пир. } CK : \text{пир. } GM$$

Но мы предположили:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N.$$

Слѣдовательно:

$$\text{кон. } BK : N = \text{пир. } CK : \text{пир. } GM.$$

Но такъ какъ конусъ заключаетъ въ себѣ пирамиду, то конусъ $BK >$ пир. CK. Слѣдовательно также $N >$ пир. GM (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ выше написанному,что пир. $GM > N$. А потому, не можетъ быть:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N$$

при $N <$ конуса FM. Подобнымъ же образомъ можно показать, что не можетъ быть:

$$(FH : BD)^3 = \text{кон. } FM : Z$$

при $Z <$ конуса BK.

Второй случай. Пусть будетъ $N >$ конуса FM и:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N$$

слѣдовательно:

$$N : \text{конусу } BK = (FH : BD)^3.$$

Пусть:

$$N : \text{кон. } BK = \text{кон. } FM : Z$$

гдѣ слѣдовательно $BK > Z$ (кн. 5, пред. 14). Слѣдовательно:

$$(FH : BD)^3 = \text{кон. } FM : Z$$

что на основаніи перваго случая невозможно. А потому не можетъ быть:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N$$

при $N >$ конуса FM; на основаніи перваго случая также невозможно, при $N <$ конуса FM. Слѣдовательно:

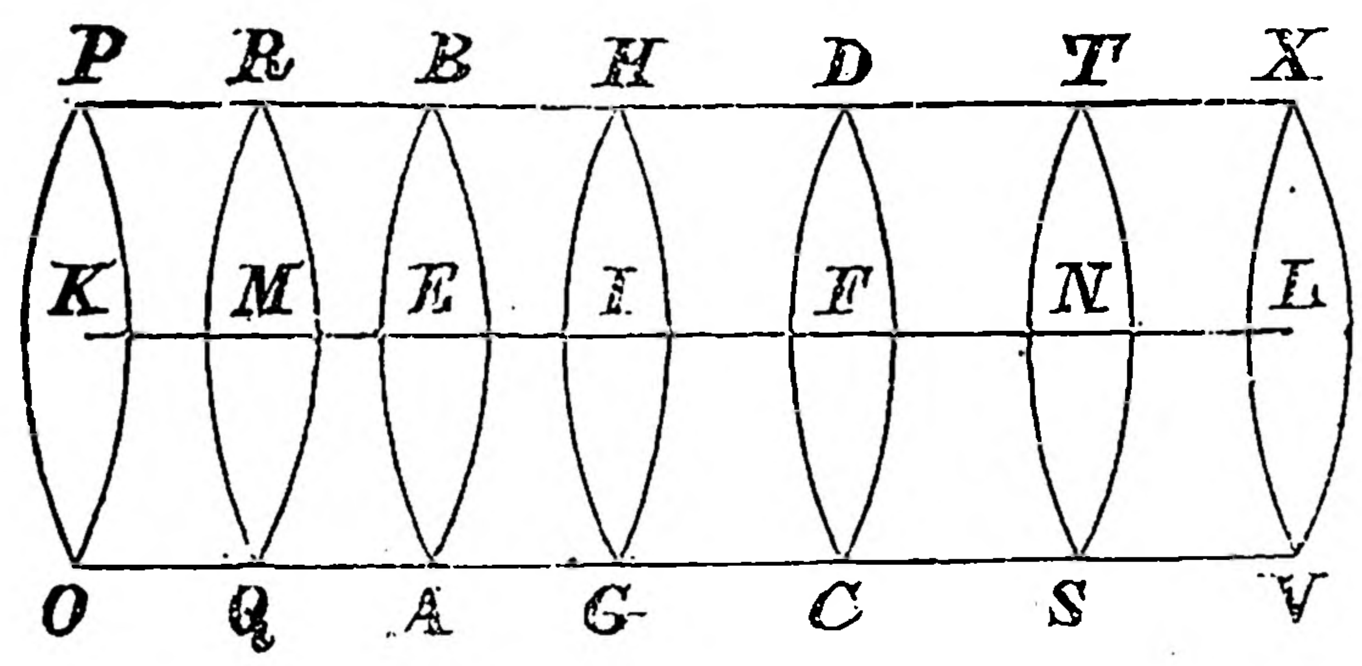
$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : \text{конусу } FM.$$

Такъ какъ цилиндры въ три раза больше конусовъ, имѣющихъ съ ними одну и туже высоту и одно и тоже основаніе (кн. 12, пред. 10), слѣдовательно они относятся между собою какъ конусы, а потому также:

$$\text{цил. } BK : \text{цил. } FM = (BD : FH)^3.$$

Предложеніе 13. Если мы пересѣчемъ цилиндръ AD, плоскостью HG, параллельной противолежащимъ площадямъ основаній AB, CD, то отсѣченные цилиндры BG, GD относятся между собою какъ ихъ оси EI и IF (фиг. 502).

Фиг. 502.



Доказат. Продолжимъ ось EF цилиндра AD по обѣ стороны до K, L; на EK нанесемъ произвольное число частей EM, MK равныхъ EI, а на FL произвольное число частей FN, NL, равныхъ IF; чрезъ точки M, K, N, L, проведемъ плоскости равныя и параллельныя площадямъ основаній AB, CD и построимъ цилиндры PQ, QB, DS, SX.

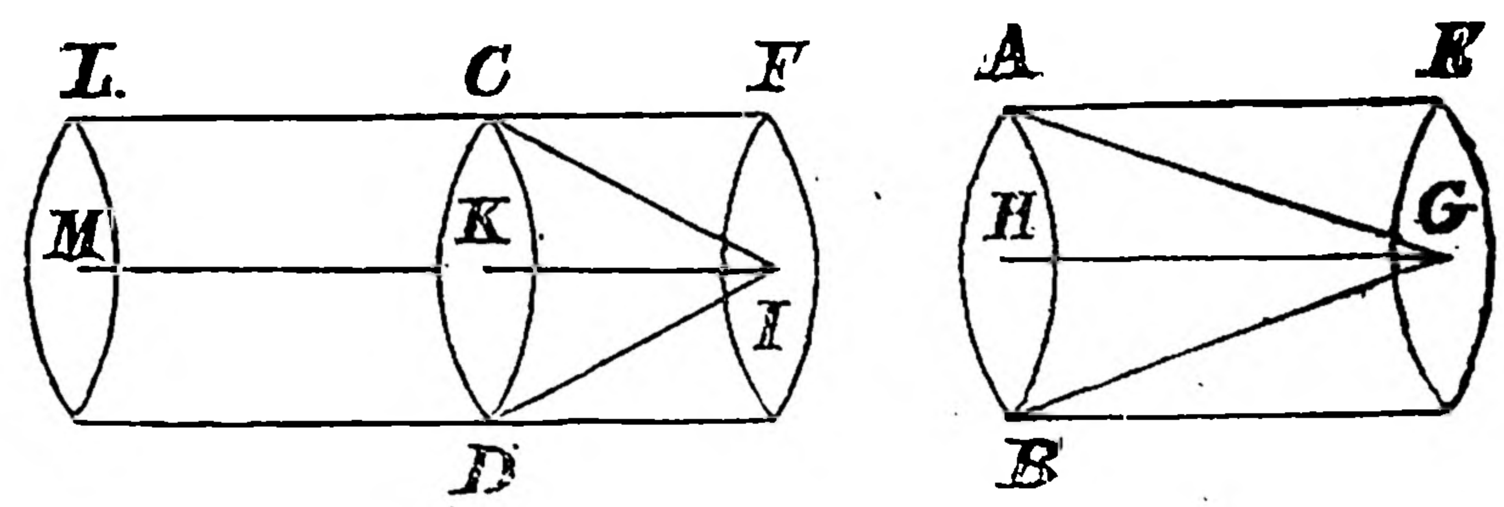
Такъ какъ цилиндры PQ, QB, BG одинаковой высоты KM, ME, EI, относятся между собою какъ площади ихъ основаній (кн. 12, пред. 11), но такъ какъ эти послѣднія равны, то и сами цилиндры также равны, именно $PQ = QB = BG$. Слѣдовательно KI есть такой же кратности отъ EI, какой цил. PG отъ цил. BG. По той же причинѣ IL такой же кратности отъ IF, какой цил. GX отъ цил. GD. А потому когда $KI \gtreqless IL$, то и $PG \gtreqless GX$. Слѣдовательно $EI : IF = BG : GD$ (кн. 5, опред. 5).

Предложеніе 14. Конусы ABG, CDI и цилиндры BE, DF, имѣющіе одинаковыя площади основаній AB, CD, относятся между собою какъ ихъ высоты HG, KI (фиг. 503).

Доказат. Продолжимъ IK до M, отложимъ $KM = HG$ и вообразимъ себѣ около оси KM цилиндръ DL.

Такъ какъ цилиндры BE, DL, одинаковой высоты HG, KM, то они относятся между собою какъ площади ихъ основаній (кн. 12, пред. 11), но эти послѣднія равны, а потому и цилиндры равны, именно $BE = DL$. Такъ

Фиг. 503.



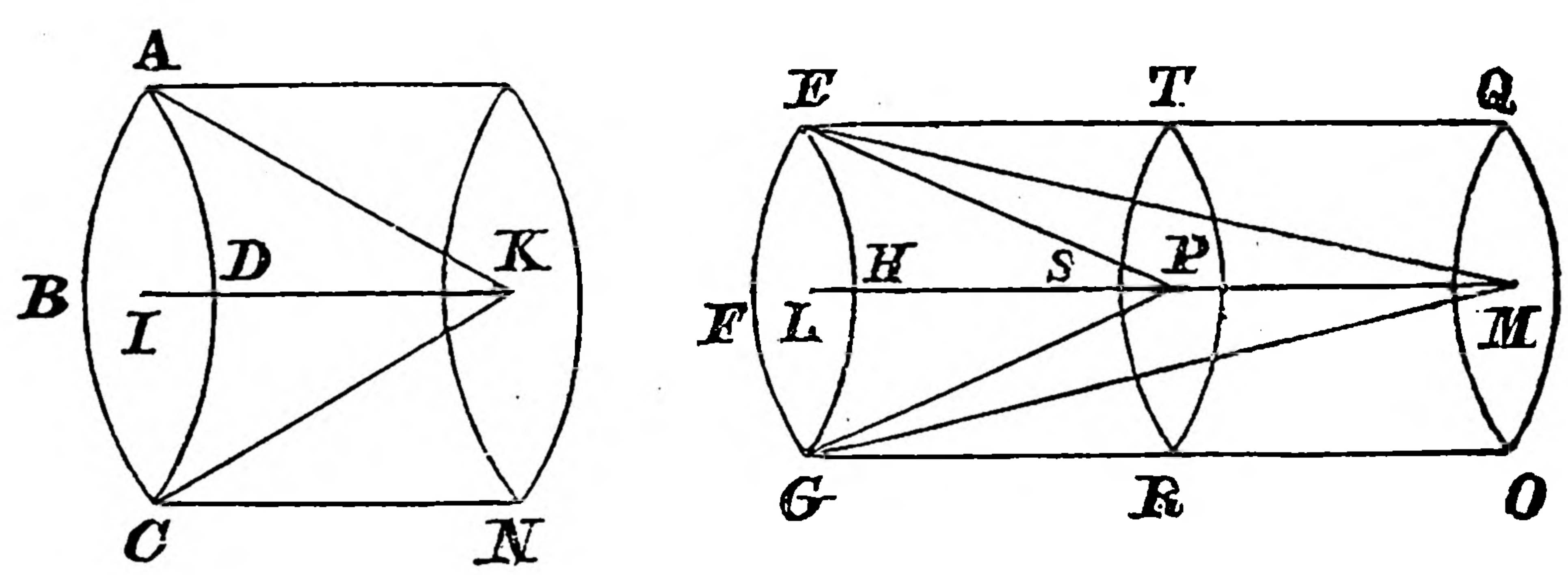
какъ цилиндръ FM разсѣченъ плоскостью CD, параллельной площадямъ основаній, то $DL : DF = MK : KI$ (кн. 12, пред. 13). Но $DL = BE$, и $MK = HG$. Слѣдовательно $BE : DF = HG : KI$.

Такъ какъ цилиндры BE, DF относятся между собою какъ конусы ABG, CDI (кн. 12, пред. 10), то:

$$\text{кон. } ABG : \text{кон. } CDI = HG : KI.$$

Предложеніе 15. Если конусы ACK, EGM, или цилиндры AN, EO равны между собою, то площади основаній AC, EG обратно пропорціональны высотамъ IK, LM. И если площади основаній обратно пропорціональны высотамъ, то конусы, равно какъ и цилиндры равны между собою (фиг. 504).

Фиг. 504.



Доказат. 1. Пусть цил. AN=цил. EO, то высоты IK, LM или равны, или же неравны.

a) Если $IK = LM$, то $AN : EO = AC : EG$ (кн. 12, пред. 11); но $AN = EO$, слѣдовательно $AC = EG$; а потому $AC : EG = LM : IK$.

b) Если $LM > IK$, пусть будетъ $LP = IK$. Проведемъ чрезъ P плоскость TR параллельную площадямъ основаній, и вообразимъ себѣ на площади EG цилиндръ ER.

Такъ какъ $AN = EO$, то $AN : ER = EO : ER$ (кн. 5, пред. 7). Но $AN : ER = AC : EG$ (кн. 12, пред. 11), и $EO : ER = LM : LP$ (кн. 12, пред. 13). Слѣдовательно $AC : EG = LM : LP = LM : IK$.

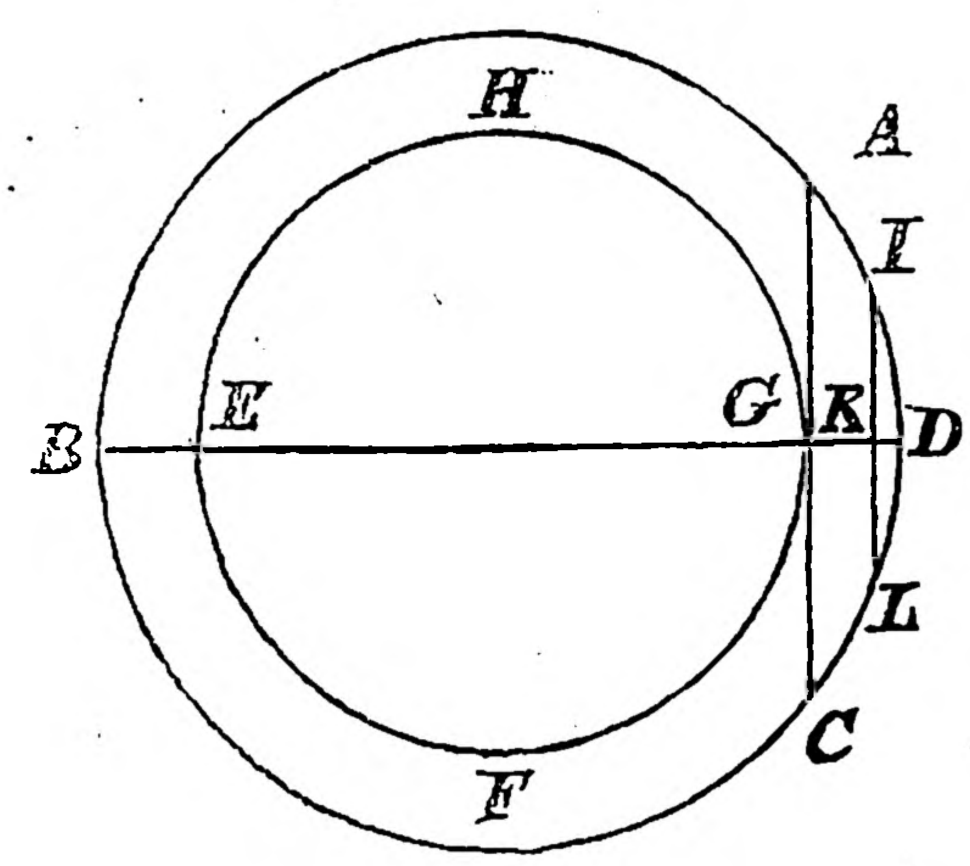
2. Пусть $AC : EG = LM : IK$, то на основаніи предъидущаго построе-

нія $AC : EG = LM : LP$. Но $AC : EG = AN : ER$ (кн. 12, пред. 11) и $LM : LP = EO : ER$ (кн. 12, пред. 13). Слѣдовательно $AN : ER = EO : ER$, а потому $AN = EO$ (кн. 5, пред. 9).

Тоже самое относится къ конусамъ ACK, EGM (кн. 12, пред. 10), т. е. если $AC : EG = LM : IK$, то кон. $ACK =$ кон. EGM, а если кон. $ACK =$ $=$ кон. EGM, то $AC : EG = LM : IK$.

Предложеніе 16. Вписать въ большій изъ двухъ данныхъ концентрическихъ круговъ $ABCD$ и $EFGH$ правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ, который бы не касался меньшаго круга (фиг. 505)?

Фиг. 505.



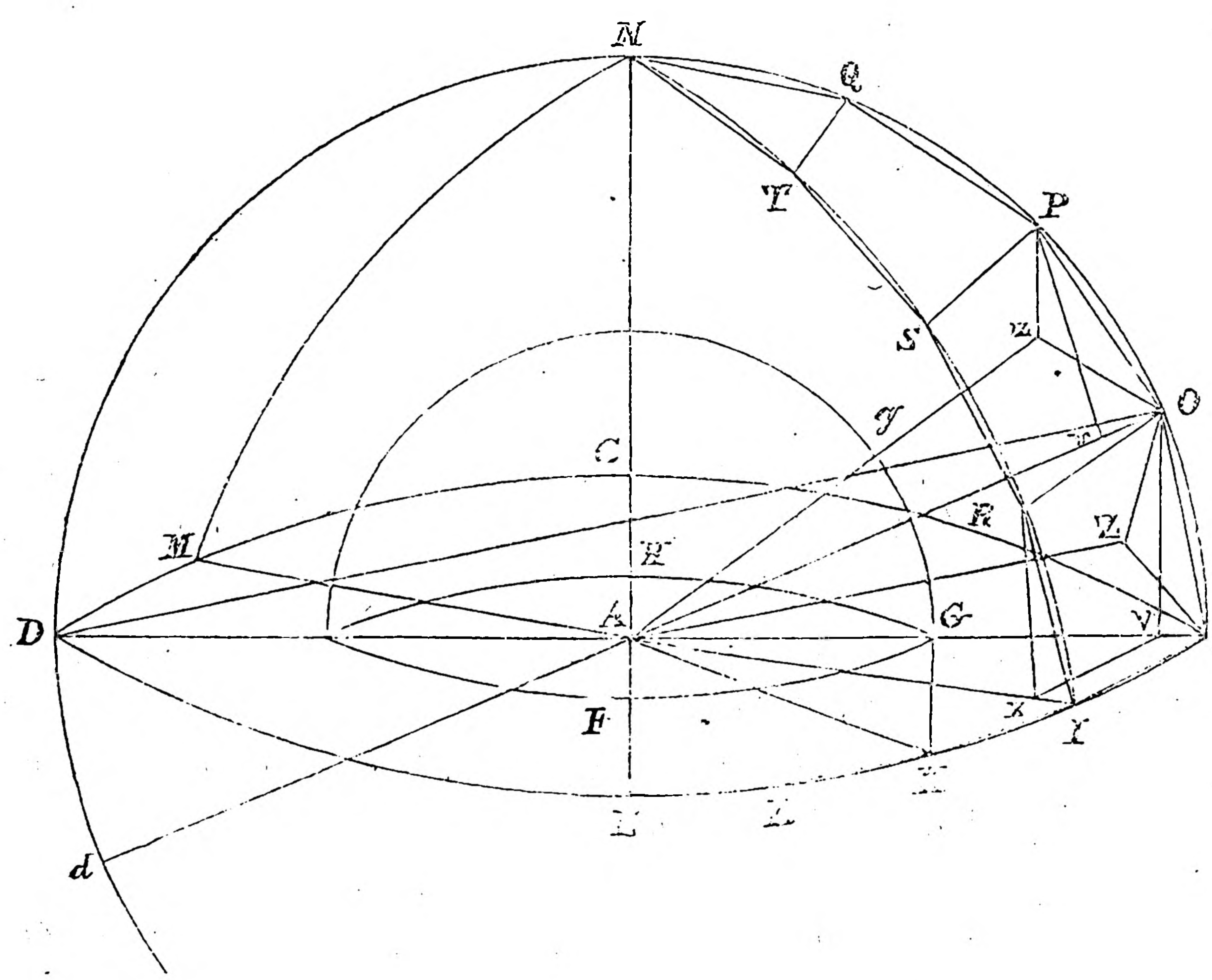
Рѣшеніе. Проведемъ діаметръ BD и возставимъ къ нему, въ точкѣ G, перпендикуляръ GA и продолжимъ его до C, то AC будетъ прямая касающаяся круга $EFGH$ (кн. 3, пред. 16). Раздѣлимъ пополамъ полуокружность BAD и будемъ продолжать это дѣленіе далѣе, то наконецъ мы дойдемъ до такой части ID, которая будетъ меньше AD (кн. 10, пред. 1). Опустимъ изъ точки I на BD перпендикуляръ IK, продолжимъ его до L, и проведемъ ID, DL, то $ID = DL$.

Такъ какъ IL параллельна AC, а послѣдняя касается круга, то IL не будетъ его касаться, а тѣмъ болѣе не будутъ его касаться ID, DL. Внося въ кругъ $ABCD$ одну за другою прямыя линіи равныя ID, такъ чтобы начало одной, совпадало съ концемъ другой, то въ большій кругъ будетъ вписанъ правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ, который не касается меньшаго круга.

Предложеніе 17. Въ большій изъ двухъ данныхъ концентрическихъ шаровъ вписать многогранникъ, который бы не касался своею поверхностью меньшаго шара (фиг. 506)?

Построеніе. Проведемъ плоскость чрезъ общій центръ A, плоскость эта пересѣчетъ поверхности шаровъ по кругамъ. Такъ какъ (кн. 11, опред. 14) шары образованы вращеніемъ полукруга около его неподвижнаго діаметра, то, какое бы положеніе не имѣлъ полукругъ, продолженная его плоскость каждый разъ образуетъ на шарѣ кругъ, и притомъ большой, такъ какъ діаметръ шара, очевидно, равный діаметру полукруга, больше всѣхъ прямыхъ линій проведенныхъ въ кругѣ или шарѣ (кн. 13, пред. 15). Пусть такимъ образомъ получены на поверхности большаго шара кругъ *BCDE*, а на поверхности меньшаго шара кругъ *FGH*. Проведемъ въ этихъ сѣченіяхъ діаметры *BD*, *CE*, взаимно перпендикулярные. Въ большій изъ обоихъ концентрическихъ круговъ *BCDE*, впишемъ (кн. 12, пред. 16) правильный многоугольникъ, съ четнымъ числомъ сторонъ, который бы не касался меньшаго круга *FGH*. Пусть сторонами этого многоугольника, въ квадрантѣ *BE*, будутъ *BI*, *IK*, *KL*, *LE*. Проведемъ *IA*, и продолжимъ ее до *M*. Къ плоскости круга *BCDE*, въ точкѣ *A*, возставимъ перпендикуляръ *AN*,

Фиг. 506.



встрѣчающій поверхность большаго шара въ точкѣ *N*. Чрезъ *AN* и чрезъ каждый изъ діаметровъ *BD*, *IM* проведемъ плоскости, то эти послѣднія, на основаніи выше сказаннаго, образуютъ на поверхности шара большіе круги; половины этихъ круговъ *DNB*, *INB* перпендикулярны къ плоскости круга *BCDE* (кн. 11, пред. 18) подобно *AN*.

Такъ какъ діаметры *DB*, *IM*, *CE* равны, то полукруги *BND*, *INM*, *BED* равны, слѣдовательно квадранты *BN*, *IN*, *BE* также равны. А потому стороны многоугольника, которыя были внесены въ квадрантъ *BE*, могутъ быть внесены въ *BN* и *IN*. Пусть сторонами этими въ *SN* будутъ *BO*, *OP*, *QP*, *QN*, а въ *IN* сторонами будутъ *IR*, *RS*, *BT*, *TN*. Проведемъ OR, PS, QT, то, какъ мы докажемъ въ послѣдствіи, каждая изъ четырехстороннихъ фигуръ $IBOR$, $ROPS$, $SPQT$, а также (кн. 11, пред. 2) $\triangle NQT$ находятся въ одной плоскости.

Представимъ себѣ прямыя линіи проведенныя изъ центра шара A въ точки O, R, P, S, Q, T, такимъ образомъ построимъ между обоими квадрантами BN, IN многогранникъ, составленный изъ пирамидъ, которыхъ общая вершина въ A, а площади основаній которыхъ суть $IBOR$, $ROPS$, $SPQT$, NQT.

Въ квадрантѣ BE, на каждой изъ остальныхъ сторонъ IK, KL, LE, сдѣлаемъ такое же построеніе какъ и на BI; въ трехъ остальныхъ квадрантахъ BC, CD, DE сдѣлаемъ тоже, что и въ BE; въ другой половинѣ полушара повторимъ тоже. Такимъ образомъ мы впишемъ въ большій шаръ многогранникъ, состоящій изъ пирамидъ, съ указаннымъ выше свойствомъ; многогранникъ этотъ не будетъ касаться своею поверхностью меньшаго шара.

Рѣшеніе. 1. Докажемъ, что каждая изъ четырехстороннихъ фигуръ $IBOR$, $ROPS$, $SPQT$ лежитъ въ одной плоскости.

Опустимъ на плоскость круга $BCDE$, изъ точекъ O, R, перпендикуляры OV, RX, которые встрѣчая линіи пересѣченія BD, IM (кн. 11, пред. 38), будутъ параллельны (кн. 11, пред. 6); проведемъ VX.

Такъ какъ отъ каждаго изъ полукруговъ BND, INM отсѣчены равныя дуги BO, IR, то $\angle ABO = \angle AIR$ (кн. 3, пред. 21). Но углы при точкахъ V, X суть прямые, и $OB = RI$, слѣдовательно $OV = RX$ и $BV = IX$ (кн. 1, пред. 26).

Такъ какъ $BA = IA$, но $BV = IX$, а потому $AV = AX$, слѣдовательно:

$$BV : VA = IX : XA$$

изъ этого слѣдуетъ, что VX параллельна IB (кн. 6, пред. 2). Но по предъидущему OV, RX параллельны и равны между собою. Слѣдовательно VX, RO равны и параллельны (кн. 1, пред. 33). А потому также RO и IB параллельны (кн. 11, пред. 9). Точно такимъ же образомъ доказывается, что PS и TQ параллельны IB; а потому PS параллельна RO и TQ параллельна PS. Такъ какъ RO параллельна IB, то четырехсторонняя фигура $IBOR$ лежитъ въ одной плоскости (кн. 11, пред. 7). По той же причинѣ каждая изъ остальныхъ многостороннихъ фигуръ $ROPS$, $SPQT$ лежатъ въ одной плоскости.

2. Докажемъ, что поверхность вписаннаго многогранника не касается поверхности меньшаго шара, на которой находится большой кругъ FGH.

Опустимъ изъ центра шара A перпендикуляръ AZ на плоскій четыреугольникъ $IBOR$, пересѣкающій эту плоскость въ точкѣ Z и проведемъ въ этой плоскости прямыя линіи BZ, ZO, къ которымъ также будетъ перпендикулярна прямая AZ (кн. 11, опред. 3), слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB = \square AZ + \square ZB$$

и

$$\square AO = \square AZ + \square ZO$$

Но $AB = AO$, а потому:

$$\square AB = \square AO$$

откуда:

$$\square AZ + \square ZO = \square AZ + \square ZB$$

слѣдовательно:

$$\square ZO = \square ZB$$

а потому $ZO = ZB$. Точно такимъ же образомъ доказывается, что прямыя, проведенныя изъ точки Z къ точкамъ I, R, соотвѣтственно равны ZB, ZO. Слѣдовательно кругъ описанный около точки Z, радіусомъ ZB, пройдетъ чрезъ точки I, R, O, а потому четырехсторонняя фигура вписана въ этотъ кругъ.

Примѣч. 1. Если мы опустимъ изъ точки A перпендикуляръ Az на плоскость $ROPS$ и проведемъ zO, zP, то точно такимъ же образомъ доказывается, что кругъ описанный около точки z радіусомъ zO, пройдетъ также чрезъ точки R, S, P, а потому четырехсторонняя фигура вписана въ этомъ кругѣ и т. д.

Такъ какъ $IB > XV$ и $XV = RO$, то $IB > RO$, но $IB = IR = BO$, а потому какъ IR, такъ и $BO > RO$. Слѣдовательно, въ кругѣ описанномъ около $IBOR$, каждая изъ равныхъ дугъ IB, BO, IR больше дуги OR; а потому $\angle OZB$ есть тупой уголъ, слѣдовательно (кн. 2, пред. 12) $\square BO > \square BZ + \square ZO$, т. е.:

$$\square BO > 2\square BZ.$$

Изъ точки O проведемъ OV перпендикулярную къ BD. Такъ какъ $BD < 2DV$ и (кн. 6, пред. 1):

$$BD : DV = DB.BV : DV.VB$$

то:

$$DB.BV < 2DV.VB$$

Но, проведя прямую OD, (кн. 6, пред. 8, слѣд.):

$$DB.BV = \square BO \quad \text{и} \quad DV.VB = \square OV$$

Слѣдовательно $\square BO < 2\square OV$. Но $\square BO > 2\square BZ$. Слѣдовательно $\square OV > \square BZ$. Далѣе, такъ какъ $BA = AO$ и $\square BA = \square AO$ и:

$$\square BA = \square BZ + \square ZA$$

равно какъ:

$$\square AO = \square OV + VA$$

то:

$$\square BZ + \square ZA = \square OV + \square VA$$

Но по выше сказанному $\square OV > \square BZ$, слѣдовательно $\square VA < \square ZA$, а потому $AZ > AV$, слѣдовательно тѣмъ болѣе $AZ > AG$. Итакъ AZ перпендикулярна къ одной изъ боковыхъ сторонъ многогранника, а AG перпендикулярна къ поверхности меньшаго шара. Слѣдовательно многогранникъ (стороною $IBOR$) не касается поверхности меньшаго шара.

Примѣч. 2. Равнымъ образомъ многогранникъ не касается стороною $OPSR$ поверхности меньшаго шара. Опустимъ изъ точки A на $OPSR$ перпендикуляръ Az, и проведемъ Oz, Pz, то кругъ описанный около z радіусомъ zO пройдетъ чрезъ точки P, S, R. Такъ какъ IB больше чѣмъ RO, SP, и $IB = RS = OP$, то каждая изъ RS, OP соотвѣтственно больше RO, SP. Въ кругѣ, описанномъ около четырехсторонней фигуры, дуги RS, OP равны и больше RO, SP. Слѣдовательно уголъ PzO при точкѣ z тупой, а потому $\square OP > 2\square zO$ (кн. 2, пред. 12).

Изъ точки P проведемъ Pv перпендикулярно OA, и продолжимъ OA до d. Точно также, какъ прежде, доказывается что $Az > Av$, а слѣдовательно тѣмъ болѣе $Az > AG$, изъ чего слѣдуетъ, что и сторона $ROPS$ не касается поверхности меньшаго шара. Равнымъ образомъ ни одна изъ другихъ сторонъ многогранника не касается поверхности меньшаго шара.

Другое доказательство, что $AZ > AG$.

Въ точкѣ G возставимъ къ AG перпендикуляръ GK и проведемъ AK. Раздѣливъ продолженную дугу BE пополамъ, то останется (кн. 10, пред. 1) еще часть BI, которая меньше дуги, которой хорда была бы GK, а потому и прямая линія $BI < GK$. Но такъ какъ по выше доказанному четырехсторонняя фигура $IBOR$ вписана въ кругъ и $OB = BI = IR$, прямая же OR меньше каждой изъ предъидущихъ, то уголъ OZB тупой, слѣдовательно $BO > BZ$. Но $GK > BO$, слѣдовательно тѣмъ болѣе $GK > BZ$, а потому $\square GK > \square BZ$.

Такъ какъ:

$$\square AK = \square AG + \square GK$$

и

$$\square AB = \square BZ + \square AZ$$

Но:

$$AK = AB$$

то:

$$\square AK = \square AB$$

а потому:

$$\square AG + \square GK = \square BZ + \square AZ.$$

Но мы имѣли $\square BZ < \square GK$, слѣдовательно $\square AZ > \square AG$, а потому $AZ > AG$.

Замѣчаніе. Если въ шаръ B впишемъ многогранникъ подобный многограннику вписанному въ шаръ A, то оба многогранника относятся между собою какъ утроенное (кубы) отношеніе діаметровъ этихъ шаровъ.

Доказат. Раздѣливъ многогранники на одинаковое число одинаково расположенныхъ пирамидъ (коихъ вершины лежатъ въ центрѣ шаровъ, а основанія суть стороны многогранниковъ), то эти пирамиды подобны (кн. 12, пред. 8). (Стороны прилежащія къ вершинѣ суть радіусы шаровъ). Слѣдовательно каждая пара одинаково расположенныхъ пирамидъ въ обоихъ шарахъ находятся въ томъ же отношеніи, какъ утроенные (кубы) діаметры шаровъ. Итакъ всѣ пирамиды въ шарѣ A относятся ко всѣмъ пирамидамъ въ шарѣ B, какъ одна изъ пирамидъ въ A, къ одной изъ пирамидъ въ B. А потому отношеніе многогранниковъ равно утроенному отношенію діаметровъ шаровъ.

Предложеніе 18. Шары ABC, DEF относятся между собою какъ утроенные (кубы) діаметры BC, EF (фиг. 507).

Доказат. Если бы это не имѣло мѣсто, то пусть:

$$(BC:EF)^3 = \text{шар. } ABC : X$$

такъ что тѣло X или меньше, или больше шара DEF.

Случай первый. Положимъ $X <$ шар. DEF. Пусть шаръ $HGI = X$ будетъ концентрическій съ шаромъ DEF; впишемъ (кн. 12, пред. 17) въ большій шаръ DEF многогранникъ, коего поверхность не касается меньшаго шара RGI, а въ шаръ ABC впишемъ многогранникъ подобный предъидущему; мы будемъ имѣть (кн. 12, пред. 17, замѣч.):

$$\text{многогр. } ABC : \text{многогр. } DEF = (BC : EF)^3$$

Но по положенію:

$$\text{шар. } ABC : \text{шар. } GHI = (BC : EF)^3.$$

а потому:

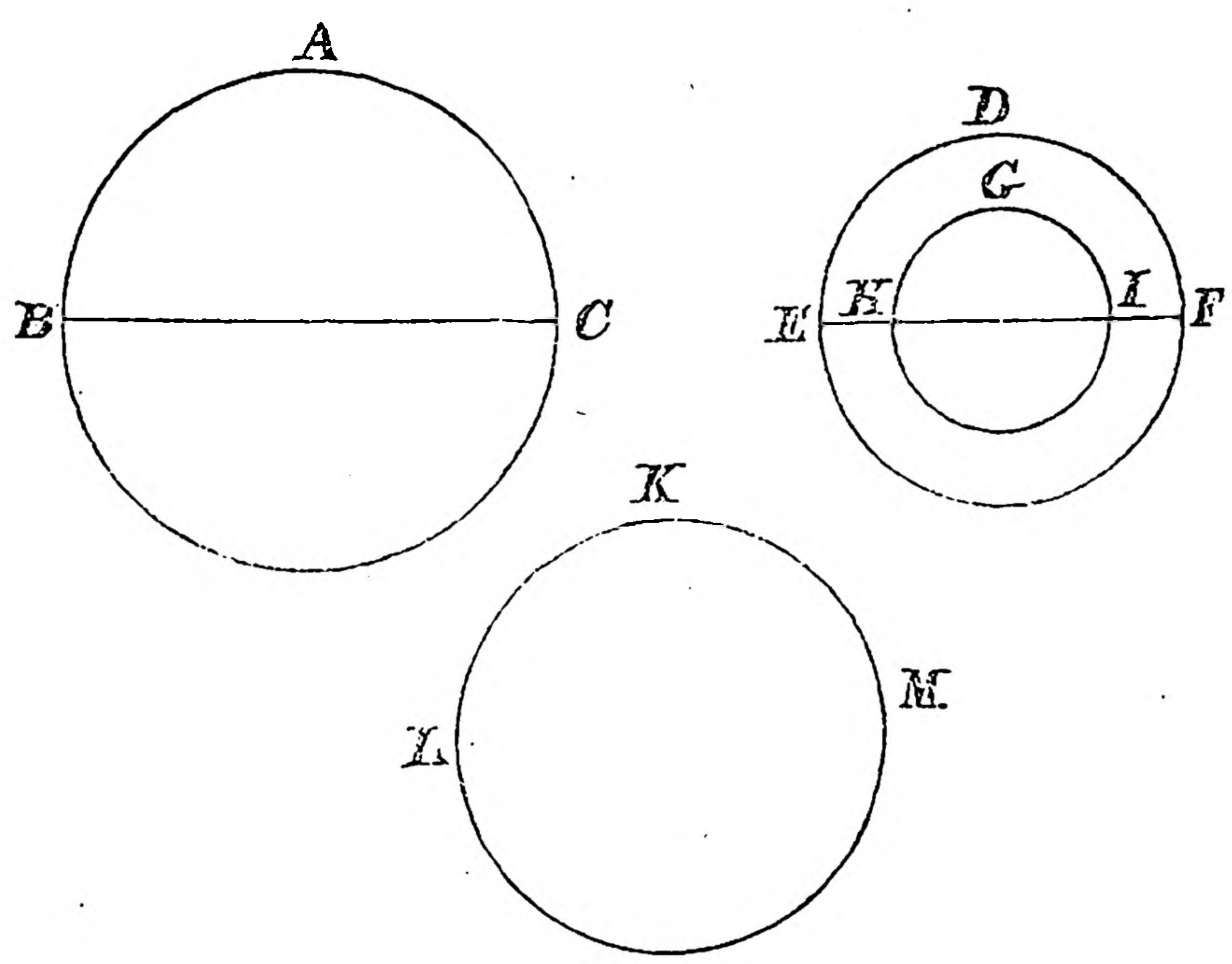
$$\text{шар. } ABC : \text{шар. } GHI = \text{многогр. } ABC : \text{многогр. } DEF$$

но какъ шаръ $ABC >$ многогр. ABC, то и шаръ $GHI >$ многогр. DEF. Но такъ какъ шаръ GHI вписанъ въ многогранникъ DEF, то шаръ $GHI <$ многогр. DEF, что противорѣчитъ предъидущему. А потому не можетъ быть:

$$(BC : EF)^3 = \text{шаръ } ABC : X$$

при $X <$ шара DEF.

Фиг. 507.



Подобнымъ же образомъ доказывается, что не имѣетъ мѣста пропорція:

$$\text{шаръ } DEF : Z = (EF : BC)^3$$

при $Z <$ шара ABC.

Случай второй. Пусть $X >$ шара DEF и:

$$(BC : EF)^3 = \text{шаръ } ABC : X$$

слѣдовательно, когда шаръ $KLM = X$, то:

$$(EF : BC)^3 = \text{шаръ } KLM : \text{шар.} ABC$$

Пусть будетъ:

$$\text{шар. } KLM : \text{шар. } ABC = \text{шар. } DEF : Z$$

гдѣ шар. $ABC > Z$, слѣдовательно:

$$(EF:BC)^3 = \text{шаръ } DEF : Z$$

что невозможно на основанiи перваго случая, гдѣ $Z <$ шара ABC. А потому не можетъ быть:

$$(BC:EF)^3 = \text{шар. } ABC : X$$

при $X >$ шаръ DEF, а на основанiи перваго случая также не можетъ быть при $X <$ шара DEF. Слѣдовательно необходимо:

$$(BC:EF)^3 = \text{шар. } ABC : \text{шар. } DEF.$$

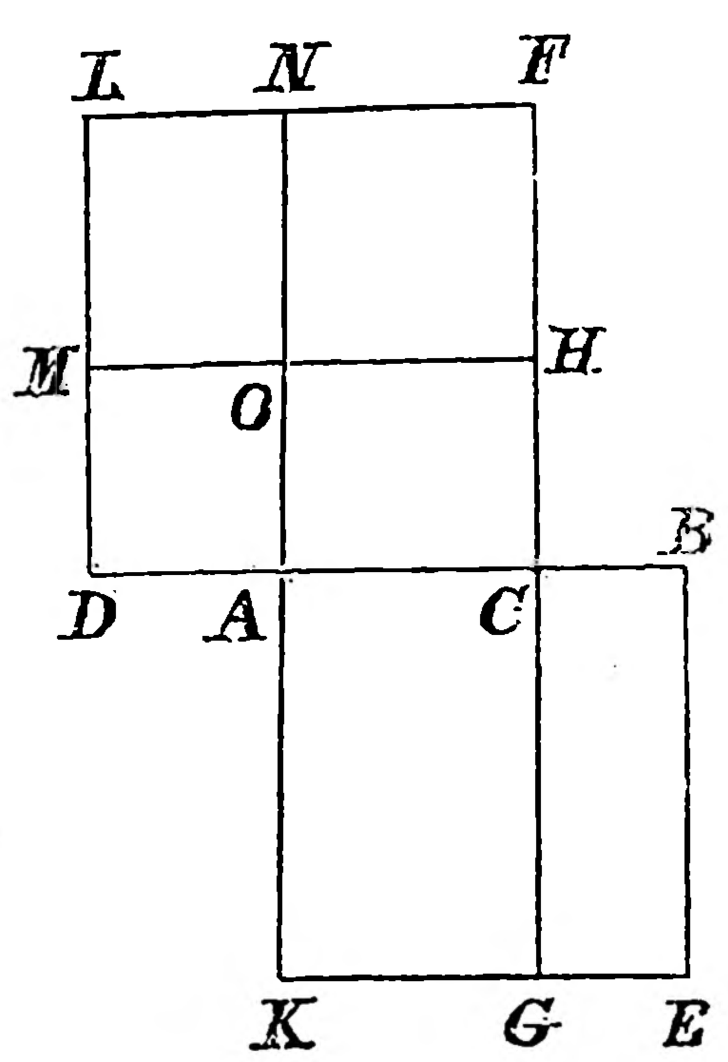
КНИГА XIII.

Книга третяя „О тѣлахъ“.

Предложенія.

Предложеніе 1. Если прямую AB, въ точкѣ C, раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то квадратъ построенный на прямой, составленной изъ половины AD данной прямой и изъ большаго отрѣзка AC, равенъ пять разъ взятому квадрату, построенному на этой половинѣ AD (фиг. 508).

Фиг. 508.



Доказат. На прямыхъ AB, CD построимъ квадраты AE, DF; построимъ фигуру въ квадратѣ DF какъ въ пред. 4, кн. 2, и продолжимъ FC до G.

Такъ какъ прямая AB раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 6, опред. 3):

$$AB:AC=AC:CB$$

а потому (кн. 6, пред. 17) $AB.CB=\square AC$. Но:

$$AB.CB=CE \text{ и } \square AC=FO.$$

Слѣдовательно $CE=FO$. Такъ какъ $AB=2AD$ и $AB=AK$, $AD=AO$, то $AK=2AO$, слѣдовательно, какъ (кн. 6, пред. 1):

$$AK:AO=KC:CO$$

то и $KC=2CO$. Итакъ (кн. 1, пред. 43):

$$LO+OC=2CO$$

Слѣдовательно:

$$KC=LO+OC$$

но по выше доказанному $CE=FO$, а потому (кн. 1, пред. 2):

$$AE=\square AB=\text{гномону } OMLFCAO.$$

Но $AB=2AD$, а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд.) $\square AB=4\square AD$, слѣдовательно:

$$\text{гномонъ } OMLFCAO=4\square AD$$

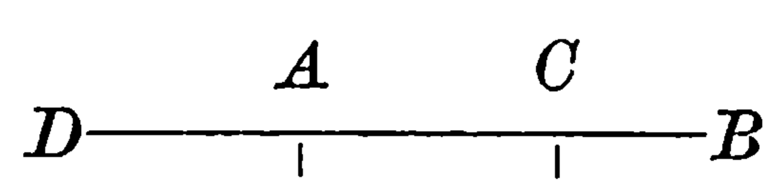
но $DO=\square AD$, то (кн. 1, пред. 2) $DF=5\square AD$, гдѣ $AD=\frac{1}{2}AB$ и:

$$DF=\square CD=\square(CA+AD)=\square(CA+\tfrac{1}{2}AB).$$

Замѣчаніе. Предложеніе доказывается *аналитически*, если искомое принять за извѣстное и на основаніи выведенныхъ отсюда слѣдствій получаютъ извѣстныя истины. Напротивъ, предложеніе доказано *синтетически*, если съ помощью извѣстныхъ истинъ доходятъ до искомой.

Пусть прямая линія AB (фиг. 509) въ точкѣ C раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и пусть AC большій отрѣзокъ, прибавимъ къ продолженной прямой AB ея половину AD; требуется доказать, что $\square CD=5\square AD$?

Фиг. 509.



1) *Аналитическое доказательство.* Примемъ за извѣстное, что $\square CD=$ $=5\square AD$. Но (кн. 2, пред. 4):

$$\square CD=\square AC+\square AD+2(AC.AD)$$

слѣдовательно:

$$\square AC+\square AD+2(AC.AD)=5\square AD$$

а потому (кн. 1, пред. 3):

$$\square AC + 2\,(AC.AD) = 4\square AD.$$

Но мы предположили $BA = 2AD$, а потому $2(AD.AC) = BA.AC$; мы предположили также, что:

$$BA : AC = AC : CB$$

а потому $AB.BC = \square AC$. Слѣдовательно:

$$(BA.AC) + (AB.BC) = 4\square AD.$$

Но (кн. 2, пред. 2):

$$(BA.AC) + (AB.BC) = \square AB.$$

Слѣдовательно $4\square AD = \square AB$, что и должно быть, такъ какъ $2AD = AB$.

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ $\square AB = 4\square AD$, а (кн. 2, пред. 2):

$$\square AB = (BA.AC) + (AB.BC)$$

то:

$$(BA.AC) + (AB.BC) = 4\square AD.$$

Итакъ:

$$BA.AC = 2(AD.AC)$$

и $AB.BC = \square AC$. Слѣдовательно:

$$\square AC + 2(AD.AC) = 4AD$$

а потому (кн. 1, пред. 2):

$$\square AC + \square AD + 2(AD.AC) = 5\square AD.$$

Но (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC + \square AD + 2(AD.AC) = \square DC.$$

Слѣдовательно $\square DC = 5\square AD$, т. е.:

$$\square(AC + \tfrac{1}{2}\,AB) = 5\square\,\tfrac{1}{2}\,AB.$$

Примѣч. 1. Уже древнимъ было извѣстно два способа для доказательства теоремъ и рѣшенія задачъ, какъ это видно изъ настоящей книги Началъ Евклида: способъ *аналитическій* (ἀνάλυσις разрѣшеніе) и *синтетическій* (σύνϑεσις сложеніе). Я войду въ нѣкоторыя подробности относительно этихъ способовъ, такъ какъ я думаю, что преподаватель долженъ, по возможности, доказывая теоремы и рѣшая задачи, указывать на характеръ процесса и мало по малу уяснять оба эти способа. Это тѣмъ важнѣе, что элементарная геометрія, въ качествѣ общеобразовательной науки, наилучше можетъ уяснить процессъ мышленія, такъ какъ никакая другая наука не можетъ сравниться съ нею въ правильности логическаго развитія истинъ. Кромѣ этого я не знаю ни одного математическаго сочиненія, въ которомъ бы оба эти способа были обстоятельно изложены, а аналитическій способъ, по большей части, понимается неправильно.

Способъ аналитическій. Въ тринадцатой книгѣ Началъ Евклида мы находимъ краткое опредѣленіе анализа и синтеза, но Паппусъ говоритъ, что изобрѣтеніе аналитическаго способа принадлежитъ Платону, хотя въ сочиненіяхъ Платона мы не находимъ ничего относительно этого способа. Кто бы нибылъ творецъ аналитическаго способа, но Евклидъ первый его формулировалъ слѣдующимъ образомъ: въ анализѣ предложенную теорему принимаютъ за истину, чтобы изъ нея вывесть слѣдствія, которыя бы привели къ извѣстной уже истинѣ. Изъ этого опредѣленія и примѣровъ, которые Евклидъ даетъ для поясненія, можно заключить, что онъ смотритъ на теорему какъ доказанную, если изъ нея вытекаетъ, какъ необходимое слѣдствіе, какое нибудь, уже доказанное, извѣстное предложеніе.

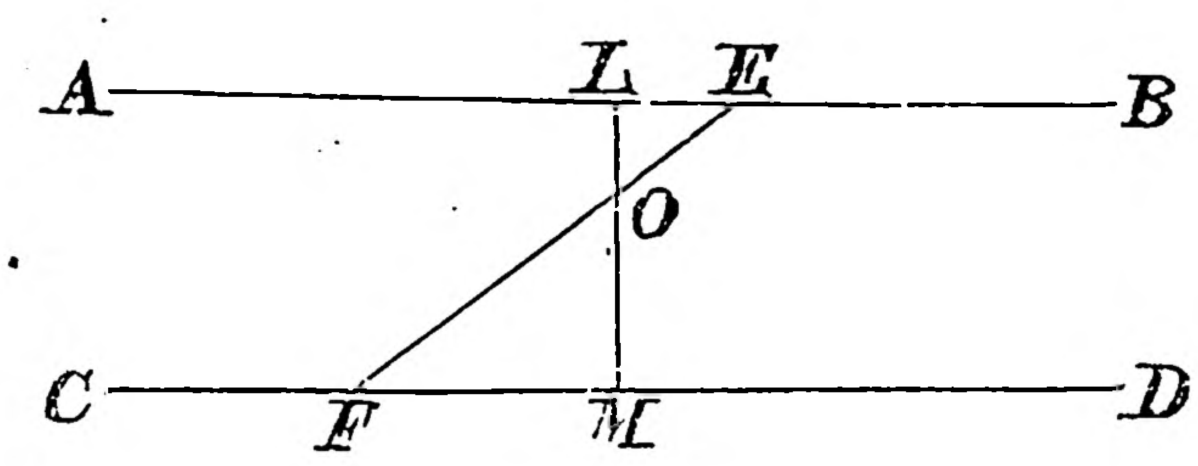
Но уже Аристотель замѣтилъ, что изъ ложнаго предложенія можно вывесть, какъ необходимое слѣдствіе, предложеніе истинное, такъ напримѣръ, изъ ложнаго предложенія: въ каждомъ треугольникѣ стороны пропорціональны противолежащимъ угламъ, вытекаетъ, какъ необходимое слѣдствіе, предложеніе истинное: что противъ равныхъ угловъ лежатъ и стороны равныя. Слѣдовательно, истина, выведеннаго слѣдствія, не даетъ намъ права дѣлать заключеніе о истинѣ предложенія.

Но если изъ принятаго предложенія за истинное вытекаетъ, какъ необходимое слѣдствіе, несообразность съ извѣстными истинами, то мы вправѣ заключить, что предложенная теорема ложна, такъ какъ истинное предложеніе не можетъ дать ложнаго слѣдствія; напр.:

Задача. Чрезъ данную точку между двумя параллельными линіями провести такую прямую, которая бы въ этой точкѣ дѣлилась пополамъ, т. е. чтобы отрѣзки ея, между данною точкою и параллельными, были равны?

Рѣшеніе. Пусть данныя прямыя будутъ (фиг. 510) AB и CD и данная между ними точка O. Положимъ, что задача рѣшена и что искомая прямая есть EF, которая, слѣдовательно въ точкѣ O дѣлиться пополамъ, т. е. $EO=OF$. Изъ точки O опустимъ перпенди-

Фиг. 510.



куляръ LM на одну изъ прямыхъ, то онъ будетъ перпендикуляръ и къ другой. Если прямая EF въ точкѣ O дѣлиться пополамъ, то $\triangle OLE=\triangle OFM$, такъ какъ $OE=OF$, $\angle LOE=$ $=\angle FOM$ и $\angle OLE=\angle FMO$ какъ прямые, слѣдовательно и $OL=OM$. Что возможно только въ томъ частномъ случаѣ, когда точка O лежитъ на рединѣ прямой LM. Слѣдовательно вообще задача невозможна.

Слѣдовательно изъ анализа, такимъ образомъ формулированнаго, можно, въ первомъ случаѣ, только сказать, что теорема *можетъ быть* истинна, а во второмъ случаѣ, мы заключимъ, что предложенная теорема *ложна.*

Такъ обыкновенно понимаютъ аналитическій способъ, который отъ того и получилъ названія *разрѣшенія,* такъ какъ предложенная теорема разлагается на свои составныя части, до тѣхъ поръ, пока не дойдутъ до извѣстной истины или несообразности.

Паппусъ формулировалъ аналитическій способъ иначе, онъ далъ ему такую форму, что онъ ведетъ всегда къ опредѣленному результату. Въ анализѣ, говоритъ Паппусъ, предложенную теорему принимаютъ за истину и ищутъ изъ какой другой, уже извѣстной теоремы, она можетъ быть выведена, какъ необходимое слѣдствіе, и если такая теорема найдется, то предложенная будетъ доказана. Если же такой извѣстной теоремы не находится, то ищутъ изъ какой теоремы, еще не доказанной, она можетъ быть выведена, и найдя такую теорему, вопросъ сводится къ тому, чтобы доказать эту послѣднюю. Съ этой послѣдней поступаютъ какъ съ предложенной, т. е. опять ищутъ изъ какой извѣстной теоремы она можетъ быть выведена, какъ необходимое слѣдствіе, и если такая теорема находится, то предложенная будетъ доказана, если нѣтъ, то поступаютъ опять подобнымъ образомъ, пока наконецъ, не дойдутъ до теоремы извѣстной, откуда и заключаютъ, что предложенная теорема справедлива.

Изъ этого видимъ, что аналитическій способъ состоитъ въ установленіи непрерывнаго ряда предложеній, начиная съ предложенной теоремы и оканчивая извѣстной. Каждая изъ теоремъ этого ряда есть слѣдствіе теоремы непосредственно за ней слѣдующей. У Евклида рядъ теоремъ идетъ въ обратномъ смыслѣ, именно: каждая изъ теоремъ ряда есть слѣдствіе непосредственно предъидущей.

Посмотримъ какія условія необходимы, чтобы оба процесса Евклидовскій и Паппуса вели къ опредѣленному результату.

Если двѣ теоремы такъ связаны между собою, что каждая изъ нихъ есть слѣдствіе другой, то такія двѣ теоремы называются *взаимными*.

Если въ рядѣ предложеній, о которомъ мы выше говорили, два послѣдовательныя предложенія взаимны, то можно разсматривать вторую теорему какъ слѣдствіе первой, вмѣсто того чтобы разсматривать ее какъ имѣющую слѣдствіемъ первую. Если такая взаимность имѣетъ мѣсто, начиная съ первой теоремы ряда до послѣдней, то можно сказать, что аналитическій способъ состоитъ въ установленіи ряда теоремъ, изъ коихъ вторая есть слѣдствіе первой, которую нужно доказать, третяя есть слѣдствіе второй и т. д. пока не дойдемъ до извѣстнаго истиннаго предложенія.

Такъ какъ вывесть слѣдствіе изъ данной теоремы легче, чѣмъ найти теорему, которой данная есть слѣдствіе, то можно прилагать Евклидовскій аналитическій процессъ съ тѣмъ условіемъ, чтобы каждый разъ, когда изъ данной теоремы выводится, какъ слѣдствіе, другая, убѣдиться, что обѣ эти теоремы взаимны, тогда и этотъ процессъ ведетъ также вѣрно къ доказательству данной теоремы какъ и Паппуса.

Здѣсь представляется вопросъ: какую изъ различныхъ теоремъ, изъ коихъ предложенная можетъ быть выведена, какъ слѣдствіе или которыя могутъ быть выведены, какъ слѣдствія данной, слѣдуетъ выбрать? Тотъ же вопросъ представляется и относительно каждой изъ теоремъ аналитическаго ряда.

Отвѣта на этотъ вопросъ дать нельзя, такъ какъ ни какихъ правилъ для этого несуществуетъ. Рядъ теоремъ можетъ быть продолженъ неопредѣленно, а извѣстной теоремы не представиться, иногда-же такой рядъ заканчивается весьма скоро извѣстнымъ предложеніемъ. Это зависитъ отъ способности соображенія и обширности геометрическихъ познаній.

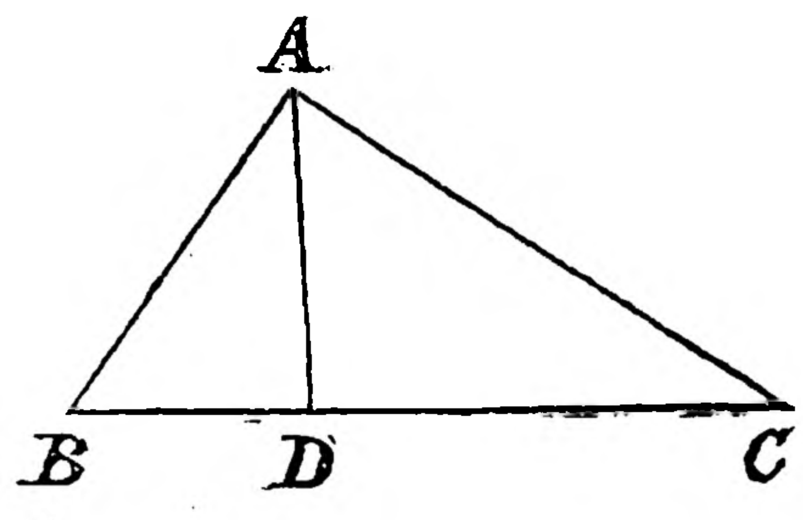
Примѣръ. Возьмемъ для примѣра извѣстную теорему Пиѳагора: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ построенный на гипотенузѣ равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на катетахъ.

Доказат. Пусть ABC будетъ данный треугольникъ (фиг. 511), въ которомъ уголъ A прямой. Положимъ что предложеніе справедливо, т. е. пусть будетъ:

$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

Эта теорема есть слѣдствіе другой: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ каждый изъ катетовъ средне-пропорціоналенъ между гипотенузою и отрѣзкомъ гипотенузы, ле-

Фиг. 511.



жащимъ между основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и катетомъ. И въ самомъ дѣлѣ, если эта теорема справедлива, то мы имѣемъ:

$$AB^2=BC.BD, \quad AC^2=BC.CD$$

складывая получимъ предложенную теорему. Слѣдовательно предложенная теорема сведена на другую, которую надобно доказать.

Вторая теорема будетъ слѣдствіе третьей: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ, перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, дѣлитъ треугольникъ на два треугольника подобные между собою и каждый подобенъ цѣлому.

Эту послѣднюю теорему легко доказать, слѣдовательно и предложенная справедлива. Въ этомъ примѣрѣ рядъ теоремъ состоялъ изъ трехъ, изъ коихъ первая была слѣдствіемъ второй, а вторая слѣдствіемъ третьей.

Докажемъ туже теорему аналитическимъ процессомъ Евклида.

Если мы имѣемъ:

$$BC^2=AB^2+AC^2$$

то:

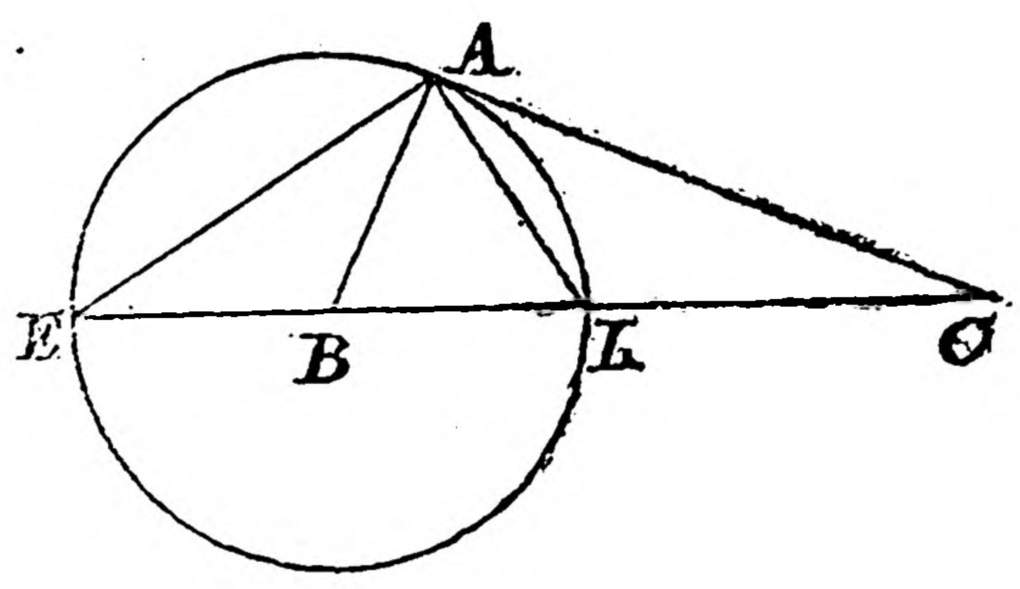
$$AC^2=BC^2-AB^2=(BC+AB)\,(BC-AB)$$

т. е. одинъ изъ катетовъ долженъ быть средне пропорціоналенъ между суммою и разностью гипотенузы и другаго катета.

Очевидно, что предложенная теорема и выведенная изъ нея, какъ слѣдствіе, суть взаимныя. Надобно доказать эту послѣднюю.

Для этого, изъ точки B какъ изъ центра опишемъ радіусомъ BA кругъ (фиг. 512) и продолжимъ гипотенузу до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ E. Очевидно, что $CE=BC+AB$,

Фиг. 512.



а $LC=BC-AB$. Слѣдовательно надобно показать, что AC, касательная къ кругу, есть средне пропорціональная между CE и CL.

Если эта послѣдняя теорема будетъ справедлива, то изъ нея будетъ выходить, какъ слѣдствіе третяя теорема: что треугольники AEC и ALC, имѣющіе одинъ уголъ C общій и стороны заключающія этотъ уголъ пропорціональны, будутъ подобны.

Очевидно опять, что эти двѣ послѣднія теоремы взаимны, слѣдовательно остается доказать послѣднюю: что треугольники AEC и ALC подобны, а это слѣдуетъ изъ того, что эти треугольники равноугольны.

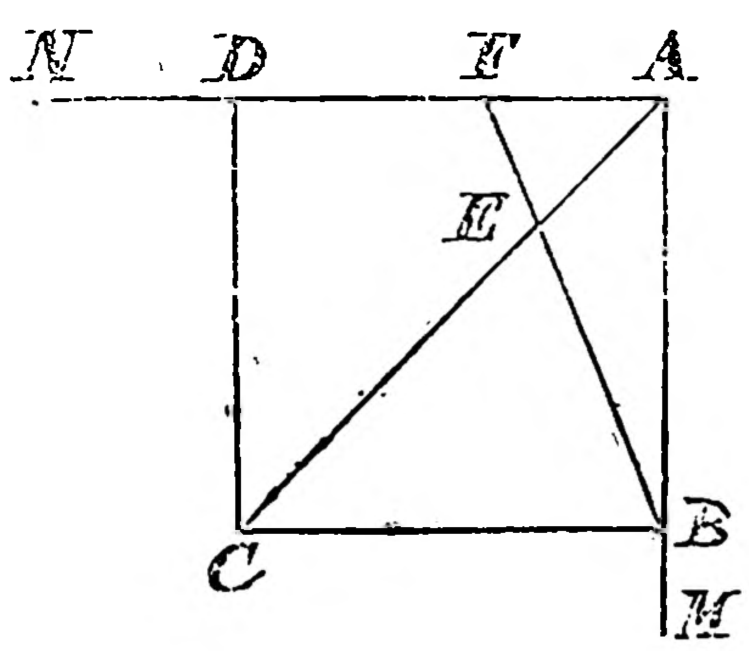
Въ этомъ послѣднемъ процессѣ надобно было удостовѣриться всякій разъ, что двѣ послѣдовательныя теоремы взаимны, чтобы отъ истины послѣдней заключать о истинѣ предложенной. Если такая взаимность не имѣетъ мѣста, или если мы не удостовѣрились въ взаимности, то надобно удостовѣриться обратнымъ порядкомъ доказательства въ справедливости предложенной теоремы.

Для примѣра я возьму слѣдующую задачу:

Задача. Построить квадратъ по данной разности діагонали и стороны?

Рѣшеніе. Пусть $ABCD$ будетъ требуемый квадратъ (фиг. 513), AE данная разность, CE будетъ равна сторонѣ квадрата, слѣдовательно, треугольникъ CEB будетъ равнобедренный. Если продолжимъ BE до встрѣчи съ AD въ точкѣ F, то углы треугольника AEF будутъ равны угламъ треугольника CEB, слѣдовательно и $\triangle AEF$ будетъ равнобедренный и мы будемъ имѣть $AF{=}AE$. Точка F слѣдовательно можетъ быть построена, а за тѣмъ и требуемый квадратъ.

Фиг. 513.



Въ самомъ дѣлѣ, построивъ линію AE равную данной разности, проведемъ неопредѣленныя прямыя AM и AN, составляющія углы съ AE равные, каждый, половинѣ прямаго. На линіи AN возьмемъ $AF{=}AE$ и продолжимъ FE до встрѣчи съ AM въ точкѣ B, AB и будетъ сторона квадрата, который и построимъ, если изъ точки B возставимъ перпендикуляры BC къ AB и CD къ AN.

Такъ какъ мы не удостовѣрились во взаимности, то надобно показать, что фигура построенная по условію $AF{=}AE$ есть квадратъ и удовлетворяетъ задачѣ. Во первыхъ это квадратъ, такъ какъ уголъ A есть прямой. Кромѣ этого углы треугольника CEB равны угламъ равнобедреннаго $\triangle AEF$, слѣдовательно и $\triangle CEB$ будетъ равнобедренный и мы будемъ имѣть $CE{=}CB$, слѣдовательно AE будетъ дѣйствительно разность діагонали и стороны квадрата.

Мнѣ кажется я достаточно выяснилъ аналитическій способъ, перейду къ синтезу.

Способъ синтетическій. Синтезъ отличается отъ анализа только обратнымъ порядкомъ теоремъ начинающихся въ анализѣ съ предложенной и оканчивающійся, какою нибудь извѣстною теоремой.

Въ синтезѣ начинаютъ съ извѣстныхъ предложеній, чтобы вывесть изъ нихъ другія, какъ необходимыя слѣдствія, изъ этихъ послѣднихъ выводятъ новыя и продолжаютъ, такимъ образомъ, до тѣхъ поръ, пока не дойдутъ до предложенной теоремы. Изъ этого видимъ, что если мы знаемъ аналитическое доказательство теоремы, то изъ него получимъ синтетическое, поставивъ въ обратномъ порядкѣ аналитическій рядъ предложеній.

Примѣромъ для синтетическаго способа можетъ служить обыкновенное доказательство, изложенное въ Началахъ Евклида, теоремы Пиѳагора (кн. 1, пред. 47).

Къ этому способу относится тоже замѣчаніе, что и къ анализу именно: какія предложенія мы должны выбрать для исхода? Отвѣта на этотъ вопросъ и здѣсь дать нельзя, часто можно сдѣлать много попытокъ безъ успѣха. Анализъ, въ этомъ отношеніи имѣетъ нѣкоторое преимущество предъ синтезомъ, въ анализѣ исходная теорема дана—это предложенная теорема для доказательства.

Способъ приведенія къ нелѣпости—абсурду. Два предложенія, изъ коихъ каждое есть отрицаніе другого, называются *противорѣчащими.* Справедливость одного изъ этихъ предложеній влечетъ ложность другаго и обратно.

Изъ этого послѣдняго замѣчанія вытекаетъ не прямой способъ доказательства извѣстной теоремы и состоитъ въ томъ, что разсматриваютъ ей противорѣчащую и показываютъ ея ложность. Обыкновенно это противорѣчащее предложеніе будетъ заключать нѣсколько случаевъ и чтобы это противорѣчащее предложеніе было ложно необходимо чтобы каждый изъ случаевъ былъ ложенъ, въ противномъ случаѣ, т. е. если хоть одинъ изъ всѣхъ случаевъ не будетъ ложенъ, то предложенная теорема будетъ ложна.

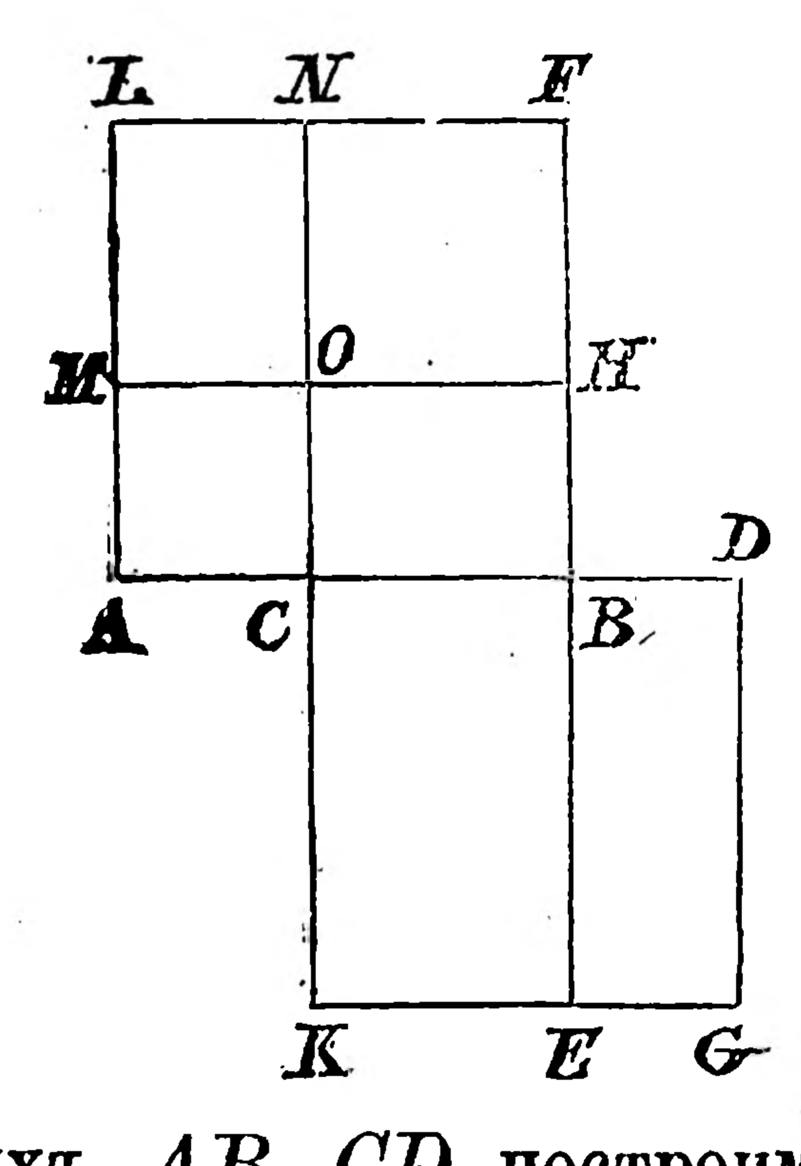
Слѣдовательно, надобно разсматривать каждый случай отдѣльно и показать, что каждый изъ нихъ, будучи принятъ, ведетъ къ нелѣпости. Для примѣра можно взять пред. 6, кн. 1 Началъ Евклида.

Замѣтимъ еще, что *способъ предѣловъ* есть ничто иное какъ способъ приведенія къ нелѣпости.

Замѣтимъ, что изобрѣтеніе этого способа приписываютъ Евклиду. Древніе геометры часто употребляли этотъ способъ, такъ какъ софисты своими тонкими возраженіями принуждали ихъ къ этому.

Предложеніе 2. Если квадратъ, построенный на прямой AB равенъ пять разъ взятому квадрату построенному на одномъ изъ ея отрѣзковъ AC, то отрѣзокъ $CD=2AC$ въ точкѣ B будетъ раздѣленъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи такъ, что CB есть другой, большій отрѣзокъ данной прямой AB (фиг. 514).

Фиг. 514.



Доказат. На прямыхъ AB, CD построимъ квадраты AF, CG; дополнимъ (какъ въ кн. 2, пред. 4) фигуру въ AF и продолжимъ FB до E.

Такъ какъ $\square AB=5\square AC$, т. е. $AF=5AO$, то:

$$\text{гномонъ } OMLFBCO=4AO=4\square AC$$

Но $DC=2AC$, а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд.) $\square DC=4\square AC$, т. е. $CG=4AO$, слѣдовательно гномонъ $OMLFBCO=CG$.

Такъ какъ $DC=2AC$, но $DC=CK$ и $AC=CO$, то $CK=2CO$, слѣдовательно $KB=2BO$; а потому, такъ какъ:

$$LO+OB=2OB$$

то:

$$LO+OB=KB$$

Но мы имѣли гномонъ $OMLFBCO=CG$. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 3) $OF=BG$; но $BG=CD.DB$, такъ какъ $CD=DG$ и $OF=\square BC$, слѣдовательно $CD.DB=\square BC$; а потому (кн. 6, пред. 17):

$$CD:BC=BC:DB$$

Изъ этого слѣдуетъ, что CD, т. е. $2AC$, въ точкѣ B, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи; а потому $CD>BC$ (слѣдующая Лемма), слѣдовательно $BC>DB$.

Лемма. Что CD, т. е. $2AC>BC$, доказывается слѣдующимъ образомъ:

Пусть не будетъ $2AC>BC$, а пусть, если возможно, $BC=2AC$, слѣдовательно $\square BC>4\square AC$, а потому:

$$\square BC+\square AC=5\square AC$$

Но мы предположили, что $\square BA=5\square AC$, слѣдовательно мы бы имѣли:

$$\square BA=\square BC+\square AC$$

что невозможно (кн. 2, пред. 4). А потому не можетъ быть $BC=2AC$.

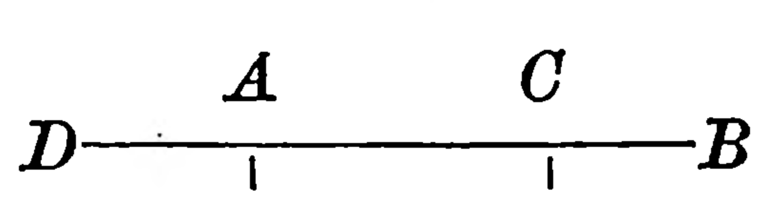
Если бы мы предположили, что $BC>2AC$, то изъ подобныхъ заключеній слѣдовало бы, что:

$$\square AB<\square CB+\square AC$$

что еще менѣе возможно. Слѣдовательно необходимо $2AC>BC$.

Замѣчаніе. Пусть DA и AC (фиг. 515) будутъ оба отрѣзка прямой

Фиг. 515.



DC; пусть еще $AB=2AD$ и $\square CD=5\square AD$, то требуется еще инымъ образомъ доказать, что:

$$AB:AC=AC:CB$$

и что $AC>CB$.

1) *Аналитическое доказательство.* Примемъ за доказанное, что:

$$AB:AC=AC:CB$$

то (кн. 6, пред. 17) $AB.BC=\square AC$. Но, такъ какъ $AB=2AD$ то:

$$BA.AC=2(DA.AC)$$

слѣдовательно:

$$(AB.BC)+(BA.AC)$$

т. е. (кн. 2, пред. 2):

$$\square AB=\square AC+2(DA.AC)$$

но $\square AB=4\square AD$, слѣдовательно:

$$\square AC+2(DA.AC)=4\square AD$$

а потому:

$$\square AC+\square AD+2(DA.AC)$$

т. е. (кн. 2, пред. 4):

$$\square CD=5\square AD$$

что было принято выше.

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ $\square CD=5\square AD$; но (кн. 2, пред. 4):

$$\square CD=\square AD+\square AC+2(DA.AC)$$

а потому:

$$\square AD+\square AC+2(DA.AC)=5\square AD$$

слѣдовательно:

$$\square AC+2(DA.AC)=4\square AD.$$

Но:

$$2(DA.AC)=BA.AC$$

и (кн. 2, пред. 2):

$$4\square AD=\square AB=(AB.BC)+(AB.AC)$$

слѣдовательно:

$$(AB.BC)+(AB.AC)=(BA.AC)+\square AC$$

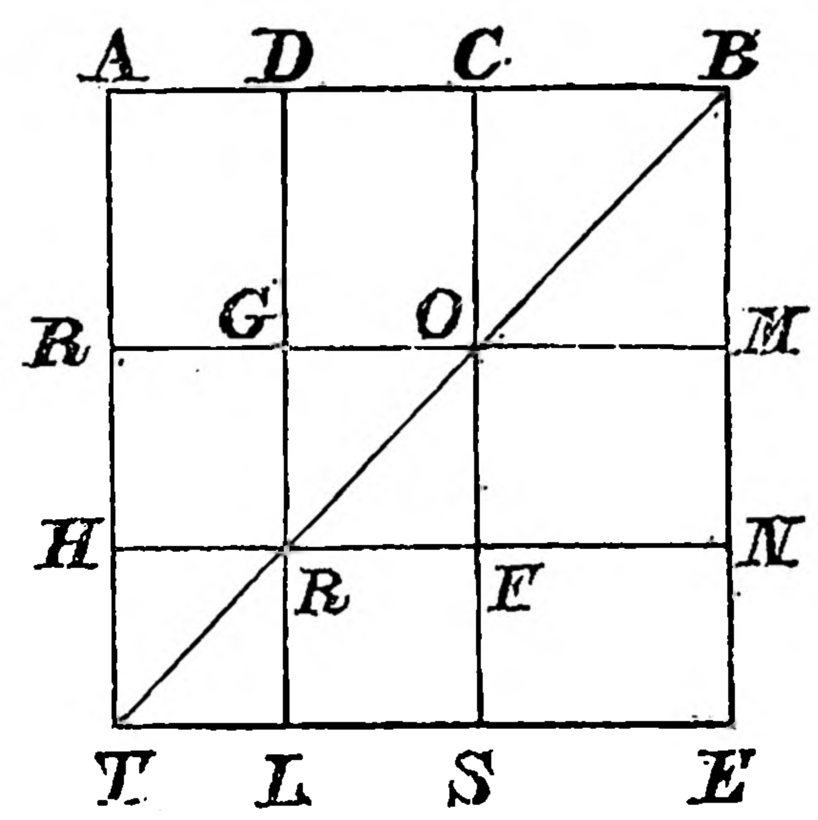
а потому $AB.BC=\square AC$, слѣдовательно:

$$AB:AC=AC:CB$$

а такъ какъ $AB>AC$, то и $AC>CB$.

Предложенiе 3. Если прямая AB, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношенiи, то квадратъ построенный на прямой BD, составленной изъ меньшаго отрѣзка BC и половины большаго DC, равенъ пять разъ взятому квадрату, построенному на половинѣ DC большаго отрѣзка (фиг. 516).

Фиг. 516.



Доказат. На прямой AB построимъ квадратъ AE и дополнимъ фигуру.

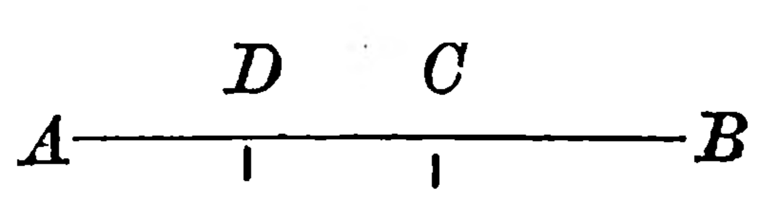
Такъ какъ $AC=2DC$, то $\square AC=4\square DC$, т. е. $RS=4FG$. Но (кн. 6, пред. 17) $AB.BC=\square AC$, т. е. $CE=RS$, слѣдовательно $CE=4FG$.

Такъ какъ $AD=DC$, а также (кн. 1, пред. 34) $HK=KF$, то $GF=HL$, слѣдовательно $GK=KL$, т. е. $MN=NE$, откуда (кн. 1, пред. 36) $MF=FE$. Но (кн. 1, пред. 43) $MF=CG$, слѣдовательно $CG=$ $=FE$, а потому прибавивъ CN, то гномонъ $OGDBNFO=CE$, или по выше доказанному,$=4FG$, слѣдовательно $DN=5FG$. Итакъ $DN=\square DB$, а также $FG=\square DC$. Слѣдовательно $\square DB=5\square DC$, т. е.:

$$\square(BC+\tfrac{1}{2}AC)=5\square\tfrac{1}{2}AC.$$

Замѣчаніе. Пусть AB, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, AC большій отрѣзокъ и $CD=\frac{1}{2}AC$, требуется доказать инымъ образомъ, что $\square BD=5\square CD$ (фиг. 517).

Фиг. 517.



1) *Аналитическое доказательство.* Примемъ за доказанное, что $\square BD=5\square CD$, такъ какъ (кн. 2, пред. 6):

$$\square BD=(AB.BC)+\square CD$$

то $AB.BC=4\square CD$. Но на основаніи предположеннаго $AB.BC=\square AC$, слѣдовательно $\square AC=4\square CD$, что и должно быть, такъ какъ $AC=2AD$.

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ $AC=2DC$, то $\square AC=$ $=4\square DC$, но (кн. 6, пред. 17) $\square AC=AB.BC$, слѣдовательно $AB.BC=$ $=4\square DC$, а потому:

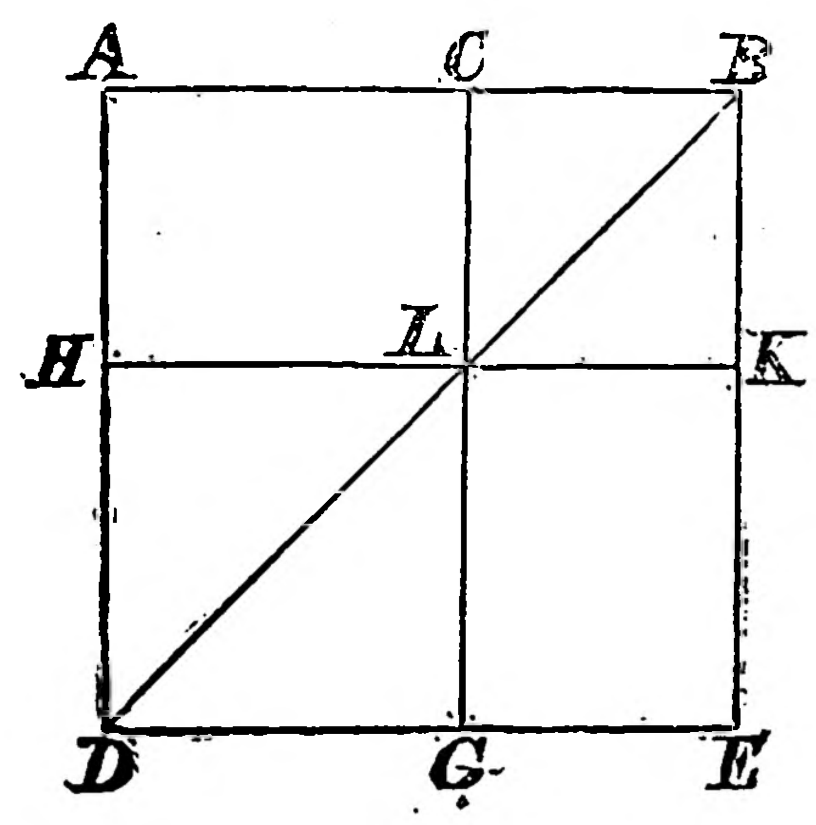
$$AB.BC + \square DC$$

т. е. (кн. 2, пред. 6):

$$\square DB = 5\square DC.$$

Предложеніе 4. Если прямая AB, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то сумма квадратовъ построенныхъ на цѣлой AB и на меньшемъ отрѣзкѣ CB, равна утроенному квадрату, построенному на большемъ отрѣзкѣ AC (фиг. 518).

Фиг. 518.



Доказат. На прямой AB построимъ квадратъ $ADEB$ и дополнимъ фигуру.

Такъ какъ:

$$AB : AC = AC : CB$$

то $AB.CB = \square AC$, т. е. $AK = HG$.

Но (кн. 1, пред. 43) $AF = FE$, а потому, прибавивъ CK, $AK = CE$, слѣдовательно:

$$CE + AK = 2AK = 2HG$$

такъ какъ по предъидущему $AK = HG$. Но:

$$CE + AK = \text{гномону } FHABEGF + CK$$

Слѣдовательно:

$$\text{гномонъ } FHABEGF + CK = 2HG$$

а потому:

$$\text{гномонъ } FHABEGF + CK + HG = 3HG$$

Итакъ:

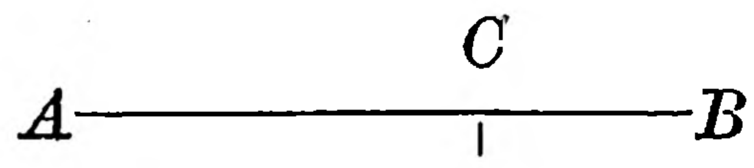
$$\text{гномонъ } FHABEGF + CK + HG = AE + CK = \square AB + \square BC$$

и $HG = \square AC$. Слѣдовательно:

$$\square AB + \square BC = 3\square AC.$$

Замѣчаніе. Пусть AB, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и пусть AC большій отрѣзокъ, требуется доказать инымъ образомъ, что (фиг. 519):

Фиг. 519.



$$\square AB + \square BC = 3\square AC$$

1) *Аналитическое доказательство.* Такъ какъ:

$$\square AB + \square BC = 3\square AC$$

и (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB + \square BC = 2(AB.BC) + \square AC$$

то:

$$2(AB.BC) + \square AC = 3\square AC$$

слѣдовательно:

$$2(AB.BC) = 2\square AC$$

а потому $AB.BC = \square AC$, что справедливо (кн. 6, пред. 17), такъ какъ прямая AB, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ:

$$AB : AC = AC : CB$$

то (кн. 6, пред. пред. 17) $AB.CB = \square AC$, а потому $2(AB.CB) = 2\square AC$, слѣдовательно:

$$2(AB.CB) + \square AC = 3\square AC$$

Но (кн. 2, пред. 7):

$$2(AB.CB) + \square AC = \square AB + \square BC$$

слѣдовательно:

$$\square AB + \square BC = 3\square AC$$

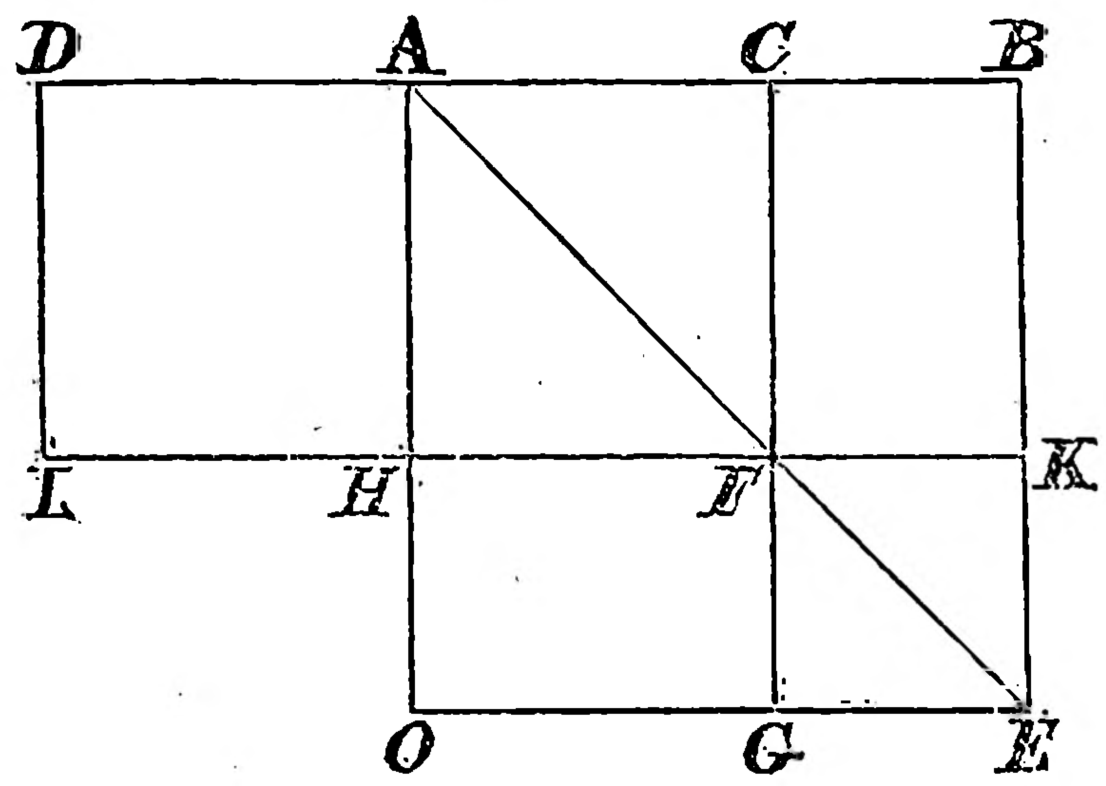
Предложеніе 5. Если прямую AB, въ точкѣ C, раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и на ея продолженіи къ ней приложимъ прямую AD, равную большему отрѣзку AC, то цѣлая прямая DB, въ точкѣ A, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, большій же отрѣзокъ есть данная прямая AB (фиг. 520).

Доказат. На прямой AB построимъ квадратъ AE и дополнимъ фигуру.

Такъ какъ:

$$AB:AC=AC:CB$$

Фиг. 520.



то (кн. 6, пред. 17) $AB.CB=\square AC$, т. е. $CE=CH$; но (кн. 1, пред. 43) $CH=DH$ и $CE=HE$, слѣдовательно $DH=HE$; а потому, прибавивъ HB, $DK=AE$, т. е. $BD.DA=\square AB$, слѣдовательно (кн. 6, пред. 17):

$$BD:AB=AB:DA$$

а такъ какъ $BD>AB$, то и $AB>DA$.

Замѣчаніе. Пусть прямая AB, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, $AC>CB$ и къ AB приложена прямая $AD=AC$, требуется доказать инымъ образомъ, что (фиг. 521):

$$DB:BA=BA:AD$$

Фиг. 521.

1) *Аналитическое доказательство.* Такъ какъ:

$$DB:BA=BA:AD$$

но $AD=AC$, а потому:

$$DB:BA=BA:AC$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 19, слѣд.):

$$DB:DA=AB:BC$$

а потому (кн. 5, пред. 17, слѣд.):

$$BA:AD=AC:CB$$

Но $AD=AC$, слѣдовательно:

$$BA:AC=AC:CB$$

какъ было предположено.

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ:

$$BA:AC=AC:CB$$

но $AC=AD$, то:

$$BA:AD=AD:CB$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 18):

$$BD:DA=BA:BC$$

откуда (кн. 5, пред. 19, слѣд.):

$$BD:BA=BA:AC$$

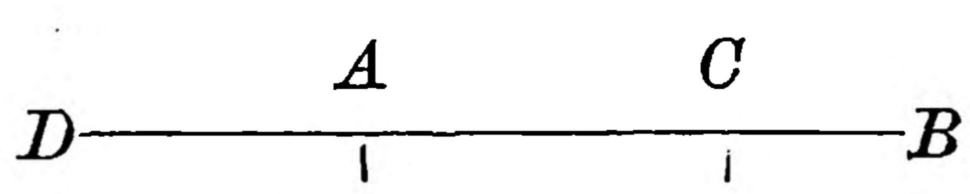
Но $AC=AD$, слѣдовательно:

$$BD:BA=BA:AD$$

и $BA>AD$.

Предложеніе 6. Если раціональную прямую AB, въ точкѣ C, раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то каждый изъ ея отрѣзковъ AC и CB есть *вычетъ* (фиг. 522).

Фиг. 522.



Доказат. Продолжимъ BA до точки D и отложимъ $AD=\frac{1}{2}AB$, то (кн. 13, пред. 1) $\square CD=5\square AD$. Изъ этого слѣдуетъ, что $\square CD$ и $\square DA$ относятся между собою какъ числа, а потому (кн. 10, пред. 6) они соизмѣримы. Но $DA=\frac{1}{2}AB$ раціональна, а потому также раціоналенъ $\square DA$. Слѣдовательно (кн. 10, опред. 6) $\square CD$ раціональный, а потому и (кн. 10, опред. 8) CD также раціональна.

Но такъ какъ квадраты CD и AD относятся между собою не какъ квадратныя числа, то (кн. 10, пред. 9) CD и AD по длинѣ несоизмѣримы. А потому CD и AD раціональны, только въ степени соизмѣримы; слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) AC есть *вычетъ*.

Такъ какъ прямая AB, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 6, пред. 17) $AB.BC=\square AC$, слѣдовательно (кн. 10, пред. 98) CB есть *первый вычетъ*.

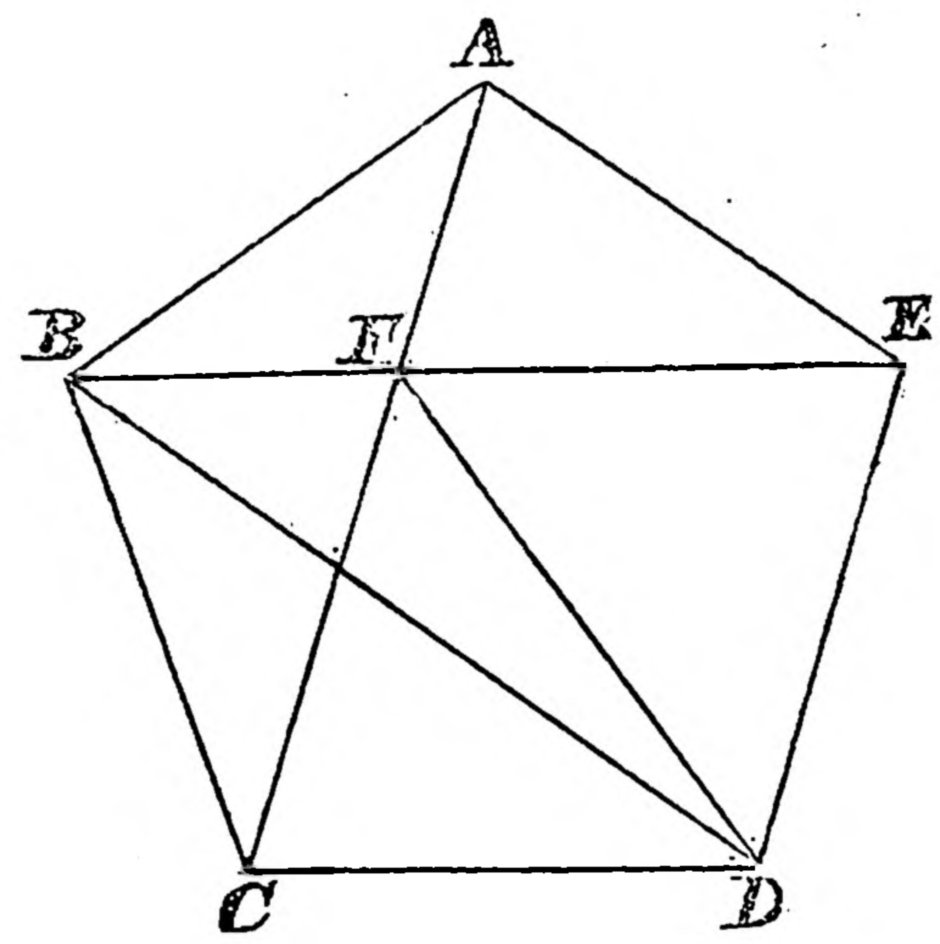
Предложеніе 7. Если въ пятиугольникѣ $ABCDE$, съ равными сторонами, три угла, слѣдующіе одинъ за другимъ, по порядку, или же не по порядку, равны, то пятиугольникъ будетъ правильный (фиг. 523).

Доказат. Случай первый. Три угла A, B, C, слѣдуютъ одинъ за другимъ по порядку.

Проведемъ AC, BE, FD.

Такъ какъ въ $\triangle EAB$ и $\triangle ABC$, по положенію $\angle A = \angle B$ и $CB = BA = AE$, то (кн. 1, пред. 4) $AC = BE$, $\angle BCA = \angle BEA$ и $\angle ABE =$

Фиг. 523.



$= \angle CAB$. Изъ этого слѣдуетъ, что въ $\triangle AFB$ $\angle ABE = \angle CAB$, а потому (кн. 1, пред. 6) $AF = BF$, но по предъидущему $AC = BE$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 3) $FC = FE$. Итакъ въ $\triangle CFD$, $\triangle DFE$, стороны $CD = DE$ и FD общая. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) $\angle FCD = \angle FED$; но по предъидущему $\angle BCA = \angle AEB$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 2) $\angle BCD = \angle AED$. Но мы предположили $\angle BCD = \angle A = \angle B$, слѣдовательно $\angle AED = \angle A = \angle B$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что $\angle CDE = \angle A = \angle B$. Слѣдовательно $ABCDE$ равноугольная фигура.

Случай второй. Три угла A, C, D, слѣдуютъ одинъ за другимъ не по порядку.

Проведемъ BD.

Такъ какъ въ $\triangle ABE$ и $\triangle BCD$ по предположенію $\angle A = \angle C$, $BA = BC$, $AE = CD$, то (кн. 1, пред. 4) $BE = BD$, $\angle AEB = \angle CDB$ и (кн. 1, пред. 5) $\angle BED = \angle BDE$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 2) $\angle AED = \angle CDE$. Но мы также предположили, что $\angle CDE = \angle A = \angle C$, слѣдовательно $\angle AED = \angle A = \angle C$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что $\angle ABC = \angle A = \angle C$. Слѣдовательно фигура $ABCDE$ равноугольна.

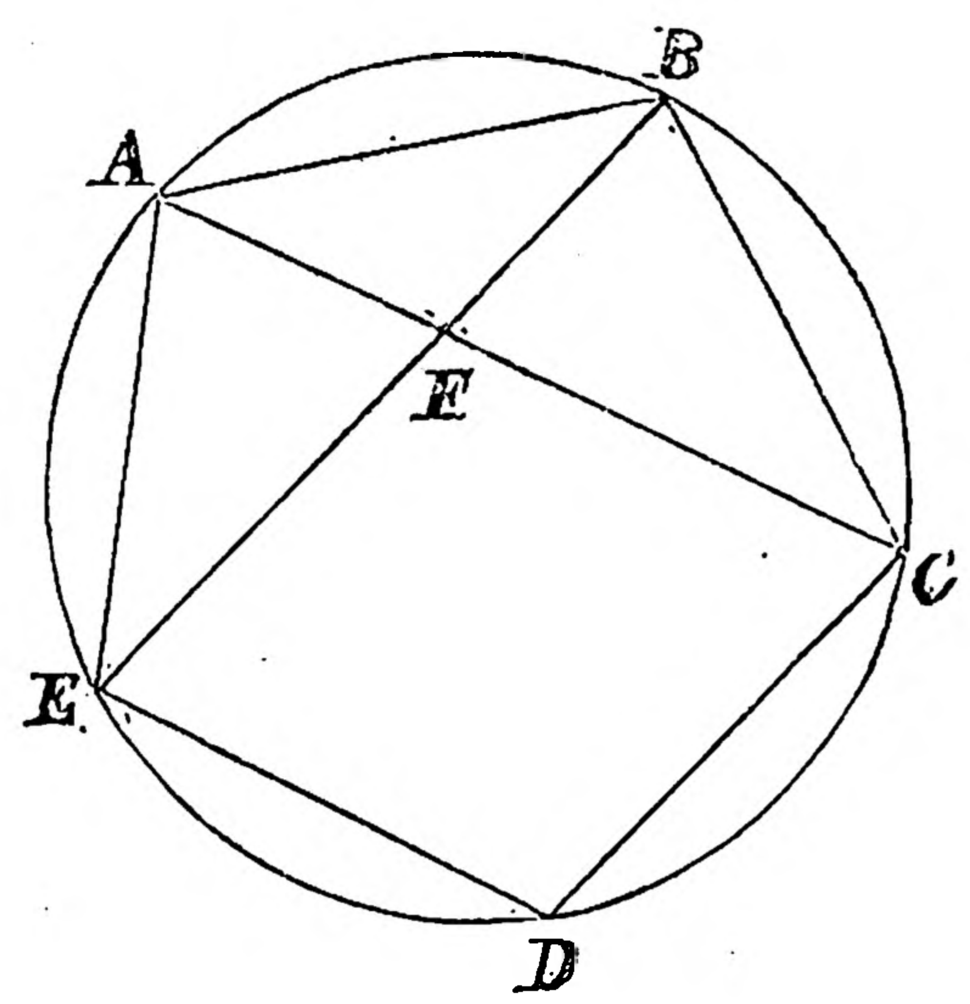
Предложеніе 8. Въ пятиугольной фигурѣ $ABCDE$, съ равными сторонами и равными углами, діагонали BE и AC, проведенныя изъ вершинъ двухъ, слѣдующихъ одинъ за другимъ, угловъ A и B, дѣлятся въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и большій отрѣзокъ равенъ сторонѣ фигуры (фиг. 524).

Доказат. Около данной фигуры опишемъ кругъ (кн. 4, пред. 14).

Такъ какъ въ $\triangle BAE$ и $\triangle ABC$ по положенію $\angle A = \angle B$, $EA = AB = BC$, то (кн. 1, пред. 4) $BE = AC$ и $\angle BAC = \angle ABE$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 6 и пред. 32) $\angle AFE = 2\angle BAF$, но (кн. 6, пред. 33) $\angle EAC = 2\angle BAC$, а потому $\angle EAC = \angle AFE$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 6) $FE = EA = AB$.

Такъ какъ $EA=AB$, то (кн. 1, пред. 5) $\angle ABE=\angle AEB$, но по предъидущему $\angle ABE=\angle BAF$, а потому $\angle AEB=\angle BAF$, слѣдовательно

Фиг. 524.



въ $\triangle ABE$ и $\triangle ABF$ уголъ ABE общій, а также $\angle BAE=\angle AFB$, слѣдовательно эти треугольники равноугольны, откуда (кн. 6, пред. 4):

$$EB:BA=AB:BF$$

но $BA=EF$, слѣдовательно:

$$BE:EF=EF:FB$$

въ этой пропорціи $BE>EF$, а потому и $EF>FB$. Изъ этого слѣдуетъ, что діагональ BE, въ точкѣ F, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и большій отрѣзокъ $EF=AB$.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что и AC, въ точкѣ F, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и большій отрѣзокъ$=AB$.

Предложеніе 9. Если мы приложимъ одну къ другой стороны CD и BC, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же кругъ, шестисторонней и десятисторонней фигуры, то цѣлая прямая BD раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и большій отрѣзокъ будетъ сторона CD шестисторонней фигуры (фиг. 525).

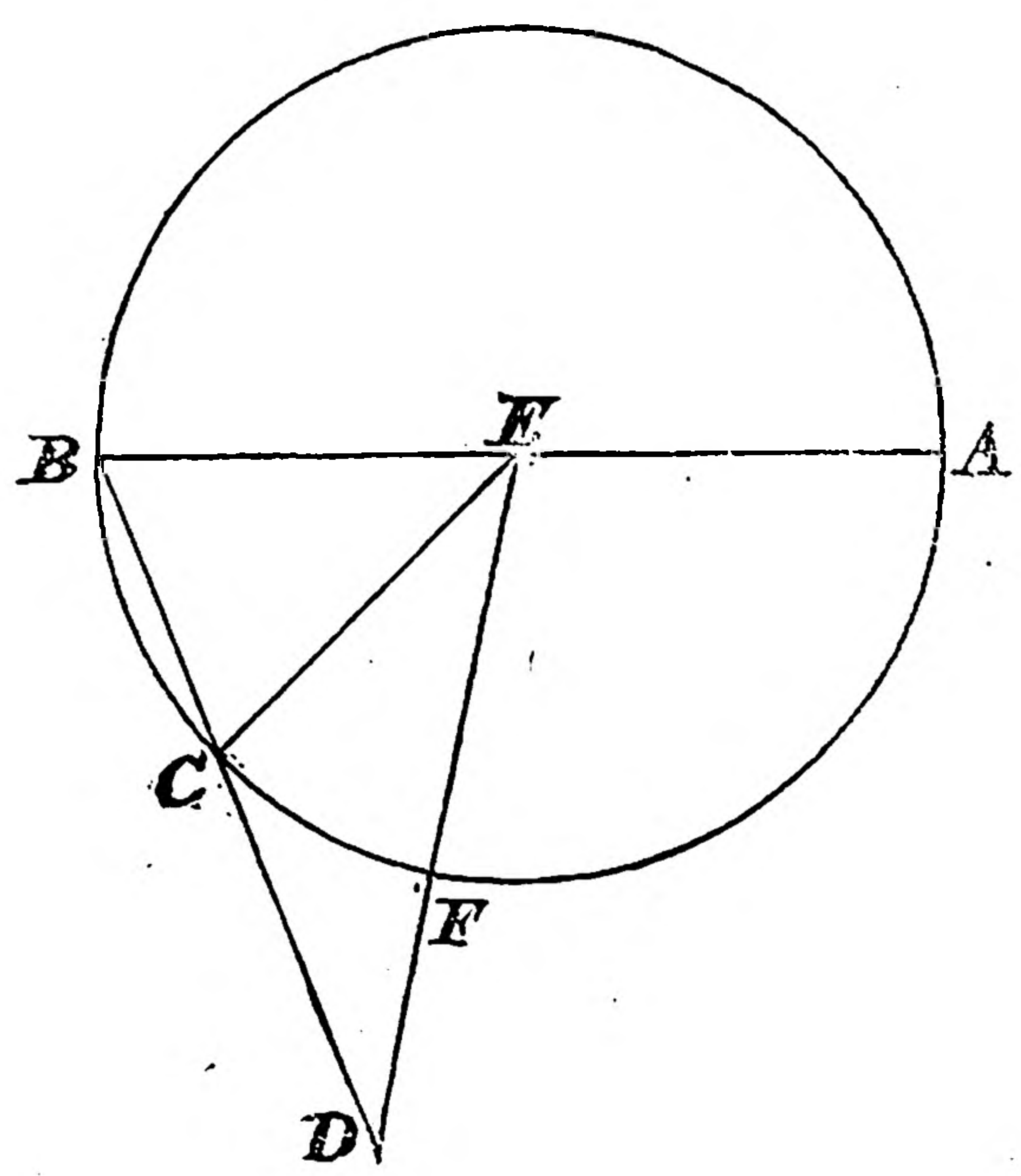
Доказат. Найдемъ центръ круга E, проведемъ прямыя EB, EC, ED и продолжимъ BE до A.

Такъ какъ BC есть сторона десятисторонней фигуры, то дуга $ACB=$ $=5$ дуг. BC, слѣдовательно дуга $AC=4$ дуг. BC. Но (кн. 6, пред. 33):

$$\text{дуг. } AC:\text{дуг. } BC=\angle AEC:\angle CEB$$

Слѣдовательно $\angle AEC=4\angle CEB$. Такъ какъ (кн. 1, пред. 5) $\angle EBC=$ $=\angle ECB$, то (кн. 1, пред. 32) $\angle AEC=2\angle ECB$. Такъ какъ (кн. 4, пред. 15) $EC=CD$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 5) $\angle CED=\angle CDE$, а потому (кн. 1, пред. 32) $\angle ECB = 2\angle EDC$; но по предъидущему $\angle AEC = 2\angle ECB$, слѣдовательно $\angle AEC = 4\angle EDC$. Но по предъидущему также $\angle AEC =$

Фиг. 525.



$= 4\angle CEB$, слѣдовательно $\angle EDC = \angle CEB$; а потому, такъ какъ въ треугольникахъ $\triangle BEC$, $\triangle BED$ уголъ EBD общій, и $\angle BED = \angle ECB$, слѣдовательно эти треугольники равноугольны, откуда (кн. 6, пред. 4):

$$DB : BE = EB : BC$$

а потому, такъ какъ $BE = CD$, то и:

$$BD : DC = DC : CB$$

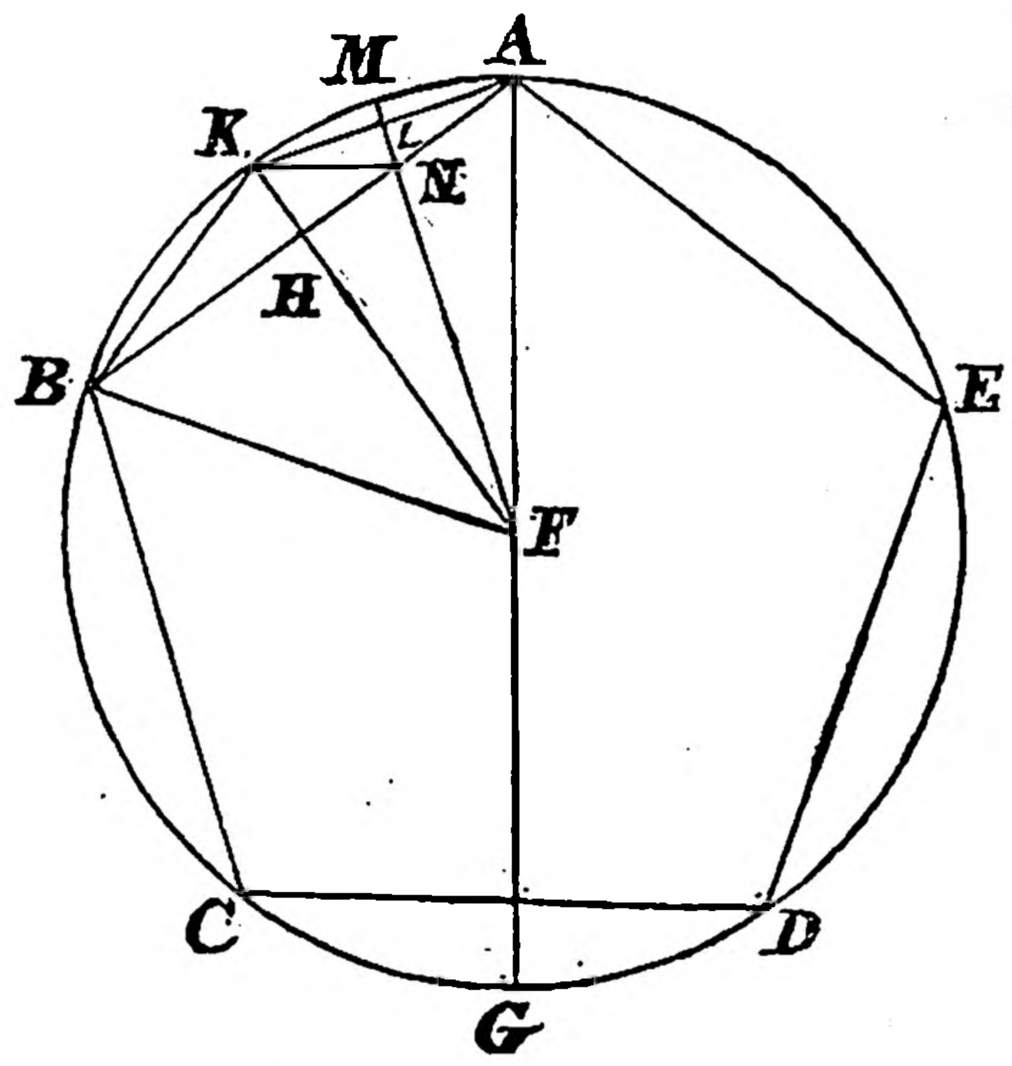
въ этой пропорціи $DC > CB$, такъ какъ $BD > DC$. А потому прямая BD, въ точкѣ C, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и большій отрѣзокъ DC равенъ сторонѣ шестисторонней фигуры.

Предложеніе 10. Квадратъ, построенный на сторонѣ AB, пятисторонней фигуры $ABCDE$, вписанной въ кругъ, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ шестисторонней и десятисторонней фигуръ, вписанныхъ въ тотъ же кругъ (фиг. 526).

Доказат. Возьмемъ центръ круга F, проведемъ AF и продолжимъ ее до G. Проведемъ FB, изъ точки F на прямую AB опустимъ перпендикуляръ FH и продолжимъ его до точки K. Проведемъ AK, KB; изъ точки F, на прямую AK, опустимъ перпендикуляръ FL и продолжимъ его до M; проведемъ KN.

Такъ какъ полукруги $ABCG$, $AEDG$ равны, равно какъ и дуги ABC и AED, а потому дуги CG и DG равны; слѣдовательно CG есть дуга десятисторонней фигуры. Такъ какъ FK перпендикулярна къ AB, то дуга $AK =$ дугѣ KB, слѣдовательно AK также есть дуга десятисторонней фигуры и 2 дуг. BK=дуг. AB=дуг. BC. По той же причинѣ 2 дуг. KM= =дуг. AK=дуг. CG. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 2) дуга BCG=2 дуг. BKM,

Фиг. 526.



а потому (кн. 6, пред. 33) $\angle GFB=2\angle BFM$. Но $BF=FA$, а потому (кн. 1, пред. 5) $\angle FAB=\angle ABF$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 32) $\angle GFB=$ $=2\angle FAB$. Слѣдовательно $\angle BFM=\angle FAB$; но такъ какъ въ треугольникахъ $\triangle ABF$, $\triangle BFN$ уголъ ABF общій, $\angle AFB=\angle BNF$, то эти треугольники равноугольны. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$AB:BF=FB:BN$$

а потому (кн. 6, пред. 17):

$$AB.BN=\square FB$$

Такъ какъ $AL=LK$ и LN общая и притомъ перпендикулярная, то (кн. 1, пред. 4) $KN=AN$ и $\angle LKN=\angle LAN=\angle NBK$; слѣдовательно, такъ какъ въ треугольникахъ $\triangle AKB$ и $\triangle AKN$ уголъ NAK общій и $\angle AKB=\angle KNA$, то эти треугольники равноугольны. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$BA:KA=KA:AN$$

а потому (кн. 6, пред. 17):

$$BA.AN=\square KA.$$

Но мы прежде доказали, что:

$$AB.BN=\square FB$$

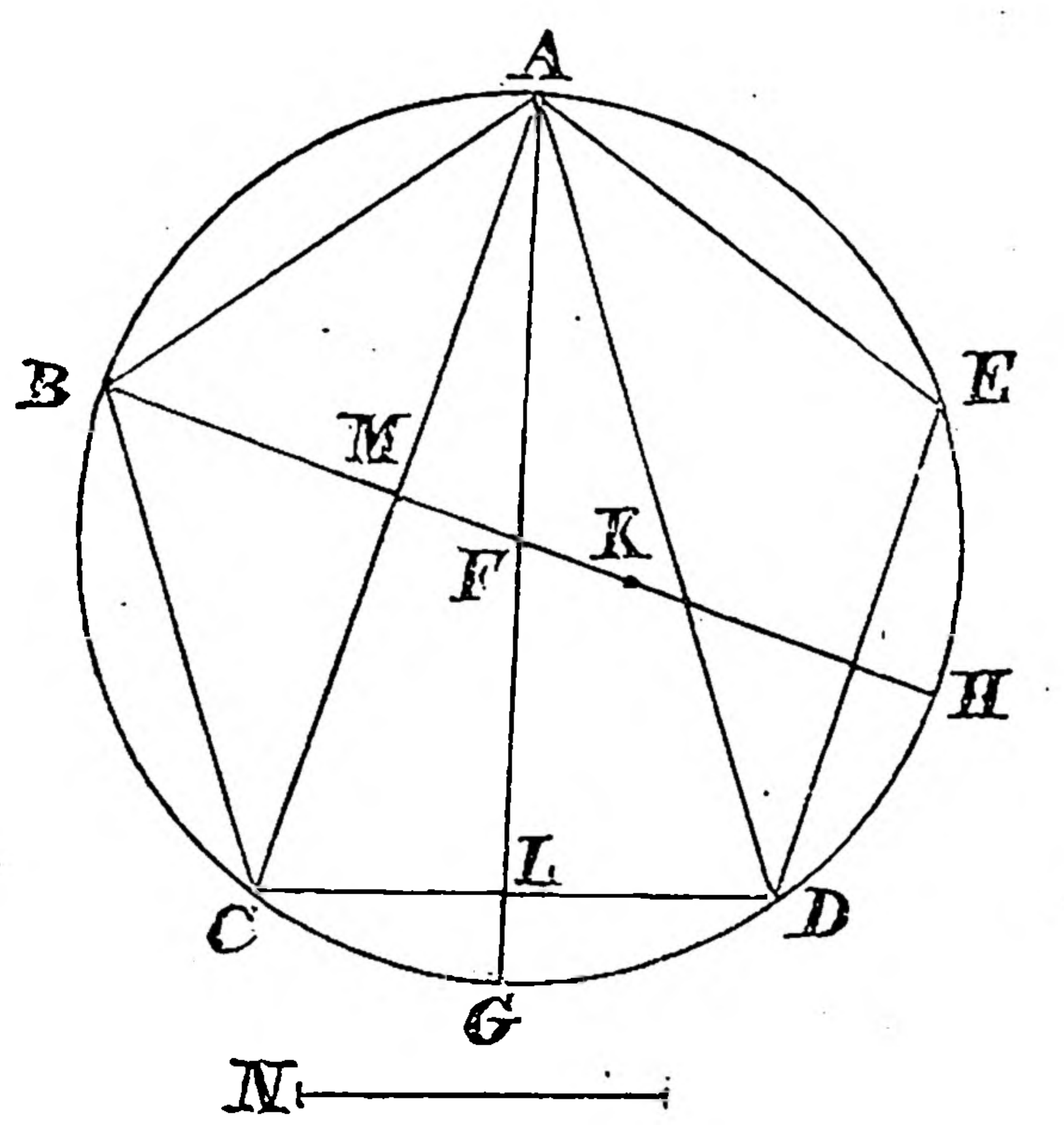
Слѣдовательно (кн. 2, пред. 2):

$$\square FB+\square KA=(AB.BN)+(BA.AN)=\square AB$$

гдѣ AB, FB, KA суть стороны, пяти, шести и десятисторонней фигуръ.

Предложеніе 11. Сторона AB пятисторонней фигуры $ABCDE$, вписанной въ кругъ, діаметръ котораго раціоналенъ, есть *малая иррaціональная* (фиг. 527).

Фиг. 527.



Доказат. Возьмемъ центръ круга F, проведемъ AF, продолжимъ ее до G и H; проведемъ AC, AD и сдѣлаемъ $FB=\frac{1}{4}AF$.

Такъ какъ AF и BF раціональны, то FK, а потому и BK раціональны. Такъ какъ полукруги $ABCG$ и $AEDG$ равны, а также равны дуги ABC, AED, то дуги CG, GD равны, слѣдовательно (кн. 3, пред. 27) $\angle CAL=\angle DAL$. Но (кн. 3, пред. 29) $AC=AD$ и AL общая, слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) углы при точкѣ L прямые и $CD=2CL$. По той же причинѣ углы при точкѣ M также прямые и $AC=2CM$. Слѣдовательно, такъ какъ въ $\triangle ALC$, $\triangle AMF$ уголъ LAC общій и $\angle ACL=\angle MFA$, то изъ этого слѣдуетъ, что эти треугольники равноугольны. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$LC:CA=MF:FA$$

а потому и:

$$2LC:\tfrac{1}{2}CA=2MF:\tfrac{1}{2}FA=MF:\tfrac{1}{4}FA$$

Но $2LC=DC$, $\frac{1}{2}CA=CM$, $\frac{1}{4}FA=FK$. Слѣдовательно:

$$DC:CM=MF:FK$$

а потому (кн. 5, пред. 18):

$$DC+CM:CM=MK:FK$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 22):

$$\square(DC+CM):\square CM=\square MK:\square FK$$

Но (кн. 13, пред. 8) DC есть большій отрѣзокъ, діагонали AC, противолежащей углу B, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношенiи, слѣдовательно $CM=\frac{1}{2}CA$, а потому (кн. 13, пред. 1):

$$\square(DC+CM)=5\square CM$$

Слѣдовательно:

$$\square MK=5\square KF$$

изъ этого слѣдуетъ, что KF рацiональна, а потому и $\square KF$ рацiоналенъ, слѣдовательно (кн. 10, пред. 6) $\square MK$, а потому и MK рацiональны. Такъ какъ $BF=4FK$, то $BK=5FK$, слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square BK=25\square FK$$

но по предъидущему:

$$\square MK=5\square FK$$

а потому:

$$\square BK=5\square MK$$

Изъ этого слѣдуетъ (кн. 10, пред. 9, слѣд.) что BK, KM только въ степени соизмѣримы; слѣдовательно (кн. 10, пред. 74) MB есть *вычетъ*, и къ ней прибавлена MK.

Пусть будетъ дана прямая N такая, что:

$$\square BK-\square KM=\square N$$

т. е. что BK квадратитъ надъ KM на квадратъ N. Такъ какъ KF и FB по длинѣ соизмѣримы, то также по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 16) KB и BF, а также BF и BH, слѣдовательно соизмѣримы (кн. 10, пред. 12) BK и BH. Такъ какъ:

$$\square BK=5\square KM$$

т. е.:

$$\square BK:\square KM=1:5$$

а потому (кн. 5, пред. 19, слѣд.):

$$\square BK:\square N=5:4$$

Слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) KB и N по длинѣ несоизмѣримы; а потому MB есть *четвертый вычетъ*.

Проведемъ AH, то (кн. 6, пред. 8) $\triangle ABH$ и $\triangle ABM$ равноугольны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$HB:BA=AB:BM$$

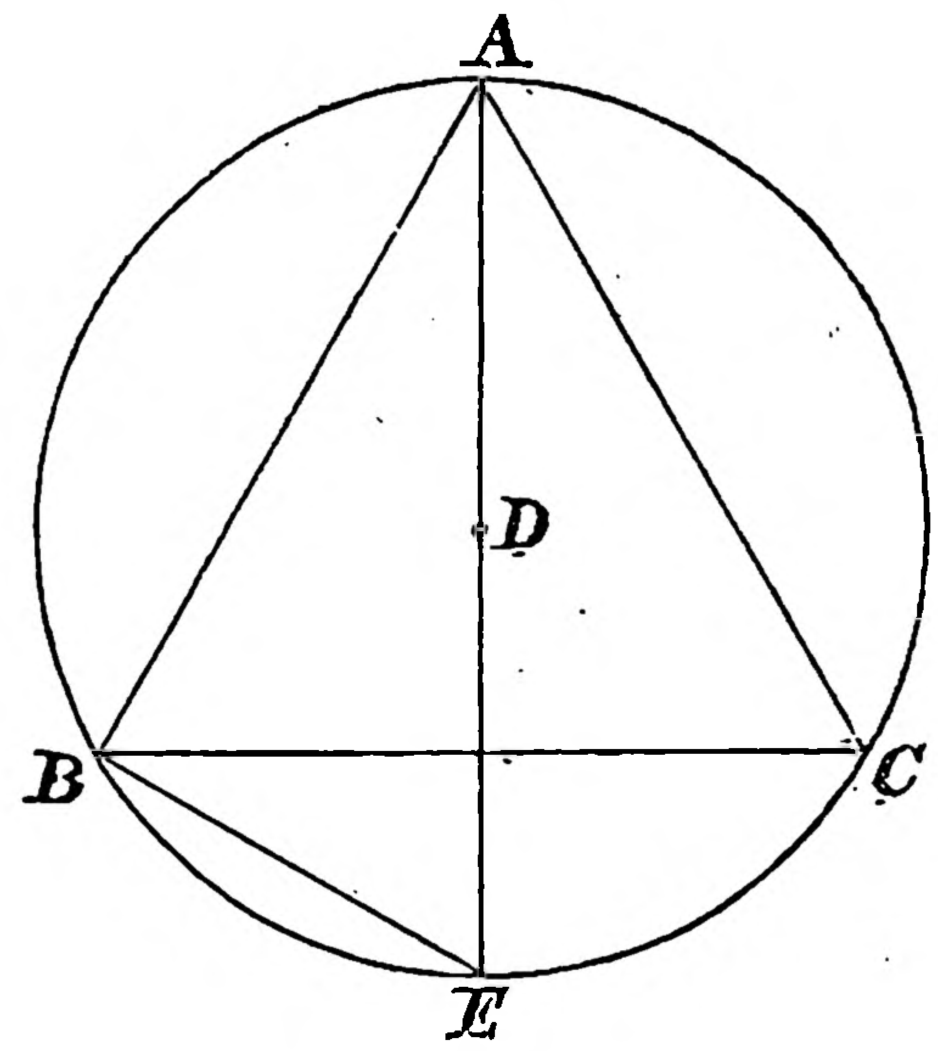
а потому (кн. 6, пред. 17):

$$HB.BM=\square AB$$

Итакъ HB раціональна, но BM четвертый вычетъ, слѣдовательно (кн. 10, пред. 95) AB есть *малая ирраціональная.*

Предложеніе 12. Квадратъ, построенный на сторонѣ AB, вписаннаго въ кругѣ треугольника ABC, равенъ утроенному квадрату, построенному на половинѣ діаметра круга (фиг. 528).

Фиг. 528.



Доказат. Возьмемъ центръ D круга, проведемъ AD, продолжимъ ее до E и проведемъ BE.

Такъ какъ треугольникъ $\triangle ABC$ равносторонній, то дуга BEC есть третяя часть, а дуга BE шестая часть цѣлой окружности; слѣдовательно BE есть сторона шестисторонней фигуры, а потому (кн. 4, пред. 15) $BE=DE$.

Такъ какъ $AE=2ED$, то (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square AE=4\square ED=4\square BE$$

Но (кн. 3, пред. 31) $\angle ABE=d$, а потому (кн. 1, пред. 47):

$$\square AE=\square AB+\square BE.$$

Слѣдовательно:

$$\square AB+\square BE=4\square BE$$

а потому:

$$\square AB=3\square BE=3\square DE$$

гдѣ $DE=\frac{1}{2}AE$.

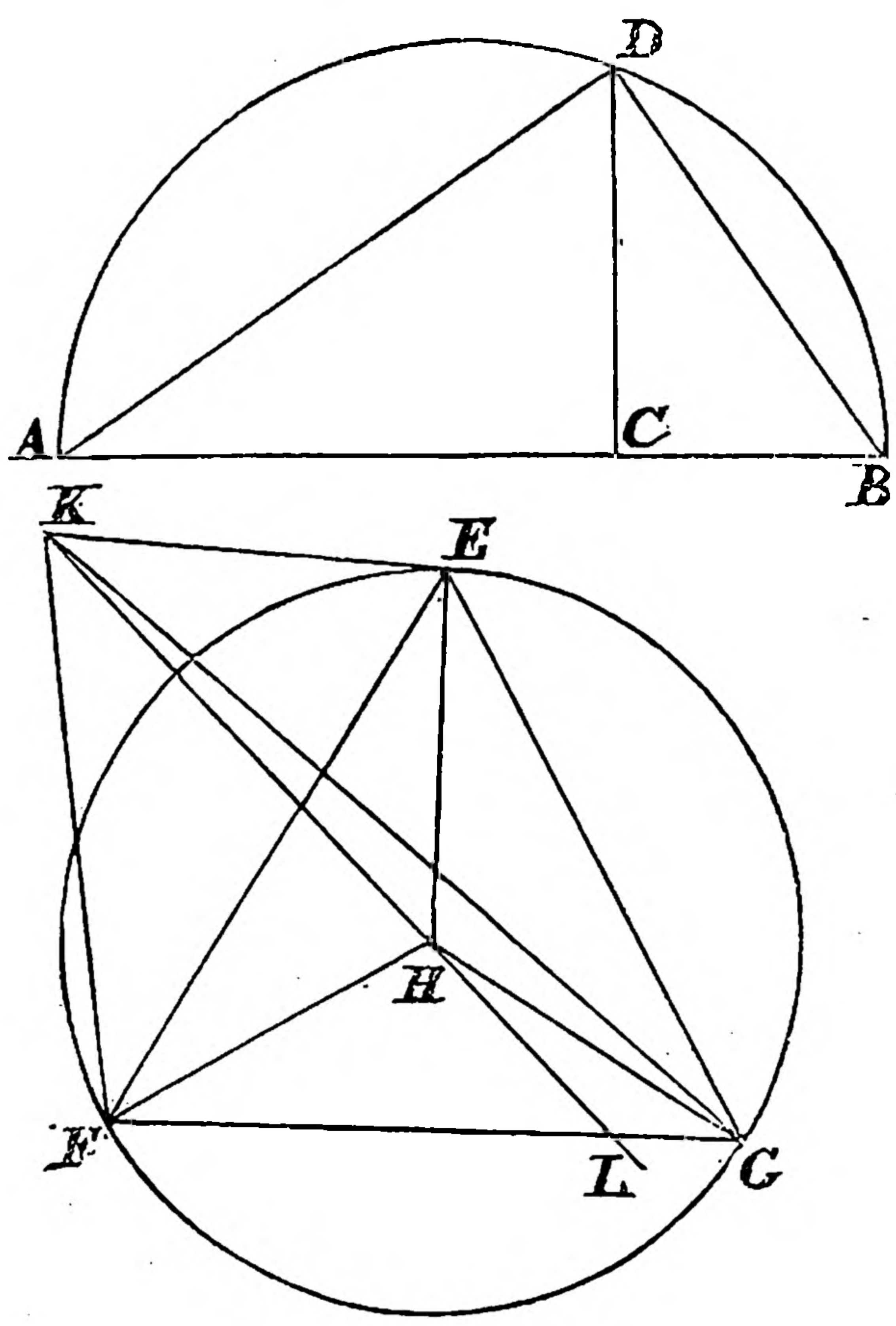
Предложеніе 13. Задача. Вписать въ данный шаръ тетраедръ?

Теорема. Квадратъ, построенный на діаметрѣ шара равенъ полтора раза взятому квадрату, построенному на ребрѣ вписаннаго въ шаръ тетраедра.

1) *Построеніе тетраедра* (фиг. 529).

Пусть AB будетъ діаметръ даннаго шара (кн. 6, пред. 9), діаметръ этотъ въ точкѣ C такъ раздѣленъ, что $AC=2CB$. На прямой AB опишемъ полукругъ ADB; въ точкѣ C, прямой AB, возставимъ перпендикуляръ CD

Фиг. 529.



и проведемъ DA, DB. Опишемъ радіусомъ CD, около произвольной точки H кругъ EFG, а въ этотъ послѣдній впишемъ (кн. 4, пред. 2) равносторонній треугольникъ EFG, проведемъ EH, HF, HG. Къ площади круга, въ точкѣ H, возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляръ $HK=AC$ и проведемъ KE, KF, KG; тѣло, коего площадь основанія есть $\triangle EFG$, а котораго вершина въ K, будетъ требуемый тетраедръ.

2) *Доказательство построенія.*

1. Что это тѣло есть тетраедръ.

Такъ какъ (кн. 11, опред. 3) KH образуетъ съ HE, HF, HG прямые углы, уголъ при C также прямой и $AC=HK$, $CD=HE$, а потому (кн. 1, пред. 4) $DA=KE$. По той же причинѣ KF, а также KG равны AD. Изъ этого слѣдуетъ, что $AD=KE=KF=KG$.

Такъ какъ (слѣдующ. Лемма):

$$AB:BC=\square AD:\square DC$$

но $AC=2CB$, а потому $AB=3CB$, слѣдовательно:

$$\square AD=3\square DC$$

Но $DC=EH$ и (кн. 13, пред. 12):

$$\square FE=3\square EH$$

Слѣдовательно:

$$\square AD=\square FE$$

а потому $AD=FE$.

Но AD равна каждой изъ прямыхъ KE, KF, KG, слѣдовательно всѣ четыре треугольника EFG, KEF, KFG, KGE равносторонни и равны. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 26) тѣло ограниченное этими треугольниками есть тетраедръ.

2. Что этотъ тетраедръ вписанъ въ данный шаръ.

Приложимъ къ KH прямую $HL=BC$, то $AB=KL$. Такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$AC:CD=CD:CB$$

а $AC=KH$, $CD=HE$, $CB=HL$, то:

$$KH:HE=EH:HL$$

слѣдовательно, проведя EL, (кн. 6, пред. 8, слѣд.), уголъ KEL будетъ прямой. Слѣдовательно полукругъ, описанный на KL, пройдетъ чрезъ точку E. Если мы станемъ вращать этотъ полукругъ, около неподвижнаго діаметра KL, то онъ пройдетъ необходимо чрезъ точки F, G. Слѣдовательно вершины тетраедра E, F, G, K будутъ лежать на поверхности шара, коего діаметръ $KL=AB$.

3) *Доказательство теоремы.*

Такъ какъ $AC=2CB$, то $AB=3CB$, а потому $AB=\frac{3}{2}AC$. Но (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$BA:AC=\square BA:\square AD$$

Слѣдовательно и:

$$\square AB=\tfrac{3}{2}\square AD$$

гдѣ AD есть діаметръ шара, а AD сторона тетраедра.

Лемма. Требуется еще доказать, что:

$$AB:BC=\square AD:\square DC$$

Построимъ, какъ выше, полукругъ ADB. На прямой AC построимъ квадратъ EC и построимъ параллелограмъ FB (фиг. 530).

Такъ какъ треугольники $\triangle DAB$, $\triangle DAC$ равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):

$$BA:AD=DA:AC$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 17):

$$BA.AC=\square AD$$

Такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB:BC=EB:BF$$

но

$$EB=BA.AC \quad \text{и} \quad BF=AC.CB$$

а потому:

$$AB:BC = BA.AC:AC.CB$$

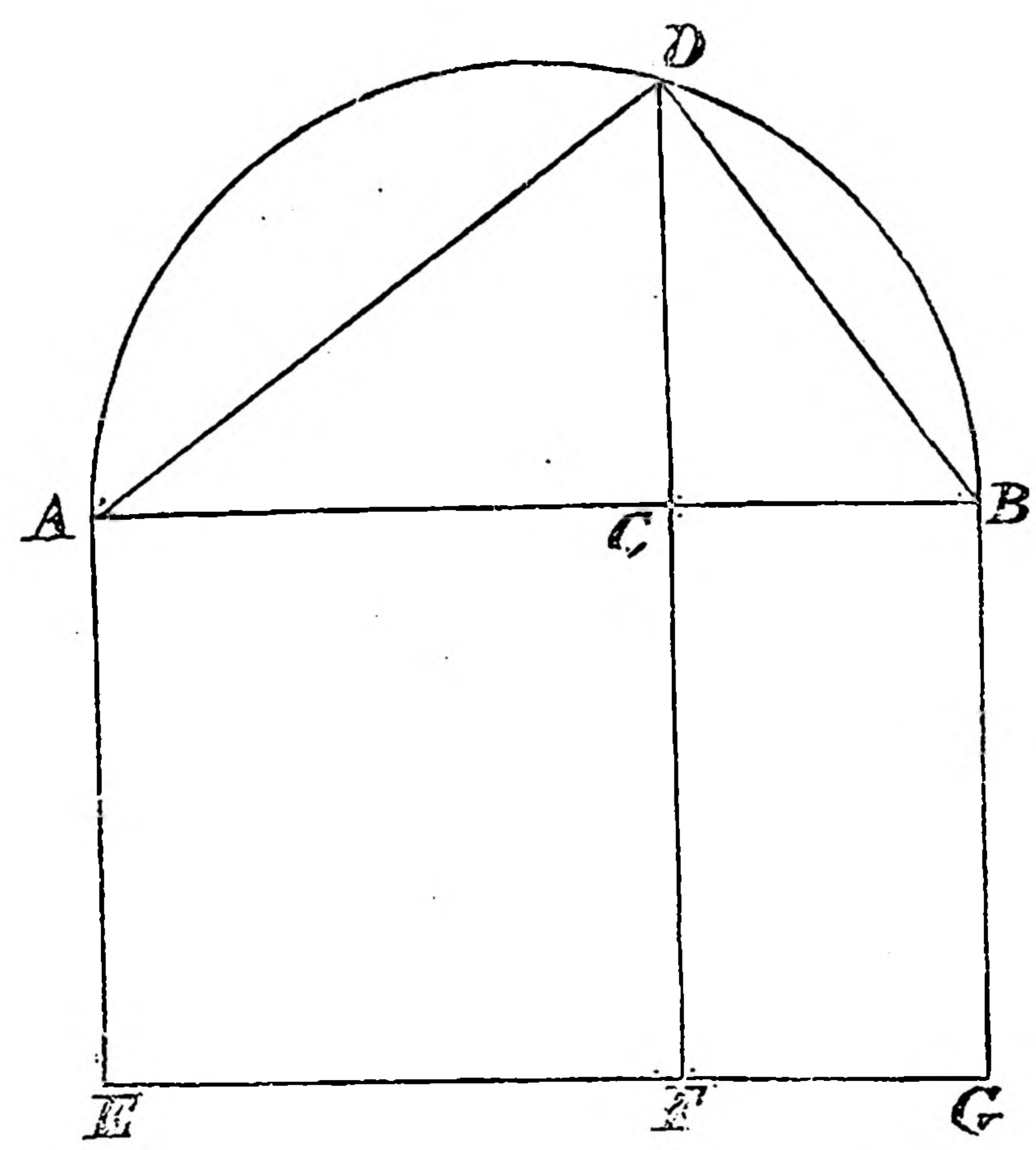
но по предъидущему:

$$BA.AC = \square AD$$

слѣдовательно:

$$AB:BC = \square AD:AC.CB$$

Фиг. 530.



Но (кн. 3, пред. 31) уголъ $ADB = d$, и (кн. 6, пред. 8, слѣд.):

$$AC:CD = CD:CB$$

а потому:

$$AC.CB = \square DC$$

слѣдовательно:

$$AB:BC = \square AD:\square DC.$$

Предложеніе 14. Задача. Вписать въ данный шаръ октаедръ?

Теорема. Квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, вдвое больше квадрата, построеннаго на ребрѣ, вписаннаго въ шаръ, октаедра.

1) *Построеніе октаедра* (фиг. 531).

Пусть діаметръ AB даннаго шара, въ точкѣ C, раздѣленъ пополамъ. На AB опишемъ полукругъ ADB, къ AB, въ точкѣ C, возставимъ перпендикуляръ CD и проведемъ DB. Пусть $EFGH$ будетъ квадратъ, коего сторона$=DB$. Проведемъ HF, EG, пересѣкающіяся въ точкѣ K. Къ плоскости $EFGH$, въ точкѣ K, возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляръ KL, продолжимъ его по другую сторону плоскости до точки M, и отложимъ KL, а также KM, равныя одной изъ прямыхъ KE, KF, KG, KH. Изъ точекъ L, M проведемъ прямыя къ точкамъ E, F, G, H, то построенное такимъ образомъ тѣло, будетъ требуемый октаедръ.

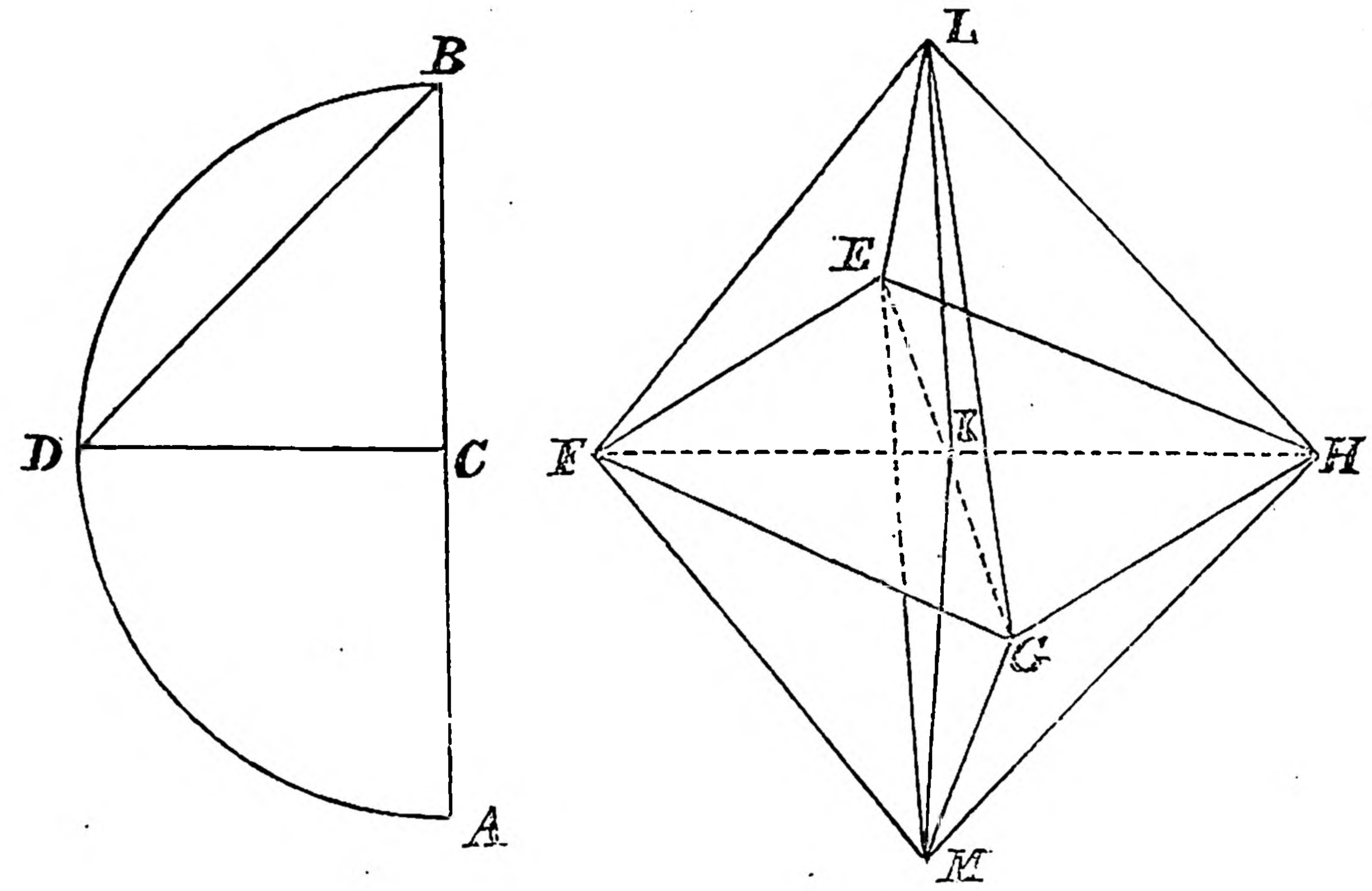
2) *Доказательство построенія.*

1. Что это тѣло есть октаедръ.

Такъ какъ $KE=KH$ и $\angle EKH=d$, то (кн. 1, пред. 47):

$$\square HE=2\square KE$$

Фиг. 531.



Но мы имѣемъ также, $LK=KE$ и $\angle LKE=d$, а потому:

$$\square EL=2\square EK$$

слѣдовательно:

$$\square HE=\square EL$$

а потому $HE=EL$; но по той же причинѣ $LH=HE$; слѣдовательно $\triangle LEH$ равносторонній. Подобнымъ же образомъ доказывается, что треугольники LEF, LFG, LGH также равносторонніе и равны $\triangle LEH$; а также равны этому треугольнику четыре треугольника, коихъ основанія EF, FG, GH, HE суть основанія предъидущихъ, а вершины въ точкѣ M, по другую сторону плоскости $EFGH$. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 27) фигура ограниченная этими треугольниками есть октаедръ.

2. Что этотъ октаедръ вписанъ въ данный шаръ.

Такъ какъ $LK=KM=KE$, то полукругъ, описанный на LM, пройдетъ чрезъ точку E. Если будемъ вращать этотъ полукругъ около неподвижнаго діаметра LM, то на основаніи той же причины онъ пройдетъ чрезъ точки F, G, H. А потому вершины октаедра будутъ лежать на поверхности шара, коего діаметръ LM, а этотъ діаметръ$=AB$.

Такъ какъ $LK=KM$, KE общая, и углы при точкѣ K общіе, то (кн. 1, пред. 4) $LE=EM$, но (кн. 3, пред. 31) $\angle LEM=d$; слѣдовательно:

$$\square LM=2\square LE$$

Но (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB : BC = \square AB : \square DB$$

а потому, такъ какъ $AB = 2BC$, то:

$$\square AB = 2\square DB = 2\square LE$$

слѣдовательно:

$$\square LM = \square AB$$

а потому $LM = AB$.

3) *Доказательство теоремы.*

Мы только что доказали, что:

$$\square LM = 2\square LE$$

и что $LM = AB$, а потому:

$$\square AB = 2\square LE$$

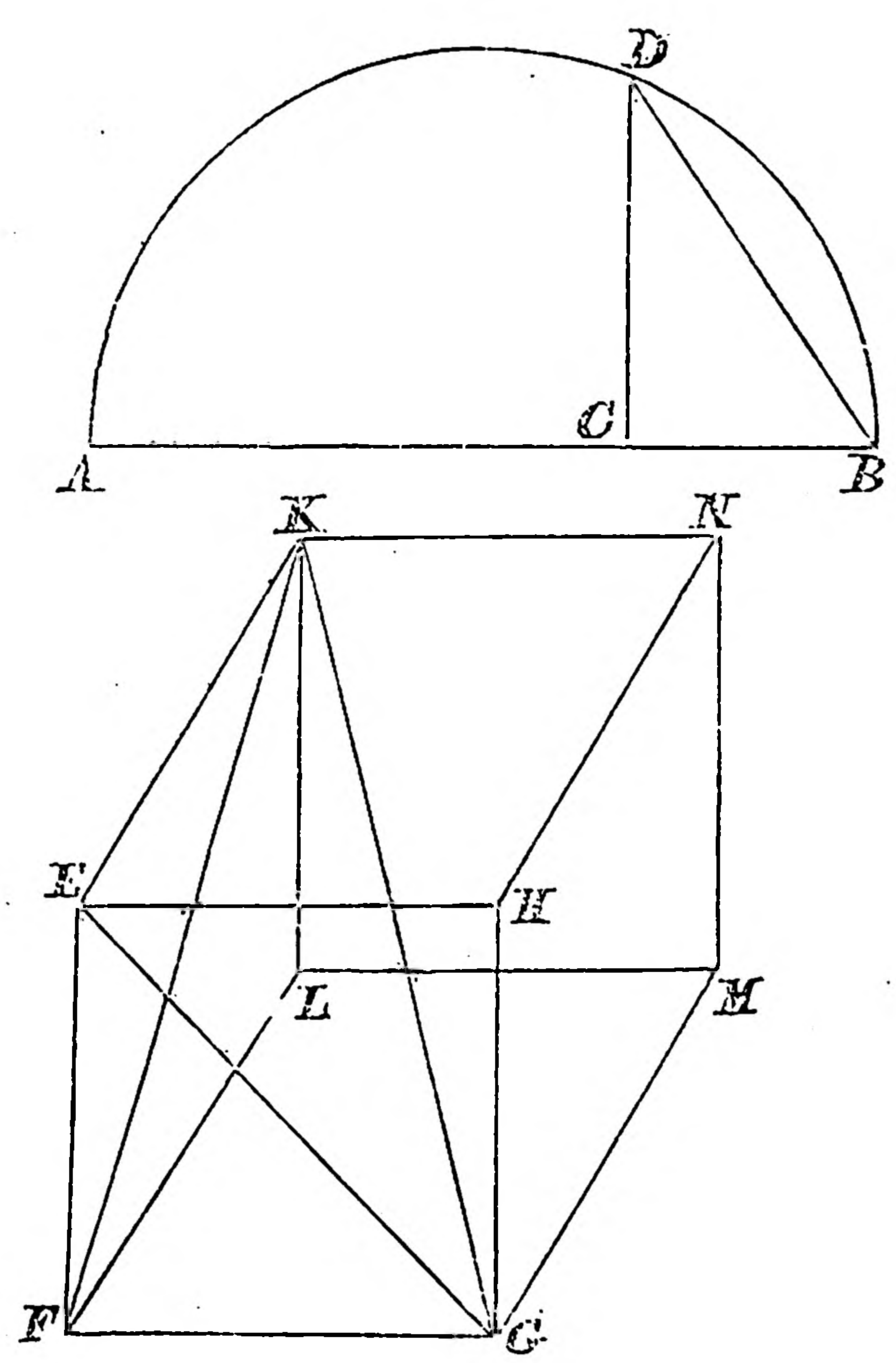
гдѣ AB есть діаметръ шара, а LE сторона октаедра.

Предложеніе 15. Задача. Вписать кубъ (гексаедръ) въ данный шаръ?

Теорема. Квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, равенъ утроенному квадрату, построенному на сторонѣ куба, вписаннаго въ данный шаръ.

1) *Построеніе куба* (фиг. 532).

Фиг. 532.



Пусть діаметръ AB даннаго шара, въ точкѣ C, раздѣленъ на такія части, что $AC = 2CB$, или $AB = 3CB$. На прямой AB опишемъ полукругъ

ADB, къ прямой AB, въ точкѣ C возставимъ перпендикуляръ CD и проведемъ DB. Построимъ квадратъ $EFGH$, коего сторона равна DB; къ плоскости этого квадрата въ точкахъ E, F, G, H возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляры EK, FL, GM, HN, изъ коихъ каждый$=DB$; построимъ искомый кубъ FN.

2) *Доказательство построенія.*

1. Что FN есть кубъ это очевидно (кн. 11, опред. 25).

2. Что этотъ кубъ вписанъ въ данный шаръ.

Проведемъ KG, EG, KF. Такъ какъ EK перпендикулярна къ плоскости $EFGH$, то (кн. 11, опред. 3) $\angle KEG=d$, полукругъ описанный на KG пройдетъ чрезъ точку E. Но FG перпендикулярна къ FL, FE, а потому (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна къ плоскости $EFLK$, слѣдовательно $\angle GFK=d$; изъ этого слѣдуетъ, что полукругъ, описанный на KG, пройдетъ чрезъ точку F, и по той же причинѣ пройдетъ чрезъ остальныя вершины куба; а потому вершины эти будутъ лежать на поверхности шара, коего діаметръ KG, а діаметръ этотъ$=AB$.

Такъ какъ $\angle GFE=d$ и $GF=FE=EK$, то (кн. 1, пред. 47):

$$\square EG=2\square EF=2\square EK$$

слѣдовательно:

$$\square EG+\square EK$$

т. е.:

$$\square KG=3\square EK=3\square DB$$

потому что $EK=DB$. Но $AB=3BC$ и (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB:DC=\square AB:\square DB$$

а потому:

$$\square AB=3\square DB$$

слѣдовательно:

$$\square AB=\square KG$$

а потому $AB=KG$.

3) *Доказательство теоремы.* Мы доказали, что:

$$\square GK=3\square EK$$

и $GK=AB$, а потому:

$$\square GK=\square AB$$

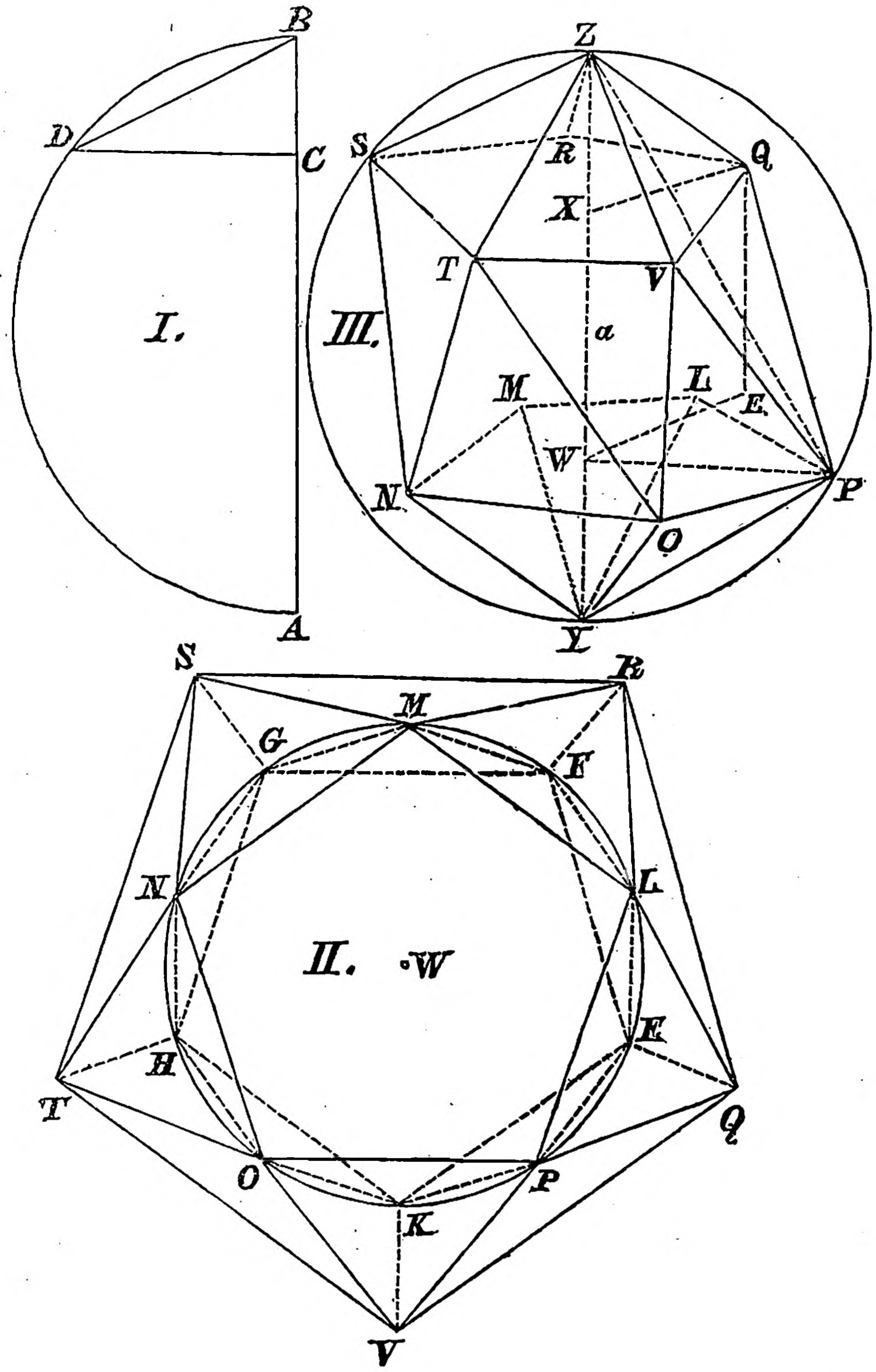
слѣдовательно:

$$\square AB=3\square EK$$

гдѣ AB есть діаметръ шара, а EK сторона куба.

Предложеніе 16. Задача. Вписать въ данный шаръ икосаедръ (фиг. 533)?

Фиг. 533.



Теорема. Сторона, вписаннаго въ шаръ, икосаедра есть *малая ирраціональная* (фиг. 533).

1) *Построеніе икосаедра.*

Пусть діаметръ AB даннаго шара въ точкѣ C раздѣленъ на такія части, что $AC=4CB$ (фиг. I), а потому $AB=5CB$. На AB опишемъ полукругъ ADB, къ AB возставимъ, въ точкѣ C, перпендикуляръ CD, и проведемъ DB.

Пусть, въ фигурѣ II, около центра W описанъ кругъ, коего діаметръ$=DB$. Въ этотъ кругъ впишемъ пятистороннею фигуру $EFGHK$, съ равными сторонами, раздѣлимъ пополамъ дуги въ точкахъ L, M, N, O, P, проведемъ прямыя, составляющія пятистороннею фигуру $LMNOP$ съ равными сторонами, а также проведемъ прямыя, составляющія десятистороннею фигуру *ELFM* съ равными сторонами.

Въ точкахъ *E*, *F*, *G*, *H*, *K* возставимъ перпендикуляры *EQ*, *FR*, *GS*, *HT*, *KV* къ площади круга, каждый изъ нихъ сдѣлаемъ$=DB$; чрезъ ихъ оконечности проведемъ прямыя, составляющія пятистороннею фигуру *QRSTV* съ равными сторонами, проведемъ также прямыя *QL*, *LR*, *RM*, *MS*, *SN*, *NT*, *TO*, *OV*, *VP*, *PQ*.

Въ центрѣ *W* возставимъ перпендикуляръ *WZ*, къ площади круга, что представлено на фиг. II, и продолжимъ его по другую сторону площади круга до *Y*, сдѣлаемъ *WX* равную сторонѣ шестисторонней, а *XZ* и *WY* равными сторонѣ десятисторонней фигуръ; проведемъ прямыя изъ точки *Z* къ вершинамъ угловъ фигуры *QRSTV*, подобнымъ же образомъ проведемъ прямыя изъ точки *Y* къ вершинамъ угловъ фигуры *LMNOP*. Такимъ образомъ построенное тѣло, будетъ требуемый икосаедръ.

2) *Доказательство построенія.*

1. Что это тѣло есть икосаедръ.

Такъ какъ на фиг. II, *EQ*, *FR* перпендикулярны къ одной и той же плоскости (къ площади круга), то онѣ параллельны (кн. 11, пред. 6), но онѣ равны, а потому (кн. 1, пред. 33) также равны и параллельны *QR*, *EF*; слѣдовательно *QR* есть сторона вписанной въ кругъ пятисторонней фигуры съ равными сторонами, такъ какъ *EF* есть сторона такой фигуры. По той же причинѣ остальныя прямыя *RS*, *ST*, *TV*, *VQ* суть стороны пятисторонней фигуры *QRSTV* съ равными сторонами.

Но *EQ* равна *DB*, а потому она равна радіусу круга, слѣдовательно она есть сторона шестисторонней фигуры, а *EL* равна сторонѣ десятисторонней фигуры, и $\angle LEQ=d$, изъ этого слѣдуетъ (кн. 13, пред. 10), что *QL* есть сторона пятисторонней фигуры, а по той же причинѣ *LR* есть также сторона той же фигуры. Но *QR* есть сторона той же фигуры, слѣдовательно $\triangle QRL$ равносторонній. По той же причинѣ треугольники *RSM*, *STN*, *TVO*, *VPQ* также равносторонніе.

Такъ какъ *LR*, *RM*, *ML* суть также стороны пятисторонней фигуры съ равными сторонами, то $\triangle LMR$ равносторонній. По той же причинѣ треугольники *MNS*, *NOT*, *OPV*, *PLQ* также равносторонніе.

На фиг. III, представлены многоугольники *RSTVQ* и *LMNOP*; изъ поименованныхъ треугольниковъ показаны только тѣ, коихъ основанія *ST*, *TV*, *VQ*, а вершины *N*, *O*, *P*, равно какъ и тѣ, коихъ стороны *NO*, *OP*, а вершины *T*, *V*.

Такъ какъ *XW*, *QE* перпендикулярны къ одной и той же плоскости (площади круга), то (кн. 11, пред. 6) онѣ параллельны, но онѣ также равны, а потому (кн. 1, пред. 33) WE, XQ также параллельны и равны; слѣдовательно XQ есть сторона шестисторонней фигуры, такъ какъ WE есть радіусъ круга. Итакъ XZ есть сторона десятисторонней фигуры, а $\angle QXZ = d$. Слѣдовательно (кн. 13, пред. 10) QZ есть сторона пятисторонней фигуры; по той же причинѣ VZ, а по предъидущему и QV суть стороны той же фигуры. Слѣдовательно $\triangle VQZ$ равносторонній. То же самое относится къ треугольникамъ, коихъ основанія VT, TS, SR, RQ, а коихъ вершины лежатъ въ точкѣ Z. Точно также доказывается это и для треугольниковъ, коихъ основанія PO, ON, NM, ML, LP, и коихъ вершины лежатъ въ точкѣ Y. Изъ этого слѣдуетъ (кн. 11, опред. 29), что построенное тѣло есть икосаедръ.

2. Что этотъ икосаедръ вписанъ въ данный шаръ.

Такъ какъ въ фиг. Ш, WX есть сторона шестисторонней фигуры, а XZ десятисторонней, то (кн. 13, пред. 9) WZ, въ точкѣ X, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и WX есть большій отрѣзокъ, а потому:

$$WZ : WX = WX : XZ$$

но $WX = WP$ и $XZ = WY$, слѣдовательно:

$$WZ : WP = WP : WY$$

Но углы PWZ, PWY суть прямые, а потому проведя PZ, треугольники PWZ, PWY будутъ подобны (кн. 6, пред. 6). Слѣдовательно (кн. 6, пред. 8) $\angle YPZ = d$. А потому (кн. 3, пред. 31) полукругъ описанный на YZ пройдетъ чрезъ точку P.

Изъ предъидущей пропорціи:

$$WZ : WX = WX : XZ$$

гдѣ $WZ = XY$ и $WX = XQ$, слѣдуетъ что:

$$XY : XQ = XQ : XZ$$

Слѣдовательно, проведя QY, уголъ $YQZ = d$. А потому полукругъ, описанный на YZ, пройдетъ чрезъ точку Q.

Если теперь вышеупомянутый полукругъ станетъ вращаться, около своего неподвижнаго діаметра YZ, то на основаніи тѣхъ же причинъ онъ пройдетъ чрезъ остальныя точки икосаедра, которыя поэтому лежатъ на поверхности шара, коего діаметръ есть YZ. Этотъ послѣдній$=AB$.

А такъ какъ WZ раздѣлена, въ точкѣ X, въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то, раздѣливъ пополамъ WX въ точкѣ a, будемъ имѣть (кн. 13, пред. 3):

$$\square Za = 5 \square aX$$

Но $YZ=2Za$ и $WX=2aX$, слѣдовательно:

$$\square YZ = 5 \square WX = 5 \square BD$$

Но $AB=5BC$ и (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB : BC = \square AB : \square BD$$

слѣдовательно:

$$\square AB = 5 \square BD$$

откуда:

$$\square YZ = \square AB$$

а потому $YZ=AB$.

3) *Доказательство теоремы.*

Такъ какъ діаметръ шара раціоналенъ и квадратъ, на немъ построенный, равенъ суммѣ пяти квадратовъ, построенныхъ на радіусѣ круга $EFGHK$, то радіусъ, а потому, и діаметръ этого круга раціональны; слѣдовательно (кн. 13, пред. 11) сторона, вписанной въ такой кругъ пятисторонней фигуры, т. е. сторона икосаедра, есть *малая ирраціональная.*

Замѣчаніе. Отсюда слѣдуетъ, что квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, равенъ пять разъ взятому квадрату, построенному на радіусѣ того круга, на которомъ построенъ икосаедръ, и что діаметръ шара составленъ изъ стороны шестисторонней и двухъ сторонъ десятисторонней фигуръ, вписанныхъ въ этотъ кругъ.

Предложеніе 17. Задача. Вписать въ данный шаръ додекаедръ?

Теорема. Сторона, вписаннаго въ шаръ, додекаедра есть *вычетъ.*

1) *Построеніе додекаедра* (фиг. 534).

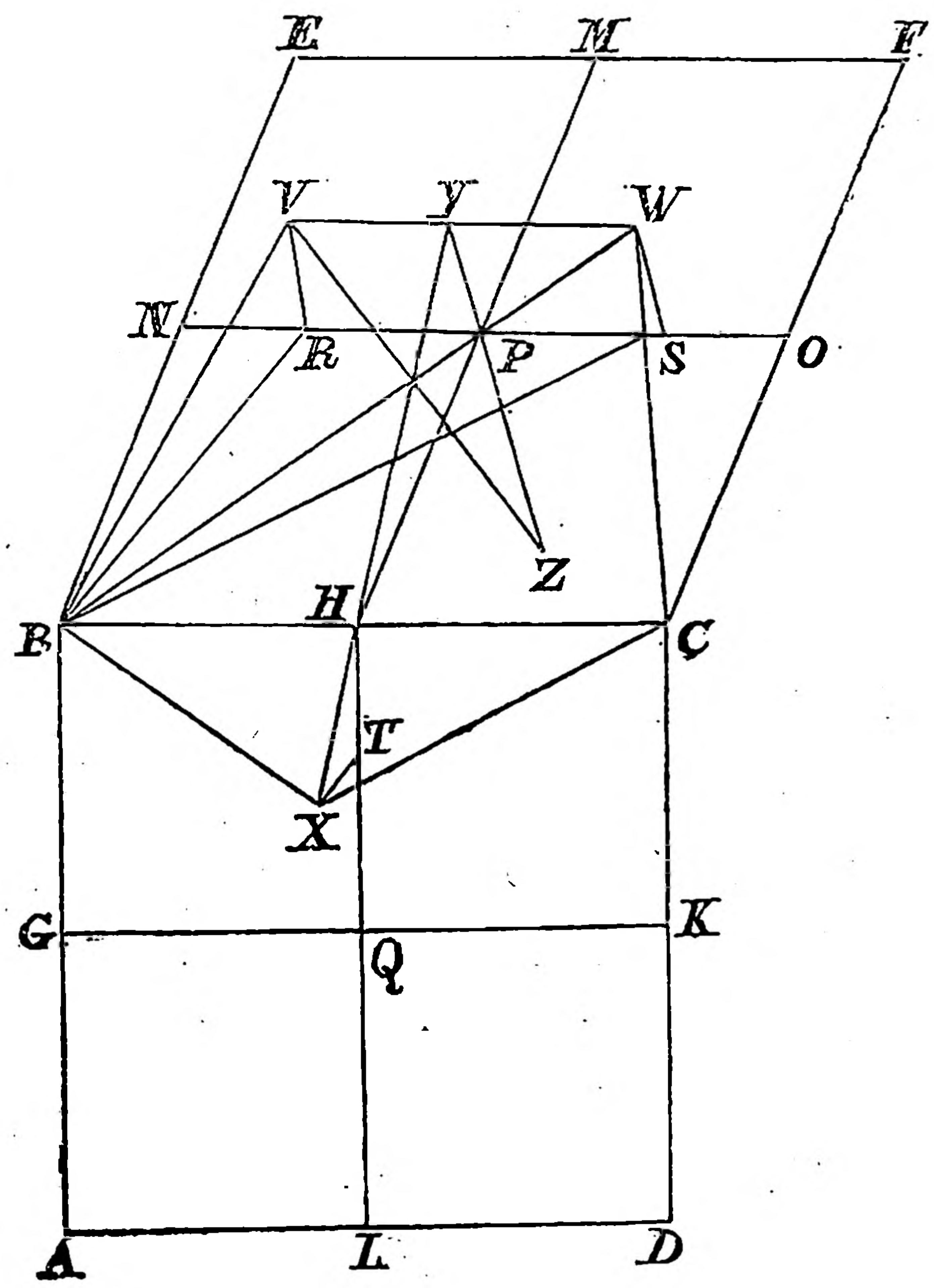
Двѣ боковыя площади $ABCD$ и $CBEF$ построеннаго куба (кн. 13, пред. 15) приложимъ перпендикулярно другъ другу. Раздѣлимъ ихъ стороны въ точкахъ G, H, K, L, M, N, O пополамъ и проведемъ прямыя GK, HL, MH, NO. Прямыя NP, PO, HQ раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ точкахъ R, S, T, и пусть PR, PS, QT будутъ большіе отрѣзки. Въ этихъ точкахъ возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляры RV, SW, TX къ боковымъ площадямъ куба, перпендикуляры эти возставимъ въ наружу, сдѣлаемъ ихъ равными вышеупомянутымъ большимъ отрѣзкамъ PR, PS, QT и проведемъ прямыя VB, BX, XC, CW, WV, которыя лежатъ въ одной плоскости, заключаютъ равные углы, и ограничиваютъ собою пятистороннею фигуру съ равными сторонами, построенную на ребрѣ куба BC. Построивъ, на каждомъ изъ двѣнадцати реберъ куба, подобную фигуру, получимъ (кн. 11, опред. 28) требуемый додекаедръ.

2) *Доказательство построенія.*

1. Что $VBXCW$ есть такая пятисторонняя фигура. Именно:

a) Она равносторонняя.

Фиг. 534.



Проведемъ BR, BS, BW. Такъ какъ прямая NP, въ точкѣ R, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и PR есть большій отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 4):

$$\square PN + \square NR = 3\square PR$$

но $PN = NB$ и $PR = RV$, слѣдовательно:

$$\square BN + \square NR = 3\square RV$$

Но (кн. 1, пред. 47):

$$\square BN + \square NR = \square BR$$

слѣдовательно:

$$\square BR = 3\square RV$$

а потому $\square BR + \square RV$, т. е.:

$$\square BV = 4\square RV$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.) $BV = 2RV$. Но $RS = 2RP = 2RV$, а потому $VW = 2RV$, слѣдовательно $BV = VW$. Подобнымъ образомъ доказывается и равенство остальныхъ сторонъ фигуры $BVWCX$.

b) Она лежитъ въ одной плоскости.

Чрезъ точку P проведемъ прямую PY, параллельную прямымъ RV и SW, въ наружу куба.

Проведемъ YH, HX, то YHX есть прямая линія, такъ какъ HQ, въ точкѣ T, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и QT большій отрѣзокъ, а потому:

$$HQ:QT=QT:TH$$

Но $HQ=HP$ и $QT=TX=PY$, слѣдовательно:

$$HP:PY=TX:TH$$

Но (кн. 11, пред. 6) HP, TX параллельны, равно какъ и FH, PY, первыя потому что онѣ перпендикулярны къ плоскости BD, а вторыя какъ перпендикулярныя къ плоскости BF. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 32) YX, HX лежатъ на одной прямой YX; а потому (кн. 11, пред. 1) фиґура $BVWCX$, въ которой лежитъ YX, находится въ одной плоскости.

c) Она равноугольна.

Такъ какъ NP раздѣлена, въ точкѣ R, въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и PR есть большій отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 5):

$$NP+PR:PN=NP:PS$$

Но $PR=PS$, а потому:

$$NP+PR=NS$$

а также:

$$NS:NP=NP:PS$$

Слѣдовательно NS, въ точкѣ P, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и NP есть большій отрѣзокъ, слѣдовательно (кн. 13, пред. 14):

$$\square NS+\square SP=3\square PN$$

но $PN=NB$ и $SP=SW$, а потому:

$$\square NS+\square SW=3\square NB$$

слѣдовательно также:

$$\square NB+\square NS+\square SW=4\square NB$$

Но (кн. 1, пред. 47):

$$\square NB+\square NS=\square BS$$

слѣдовательно:

$$\square BS+\square SW$$

т. е. (кн. 1, пред. 47):

$$\square BW=4\square NB$$

а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$BW=2NB=BC$$

Но, на основаніи доказаннаго въ первой части, $BV=BX$ и $VW=CX$, слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) $\angle BVW=\angle BXC$. Подобнымъ же образомъ доказывается и равенство остальныхъ угловъ VWC, BXC, BVW.

2. Что этотъ додекаедръ вписанъ въ данный шаръ.

Продолжимъ YP во внутрь куба до Z, то YZ встрѣтитъ (кн. 11, пред. 39) діагональ куба, онѣ пересѣкутся пополамъ въ точки Z. Слѣдовательно Z есть центръ шара, описаннаго около куба, а PZ равна половинѣ стороны PN куба. Проведемъ VZ.

Такъ какъ NS раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и NP есть большій отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 4):

$$\square NS+\square SP=3\square NP$$

Но $NP=PZ$ и $PS=YP$, а потому $NS=YZ$, а также $SP=PR$, а потому $SP=VY$. Слѣдовательно:

$$\square YZ+\square VY$$

т. е. (кн. 1, пред. 47):

$$\square VZ=3\square NP$$

Но (кн. 13, пред. 15) квадратъ построенный на діаметрѣ шара равенъ утроенному квадрату, построенному на сторонѣ куба, а потому и квадратъ, построенный на радіусѣ равенъ утроенному квадрату, построенному на половинѣ стороны NP. Слѣдовательно VZ есть радіусъ шара, Z центръ шара, и V точка на поверхности шара. Подобнымъ же образомъ доказывается, что кромѣ точки V и всякая другая вершина додекаедра лежитъ на поверхности шара. Слѣдовательно додекаедръ вписанъ въ данный шаръ.

3) *Доказательство теоремы.*

Такъ какъ NP, въ точкѣ R, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и PR есть большій отрѣзокъ, то:

$$NP:PR=PR:RN$$

а потому также (кн. 5, пред. 15):

$$2NP:2PR=2PR:2RN$$

т. е.:

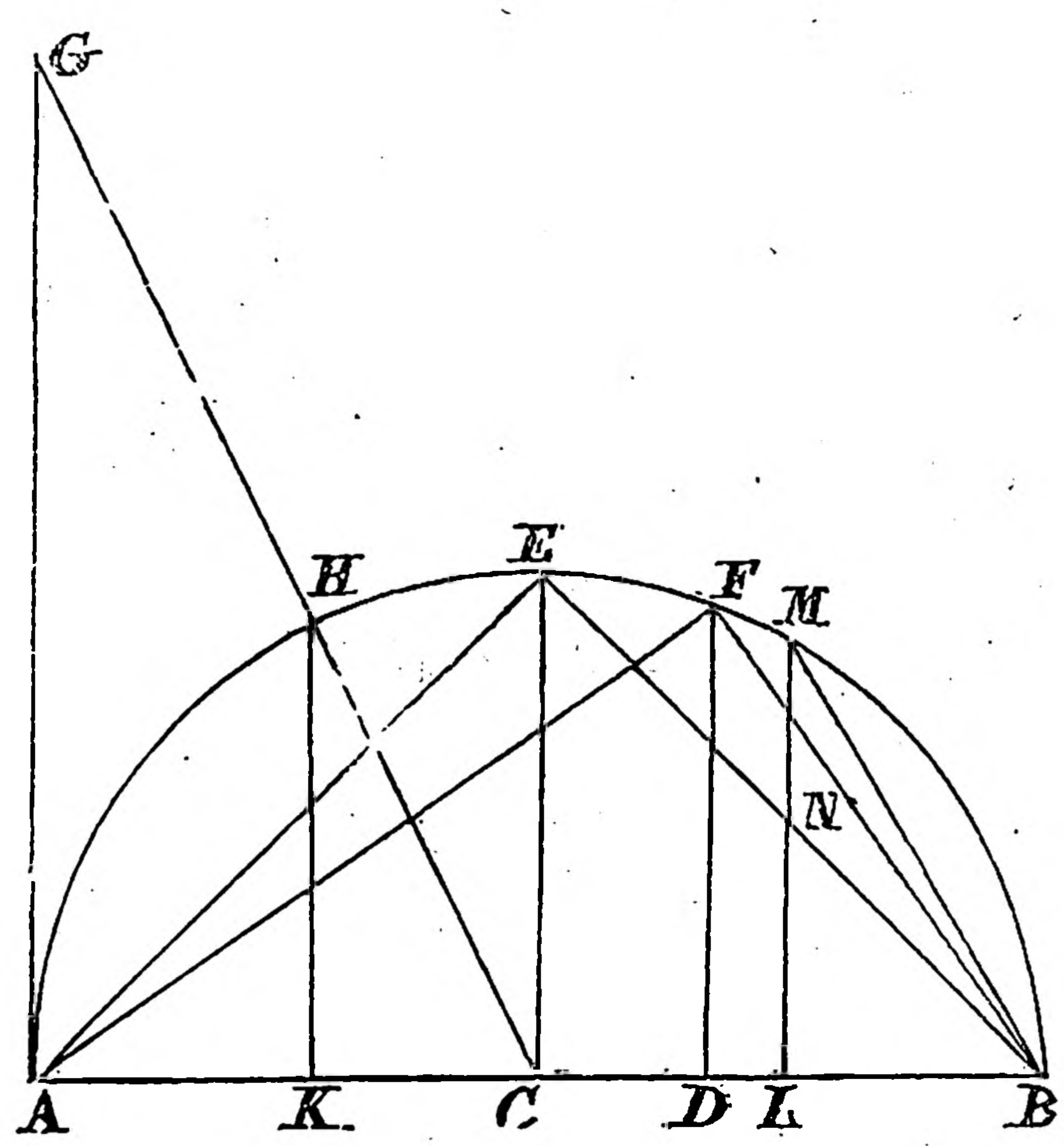
$$NO:RS=RS:RN+SO$$

но $NO > RS$, а потому и $RS > RN + SO$, слѣдовательно NO раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и RS большій отрѣзокъ. Но діаметръ шара раціоналенъ, и (кн. 13, пред. 15) квадратъ, построенный на немъ равенъ утроенному квадрату, построенному на сторонѣ NO, а потому NO также раціональна. Слѣдовательно (кн. 13, пред. 6) ея отрѣзокъ RS есть *вычетъ*; но $RS = VW$, а потому сторона додекаедра есть *вычетъ*.

Замѣчаніе. Изъ этого слѣдуетъ, что большій отрѣзокъ стороны куба, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, равенъ сторонѣ додекаедра.

Предложеніе 18. Задача. Найти стороны пяти тѣлъ, разсмотрѣнныхъ въ предъидущихъ предложеніяхъ (фиг. 535).

Фиг. 535.



Теорема. Если квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, описаннаго около этихъ пяти тѣлъ, раздѣлить на шесть равныхъ частей, то квадратъ построенный на сторонѣ тетраедра равенъ четыремъ такимъ частямъ, октаедра—тремъ, куба—двумъ. Изъ остальныхъ же двухъ, коихъ отношенія къ другимъ и отношеніе между собою не раціональны, сторона икосаедра больше стороны додекаедра.

1) *Построеніе сторонъ.*

Пусть діаметръ AB даннаго шара, въ точкахъ C и D, раздѣленъ на такія части, что $AC = CB$ и $AD = 2DB$. На AB опишемъ полукругъ ADB, въ точкахъ C и D прямой AB, возставимъ перпендикуляры CE, DF, проведемъ AF, FB и раздѣлимъ FB, въ точкѣ N, въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ что BN большій отрѣзокъ. Далѣе, въ точкѣ A, возставимъ къ AB перпендикуляръ AG, сдѣлаемъ его равнымъ AB и проведемъ GC, которая пересѣчетъ полукругъ въ точкѣ H; изъ точки H опустимъ на AB перпендикуляръ HK и сдѣлаемъ $CL = CK$, такъ что

$LK=2KC$; наконецъ въ точкѣ L, возставимъ къ AB перпендикуляръ LM и проведемъ BM, то сторона *тетраедра* будетъ AF; *куба*—BF; *октаедра*—BE; *додекаедра*—BN; и *икосаедра*—BM.

2) *Доказательство построенія.*

a) Такъ какъ $AD=2DB$, то $AB=3DB$, т. е.:

$$AD:DB=3:1$$

или (кн. 5, пред. 19):

$$BA:AD=3:2$$

т. е.;

$$BA=\tfrac{3}{2}AD$$

Но (кн. 6, пред. 8) $\triangle AFB \backsim \triangle AFD$, а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд. 2):

$$BA:AD=\square AB:\square AF$$

слѣдовательно и:

$$\square AB:\square AF=3:2$$

т. е.:

$$\square AB=\tfrac{3}{2}\square AF$$

но AB есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 13) AF есть сторона *тетраедра.*

b) Такъ какъ $AD=2DB$, а потому $AB=3DB$ и (кн. 6, пред. 8, и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB:BD=\square AB:\square FB$$

то также:

$$\square AB=3\square FB$$

но AB есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 15) BF есть сторона *куба.*

c) Такъ какъ сторона куба FB, въ точкѣ N, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 17, слѣд.) большій отрѣзокъ BN есть сторона *додекаедра.*

d) Такъ какъ $AC=CB$, то $AB=2BC$ и:

$$AB:BC=\square AB:\square BE$$

а потому

$$\square AB=2\square BE$$

но AB есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 14) BE сторона *октаедра.*

e) Такъ какъ:

$$AG=AB=2AC$$

и (кн. 6, пред. 4):

$$GA:AC=HK:KC$$

то и $HK=2KC$, слѣдовательно (кн. 6, пред. 20):

$$\square HK=4\square KC$$

а потому $\square HK+\square KC$, т. е. (кн. 1, пред. 47):

$$\square HC=5\square KC$$

но $HC=CB$, а потому:

$$\square HC=\square CB$$

слѣдовательно:

$$\square CB=5\square KC$$

Но $AB=2BC$ и $LK=2KC$, а потому:

$$BC:KC=AB:LK$$

Слѣдовательно и:

$$\square AB=5\square LK$$

Но $AC=CB$ и $KC=LC$, а потому $AK=LB$, а также:

$$AB=LK+2CB$$

но AB есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 16, слѣд.) LK и LB суть стороны, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же кругъ шестисторонней и десятисторонней фигуръ. Такъ какъ $KC=CL$, а потому (кн. 3, пред. 14) $ML=HK$; но какъ $HC=2KC=KL$, то $ML=KL$; а потому ML есть также сторона шестисторонней фигуры, а LB сторона десятисторонней и $\angle MLB=d$. Слѣдовательно (кн. 13, пред. 10) MB есть сторона пятисторонней фигуры, а потому (кн. 13, пред. 16) она есть также сторона *икосаедра.*

3) *Доказательство теоремы.*

На основаніи теоремъ предложеній 13, 14 и 15 мы нашли, что:

$$\square AB=\tfrac{3}{2}\square AF=2\square BE=3\square BF$$

Раздѣливъ $\square AB$ на шесть равныхъ частей, то 4 изъ нихъ прійдутся на $\square AF$, 3 на $\square BE$ и 2 на $\square BF$, такъ что отношенія сторонъ тетраедра, октаедра и куба раціональны. Такъ какъ стороны икосаедра и додекаедра ирраціональны, ибо одна изъ нихъ есть *малая ирраціональная* (кн. 10, пред. 16), другая (кн. 10, пред. 17) *вычетъ*, а потому отношенія этихъ сторонъ ни между собою, ни къ упомянутымъ выше тремъ не могутъ быть раціональны.

Что сторона икосаедра BM больше стороны додекаедра BN, доказывается слѣдующимъ образомъ:

1. Такъ какъ треугольники FDB, FAB равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):

$$DB:BF=BF:BA$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$DB:BA=\square DB:\square BF$$

или:

$$AB:DB=\square BF:\square DB$$

но $AB=3DB$, слѣдовательно:

$$\square BF=3\square DB$$

Но $AD=2DB$, а потому:

$$\square AD=4\square DB$$

слѣдовательно $\square AD>\square BF$, а потому $AD>BF$, а слѣдовательно тѣмъ болѣе $AL>BF$. Но, такъ какъ KL есть сторона шестисторонней фигуры и $KL=LB$ сторона десятисторонней, то (кн. 13, пред. 9) AL, въ точкѣ K, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и KL большій отрѣзокъ, но BF также была раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, въ точкѣ N, и BN большій отрѣзокъ. Слѣдовательно $KL>BN$, но такъ какъ $KL=ML$, то и $ML>BN$; но (кн. 1, пред. 19) $BM>ML$, слѣдовательно тѣмъ болѣе $BM>BN$.

2. Или иначе. Такъ какъ $AD=2DB$, то $AD=3DB$. Но (кн. 6, пред. 8) $\triangle FAB\backsim\triangle FBD$, а потому:

$$AB:BD=\square AB:\square BF$$

слѣдовательно:

$$\square AB=3\square BF$$

но:

$$\square AB=5\square KL$$

слѣдовательно:

$$5\square KL=3\square BF$$

Но (слѣдующая Лемма):

$$3\square BF>6\square BN$$

слѣдовательно:

$$\square KL>\square BN$$

а потому $KL>BN$, но $KL=LM$, слѣдовательно $LM>BN$, а потому тѣмъ болѣе $BM>BN$.

Лемма. Что $3\square BF > 6\square BN$ доказывается слѣдующимъ образомъ:

Такъ какъ $BN > NF$, то:

$$FB.BN > BF.FN$$

а потому:

$$(FB.BN) + (BF.FN) > 2(BF.FN)$$

Но (кн. 2, пред. 2):

$$(FB.BN) + (BF.FN) = \square BF$$

и такъ какъ BF, въ точкѣ N, раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 6, пред. 17):

$$BF.FN = \square BN$$

слѣдовательно:

$$\square BF > 2\square BN$$

а потому:

$$3\square BF > 6\square BN$$

Замѣчаніе. Кромѣ поименованныхъ пяти тѣлъ, нѣтъ другаго, составленнаго изъ равныхъ фигуръ съ равными сторонами и равными углами.

Въ самомъ дѣлѣ:

1) Изъ двухъ треугольниковъ, или изъ двухъ плоскихъ угловъ нельзя составить (кн. 11, опред. 11) тѣлесный уголъ. Изъ трехъ равностороннихъ треугольниковъ состоитъ тѣлесный уголъ *тетраедра*, изъ четырехъ—*октаедра*, изъ пяти—*икосаедра*. Но изъ шести, или болѣе равностороннихъ треугольниковъ нельзя (кн. 11, пред. 21) составить тѣлесный уголъ, такъ какъ уголъ подобнаго треугольника$=\frac{2}{3}d$, а слѣдовательно сумма шести такихъ угловъ$=4d$, а семи и болѣе угловъ$>4d$.

2) Изъ трехъ квадратовъ состоитъ тѣлесный уголъ *куба*; но изъ четырехъ, которые$=4d$, нельзя составить (кн. 11, пред. 21) тѣлесный уголъ.

3) Изъ трехъ равностороннихъ и равноугольныхъ пятистороннихъ фигуръ состоитъ тѣлесный уголъ *додекаедра*; но изъ четырехъ нельзя составить тѣлеснаго угла (кн. 11, пред. 21), такъ какъ (слѣдующая Лемма) уголъ подобной фигуры$=1\frac{1}{5}d$, слѣдовательно сумма четырехъ такихъ угловъ$>4d$.

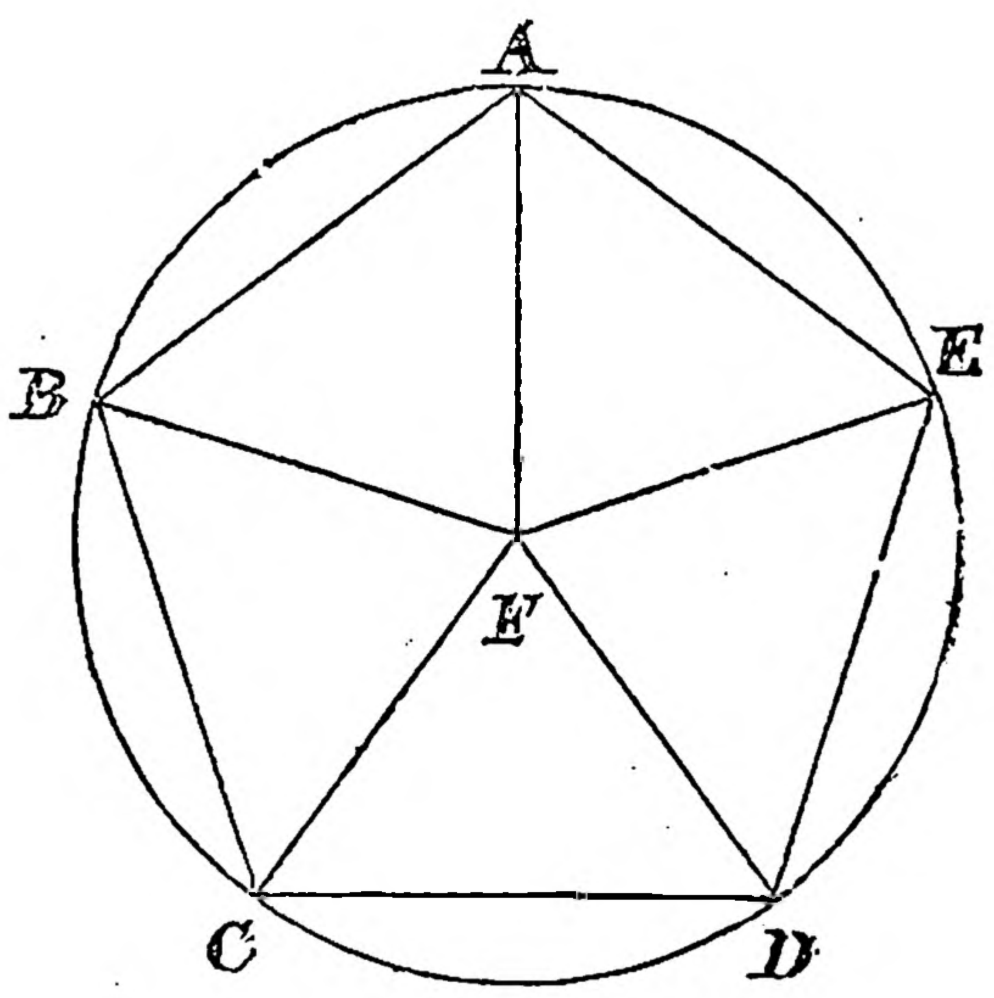
4) Изъ другихъ многоугольниковъ еще менѣе возможно составить тѣлесный уголъ.

Лемма. Что уголъ равноугольной, пятисторонней фигуры съ равными сторонами$=1\frac{1}{5}d$ доказывается такимъ образомъ (фиг. 536).

Около этой пятисторонней фигуры $ABCDE$ опишемъ кругъ, коего центръ F, проведемъ прямыя FA, FB, FC, FD, FE, которыя раздѣлятъ пополамъ (кн. 4, пред. 4) равные углы фигуры. Такъ какъ сумма угловъ около $F=4d$ и они равны, то каждый изъ нихъ$=\frac{4}{5}d$, или $1-\frac{1}{5}$ прямаго угла, слѣдовательно (кн. 1, пред. 32):

$$\angle FAB+\angle ABF=\frac{6}{5}d$$

Фиг. 536.



но $\angle FAB=\angle FBC$, слѣдовательно и $\angle FBC+\angle ABF$. т. е.

$$\angle ABC=\frac{6}{5}d.$$

Примѣчаніе 2. Изъ предъидущихъ построеній сторонъ пяти правильныхъ тѣлъ легко вывесть ихъ алгебраическія выраженія чрезъ радіусъ шара, въ который онѣ вписаны.

Если назовемъ чрезъ R радіусъ шара, въ который вписаны правильныя тѣла, чрезъ a сторону какого нибудь изъ нихъ, то соображаясь съ предъидущими построеніями, найдемъ:

Сторона *тетраедра*:

$$a=\frac{2}{3}R\sqrt{6}$$

Сторона *гексаедра*:

$$a=\frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

Сторона *октаедра*:

$$a=R\sqrt{2}$$

Сторона *додекаедра*:

$$a=\frac{1}{3}R(\sqrt{15}-\sqrt{3})$$

Сторона *икосаедра*:

$$a=\frac{1}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$$

Если чрезъ r означимъ радіусъ шара, вписаннаго въ каждое изъ пяти правильныхъ тѣлъ, то найдемъ:

Для *тетраедра*:

$$r=\frac{1}{3}R$$

Для *гексаедра*:

$$r=\frac{1}{3}R\sqrt{3}$$

Для *октаедра*:

$$r=\frac{1}{3}R\sqrt{3}$$

Для *додекаедра*:

$$r=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$$

Для *икосаедра*:

$$r=R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$$

Имѣя эти выраженія легко найти поверхности и объемы пяти правильныхъ тѣлъ.

Поверхности:

Тетраедра:

Поверхность каждой грани, если ее назовемъ чрезъ u будетъ $u=\frac{2}{3}R^2\sqrt{3}$, слѣдовательно, если чрезъ A назовемъ всю поверхность тетраедра, то найдемъ:

$$A=\frac{8}{3}R^2\sqrt{3}$$

Гексаедра:

$$u=\frac{4}{3}R^2, \qquad A=8R^2$$

Октаедра:

$$u=\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}, \qquad A=4R^2\sqrt{3}$$

Додекаедра:

$$u=\frac{1}{6}R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}, \qquad A=2R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$$

Икосаедра:

$$u=\frac{1}{10}R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}), \qquad A=2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}).$$

Объемы:

Тетраедра.

Если поверхность A умножимъ на $\frac{1}{3}r$, r есть радіусъ шара вписаннаго въ правильное тѣло, то очевидно найдемъ его объемъ V.

$$V=\frac{8}{3}R^2\sqrt{3}\,.\,\frac{1}{9}R=\frac{8}{27}R^3\sqrt{3}$$

Гексаедра.

$$V=8R^2.\frac{1}{9}R\sqrt{3}=\frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$$

Октаедра.

$$V=4R^2\sqrt{3}\,.\,\frac{1}{9}R\sqrt{3}=\frac{4}{3}R^3$$

Додекаедра.

$$V=2R^2\sqrt{10(3-\sqrt{5})}\,.\,\frac{1}{3}R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}=\frac{2}{9}R^3\sqrt{30(3+\sqrt{5})}$$

Икосаедра.

$$V=2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})\,.\,\frac{1}{3}R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}=\frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

КНИГА XIV.

Книга четвертая „О тѣлахъ“.

По мнѣнію нѣкоторыхъ приписываемая Гипсиклу Александрійскому.

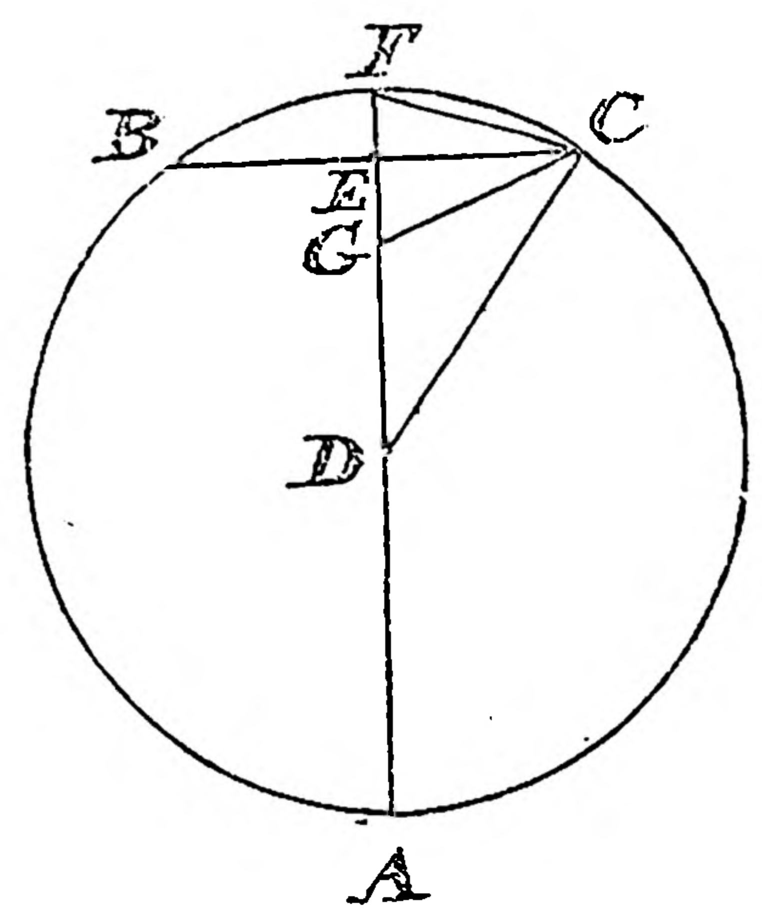
Книга первая „О пяти тѣлахъ.

Дорогой мой Протархъ, однажды прибылъ въ Александрію Базилидъ изъ Тира, онъ былъ рекомендованъ моему отцу, какъ отличающійся подобно ему любовью къ математикѣ, большую часть времени своего пребыванія онъ провелъ въ общеніи съ нимъ. Однажды они просматривали сочиненія Аполлонія о соотношеніи, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ, додекаедра и икосаедра, и объ отношеніи между ними; имъ показалось, что разсужденія Аполлонія не совсѣмъ справедливы, и они написали, какъ мнѣ сообщалъ мой отецъ, поправки ими сдѣланныя. Впослѣдствіи мнѣ попалось подъ руки другое сочиненіе Аполлонія, которое содержало въ себѣ вѣрное рѣшеніе упомянутой задачи; чтеніе этого сочиненія доставило мнѣ большое удовольствіе. Сочиненіе изданное Аполлоніемъ можетъ каждый просмотрѣть, такъ какъ его можно вездѣ найти; настоящее же сочиненіе, которое я впослѣдствіи, на сколько я могу судить, съ возможнымъ стараніемъ дополнилъ, я думаю тебѣ, имѣющему прекрасныя познанія по всѣмъ наукамъ, а въ особенности по геометріи, представить прежде всего какъ свѣдущему судьѣ; въ твердомъ ожиданіи, что ты изъ дружбы къ моему отцу, равно какъ изъ расположенія ко мнѣ, склонишся подарить своимъ вниманіемъ мою попытку. Но время окончить мнѣ предисловіе и приступить къ самому дѣлу.

Предложенія.

Предложеніе 1. Перпендикуляръ DE, опущенный изъ центра D круга, на сторону BC, пятисторонней фигуры вписанной въ кругъ, равенъ половинѣ прямой, составленной изъ радіуса DF круга и стороны FC, десятисторонней фигуры, вписанной въ тотъ же кругъ (фиг. 537).

Фиг. 537.



Доказат. Продолжимъ DE по обѣ стороны до F и A, проведемъ DC, CF, сдѣлаемъ $EG=EF$ и проведемъ GC. Такъ какъ дуга BFC равна пятой части цѣлой окружности, дуга ACF равна полуокружности и дуга FC равна половинѣ дуги BFC, то:

$$\text{дуг. } ACF=5 \text{ дуг. } FC$$

слѣдовательно:

$$AC=4 \text{ дуг. } FC$$

Но (кн. 6, пред. 33):

$$\text{дуг. } AC : \text{дуг. } FC=\angle ADC : \angle FDC$$

слѣдовательно:

$$\angle ADC=4\angle FDC$$

но (кн. 3, пред. 20) $\angle ADC=2\angle DFC$, а потому:

$$4\angle FDC=2\angle DFC$$

слѣдовательно $2\angle FDC=\angle DFC$. Но (кн. 1, пред. 4) $\angle DFC=\angle FGC$, слѣдовательно $\angle FGC=2\angle FDC$, а потому (кн. 1, пред. 6 и кн. 1, пред. 32) $DG=GC$; но (кн. 1, пред. 4) $GC=FC$, слѣдовательно $DG=FC$. Но $GE=EF$, слѣдовательно:

$$DE=EF+FC$$

а потому, прибавивъ по DE, получимъ:

$$2DE=DF+FC$$

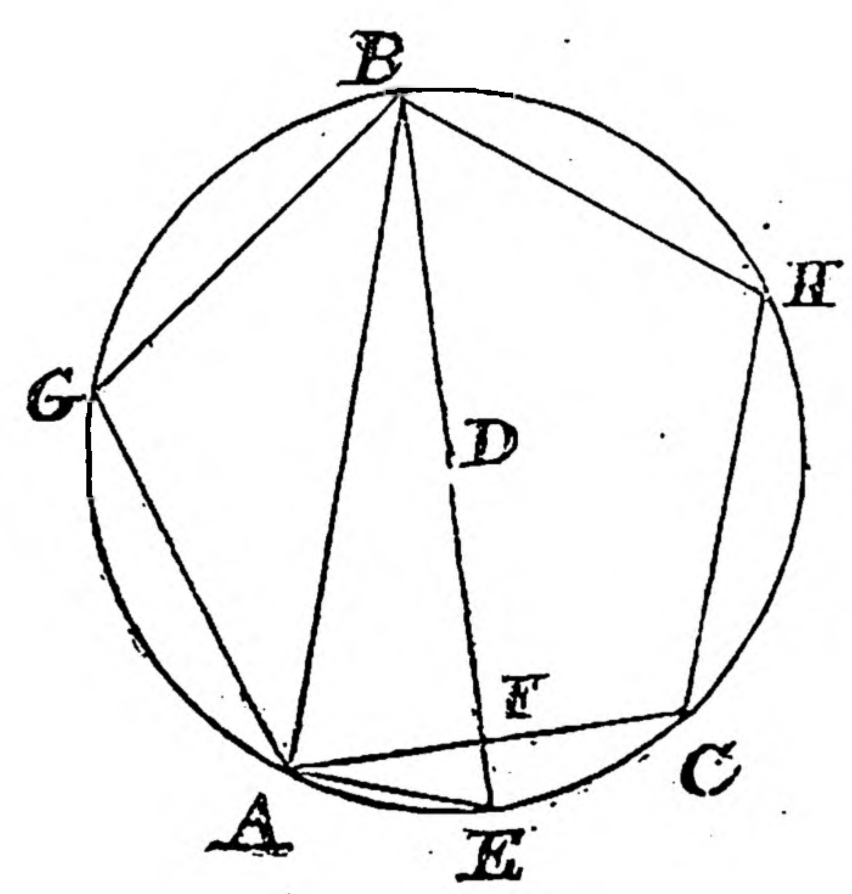
Замѣчаніе. Изъ (кн. 12, пред. 13) слѣдуетъ, что перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга, на сторону, вписаннаго въ этотъ кругъ треугольника, равенъ половинѣ радіуса.

Предложеніе 2. Въ одинъ и тотъ же кругъ вписаны пятисторонняя грань додекаедра и трехсторонняя грань икосаедра, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ.

Аристеусъ въ своемъ сравненіи пяти тѣлъ и Аполлоній во второмъ сочиненіи „о сравненіи додекаедра съ икосаедромъ" утверждаютъ, что поверхность додекаедра относится къ поверхности икосаедра, какъ додекаедръ къ икосаедру, такъ какъ перпендикуляры, опущенные изъ центра шара на пятистороннею грань додекаедра и трехстороннею грань икосаедра, равны. Мы же дадимъ здѣсь доказательство предложеннаго предложенія, предпославши ему слѣдующую лемму.

Лемма. Если мы въ кругъ впишемъ пятистороннею фигуру $AGBHC$ съ равными сторонами, то сумма квадратовъ, построенныхъ на сторонѣ AC и на діагонали AB, равна пять разъ взятому квадрату построенному на радіусѣ (фиг. 538).

Фиг. 538.



Изъ центра D опустимъ перпендикуляръ DF на сторону AC, продолжимъ его по обѣ стороны до B, E и проведемъ AE; то эта прямая будетъ сторона десятисторонней фигуры. Такъ какъ $BE = 2DE$, то (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square BE = 4\square DE$$

Но (кн. 3, пред. 31) $\angle BAE = d$, а потому (кн. 1, пред. 47):

$$\square BE = \square BA + \square AE$$

слѣдовательно:

$$\square BA + \square AE = 4\square DE$$

а потому прибавивъ по $\square DE$:

$$\square BA + \square AE + \square DE = 5\square DE$$

Но (кн. 13, пред. 10):

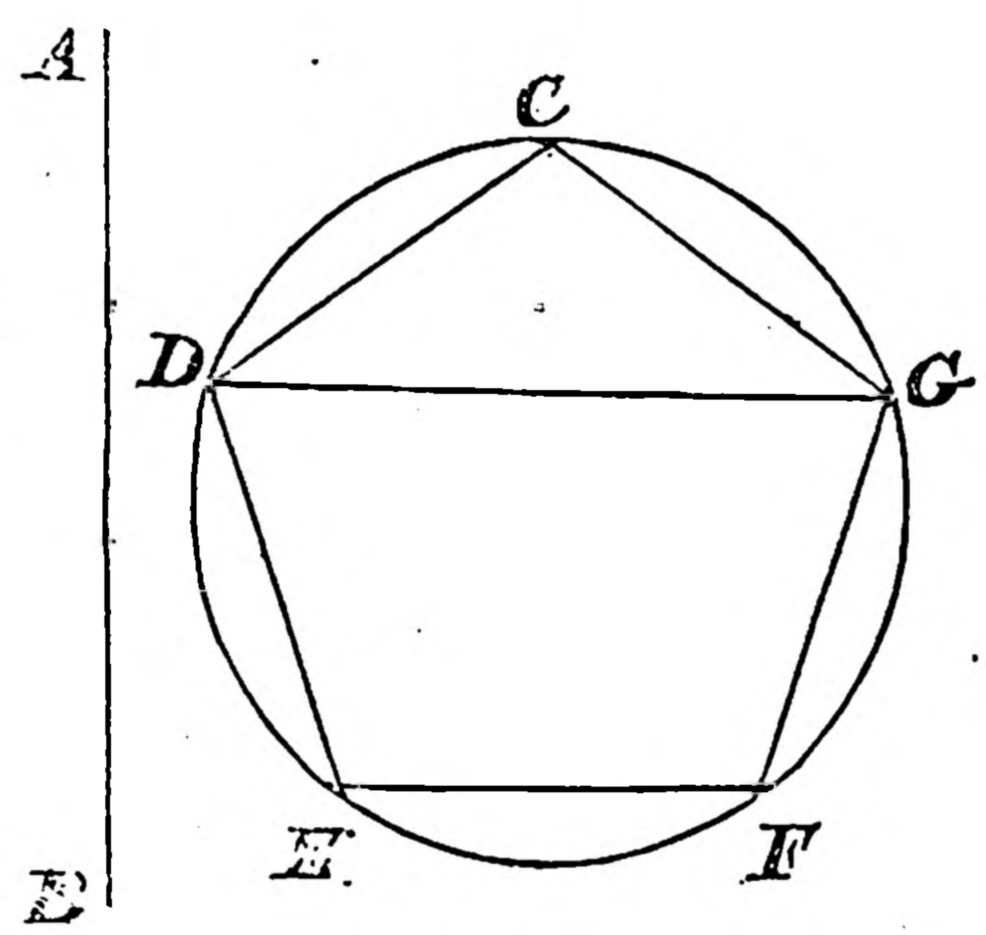
$$\square AE + \square DE = \square AC$$

слѣдовательно:

$$\square AC + \square AB = 5 \square DE$$

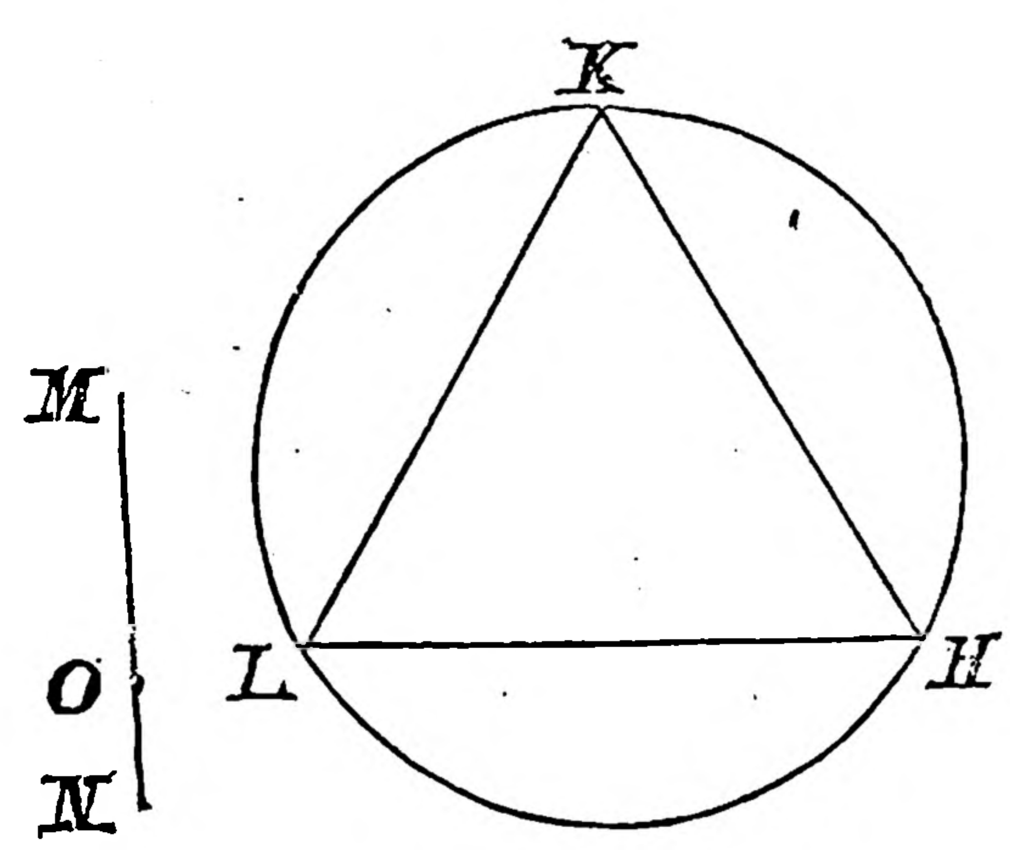
Итакъ, вышеупомянутое предложеніе можно доказать слѣдующимъ образомъ (фиг. 539):

Фиг. 539.



Пусть AB будетъ діаметръ шара, въ которомъ вписаны додекаедръ и икосаедръ, $CDEFG$ есть пятисторонняя грань додекаедра, а KLH трехсторонняя грань икосаедра (фиг. 540), требуется доказать, что обѣ грани вписаны въ одинъ и тотъ же кругъ, или что $r = \varsigma$, если r, ς суть радіусы круговъ, описанныхъ около вышесказанныхъ пятисторонних и трехсторонних фигуръ

Фиг. 540.



Проведемъ въ пятисторонней фигурѣ діагональ DG; то эта послѣдняя будетъ (кн. 13, пред. 8 и кн. 13, пред. 7) сторона вписаннаго въ шаръ куба. Возьмемъ такую прямую MN, чтобы (кн. 10, пред. 6, слѣд.) $\square AB = 5 \square MN$. Но (кн. 13, пред. 16, слѣд.) квадратъ, построенный на діаметрѣ AB равенъ пять разъ взятому квадрату, построенному на радіусѣ того круга, въ который вписана грань икосаедра, слѣдовательно радіусъ этотъ есть MN. Раздѣлимъ (кн. 6, пред. 30) прямую MN въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, въ точкѣ O, и пусть OM большій отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 5 и пред. 9) MO будетъ сторона, вписанной въ тотъ же кругъ, десятисторонней фигуры.

Такъ какъ:

$$\square AB = 5\square MN$$

и (кн. 13, пред. 15 и кн. 13, пред. 17, слѣд.):

$$\square AB = 3\square DG$$

а потому:

$$3\square DG = 5\square MN$$

Но (кн. 13, пред. 8 и кн. 14, пред. 7):

$$DG : CG = MN : MO$$

а также:

$$DG : MN = CG : MO$$

слѣдовательно:

$$3\square DG : 5\square MN = 3\square CG : 5\square MO$$

а потому:

$$3\square CG = 5\square MO$$

Но (кн. 13, пред. 16 и пред. 10):

$$5\square KL = 5\square MN + 5\square MO$$

слѣдовательно:

$$5\square KL = 3\square DG + 3\square CG$$

Но (предъидущая лемма):

$$\square DG + \square CG = 5\square r$$

а потому:

$$3\square DG + 3\square CG = 15\square r$$

слѣдовательно:

$$5\square KL = 15\square r$$

Но (кн. 13, пред. 12):

$$\square KL = 3\square \varsigma$$

а потому:

$$5\square KL = 15\square \varsigma$$

слѣдовательно:

$$15\square r = 15\square \varsigma$$

а потому $r = \varsigma$.

Предложеніе 3. Если опустимъ перпендикуляръ FG, изъ центра F круга, описаннаго около пятисторонней фигуры $ABCDE$, съ равными сторонами, на одну изъ этихъ сторонъ CD, то тридцать разъ взятый прямоугольникъ, построенный на перпендикулярѣ FG и сторонѣ CD, равенъ поверхности додекаедра. А если изъ центра D, круга описаннаго около равносторонняго треугольника ABC, опустимъ перпендикуляръ DE на одну изъ его сторонъ BC, то тридцать разъ взятый прямоугольникъ, построенный на сторонѣ BC и перпендикулярѣ DE, равенъ поверхности икосаедра.

Доказат. 1) Проведемъ CF, FD (фиг. 541). Такъ какъ (кн. 1, пред. 41):

$$CD.FG=2\triangle CDF$$

то:

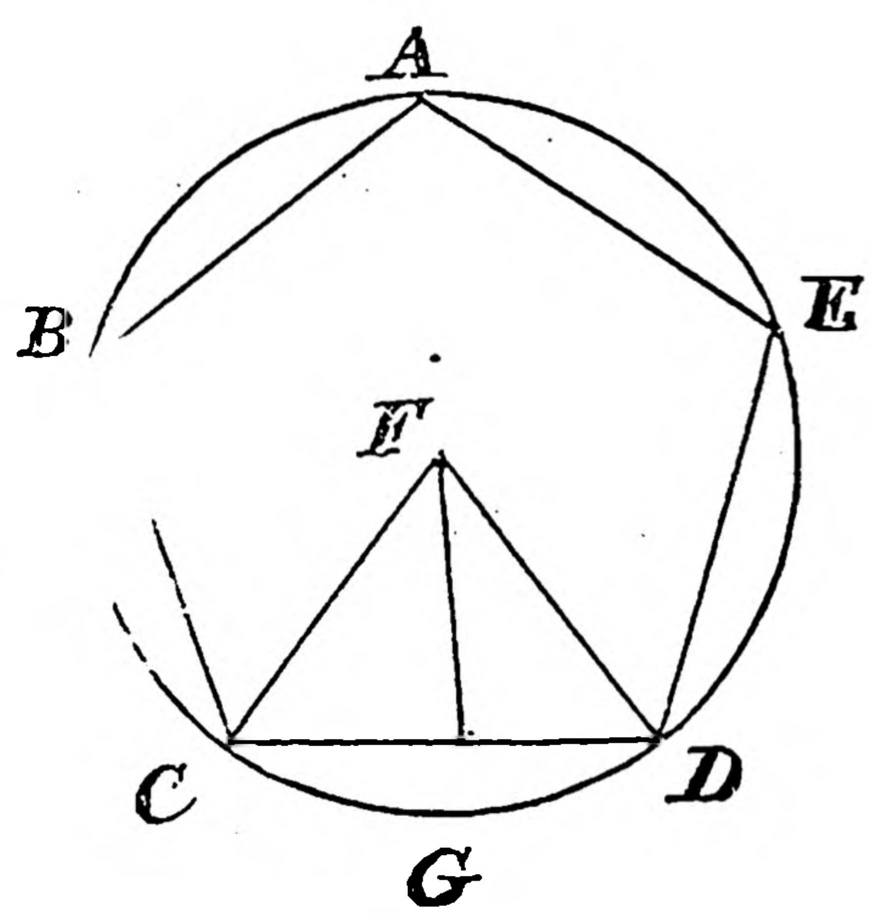
$$5(CD.FG)=10\triangle CDF=2ABCDE$$

слѣдовательно:

$$30(CD.FG)=12ABCDE=$$

(кн. 11, опред. 28) поверхности додекаедра.

Фиг. 541.



2) Проведемъ BD, DC (фиг. 542). Такъ какъ (кн. 1, пред. 41):

$$BC.DE=2\triangle DBC$$

то:

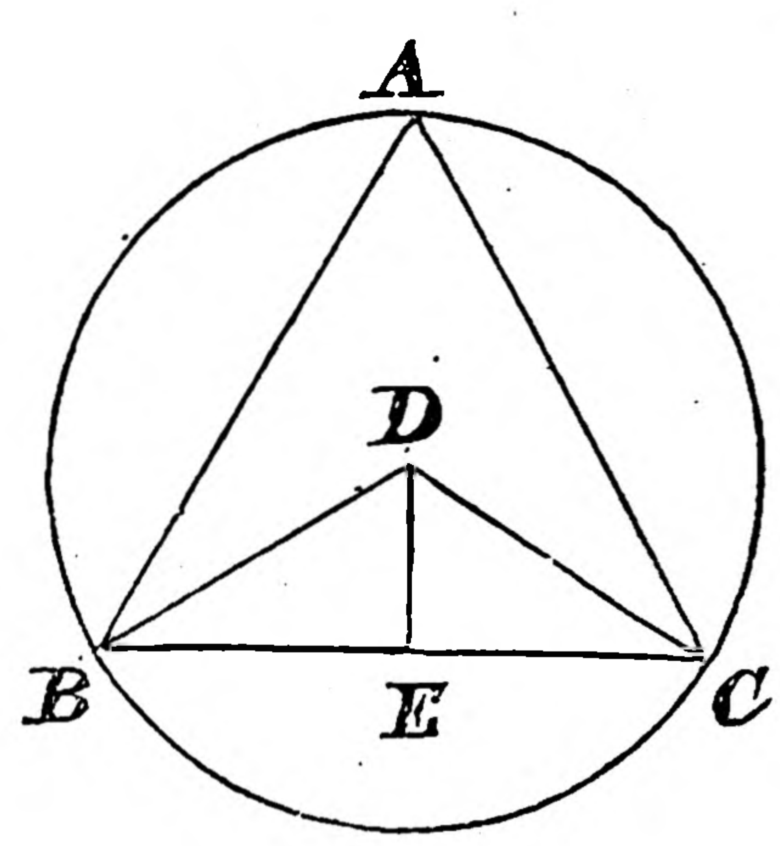
$$3(BC.DE)=6\triangle DBC=2\triangle ABC$$

слѣдовательно:

$$30(BC.DE)=20\triangle ABC=$$

(кн, 11, опред. 29) поверхности икосаедра.

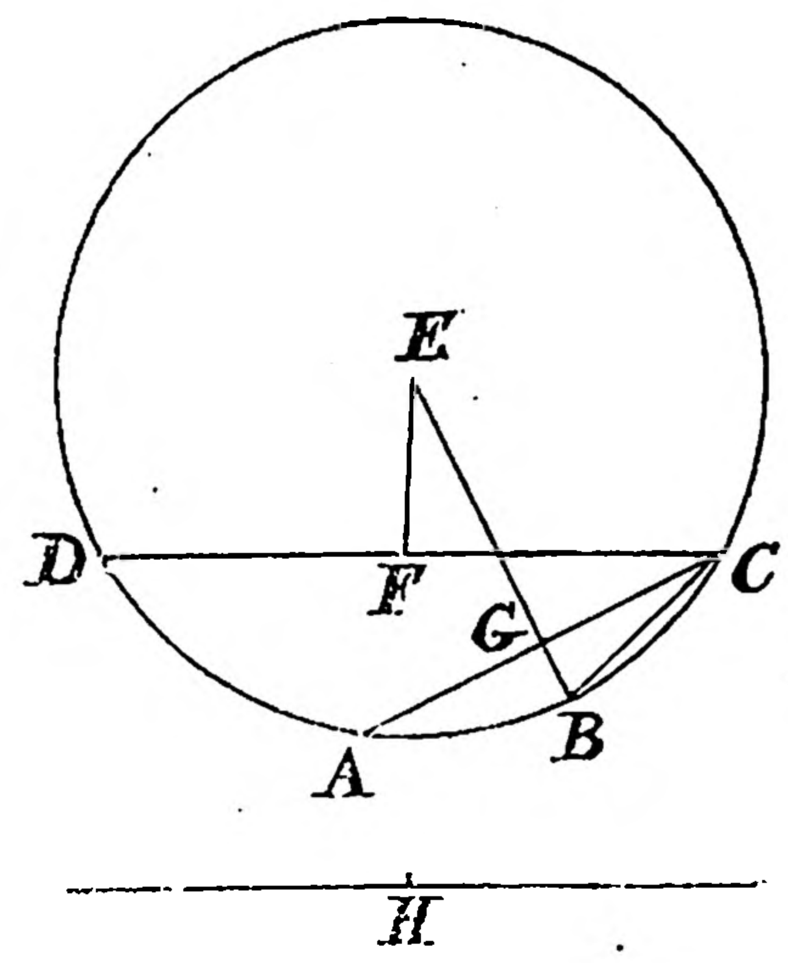
Фиг. 542.



Замѣчаніе. Отсюда слѣдуетъ, что поверхности, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ, додекаедра и икосаедра относятся между собою какъ вышеупомянутые прямоугольники.

Предложеніе 4. Поверхность додекаедра относится къ поверхности икосаедра, какъ сторона H куба къ сторонѣ DC икосаедра (фиг. 543).

Фиг. 543.



Доказат. Пусть въ кругѣ, описанномъ около точки E, вписаны пятисторонняя и трехсторонняя фигуры, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ додекаедра и икосаедра. Въ кругъ этотъ внесемъ сторону DC треугольной и сторону AC пятиугольной фигуры. Изъ центра E опустимъ перпендикуляры EF, EG, на стороны DC, AC, продолжимъ EG до B и проведемъ BC, сторону десятисторонней фигуры.

Если мы прямую линію, составленную изъ EB и BC раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 9) EB будетъ большій отрѣзокъ. Но (кн. 14, пред. 1):

$$2EG = EB + BC$$

и (кн. 13, пред. 12):

$$2EF = BE$$

Слѣдовательно, если $2EG$ раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 9) $2EF$ есть большій отрѣзокъ. Но если мы H раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то CA большій отрѣзокъ (кн. 13, пред. 17, слѣд.). Слѣдовательно (кн. 14, пред. 7):

$$H : CA = 2EG : 2EF = EG : EF$$

а потому (кн. 6, пред. 16):

$$H.EF = CA.EG$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$H : CD = H.EF : CD.EF$$

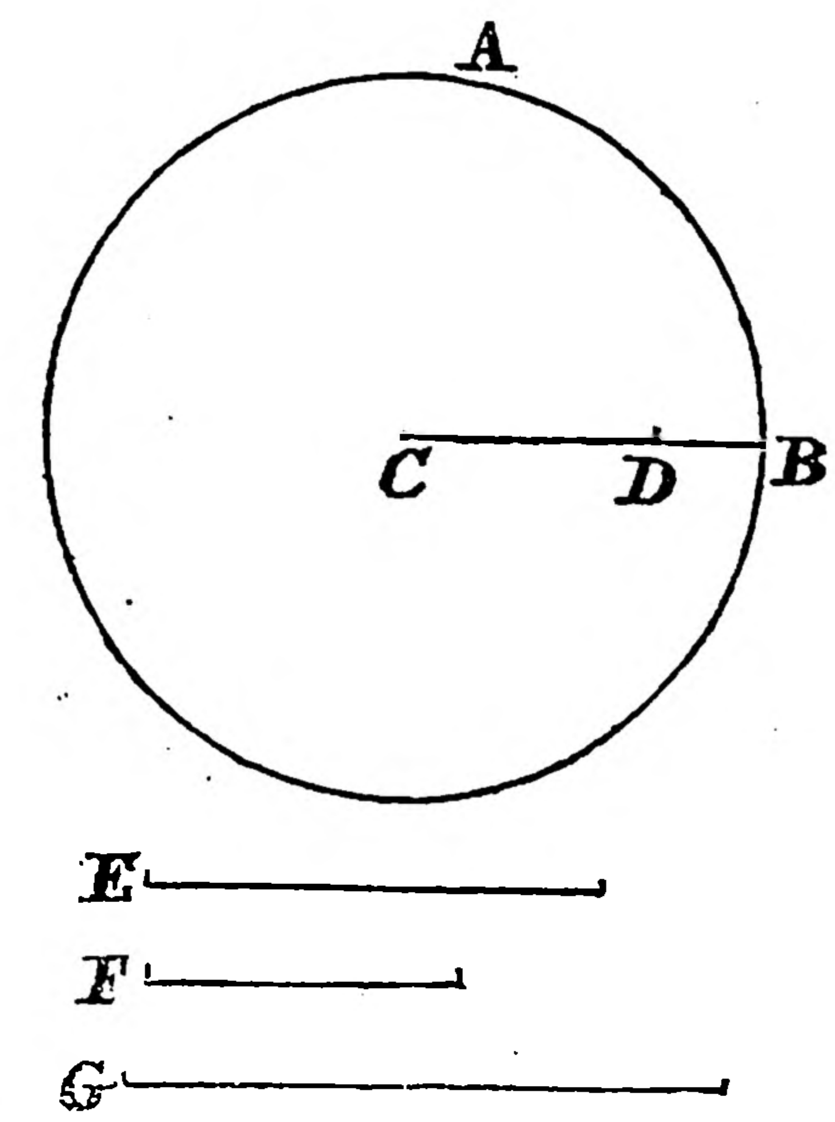
слѣдовательно:

$$H : CD = CA.EG : CD.EF$$

т. е. сторона куба относится къ сторонѣ икосаедра (кн. 14, пред. 3) какъ поверхность додекаедра къ поверхности икосаедра.

Предложеніе 5. Если какая нибудь прямая BC раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то сумма квадратовъ, построенныхъ на цѣлой прямой BC и большемъ отрѣзкѣ CD относится къ суммѣ квадратовъ построенныхъ на цѣлой BC и на меньшемъ отрѣзкѣ DB, какъ ребро G куба относится къ ребру E икосаедра (фиг. 544).

Фиг. 544.



Доказат. Пусть въ кругъ радіуса CB, вписаны пятисторонняя и трехсторонняя грани, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ додекаедра и икосаедра. Пусть CB раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 5 и пред. 9) большій отрѣзокъ CD будетъ сторона вписанной въ этотъ же кругъ десятисторонней фигуры. Пусть (кн. 13, пред. 18) E будетъ ребро икосаедра, F ребро додекаедра, а G ребро куба. Слѣдовательно E будетъ сторона треугольника, F сторона въ этотъ же кругъ вписаннаго пятиугольника, но F есть (кн. 13, пред. 17, слѣд.) большій отрѣзокъ, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, ребра G куба, а потому (кн. 13, пред. 12):

$$\square E = 3 \square CB$$

и (кн. 13, пред. 4):

$$\square CB + \square BD = 3 \square CD$$

слѣдовательно (кн. 14, пред. 7):

$$\square E : \square CB + \square BD = \square CB : \square CD = \square G : \square F$$

а потому также:

$$\square G : \square E = \square F : \square CB + \square BD$$

Но (кн. 13, пред. 10):

$$\square F = \square CB + \square DC$$

слѣдовательно:

$$\square G : \square E = \square BC + \square DC : \square CB + \square BD$$

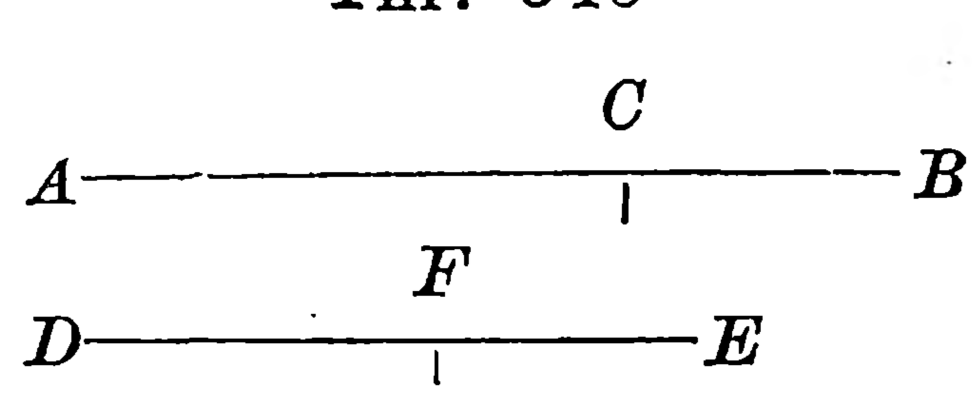
т. е. сторона G куба относится къ сторонѣ E икосаедра, какъ линія квадратящая $\square BC + \square DC$ къ линіи, квадратящей $\square CB + \square BD$.

Предложеніе 6. Объемъ додекаедра относится къ объему икосаедра, какъ сторона куба къ сторонѣ икосаедра.

Доказат. Такъ какъ (кн. 14, пред. 2) въ равные круги вписаны пятистороннія и трехстороннія грани, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ додекаедра и икосаедра, но равные круги на поверхности шара равно отстоятъ отъ центра шара, потому что перпендикуляры опущенные изъ центра на плоскости упомянутыхъ круговъ равны, а изъ этого слѣдуетъ что прямыя, проведенныя изъ центра шара къ центрамъ упомянутыхъ круговъ, равны и перпендикулярны. Слѣдовательно пирамиды, имѣющія общей вершиной центръ шара, а основаніями пятистороннія и трехстороннія грани додекаедра и икосаедра, равной высоты, а потому онѣ относятся между собою какъ площади ихъ основаній (кн. 12, пред. 5 и пред. 6). Слѣдовательно одна изъ пирамидъ додекаедра относится къ одной изъ пирамидъ икосаедра, какъ пятистороння грань къ трехсторонней; слѣдовательно отношеніе двѣнадцати пирамидъ додекаедра къ двадцати пирамидамъ икосаедра, равно отношенію двѣнадцати пятистороннихъ граней къ двадцати трехстороннимъ, т. е. объемъ додекаедра относится къ объему икосаедра, какъ поверхность додекаедра относится къ поверхности икосаедра, слѣдовательно и (кн. 14, пред. 4) какъ сторона куба къ сторонѣ икосаедра.

Предложеніе 7. Двѣ прямыя AB, DE, раздѣленныя въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, относятся между собою какъ ихъ большія отрѣзки AC, DF (фиг. 545).

Фиг. 545



Доказат. Такъ какъ (кн. 6, пред. 17):

$$AB.CB = \square AC$$

и

$$DE.FE = \square DF$$

слѣдовательно:

$$AB.CB : \square AC = DE.FE : \square DF$$

а потому (кн. 5, пред. 15):

$$4(AB.CB):\square AC = 4(DE.FE):\square DF$$

слѣдовательно:

$$4(AB.CB)+\square AC:\square AC = 4(DE.FE)+\square DF:\square DF$$

Но (кн. 2, пред. 8):

$$4(AB.BC)+\square AC = \square(AB+BC)$$

и

$$4(DE.EF)+\square DF = \square(DE+EF).$$

слѣдовательно:

$$\square(AB+BC):\square AC = \square(DE+EF):\square DF$$

а потому (кн. 6, пред. 22):

$$AB+BC:AC = DE+EF:DF$$

слѣдовательно:

$$AB+BC+AC:AC = DE+EF+DF:DF$$

т. е.:

$$2AB:AC = 2DE:DF$$

а потому также:

$$AB:AC = DE:DF$$

слѣдовательно:

$$AB:DE = AC:DF$$

Замѣчаніе. Если произвольную прямую раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то сумма квадратовъ, построенныхъ на цѣлой прямой и большемъ отрѣзкѣ относится къ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на цѣлой прямой и меньшемъ отрѣзкѣ какъ поверхность, или объемъ, додекаедра относится къ поверхности, или объему, икосаедра вписаннаго въ тотъ же шаръ.

КНИГА XV.

Книга пятая „О тѣлахъ“.

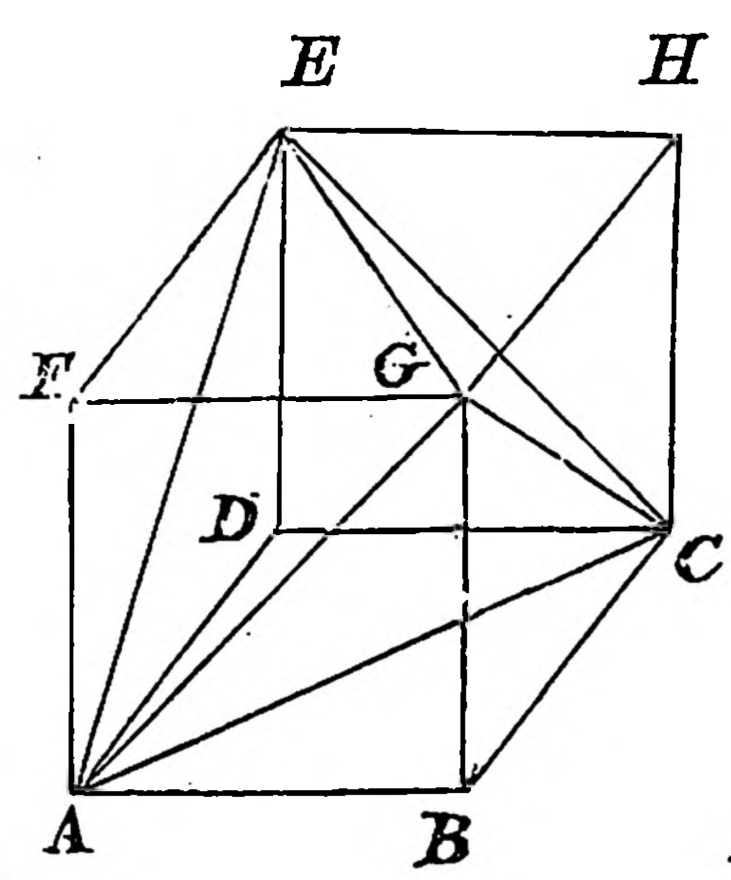
По мнѣнію нѣкоторыхъ приписываемая Гипсиклу Александрійскому.

Книга вторая „О пяти тѣлахъ.

Предложенія.

Предложеніе 1. Въ данный кубъ *AH* вписать тетраедръ (фиг. 546).

Фиг. 546.



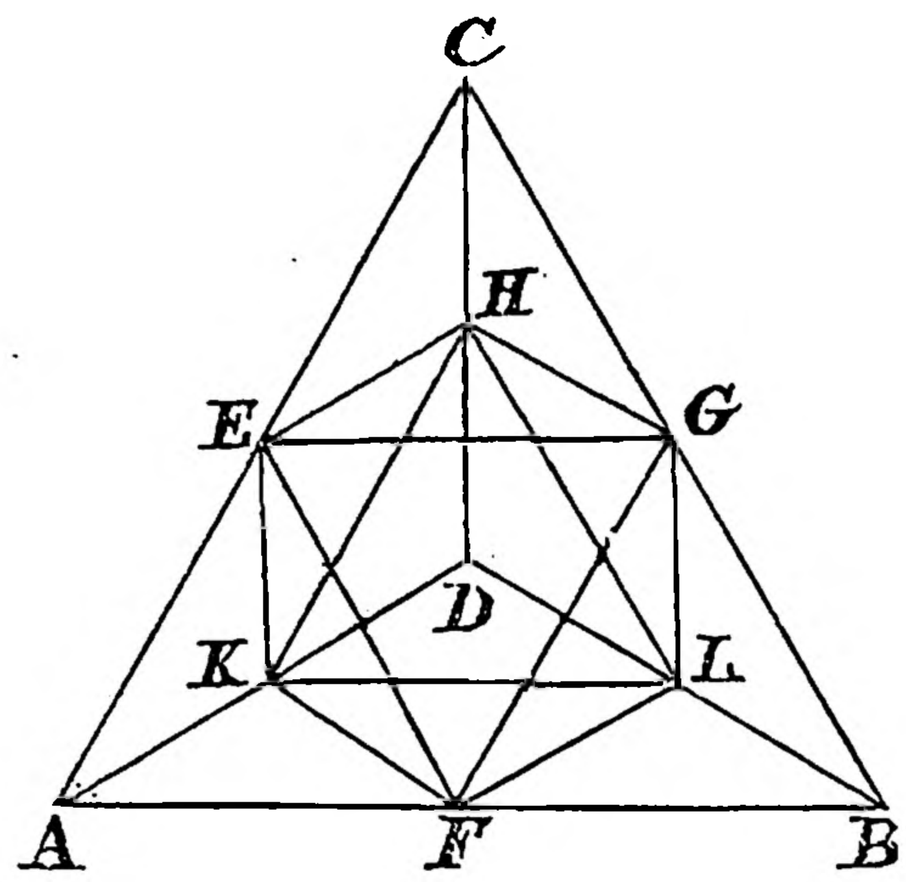
Доказат. Проведемъ во всѣхъ шести квадратахъ діагонали *AC*, *AE*, *CE*, *AG*, *EG*, *GC*, то очевидно треугольники *AEC*, *AGE*, *AGC*, *CGE* равносторонніе. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 26) *AECG* есть тетраедръ, вписанный въ кубъ, такъ какъ его вершины суть вершины куба.

Предложеніе 2. Въ данный тетраедръ *ABCD* вписать октаедръ (фиг. 547).

Доказат. Раздѣлимъ ребра тетраедра пополамъ въ точкахъ *E*, *F*, *G*, *H*, *K*, *L* и соединимъ эти точки между собою двѣнадцатью прямыми *HK*, *HL*, *EF*, *FG* и т. д., которыя всѣ равны между собою (кн. 1, пред. 4).

А потому всѣ восемь треугольниковъ, основанія которыхъ FG, GH, HK, KF, а вершины E, L, равносторонніе. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 27)

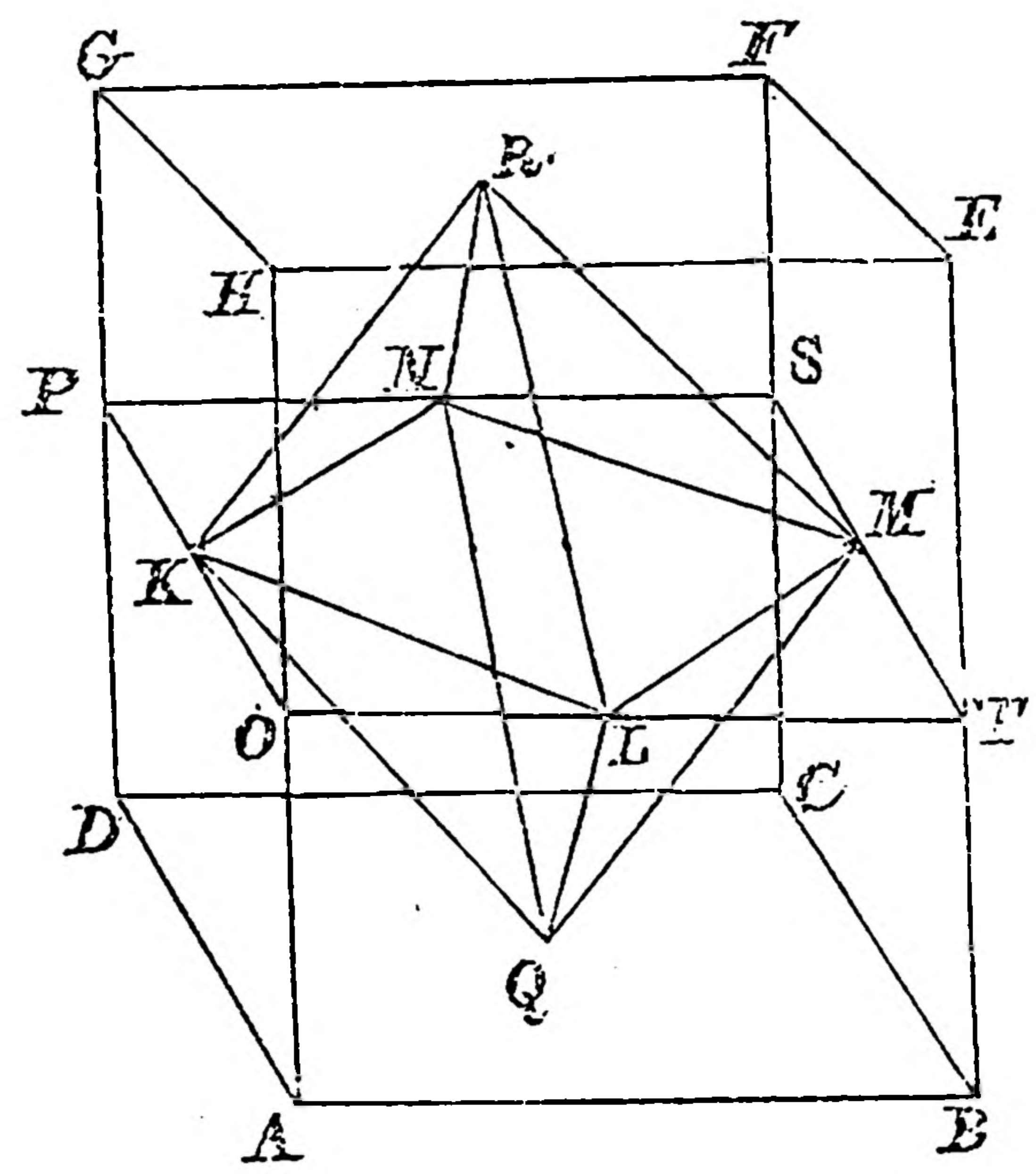
Фиг. 547.



тѣло EL есть октаедръ, вписанный въ тетраедръ, такъ какъ его вершины лежатъ на срединахъ реберъ тетраедра.

Предложеніе 3. Въ данный кубъ AF вписать октаедръ (фиг. 548).

Фиг. 548.

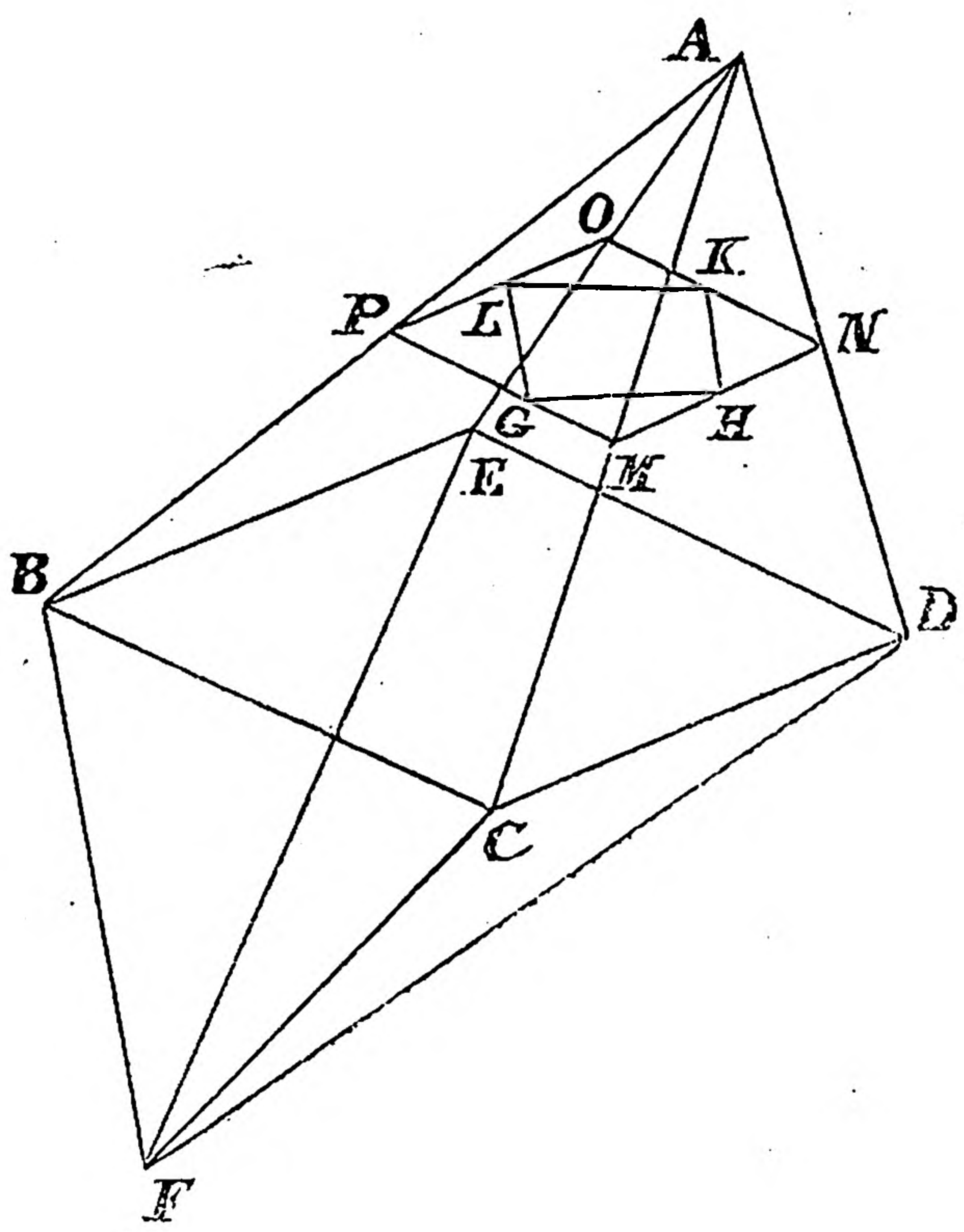


Доказат. Возьмемъ (кн. 4, пред. 8) средины квадратовъ K, L, M, N, Q, R и соединимъ эти точки двѣнадцатью прямыми KL, LM, RM, QM и т. д., то тѣло RQ, будетъ требуемый октаедръ.

Если мы проведемъ чрезъ точки K, L, M, N прямыя PO, OT, TS, SP, параллельныя сторонамъ основанія AC; то эти прямыя равны между собою и пересѣкаются, такъ какъ (кн. 4, пред. 8) OP, ST одну и ту же прямую DG, а OT, ST одну и ту же прямую BE дѣлятъ пополамъ. Слѣдовательно (кн. 11, пред. 10) $\angle KOL$, $\angle MTL$ суть прямые углы. Но KO, OL, LT, TM суть половины равныхъ между собою прямыхъ PO, OT, TS, а потому онѣ также равны. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) $KL = LM$. По той же причинѣ LK, KN, NM и остальныя прямыя также равны между собою. Слѣдовательно всѣ восемь треугольниковъ, основанія которыхъ *KL*, *LM*, *MN*, *NK* и коихъ вершины *R*, *Q* равносторонни. А потому (кн. 11, опред. 27) тѣло *RQ* есть октаедръ, вписанный въ кубъ, такъ какъ его вершины встрѣчаютъ средины сторонъ площадей куба.

Предложеніе 4. Въ данный октаедръ *AF* вписать кубъ (фиг. 549).

Фиг. 549.

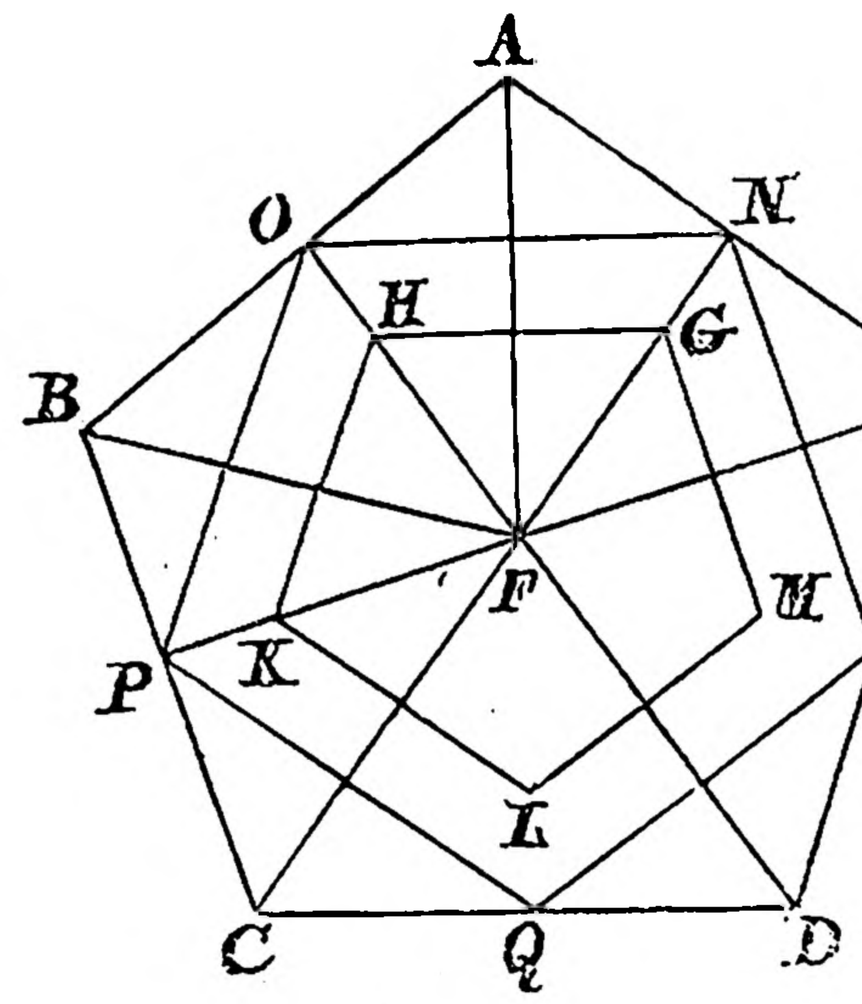


Доказат. Пусть *ABCDE* будетъ одна изъ шести четырехсторонних пирамидъ октаедра. Раздѣлимъ пополамъ ребра этой пирамиды въ точкахъ *M*, *N*, *O*, *P* и проведемъ прямыя *MN*, *NO*, *OP*, *PM*, которыя (кн. 1, пред. 4) равны другъ другу и (кн. 6, пред. 2) параллельны сторонамъ квадрата (кн. 13, пред. 14) *BCDE*, слѣдовательно (кн. 11, пред. 10) онѣ заключаютъ прямые углы. Изъ этого слѣдуетъ, что *MNOP* квадратъ. Раздѣлимъ пополамъ стороны этого квадрата въ точкахъ *G*, *H*, *K*, *L* и проведемъ *GH*, *HK*, *KL*, *LG*, которыя (кн. 1, пред. 4) равны другъ другу, и такъ какъ онѣ образуютъ (кн. 1, пред. 32) съ *MN*, *NO*, *OP*, *PM* половины прямыхъ угловъ, то (кн. 1, пред. 13) онѣ заключаютъ прямые углы. Изъ этого слѣдуетъ, что *GHKL* квадратъ. Подобнымъ же образомъ, какъ съ пирамидой *ABCDE*, поступимъ и съ остальными пятью парамидами октаедра, мы получимъ еще пять квадратовъ, равныхъ квадрату *GHKL*, и которыя вмѣстѣ съ нимъ составляютъ кубъ, вписанный въ октаедръ, такъ какъ его вершины касаются площадей октаедра.

Предложеніе 5. Въ данный икосаедръ вписать додекаедръ (фиг. 550).

Доказат. Пусть *ABCDEF* будетъ одна изъ двѣнадцати пятисторонних пирамидъ икосаедра. Возьмемъ (кн. 4, пред. 5) центры *G*, *H*, *K*, *L*, *M*, круговъ описанныхъ около треугольниковъ и соединимъ эти точки прямыми, то $GHKLM$ будетъ пятисторонняя фигура съ равными сторонами и равными углами.

Фиг. 550.



Въ самомъ дѣлѣ, если мы проведемъ FG, FH, FK и т. д. и продолжимъ ихъ, то онѣ раздѣлятъ пополамъ (кн. 3, пред. 4) углы при F, слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) и основанія въ точкахъ N, O, P, и т. д. Проведя прямыя NO, OP, то онѣ (кн. 1, пред. 4) равны другъ другу. Но (кн. 1, пред. 4) $FN=FO=FP$ и (кн. 1, пред. 26 и кн. 3, пред. 4) $FG=FH=$ $=FK$, слѣдовательно (кн. 6, пред. 2) GH, HK параллельны NO, OP; слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$NO : GH = OP : HK$$

а потому, такъ какъ $NO=OP$, то $GH=HK$. По той же причинѣ $HK=KL$ и т. д. Слѣдовательно фигура $GHKLM$ равносторонняя, но она и равноугольная, потому что (кн. 11, пред. 10) $\angle HGK=\angle NOP$, $\angle HKL=\angle OPQ$ и т. д., и (кн. 1, пред. 13) $\angle NOP=\angle OPQ$ и т. д.

Эта фигура находится въ одной плоскости. Такъ какъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки F на плоскость фигуры $ABCDE$, встрѣчаетъ ея средину, и всѣ прямыя проведенныя изъ этого центра къ N, O, P, Q, R составляютъ (кн. 11, пред. 4) прямые углы съ упомянутымъ перпендикуляромъ. Проведемъ чрезъ точку G прямую параллельную прямой проведенной чрезъ точку N, а изъ точки, въ которой она встрѣчаетъ перпендикуляръ, проведемъ прямыя къ H, K, L, M; то этотъ перпендикуляръ разсѣкается параллельными прямыми въ отношеніи:

$$FN : FG = FO : FH$$

и т. д. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 2) прямыя проведенныя чрезъ G, H и т. д. параллельны прямымъ проведеннымъ чрезъ A, B и т. д., и онѣ дѣлаютъ съ перпендикуляромъ прямые углы, а слѣдовательно (кн. 11, пред. 5) онѣ лежатъ въ одной плоскости.

Если также поступимъ съ остальными одинадцатью пирамидами икосаедра, какъ мы поступили съ пирамидой *ABCDEF*, то мы получимъ еще одинадцать пятистороннихъ фигуръ съ равными сторонами, которыя равны фигурѣ *GHKLM*, и которыя вмѣстѣ съ ней ограничиваютъ додекаедръ, вписанный въ икосаедръ, потому что его вершины касаются граней икосаедра.

Предложеніе 6. Найти число реберъ и вершинъ въ пяти тѣлахъ.

1. Найти число реберъ?

Умножимъ число граней, ограничивающихъ тѣло, на число сторонъ этой грани и произведеніе раздѣлимъ на два.

Такъ напр., икосаедръ ограниченъ двадцатью треугольниками, а каждый треугольникъ ограниченъ тремя сторонами, это даетъ шестьдесятъ реберъ; но каждыя двѣ грани даютъ одно и то же ребро тѣла, слѣдовательно икосаедръ имѣетъ только тридцать реберъ.

2. Найти число вершинъ?

Умножимъ число граней ограничивающихъ тѣло на число плоскихъ угловъ каждой грани и произведеніе раздѣлимъ на число угловъ, составляющихъ одну вершину.

Такъ напр. икосаедръ ограниченъ двадцатью треугольниками, изъ коихъ каждый имѣетъ три угла, это даетъ шестьдесятъ плоскихъ угловъ; но пять изъ нихъ образуютъ одну вершину тѣла, слѣдовательно икосаедръ имѣетъ двѣнадцать вершинъ.

Предложеніе 7. Задача. Найти наклоненія плоскостей въ пяти тѣлахъ.

Рѣшеніе. Согласно нашему великому учителю *Исидору* эти наклоненія опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

1. Въ кубѣ, плоскости его ограничивающія пересѣкаются подъ прямыми углами, что само по себѣ ясно.

2. Для тетраедра, опишемъ круги, изъ оконечностей одной изъ сторонъ одного изъ треугольниковъ, ограничивающихъ тетраедръ, радіусомъ равнымъ высотѣ треугольника, то прямыя линіи, проведенныя отъ точекъ пересѣченія этихъ круговъ къ оконечностямъ упомянутой стороны, заключаютъ искомый уголъ наклоненія.

3. Для октаедра, на сторонѣ одного изъ ограничивающихъ треугольниковъ построимъ квадратъ, проведемъ въ немъ діагональ, изъ оконечностей этой діагонали опишемъ круги радіусомъ равнымъ высотѣ треугольника, то прямыя соединяющія точки пересѣченія обоихъ круговъ съ концами прямой будутъ заключать уголъ, который дополняетъ искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ.

4. Для икосаедра, опишемъ на одной изъ сторонъ, ограничивающихъ его треугольниковъ, пятистороннею фигуру съ равными сторонами, прове-

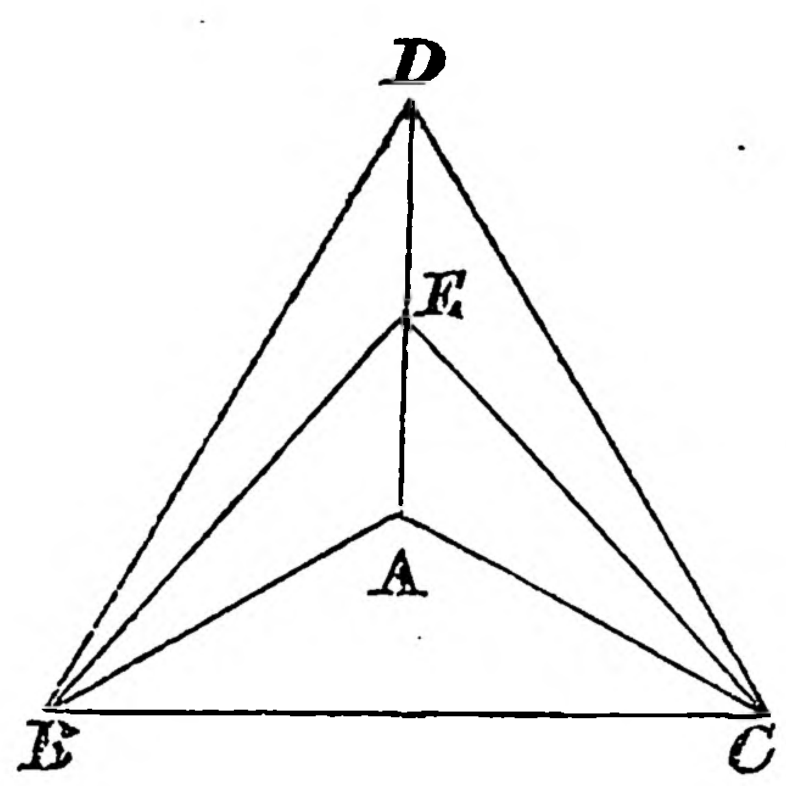
эмъ въ ней діагональ, и изъ ея концевъ опишемъ круги, радіусами рав-
ыми высотѣ треугольника, то прямыя проведенныя изъ точекъ пересѣче-
я этихъ круговъ къ концамъ прямой составятъ уголъ, дополняющій ис-
)мый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ.

5. Для додекаедра, проведемъ въ одной изъ пятисторонних фигуръ агональ, изъ ея концевъ опишемъ круги, радіусомъ равнымъ перпенди-
/ляру, опущенному изъ средины діагонали на параллельную ей сторону игуры; то прямыя проведенныя изъ точекъ пересѣченія обоихъ круговъ ь оконечностямъ проведенной прямой, составятъ уголъ, дополняющій ис-
)мый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ.

Вышеизложеннымъ образомъ этотъ, въ высшей степени замѣчательный, еловѣкъ рѣшилъ задачу, такъ какъ рѣшеніе каждой части задачи казалась іу очевидна. Но чтобы сдѣлать яснѣе вышеприведенныя правила я ихъ ıложу каждое отдѣльно одно послѣ другаго.

Доказат. 1. Пусть $ABCD$ будетъ тетраедръ, коего основаніе ABC, вершина D. Раздѣлимъ пополамъ одно изъ реберъ AD въ точкѣ E и)оведемъ BE, EC (фиг. 551).

Фиг. 551.



Такъ какъ $AB=BD$, $AE=ED$ и BE общая; то (кн. 1, пред. 8) $\angle BED=\angle BEA=d$, а потому BE, EC перпендикулярны къ AD. Такъ акъ $AC=2AE$, то:

$$\square AC=4\square AE$$

Но (кн. 1, пред. 47):

$$\square AC=\square AE+\square EC$$

лѣдовательно:

$$\square AC:\square EC=4:3$$

о $EC=EB$ а потому:

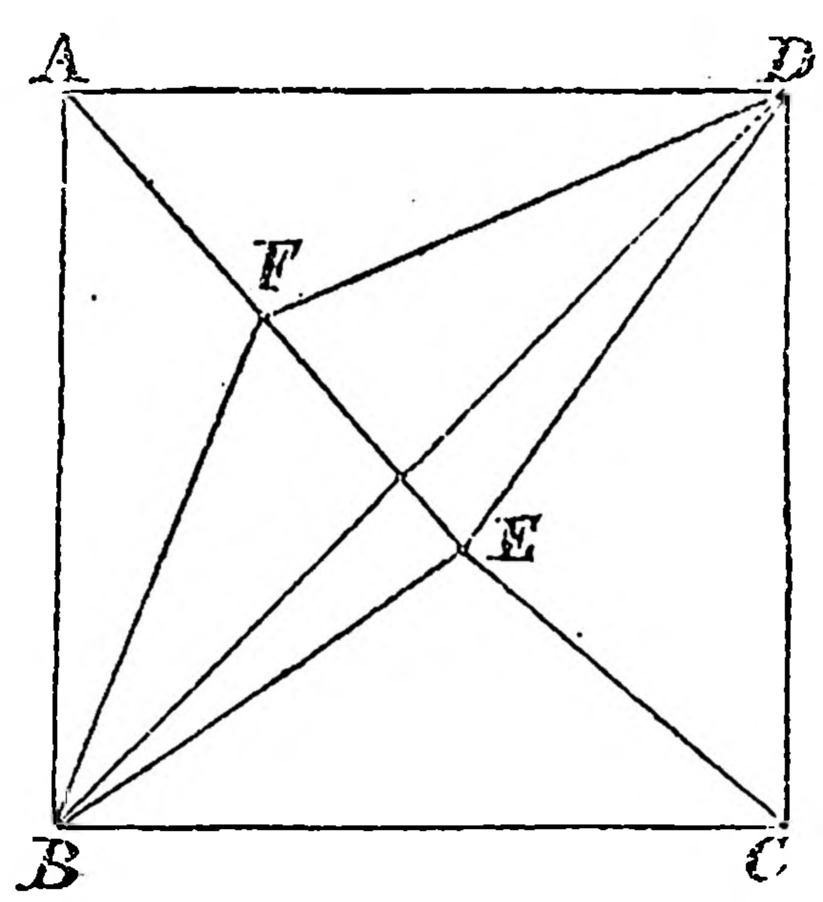
$$\square BC<\square BE+\square EC$$

іѣдовательно (кн. 2, пред. 13) BEC есть острый уголъ, а потому кн. 11, опред. 6) это есть уголъ наклоненія плоскостей тетраедра.

Этотъ уголъ наклоненія BEC данъ, такъ какъ даны сторона BC треугольника и перпендикуляры EB, EC. Если мы теперь опишемъ круги изъ концевъ стороны BC, радіусомъ равнымъ перпендикуляру BE, и пусть эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ E, то прямыя проведенныя изъ точки пересѣченія E къ каждому изъ концевъ B, C будутъ заключать уголъ наклоненія плоскостей. Что упомянутые круги пересѣкаются въ точкѣ E очевидно. Такъ какъ каждая изъ BE, $EC > \frac{1}{2}BC$. Но круги описанныя радіусомъ равнымъ $\frac{1}{2}BC$, изъ концевъ прямой, касались бы; описанные же радіусомъ $< \frac{1}{2}BC$ не касались бы, и не пересѣкались. Но такъ какъ $BE > \frac{1}{2}BC$, то круги необходимо должны пересѣчься.

2. Пусть половина октаедра будетъ пирамида, коей площадь основанія $ABCD$, а вершина E (фиг. 552). Пусть одно изъ реберъ AE раздѣ-

Фиг. 552.



лено пополамъ въ F, проведемъ BF, FD, которыя равны и перпендикулярны къ AE. Проведемъ BD. Такъ какъ $ABCD$ квадратъ, коего діагональ BD, то:

$$\square BD = 2\square DA$$

Но по предъидущему:

$$\square DA : \square DF = 4 : 3$$

слѣдовательно:

$$\square BD : \square DF = 8 : 3$$

но $DF = FB$, а потому:

$$\square BD > \square BF + \square FD$$

слѣдовательно (кн. 2, пред. 12) BFD тупой уголъ, а потому (кн. 11, опред. 6) это есть дополненіе угла наклоненія плоскостей октаедра до двухъ прямыхъ угловъ.

Уголъ этотъ BFD данъ, такъ какъ даны сторона треугольника AD, а потому и $\square AD$, также его діагональ BD и перпендикуляры BF, FD. Построимъ на сторонѣ AD квадратъ, проведемъ діагональ BD, и опишемъ изъ ея концевъ круги перпендикуляромъ BF, которые пересѣкутся въ F, то прямыя проведенныя изъ F къ B и D будутъ заключать уголъ BFD, дополняющій искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ. Здѣсь также очевидно, что упомянутые круги пересѣкутся въ точкѣ F, такъ какъ $BF > \frac{1}{2} BD$. Но на основаніи предъидущаго доказательства:

$$\square BD : \square DF = 8 : 3$$

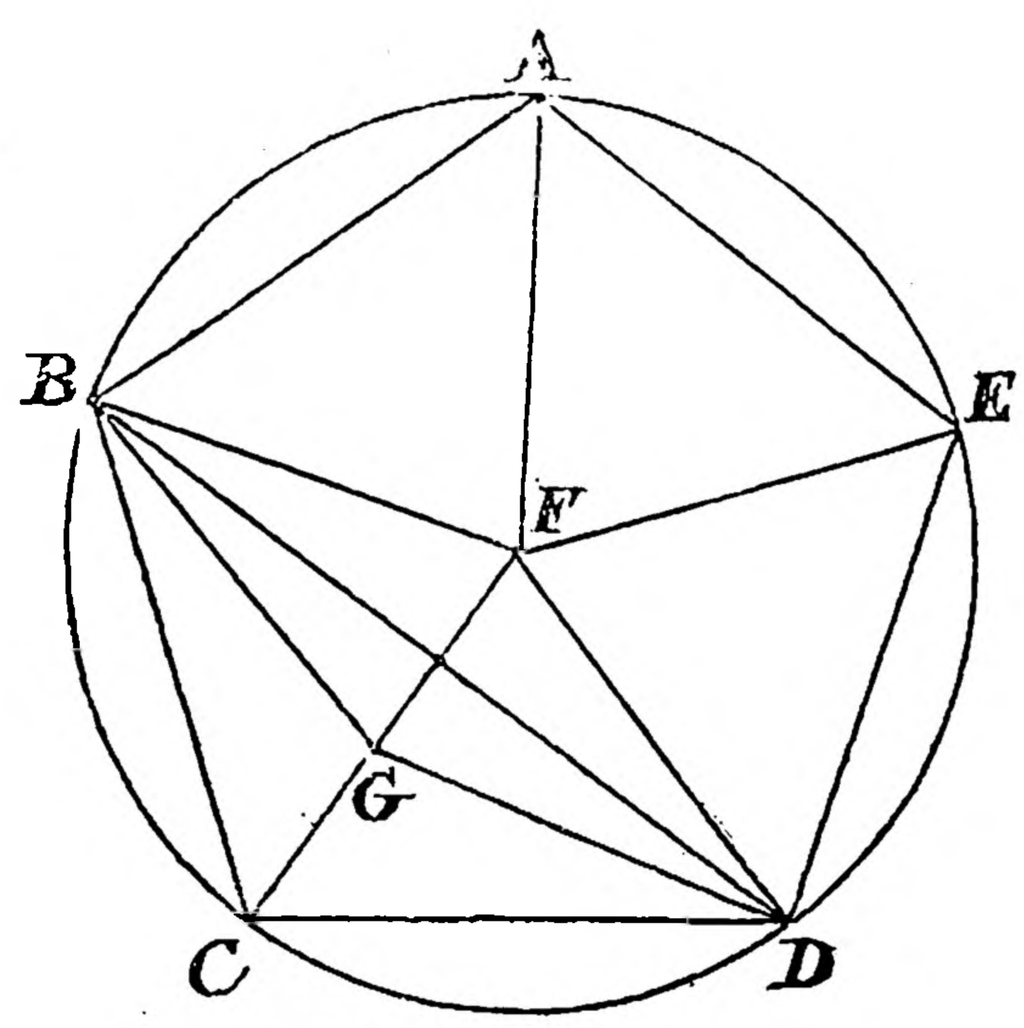
и (кн. 6, пред. 20):

$$\square BD = 4 \square \tfrac{1}{2} BD$$

слѣдовательно $BF > \frac{1}{2} BD$.

3. Пусть часть икосаедра будетъ пирамида, коей основаніе пятисторонняя фигура $ABCDE$ съ равными сторонами, а вершина F (фиг. 553).

Фиг. 553.



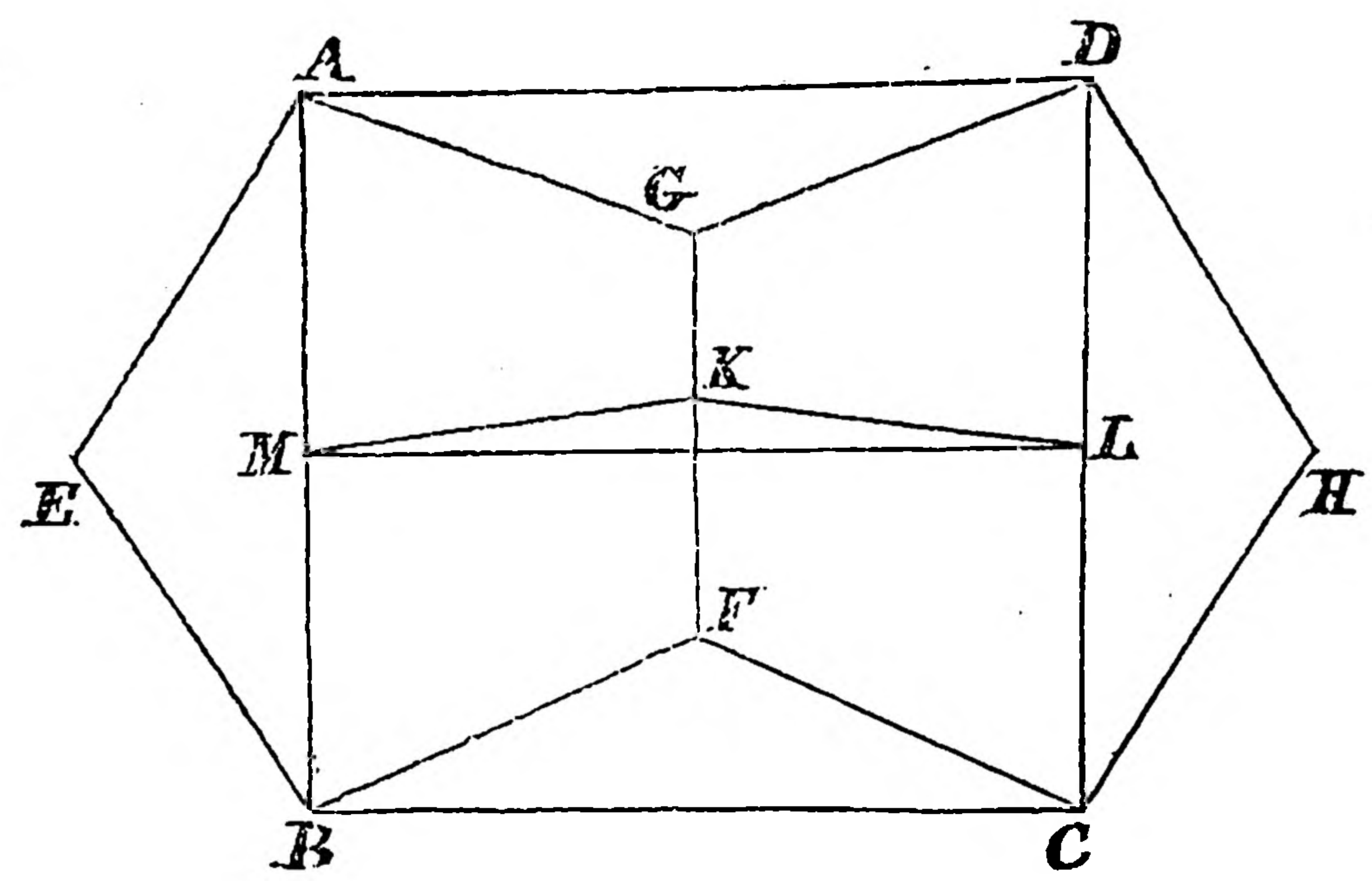
Раздѣлимъ одно изъ реберъ CF пополамъ, въ точкѣ G, и проведемъ BG, GD; эти послѣднія прямыя равны и перпендикулярны къ CF. Проведемъ діагональ BD, противолежащую тупому углу BCD, то $BG > BC$, а также $GD > CD$, слѣдовательно $\angle BGD > \angle BCD$. А потому необходимо BGD тупой уголъ, слѣдовательно (кн. 11, опред. 6) этотъ уголъ дополняетъ до двухъ прямыхъ угловъ уголъ наклоненія плоскостей икосаедра.

Этотъ уголъ BGD данъ, такъ какъ даны, сторона BC пятисторонней фигуры, а потому даны діагональ BD и перпендикуляръ BG. Если мы теперь построимъ на сторонѣ BC пятистороннею фигуру, съ равными сторонами, проведемъ діагональ BD, и изъ ея оконечностей опишемъ круги радіусомъ равнымъ BG; круги эти пересѣкутся въ точкѣ G, такъ какъ и здѣсь $BG > \frac{1}{2} BD$. Прямыя проведенныя изъ G къ B и D будутъ заключать уголъ BGD, дополняющій искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ.

4. Пусть $ABCD$ будетъ квадратъ куба, коимъ описанъ (кн. 13, пред. 17) додекаедръ и пусть $AEBFG$, $GDHCF$ двѣ грани додекаедра (фиг. 554). Раздѣлимъ пополамъ FG въ точкѣ K, и въ точкѣ K прямой FG возставимъ перпендикуляры KM, KL, лежащіе въ обѣихъ упомянутыхъ плоскостяхъ, проведемъ ML. Такъ какъ при построеніи ико-

саедра (кн. 13, пред. 17) было доказано, что перпендикуляръ, опущенный изъ точки K на плоскость квадрата $ABCD$, равенъ половинѣ стороны

Фиг. 554.



пятисторонней фигуры, а потому онъ $< \frac{1}{2} ML$; изъ этого слѣдуетъ, что уголъ MKL тупой. Мы также доказали, въ приведенномъ предложеніи, что KL квадратитъ надъ квадратами построенными на половинѣ стороны куба и стороны пятисторонней фигуры. Слѣдовательно $KL > \frac{1}{2} ML$, а потому (кн. 11, опред. 6) уголъ MKL есть дополненіе искомаго угла наклоненія до двухъ прямыхъ.

Этотъ уголъ MKL данъ. Такъ какъ сторона квадрата AD соединяетъ концы двухъ сторонъ пятисторонней фигуры, а если пятисторонняя фигура дана, то и ML также дана; также даны MK, KL, такъ какъ онѣ суть перпендикуляры, опущенные изъ средины діагонали AB, на сторону FG ей параллельную. Если мы опишемъ круги изъ концевъ прямой ML, радіусомъ MK, то эти круги пересѣкутся въ точкѣ K, такъ какъ $KM > \frac{1}{2} ML$. Прямыя проведенныя изъ точки пересѣченія K къ упомянутымъ концамъ будутъ заключать уголъ MKL, дополняющій искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ.

Примѣч. 1. Послѣ построенія правильныхъ многоугольниковъ древніе геометры должны были занятся построеніемъ правильныхъ многогранниковъ, изъ нихъ, насколько намъ извѣстно, былъ первый Платонъ, который показалъ, что есть только пять правильныхъ многогранниковъ и что каждый изъ нихъ можетъ быть вписанъ въ шаръ. Доказательство это приведено въ текстѣ (кн. 13, пред. 18, замѣч.) Евклида, но можно доказать это свойство въ болѣе общей формѣ:

Теорема. Существуетъ только пять выпуклыхъ многогранниковъ, коихъ грани имѣютъ одно и тоже число сторонъ n и коихъ многогранные углы имѣютъ одно и тоже число реберъ m.

Доказат. Въ самомъ дѣлѣ, каждое ребро принадлежитъ двумъ гранямъ, слѣдовательно, соединяя двѣ вершины, найдемъ:

$$2A=nF=mS \tag{1}$$

гдѣ A есть число реберъ, F число граней, а S число вершинъ многогранника. Но мы въ прибавленіи VIII покажемъ, что между A, F и S существуетъ слѣдующая зависимость:

$$A+2=F+S \tag{2}$$

исключая A и S изъ уравненій (1) и (2) найдемъ:

$$F=\frac{4m}{2(m+n)-mn} \tag{3}$$

Если $n=3$, то уравненіе (3) сдѣлается:

$$F=\frac{4m}{6-m}$$

Изъ этой послѣдней формулы видно, что m можетъ получить только три значенія $m=3$, $m=4$ и $m=5$, этимъ значеніямъ соотвѣтствуютъ три значенія для F, именно:

$$F=4,\ F=8,\ F=20$$

Для $n=4$, и $n=5$, мы имѣемъ:

$$F=\frac{2m}{4-m} \quad \text{и} \quad F=\frac{4m}{10-3m}$$

Въ обоихъ этихъ случаяхъ числу m можно дать только одно значеніе $m=3$, что даетъ:

$$F=6 \quad \text{и} \quad F=12$$

Если $n=6$, то:

$$F=\frac{m}{3-m}$$

откуда видно, что при $n=6$, число m не можетъ имѣть никакого значенія, а тѣмъ болѣе для $n>6$.

Изъ этого слѣдуетъ, что существуетъ только пять многогранниковъ, имѣющихъ грани съ одинаковымъ числомъ сторонъ и многогранные углы съ одинаковымъ числомъ реберъ.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

VIII. О многогранникахъ.

1. Послѣ сдѣланнаго замѣчанія къ 10 опредѣленію, XI книги, относительно равенства и подобія многогранниковъ, я здѣсь изложу подробно общія ихъ свойства, условія ихъ равенства и подобія.

2. Многогранникъ называется *выпуклымъ* если онъ весь находится по одну сторону каждой его грани, продолженной неопредѣленно. Въ противномъ случаѣ онъ называется *вогнутымъ*.

3. Самый простой многогранникъ есть *тетраедръ—четырехсторонникъ*. Онъ ограниченъ четырмя плоскостями, каждая его сторона есть треугольникъ. Слѣдовательно тетраедръ имѣетъ четыре *грани*, четыре *трегранные* угла и шесть *реберъ*.

Условія равенства тетраедровъ.

4. Два тетраедра равны когда имѣютъ по одному равному двугранному углу, заключенному между равными, каждая каждой и подобно расположенными гранями.

Доказат. Это предложеніе доказывается наложеніемъ одного тетраедра на другой.

5. Два тетраедра равны когда имѣютъ по одной равной грани прилежащей тремъ равнымъ, каждый каждому, двуграннымъ угламъ.

Доказат. Также доказывается наложеніемъ.

6. Два тетраедра равны когда имѣютъ по три равныя, каждая каждой грани и подобно расположенныя.

Доказат. Доказывается наложеніемъ, замѣтивъ, что трегранные углы равны вслѣдствіе равенства граней.

7. Наконецъ, два тетраедра равны когда имѣютъ по шести равныхъ реберъ каждое каждому.

Доказат. Вслѣдствіе равенства реберъ и грани равны, а за тѣмъ и всѣ трегранные углы равны.

Каждая изъ этихъ четырехъ теоремъ заключаетъ шесть условій необходимыхъ и достаточныхъ для равенства тетраедровъ.

Первая. Двѣ равныя грани, т. е. двѣ пары равныхъ треугольниковъ заключаютъ шесть условій, но эти треугольники заключаютъ равный двугранный уголъ, слѣдовательно имѣютъ одну общую сторону, слѣдовательно всего пять условій, да еще двугранные углы равны—это шестое условіе.

Вторая. Одна грань одного равна одной грани другаго, т. е. пара равныхъ треугольниковъ—это даетъ три условія, и эти треугольники каждый прилежитъ къ тремъ равнымъ, каждый каждому, двуграннымъ угламъ—еще три условія, слѣдовательно всего шесть.

Третяя. Три грани одного тетраедра равны тремъ гранямъ другаго, т. е. имѣютъ три пары равныхъ треугольниковъ, слѣдовательно девять условій, но изъ нихъ три повторяются, слѣдовательно всего опять шесть.

Четвертая. Шесть условій, именно, столько сколько есть реберъ. Мы увидимъ дальше, что для равенства многогранниковъ всегда необходимо и достаточно условій числомъ столько, сколько реберъ въ многогранникѣ.

8. *Предлож.* Два многогранника равны, когда они состоятъ изъ одинаковаго числа равныхъ, каждый каждому и подобно расположенныхъ тетраедровъ.

Доказат. Замѣтимъ сначала, что всякій выпуклый многогранникъ можетъ быть разложенъ на тетраедры имѣющіе общую вершину.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ внутри многогранника точку O и соединимъ эту точку прямыми со всѣми вершинами многогранника. Такъ какъ многогранникъ выпуклый, то каждая изъ этихъ прямыхъ будемъ имѣть съ многогранникомъ только одну общую точку—это вершину, въ которую проведена прямая. Слѣдовательно прямыя исходящія изъ точки O и оканчивающіяся въ вершинахъ какой нибудь грани образуютъ пирамиду, имѣющую эту грань основаніемъ и вершину въ точкѣ O. Пусть многогранникъ разложенъ на пирамиды, коихъ вершины лежатъ въ точкѣ O, а основанія суть грани многогранники, но каждая изъ пирамидъ разлагается на тетраедры, слѣдовательно и т. д.

Замѣтимъ теперь, что всякій вогнутый многогранникъ можно разбить плоскостями, извѣстнымъ образомъ выбранными, на выпуклые многогранники, слѣдовательно каждый многогранникъ можетъ быть разложенъ на тетраедры.

Пусть теперь, два многогранника P и P' будутъ составлены изъ одинаковаго числа равныхъ, каждый каждому, и одинаково расположенныхъ тетраедровъ. Я говорю, что эти два многогранника равны.

Нанесемъ многогранникъ P' на P такъ чтобы первый тетраедръ A' совмѣстился съ равнымъ ему тетраедромъ A. Пусть B' будетъ тетраедръ, имѣющій общую грань съ тетраедромъ A' и пусть B будетъ соотвѣтственный B'. Эти два тетраедра равны, имѣютъ общую грань и лежатъ по одну и туже сторону этой грани, слѣдовательно должны совмѣститься. Точно также должны совмѣститься и слѣдующіе тетраедры.

Подобіе многогранниковъ.

9. Пусть будетъ тетраедръ $SABC$, коего ребра суть a, b, c, d, e, f.

Начиная съ вершины S на ребрахъ SA, SB, SC отложимъ $SA'=md$, $SB'=me$, $SC'=mf$, чрезъ точки A', B', C' проведемъ плоскость $A'B'C'$. Такимъ образомъ получимъ тетраедръ $S'A'B'C'$, коего ребра будутъ ma, mb, mc, md, me, mf.

10. Говорятъ, что два тетраедра *подобны*, когда ребра перваго изъ нихъ пропорціональны ребрамъ втораго и подобно расположенны.

11. Два многогранника подобны когда они составлены изъ одного и того же числа тетраедровъ подобныхъ, каждый каждому, и подобно расположенныхъ.

12. Изъ этихъ двухъ опредѣленій слѣдуетъ, что:

1) Два тетраедра имѣютъ грани подобныя, каждая каждой, и подобно расположенныя, двугранные и трегранные углы равны.

2) Два тетраедра подобные порознь третьему подобны и между собою.

3) Два многогранника подобные порознь третьему подобны и между собою.

13. *Предлож.* Два тетраедра подобны, когда имѣютъ по одной подобной грани и равные двугранные углы, прилежащіе этой грани, каждый каждому, и подобно расположенные.

Доказат. Доказать это такъ легко, что можно оставить читателю.

14. *Предлож.* Два тетраедра подобны, когда имѣютъ пять равныхъ двугранныхъ угловъ, каждый каждому, и подобно расположенныхъ.

Доказат. Тоже замѣчаніе, что и выше.

15. *Предлож.* Два подобные многогранника имѣютъ сходственныя грани подобныя, двугранные и многогранные углы равные каждый каждому.

Доказат. Разсмотримъ сначала выпуклый многогранникъ P. Разобьемъ этотъ многогранникъ на тетраедры, имѣющіе общую вершину въ точкѣ O, взятой внутри многогранника P.

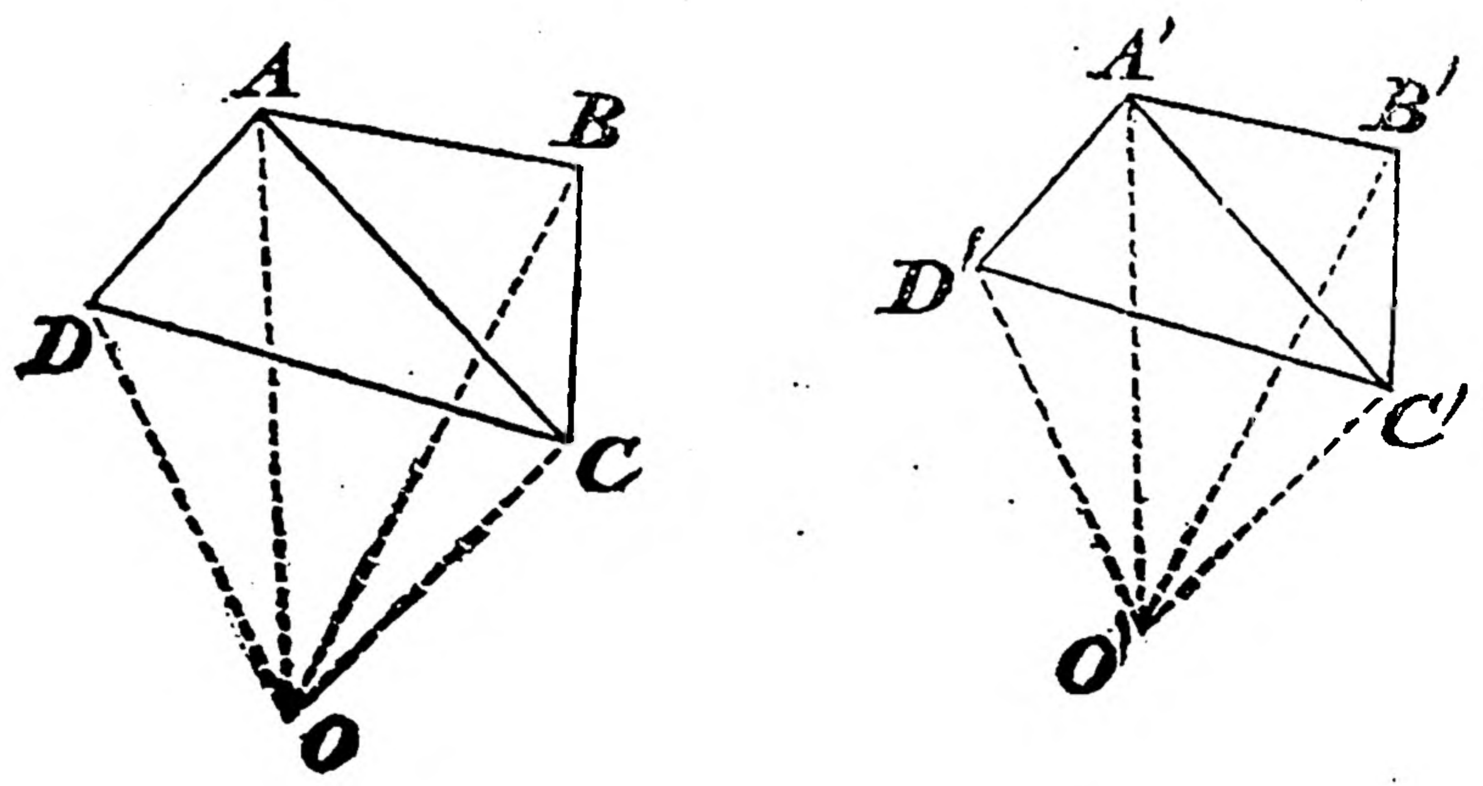
Возьмемъ, какую нибудь точку O' и построимъ систему тетраедровъ, имѣющихъ общую вершину въ точкѣ O', подобныхъ и подобно расположенныхъ тетраедрамъ составляющимъ многогранникъ P. Такимъ образомъ мы построимъ многогранникъ P' подобный P. *Сходственными вершинами* въ этихъ многогранникахъ мы назовемъ тѣ, которыя будутъ сходственными въ соотвѣтственныхъ тетраедрахъ. *Сходственными ребрами* точно также мы назовемъ сходственныя въ соотвѣтственныхъ тетраедрахъ.

Во первыхъ очевидно, что поверхности многогранниковъ P и P' составлены изъ одного числа треугольниковъ подобныхъ, каждый каждому, и расположенныхъ одинаково.

Во вторыхъ, если два или болѣе треугольника многогранника P лежатъ въ одной плоскости и составляютъ одну грань его, то сходственные имъ треугольники въ P' будутъ также лежать въ одной плоскости и составятъ одну грань P', слѣдовательно многогранники P и P' будутъ составлены изъ одного числа граней подобныхъ каждая каждой.

Въ самомъ дѣлѣ, двугранный уголъ, коего ребро есть AC, а грани BAC и OAC равенъ двугранному углу $B'A'C'O'$, въ силу подобія тетраедровъ $BACO$ и $B'A'C'O'$. Точно также двугранный уголъ $OACD$ равенъ своему соотвѣтственному $O'A'C'D'$. Слѣдовательно, если два треугольника BAC и CAD находятся въ одной плоскости, то двугранные углы $B'A'C'O'$ и $O'A'C'D'$, будучи смежными, ихъ грани будутъ также находится въ одой плоскости (фиг. 555).

Фиг. 555.



Точно также можно показать, что если два треугольника BAC и DAC не находятся въ одной плоскости, то двугранный уголъ $BACD$ будетъ равенъ двугранному углу $B'A'C'D'$. Слѣдовательно въ многогранникахъ P и P' соотвѣтственные двугранные углы равны.

Если теперь мы возьмемъ въ P и P' два соотвѣтственные многогранные угла, то изъ предъидущаго видно, что ихъ грани и двугранные углы равны, а слѣдовательно взятые многогранные углы равны.

Итакъ предложеніе вполнѣ доказано для выпуклыхъ многогранниковъ. Остается показать что оно справедливо и для многогранниковъ съ вогнутыми углами.

Многогранникъ не выпуклый всегда можно разложить на извѣстное число выпуклыхъ многогранниковъ. Пусть будутъ два такихъ многогранника P и Q имѣющіе общую грань A. Пусть соотвѣтственные имъ подобные въ другомъ многогранникѣ будутъ P' и Q'. Многогранникъ, составленный изъ P и Q будетъ подобенъ многограннику составленному изъ P' и Q' если эти послѣдніе имѣютъ общую грань A', соотвѣтственную грани A, и если отношенія подобія между P,P' и Q,Q' будутъ равны.

Откуда видимъ, что предложеніе справедливо и для многогранниковъ съ вогнутыми углами.

Выпуклые многогранники.

16. *Предложеніе.* Если многогранная поверхность, ограничена ломанною линіею, коей стороны лежатъ, или не лежатъ, въ одной плоскости, то число граней увеличенное числомъ вершинъ равно числу реберъ увеличенному на единицу.

Доказат. Пусть F будетъ число граней, S число вершинъ, A число реберъ, я говорю, что мы имѣемъ:

$$F+S=A+1 \tag{1}$$

Эта формула справедлива, если $F=1$, т. е. если многогранная фигура обращается просто въ плоскій многоугольникъ, тогда $F=1$, $S=A$, такъ какъ число сторонъ всегда равно числу угловъ въ многоугольникѣ.

Если мы предположимъ, что теорема справедлива для фигуры съ F гранями будетъ справедлива и для фигуры съ $F+1$ гранями, то очевидно она будетъ справедлива для всѣхъ многогранныхъ фигуръ.

Пусть ABC.... будетъ ломанная линія ограничивающая многогранную фигуру. Построимъ на ребрѣ AB новую грань, имѣющую n реберъ и n угловъ. Если эта грань имѣетъ m общихъ реберъ съ ломанною линіею $ABCD$..., то она будетъ имѣть $m+1$ общихъ вершинъ съ этой линіей, полагая что новый многоугольникъ не замыкаетъ многогранную фигуру, а оставляетъ одно отверстіе. Поэтому числа F, S, A сдѣлаются въ новой поверхности:

$$F'=F+1,\ S'=S+n-(m+1),\ A'=A+n-m$$

но по положенію мы имѣемъ:

$$F+S=A+1$$

подставляя въ эту формулу вмѣсто F, S, A ихъ величины, полученныя изъ предъидущихъ формулъ, найдемъ:

$$F'+S'=A'+1$$

17. *Предложеніе.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ число граней

F увеличенное числомъ вершинъ S равно числу реберъ A, увеличенному двумя, т. е.:

$$F+S=A+2 \tag{1}$$

Доказат. Если уничтожимъ одну грань въ многогранникѣ, то получимъ многогранную незамкнутую фигуру, въ которой число граней будетъ $F-1$, число вершинъ будетъ S и число реберъ будетъ A, слѣдовательно (прибав. VIII, пред. 16) будемъ имѣть:

$$F-1+S=A+1$$

откуда:

$$F+S=A+2$$

Это теорема Эйлера.

18. *Предложеніе.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ: 1-е, число граней съ нечетнымъ числомъ реберъ всегда есть число четное, 2-е число вершинъ, въ которыхъ сходится нечетное число реберъ, есть всегда четное.

Доказат. Пусть f_3, f_4, f_5, . . . будутъ грани треугольныя, четыреугольныя и т. д., s_3, s_4, s_5, . . углы трегранные, четырегранные и т. д., такъ, что если F есть число граней въ многогранникѣ, S число вершинъ, A число реберъ, то:

$$\left.\begin{aligned} F&=f_3+f_4+f_5+f_6+\dots\\ S&=s_3+s_4+s_5+s_6+\dots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Каждое ребро принадлежитъ двумъ гранямъ, а концами лежитъ въ двухъ вершинахъ, слѣдовательно, если посчитаемъ, или число реберъ всѣхъ граней, или число реберъ всѣхъ многогранныхъ угловъ, всегда получимъ двойное число реберъ, т. е. $2A$:

$$\left.\begin{aligned} 2A&=3f_3+4f_4+5f_5+6f_6+7f_7+\dots\\ 2A&=3s_3+4s_4+5s_5+6s_6+7s_7+\dots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Изъ этихъ уравненій легко видѣть, что:

$$\left.\begin{aligned} &f_3+f_5+f_7+\dots\\ &s_3+s_5+s_7+\dots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

должны быть четныя числа.

19. *Предложеніе.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ числа F, S, A удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$S \overline{\overline{<}} 2(F-2) \quad , \quad A \overline{\overline{<}} 3(F-2)$$

$$S \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2}(F+2) \quad , \quad A \overline{\overline{>}} \tfrac{3}{2} F \tag{5}$$

Величины F, S, $2A$ написанныя выше даютъ:

$$2A-3F=f_4+2f_5+3f_6+\ldots$$

$$2A-3S=s_4+2s_5+3s_6+\ldots$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$A \overline{\overline{>}} \tfrac{3}{2} F, \quad A \overline{\overline{>}} \tfrac{3}{2} S$$

Послѣднѣе неравенство, въ силу теоремы Эйлера, будетъ:

$$A \overline{\overline{>}} \tfrac{3}{2}(A+2-F)$$

откуда:

$$A \overline{\overline{<}} 3(F-2)$$

Подставляя вмѣсто A его величину $F+S-2$, найдемъ два другія условія.

20. *Предложеніе.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ число треугольныхъ граней, увеличенное числомъ трегранныхъ угловъ, даетъ сумму, которая не можетъ быть меньше 8.

Доказат. Вслѣдствіе выраженій F, S и A, (2), (3) уравненіе Эйлера:

$$F+S=A+2$$

сдѣлается:

$$2(f_3+f_4+f_5+\ldots)+2(s_3+s_4+s_5+\ldots)=4+3f_3+4f_4+\ldots$$

$$2(f_3+f_4+f_5+\ldots)+2(s_3+s_4+s_5+\ldots)=4+3s_3+4s_4+\ldots$$

или

$$2(s_3+s_4+s_5+\ldots)-(f_3+2f_4+3f_5+4f_6+\ldots)=4 \tag{6}$$

$$2(f_3+f_4+f_5+\ldots)-(s_3+2s_4+3s_5+\ldots)=4 \tag{7}$$

складывая эти уравненія получимъ:

$$(f_3+s_3)-2(f_5+s_5)-3(f_6+s_6)-\ldots=8 \qquad (9)$$

откуда:

$$f_3+s_3 \overline{\gtrless} 8 \qquad (10)$$

Слѣдствіе 1. Всякій выпуклый многогранникъ имѣетъ треугольныя грани или трегранные углы.

Слѣдствіе 2. Уравненіе (9) показываетъ, что во всякомъ выпукломъ многогранникѣ сумма треугольныхъ граней и трегранныхъ угловъ равна 8 сложенному съ суммою пятиугольныхъ граней и пятигранныхъ угловъ, съ двойною суммою шестиугольныхъ граней и шестигранныхъ угловъ и т. д.

21. *Предложеніе.* 1-е. Всякій выпуклый многогранникъ имѣетъ или треугольныя грани, или четыреугольныя, или пятиугольныя. 2-е. Всякій выпуклый многогранникъ имѣемъ или трегранные, или четырегранные, или пятигранные углы.

Доказат. Если изъ уравненій (6) и (7) послѣдовательно исключимъ s_3 и f_3, то найдемъ:

$$3f_3+2f_4+f_5-f_6-2f_7-\ldots-2s_4-4s_5-\ldots=12 \qquad (11)$$

$$3s_3+2s_4+s_5-s_6-2s_7-\ldots-2f_4-4f_5-\ldots=12 \qquad (12)$$

эти уравненія требуютъ чтобы $3f_3+2f_4+f_5$ и $3s_3+2s_4+s_5$ были числа равныя 12 или больше, слѣдовательно и т. д.

Изъ уравненія (11) вытекаютъ слѣдствія:

Слѣдствіе 1. Если выпуклый многогранникъ составленъ только изъ треугольниковъ или изъ треугольниковъ и шестиугольниковъ, то число треугольниковъ или равно или больше 4.

Слѣдствіе 2. Если выпуклый многогранникъ составленъ только изъ четыреугольниковъ или четыреугольниковъ и шестиугольниковъ, то число четыреугольниковъ равно или больше 6.

Слѣдствіе 3. Если выпуклый многогранникъ составленъ только изъ пятиугольниковъ или изъ пятиугольниковъ и шестиугольниковъ, то число пятиугольниковъ или равно, или больше 12.

Уравненіе (12) приводитъ къ такимъ же слѣдствіямъ относительно угловъ.

Слѣдствіе 4. Если $f_3=0$, $f_4=0$, $f_6=0,\ldots$, $s_4=0$, $s_5=0,\ldots$, то уравненіе (11) сдѣлается $f_5=12$, т. е.:

Если выпуклый многогранникъ имѣетъ только трегранные углы, а гранями пятиугольники и шестиугольники, то число пятиугольниковъ будетъ равно 12.

Уравненіе (12) приводитъ къ подобному слѣдствію относительно многогранныхъ угловъ.

22. *Предложеніе.* Сумма плоскихъ угловъ во всѣхъ граняхъ выпуклаго многогранника равна $4d$ взятымъ столько разъ сколько вершинъ безъ двухъ.

Доказат. Означимъ чрезъ Σ эту сумму, то мы будемъ имѣть:

$$\sum=2df_3(3-2)+2df_4(4-2)+2df_5(5-2)+\ .\ .$$

или

$$\sum=2d\left\{3f_3+4f_4+5f_5-2(f_3+f_4+f_5+\ .\ .\ )\right\}$$

откуда [прибав. VIII, пред. 18, (2) и (3)]:

$$\sum=4dA-4dF=4d(A-F)$$

но $A-F=S-2$, слѣдовательно:

$$\sum=4d(S-2). \qquad (13)$$

23. *Предложеніе.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ сумма многогранныхъ угловъ равна избытку суммы двугранныхъ угловъ надъ столько разъ взятыми двумя прямыми двугранными углами, сколько многогранникъ имѣетъ граней безъ двухъ.

Доказат. Извѣстно, что каждый трегранный уголъ многогранника равенъ избытку полу-суммы своихъ двугранныхъ угламъ надъ однимъ прямымъ двуграннымъ угломъ. Точно также каждый четырегранный уголъ равенъ избытку полу-суммы своихъ двугранныхъ угловъ надъ двумя прямыми двугранными углами и т. д. Но каждый двугранный уголъ многогранника всегда принадлежитъ двумъ многограннымъ угламъ, слѣдовательно, если чрезъ D означимъ прямой двугранный уголъ, то сумма всѣхъ угловъ многогранника будетъ равна избытку суммы двугранныхъ угловъ надъ количествомъ:

$$S_3D(3-2)+S_4D(4-2)+S_5D(5-2)+\ .\ .=2D(A-S)$$

Но $A-S=F-2$, слѣдовательно предъидущее выраженіе будетъ:

$$2D(F-2) \qquad (14)$$

24. *Предложеніе.* Если выпуклая не замкнутая поверхность многогранника имѣетъ одно отверстіе, ограниченное m ребрами, не лежащими въ одной плоскости, то эту поверхность можно замкнуть многогранною поверхность имѣющую найбольше $m-2$ граней, и такимъ образомъ получимъ многогранникъ выпуклый замкнутый со всѣхъ сторонъ.

Доказат. Пусть $ABCDEF$ будетъ ломанная ограничивающая выпуклую поверхность. Всегда можно провести такую плоскость, которая проходитъ по крайней мѣрѣ чрезъ три вершины контура $ABCDEF$ и притомъ такъ что всѣ остальныя вершины лежатъ по одну сторону этой плоскости.

Пусть, напримѣръ, будетъ полученная такимъ образомъ грань AEC. Чрезъ вершины A и C проведемъ плоскость, которая бы оставляла съ одной стороны всѣ вершины поверхности и положимъ, что эта плоскость обращается около AC до тѣхъ поръ пока не встрѣтитъ новую вершину, напримѣръ, B, то ACB будетъ новая грань.

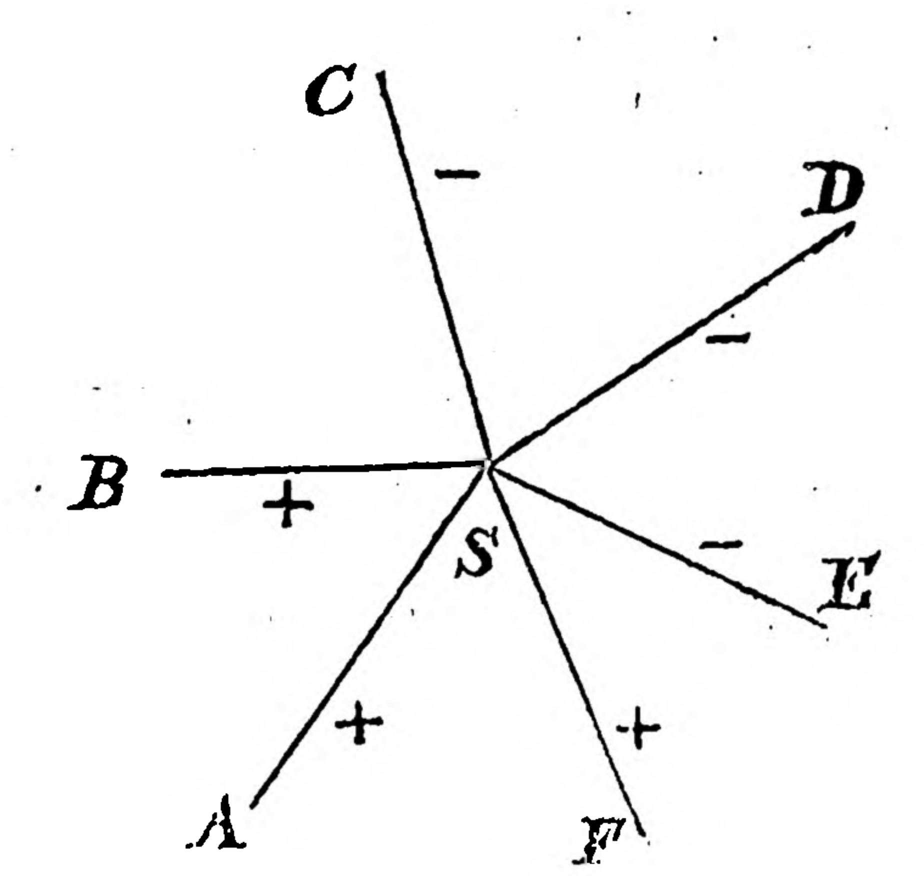
Продолжая, такимъ образомъ, мы построимъ рядъ граней, которыя закроютъ отверстіе $ABCDEF$. Число этихъ граней будетъ наибольшее, когда онѣ будутъ треугольныя и будутъ имѣть общую вершину A. Но въ этомъ случаѣ это число будетъ $m-2$.

Построенный многогранникъ будетъ, очевидно, выпуклый. Въ самомъ дѣлѣ, если, напримѣръ, плоскость EDC пересѣкаетъ данную поверхность, то сторона CB, продолженная должна встрѣтить также поверхность, которая, въ такомъ случаѣ, не будетъ выпуклая, что противорѣчитъ положенію.

25. *Предложеніе.* Если въ выпукломъ многогранномъ углѣ, коего всѣ грани, исключая одной, постоянны, мы будемъ измѣнять одинъ изъ двугранныхъ угловъ, противолежащихъ этой грани, то грань будетъ уменьшаться съ уменьшеніемъ угла и увеличиваться съ увеличеніемъ угла.

Доказат. Положимъ, напримѣръ, что въ выпукломъ многогранномъ углѣ S, мы будемъ измѣнять двугранный уголъ SD, противоположный грани ASB, положимъ еще другіе двугранные углы SC, SE, SF неизмѣняются и что грани BSC, CSD,.., FSA также не измѣняются (фиг. 556).

Фиг. 556.



Если проведемъ плоскости ASD и BSD, то многогранный уголъ S раздѣлится на два многогранные угла $SAFD$, $SBCD$ и одинъ трегранный $SABD$. Но изъ положенія мы видимъ, что первые два угла постоянны, слѣдовательно измѣненіе двуграннаго угла SD, въ данномъ многогранномъ углѣ, равно измѣненію двуграннаго угла SD въ трегранномъ углѣ $SABD$. Но въ трегранномъ углѣ $SABD$, если двѣ грани ASD и BSD постоянны, то третяя ASB будетъ увеличиваться или уменьшаться, смотря потому будетъ-ли увеличиваться или уменьшаться противоположный ей двугранный уголъ. Слѣдовательно и т. д.

Если будемъ измѣнять не одинъ двугранный уголъ SD, а нѣсколько противоположныхъ грани ASB, то полагая что всѣ остальныя грани не измѣняются мы будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Если въ выпукломъ многогранномъ углѣ, коего всѣ грани, за исключеніемъ одной, постоянны, мы будемъ измѣнять въ одномъ и томъ же направленіи, нѣкоторые двугранные углы противоположныя измѣняющейся грани и при томъ такъ, что многогранный уголъ остается выпуклымъ, то измѣняющаяся грань будетъ увеличиваться или уменьшаться, смотря потому будутъ-ли двугранные углы увеличиваться или уменьшаться.

26. *Предложеніе.* Если будемъ измѣнять, какимъ бы то нибыло образомъ, двугранные углы въ многогранномъ выпукломъ углѣ, коего грани неизмѣняются и если на тѣхъ ребрахъ двугранныхъ угловъ, которые увеличиваются поставимъ знакъ $+$, а на тѣхъ, которыхъ двугранные углы уменьшаются поставимъ знакъ $-$, и сосчитаемъ вокругъ многограннаго угла перемѣны знаковъ, то найдемъ не менѣе четырехъ перемѣнъ.

Доказат. Необходимо, чтобы многогранный уголъ имѣлъ болѣе трехъ граней, такъ какъ неизмѣняемость граней, въ трегранномъ углѣ, влечетъ за собою неизмѣняемость двугранныхъ угловъ. Кромѣ этого, предполагается, что многогранный уголъ, будучи до измѣненія двугранныхъ угловъ выпуклымъ, остается выпуклымъ и послѣ измѣненія этихъ угловъ.

Во первыхъ нельзя положить, что всѣ двугранные углы увеличиваются или уменьшаются, такъ какъ въ силу предъидущаго предложенія по крайней мѣрѣ одна изъ граней измѣнилась бы.

Во вторыхъ, невозможно, чтобы на ребрахъ многограннаго угла за однимъ рядомъ знаковъ $+$ слѣдовалъ бы одинъ рядъ знаковъ $-$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что въ многогранномъ углѣ на ребрахъ SB, SA, SF стоятъ знаки $+$, а на остальныхъ стоятъ все знаки $-$. Если проведемъ діагональную плоскость въ многогранномъ углѣ такъ, чтобы съ одной ея стороны на ребрахъ были знаки $+$, а съ другой были знаки $-$, то изъ предъидущаго предложенія будетъ слѣдовать, что плоскій уголъ BSE въ одно и тоже время и увеличивается и уменьшается, что нелѣпо.

Въ третьихъ, изъ того что сказано выше слѣдуетъ, что на ребрахъ многограннаго угла будетъ всегда болѣе двухъ перемѣнъ знаковъ.

Итакъ какъ начиная отъ одного ребра и пройдя по всѣмъ, необходимо возвратиться къ первому, то слѣдуетъ, что число перемѣнъ знаковъ будетъ всегда четное, слѣдовательно по крайней мѣрѣ ихъ есть четыре.

Равенство и подобіе выпуклыхъ многогранниковъ.

27. *Предложеніе.* Два выпуклые многогранника P и P_1 равны, когда имѣютъ всѣ грани равныя, каждая каждой, и одинаково расположенныя.

Доказат. Чтобы доказать это предложеніе надобно показать, что каждый многогранный уголъ одного многогранника имѣетъ равный ему многогранный уголъ въ другомъ многогранникѣ. Еслибы этого небыло, то это происходило бы отъ того, что многогранные углы въ P или всѣ, или отчасти неравны многограннымъ угламъ въ P_1. Этотъ послѣдній случай сводится къ первому.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $SABCDE$ будетъ многогранный уголъ въ P, который имѣетъ равный себѣ многогранный уголъ въ P_1. Если мы удалимъ этотъ уголъ S и происшедшее отъ того отверстіе $ABCDE$ закроемъ (приб. VIII, пред. 24) многогранною выпуклою поверхностью, то многогранникъ P замѣнится другимъ Q, имѣющимъ меньше граней, меньше вершинъ и меньше реберъ чѣмъ въ P. Точно такимъ же образомъ мы можемъ въ P_1 удалить многогранный уголъ S_1, равный углу S и образовать многогранникъ Q_1, коего всѣ грани равны гранямъ Q. Продолжая подобнымъ образомъ мы получимъ наконецъ многогранники T и T_1, коихъ всѣ грани равны каждая каждой, но многогранные углы неравны. Слѣдовательно мы можемъ разсматривать только тотъ случай, въ которомъ всѣ грани многогранниковъ P и P_1 равны каждая каждой, а многогранные углы неравны.

Покажемъ теперь, что это невозможно.

Допустимъ, что при равенствѣ всѣхъ граней многогранниковъ P и P_1 всѣ многогранные углы многогранника P неравны многограннымъ угламъ многогранника P_1. Будемъ разсматривать этотъ послѣдній многогранникъ какъ преобразованіе многогранника P и въ этой гипотезѣ поставимъ знакъ $+$ на тѣхъ ребрахъ, коихъ двугранные углы увеличились, а знакъ $-$ поставимъ на тѣхъ, коихъ двугранные углы уменьшились. Такъ какъ по предложенію 26 число перемѣнъ знаковъ или равно или больше четырехъ, то означая число перемѣнъ знаковъ на всѣхъ многогранныхъ углахъ многогранника P_1, чрезъ N, мы будемъ имѣть:

$$N \geqq 4S$$

если S есть число вершинъ въ многогранникѣ P_1.

Два послѣдовательныя ребра многограннаго угла въ многогранникѣ принадлежатъ всегда одной грани и принадлежатъ только этой, слѣдовательно число N должно быть равно всему числу перемѣнъ знаковъ встрѣчаемыхъ, обходя послѣдовательно каждый периметръ граней многогранника P_1.

Но для треугольныхъ граней такихъ перемѣнъ знаковъ можетъ быть не болѣе 2.

Для четыреугольной грани перемѣнъ знаковъ не можетъ быть болѣе 4.

И вообще, если число сторонъ грани будетъ четное $2n$, то число перемѣнъ знаковъ на периметрѣ этой грани не можетъ быть болѣе $2n$, если же число сторонъ грани будетъ нечетное: $2n+1$, то число перемѣнъ знаковъ не превзойдетъ $2n$.

Если чрезъ f_3, f_4, f_5, . . означимъ число треугольныхъ, четыреугольныхъ и т. д. граней, то мы найдемъ:

$$N \leqq 2f_3+4f_4+4f_5+6f_6+6f_7+\ldots \tag{1}$$

но мы имѣемъ [прибав. VIII, пред. 18, (31)]:

$$2A=3f_3+4f_4+5f_5+\ldots$$

$$F=f_3+f_4+f_5+\ldots$$

откуда:

$$4A-4F=2f_3+4f_4+6f_5+\ldots$$

но мы имѣемъ:

$$S+F=A+2$$

слѣдовательно:

$$4S=8+2f_3+4f_4+6f_5+\ldots$$

откуда вслѣдствіе неравенства (11) найдемъ:

$$N \leqq 4S-8$$

но мы нашли выше, что:

$$N \geqq 4S$$

слѣдовательно число N меньше числа $4S-8$ и больше $4S$ — что несообразно. Слѣдовательно невозможно чтобы многогранники P и P_1, имѣя всѣ грани равныя каждая каждой, имѣли не равные многогранные углы.

Итакъ многогранники P и P_1, имѣющіе равныя грани каждая каждой, имѣютъ и многогранные углы равные каждый каждому, и слѣдовательно будутъ равны.

Изъ этого еще слѣдуетъ, что если два выпуклые многогранника имѣютъ одинаковое число граней подобныхъ и подобно расположенныхъ, то они *подобны*.

28. *Предложеніе*. Найти число необходимыхъ условій для опредѣленія выпуклаго многогранника?

Доказат. Такъ какъ выпуклый многоугольникъ діагоналями проведенными чрезъ одну изъ его вершинъ, дѣлится на $n—2$ треугольниковъ, если n есть число его сторонъ; а для опредѣленія треугольника необходимо *три* условія, то число всѣхъ условій будетъ $2n—3$. Въ самомъ дѣлѣ, для перваго треугольника необходимо 3 условія, а для $n—3$ остальныхъ, очевидно, необходимо только по 2, слѣдовательно мы будемъ имѣть $3+2(n—3)=2n—3$. Очевидно, что для подобія выпуклыхъ многоугольниковъ необходимо $2n—4$ условій.

Замѣтивъ это, возьмемъ одну изъ граней многогранника за основаніе. Пусть эта грань будетъ имѣть n сторонъ, то для ея опредѣленія необходимо $2n—3$ условій. Такъ какъ всѣхъ вершинъ въ многогранникѣ есть S, то число вершинъ внѣ взятаго основанія будетъ $S—n$. Для опредѣленія точки въ пространствѣ необходимы *три* условія, слѣдовательно мы будемъ имѣть $2n—3+3(S—n)=3S—n—3$ условій.

Такъ какъ плоскость опредѣляется тремя точками, а точка тремя условіями, то для всѣхъ вершинъ многогранника, лежащихъ въ одной плоскости необходимо только *два* условія, слѣдовательно число $3(S—n)$ необходимо уменьшить числомъ:

$$(n_1—3)+(n_2—3)+(n_3—3)+\ .\ .$$

гдѣ n_1, n_2, n_3, . . суть числа означающія число сторонъ каждой грани изъ числа $F—1$ граней лежащихъ внѣ взятаго основанія. Слѣдовательно число условій будетъ:

$$3(F+S—2)—(n+n_1+n_2+n_3+\ .\ .)$$

но:

$$n+n_1+n_2+\ .\ .\ =2A, \qquad S+F—2=A$$

слѣдовательно число условій будетъ A, т. е. равно числу реберъ.

Замѣтимъ при этомъ, что эти условія не могутъ быть выбранныя случайно между ребрами и углами, составляющими элементы многогранника, такъ какъ число уравненій хотя и будетъ равно числу неизвѣстныхъ, но эти уравненія могутъ быть такого свойства, что задача сдѣлается неопредѣленною. Для примѣра возьмемъ не треугольную призму и положимъ, что даны ея ребра, очевидно, что основаніе призмы, имѣя однѣ и тѣже ребра можетъ имѣть самыя разнообразныя формы и кромѣ того параллельныя ребра призмы могутъ быть произвольно наклонены къ основанію.

Такъ какъ для равенства двухъ многогранниковъ необходимо A условій, то очевидно для ихъ подобія необходимо $A—1$ условій.

IX. Измѣреніе объемовъ и поверхностей тѣлъ.

1. *Объемомъ* тѣла называютъ отношеніе двухъ тѣлъ, изъ коихъ одно принято за единицу.

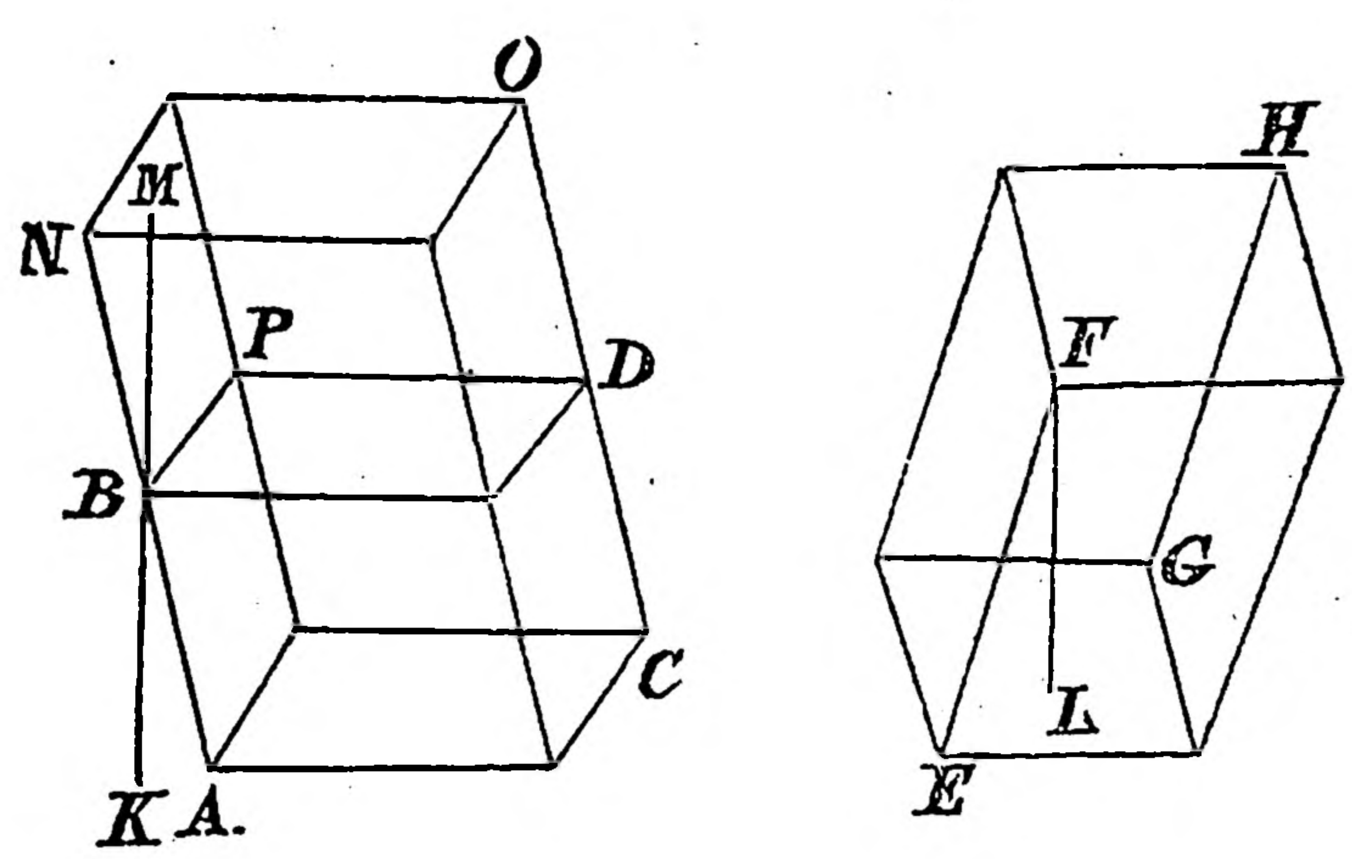
Обыкновенно за единицу тѣла принимается кубъ, коего сторона есть единица длины.

2. *Объемъ параллелепипеда.* Евклидъ доказалъ (кн. 11, пред. 32), что два параллелепипеда, имѣющіе равныя высоты относятся между собою какъ площади ихъ основаній, а для измѣренія объема параллелепипеда надобно доказать, что:

Предложеніе 1. Два параллелепипеда, имѣющіе равныя основанія относятся между собою какъ ихъ высоты (фиг. 557).

Доказат. Возьмемъ два параллелепипеда $ABCD$ и $EFGH$, коихъ основанія AC и EG равны и коихъ высоты суть BK и FL.

Фиг. 557.



Продолжимъ высоту BK такъ чтобы ея продолженіе BM было равно высотѣ LF. Чрезъ точку M проведемъ плоскость перпендикулярную къ MB. Продолжимъ ребра параллелепипеда $ABCD$ до встрѣчи съ проведенною плоскостью, что образуетъ два параллелепипеда $ANCO$ и $BNDO$.

Такъ какъ плоскость BD параллелельна сторонамъ AC и NO, то параллелепипедъ $ABCD$ относится къ параллелепипеду $BNDO$ какъ параллелограмъ AP къ параллелограму PN (кн. 11, пред. 25), или какъ $AB:BN$ (кн. 6, пред. 1), или наконецъ какъ $BK:BM$ (кн. 6, пред. 17):

$$ABCD:BNDO=BK:BM.$$

Но параллелепипеды $BNDO$ и $EFGH$ имѣющіе равныя основанія и равныя высоты равны (кн. 11, пред. 31), слѣдовательно:

$$ABCD:EFGH=BK:FL$$

Предложеніе 2. Два параллелепипеда, имѣющіе разныя основанія и разныя высоты относятся между собою какъ произведенія основаній на высоты.

Доказат. Пусть основанія параллелепипедовъ P и P_1 будутъ A и A_1, а высоты h и h_1. Возьмемъ третій параллелепипедъ Q коего основаніе есть A_1, а высота h.

Такъ какъ параллелепипеды P и Q имѣютъ равныя высоты, и разныя основанія, а параллелепипеды Q и P_1 имѣютъ равныя основанія, и разныя высоты, то мы имѣемъ:

$$\frac{P}{Q}=\frac{A}{A_1}\quad,\quad\frac{Q}{P_1}=\frac{h}{h_1}$$

перемножая эти равенства найдемъ:

$$\frac{P}{P_1}=\frac{A.h}{A_1h_1}$$

Если параллелепипедъ P_1 примемъ за единицу, то A_1 будетъ единица площади, а h_1 единица длины, слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$P=A.h$$

т. е. объемъ параллелепипеда P будетъ равенъ произведенію основанія его A на высоту h.

Если параллелепипедъ будетъ прямоугольный, то основаніе будетъ прямоугольникъ и если его стороны будутъ a и b, то $A=ab$, откуда:

$$P=a.b.h$$

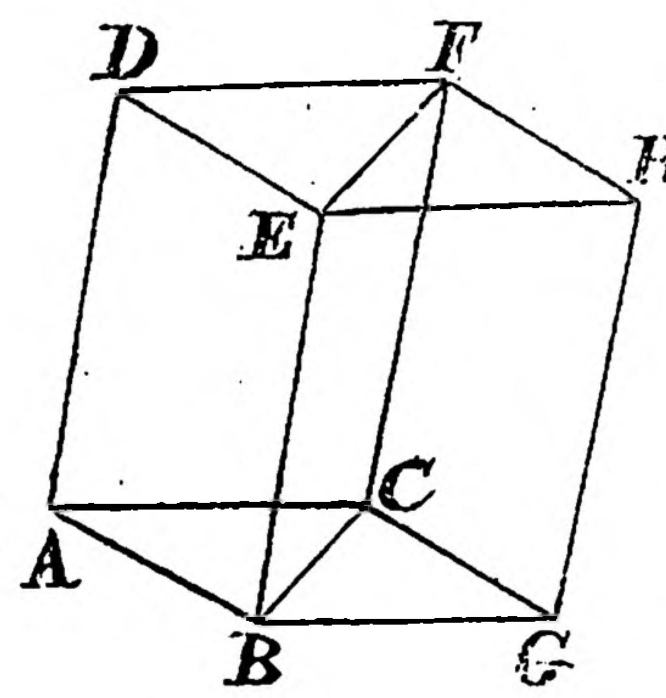
т. е. объемъ прямоугольнаго параллелепипеда P, коего стороны суть a, b, h, будетъ произведеніе сторонъ, встрѣчающихся въ вершинѣ одного изъ его угловъ.

Если $a=b=h$, то параллелепипедъ есть кубъ и объемъ его:

$$P=a^3$$

2. *Объемъ призмы.* Разсмотримъ сначала треугольную призму AF, имѣющую основаніемъ $\triangle ABC$. Дополнивъ треугольникъ до параллелограма, и призму до параллелепипеда, который съ призмой будетъ имѣть одну высоту, но двойное основаніе.

Фиг. 558.



Данная призма будетъ составлять половину параллелепипеда (кн. 11, пред. 28).

Но объемъ параллелепипеда будетъ равенъ основанію AG помноженному на высоту h, т. е.:

$$P = AG.h$$

раздѣляя обѣ части на два получимъ:

$$\frac{P}{2} = \frac{AG}{2}.h$$

но $\frac{P}{2}$ = приз., и $\frac{AG}{2} = \triangle ABC$, слѣдовательно:

$$\text{об. приз.} = \triangle ABC.h$$

т. е. произведенію площади основанія на высоту.

Такъ какъ всякая призма разбивается на треугольныя, то легко видѣть, что объемъ всякой призмы равенъ произведенію основанія на высоту:

$$\text{об. приз.} = \text{основ.} \times \text{выс.}$$

3. *Объемъ пирамиды.* Всякая пирамида составляетъ треть призмы, имѣющей съ ней равное основаніе и равную высоту (кн. 12, пред. 7, слѣд.); а такъ какъ объемъ призмы равенъ основанію на высоту, то объемъ пирамиды равенъ основанію помноженному на треть высоты. Если основаніе пирамиды есть A, а высота h, то:

$$\text{об. пирам.} = \frac{1}{3} Ah = A.\frac{h}{3}$$

4. *Поверхность призмы.* Боковыя поверхности призмы суть паралле-

лограмы, которые всѣ имѣютъ основаніемъ ребро призмы, слѣдовательно боковая поверхность призмы получится помножая, общее основаніе на сумму высотъ всѣхъ параллелограмовъ, которая есть ничто иное какъ периметръ многоугольника, полученнаго, пересѣкая призму плоскостью перпендикулярною къ ребру, эта плоскость будетъ перпендикулярна и ко всѣмъ ребрамъ (кн. 11, пред. 8), слѣдовательно стороны многоугольника будутъ перпендикулярны къ ребрамъ.

Если призма прямая, то боковая поверхность ея получится, помножая периметръ ея основанія на ребро. Если периметръ основанія есть P, и ребро h, то:

$$\text{Бок. повер.}=P.h$$

5. *Боковая поверхность пирамиды.* Боковая поверхность пирамиды получится, взявъ полусумму произведеній каждой стороны многоугольника основанія на соотвѣтственные перпендикуляры, опущенные изъ вершины пирамиды на стороны многоугольника основанія.

Въ самомъ дѣлѣ, боковая поверхность пирамиды состоитъ изъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину съ пирамидой, а основаніями стороны многоугольника основанія. Если стороны многоугольника будутъ a_1, a_2, a_3,.. и h_1, h_2, h_3, . . высоты треугольниковъ, то:

$$\text{пов. пир.}=\tfrac{1}{2}\,(a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3+\;.\;.)$$

Если пирамида будетъ правильная, т. е. такая, которая имѣетъ основаніемъ правильный многоугольникъ, а вершина находится на перпендикулярѣ возставленномъ изъ центра многоугольника къ его плоскости, то легко видѣть, что бока такой пирамиды суть равнобедренные треугольники равные между собою и имѣющіе высотою прямую, соединяющую вершину пирамиды съ срединою какой нибудь стороны многоугольника основанія. Общая высота всѣхъ треугольниковъ называется *апоѳемою* пирамиды. Слѣдовательно боковая поверхность правильной пирамиды равна периметру основанія помноженному на половину апоѳемы.

Если периметръ основанія назовемъ чрезъ P, а апоѳему чрезъ h, то будемъ имѣть:

$$\text{пов. пир.}=P.\frac{h}{2}=\frac{Ph}{2}$$

6. *Объемъ какого нибудь многогранника.* Чтобы получить объемъ многогранника берутъ внутри его произвольно точку и соединяютъ ее съ вершинами многогранника, такимъ образомъ получится извѣстное число пирамидъ, объемы которыхъ складываются.

Но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, объемъ многогранника можетъ быть вычисленъ проще. Это бываетъ въ слѣдующихъ случаяхъ:

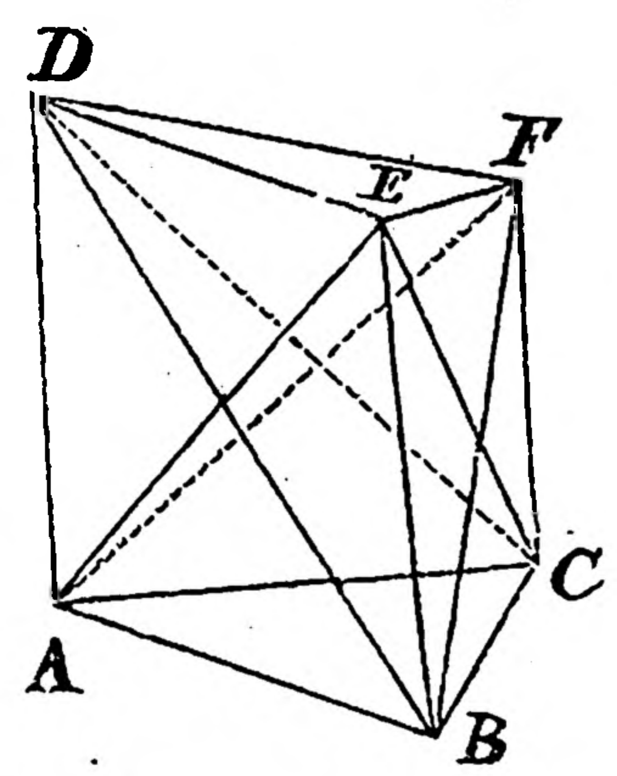
7. *Объемъ треугольной призмы усѣченной не параллельно основанію*
Пусть $ABCDEF$ будетъ треугольная призма усѣченная не параллельно основанію ABC. Проведемъ плоскости EAC и EDC, эти плоскости раздѣлять данную призму на три пирамиды $EABC$, $EACD$ и $ECDF$ (фиг. 559).

Первую пирамиду $EABC$ можно разсматривать, какъ имѣющую основаніемъ ABC, а вершину въ точкѣ E.

Вторая пирамида $EACD$ равна пирамидѣ $BACD$ (кн. 12, пред. 5), потому что эти двѣ пирамиды имѣютъ одно основаніе ACD, а вершину на прямой BE, параллельной основанію, слѣдовательно пирамиду $BACD$ можно разсматривать, какъ имѣющую основаніемъ ABC, а вершину въ точкѣ D.

Третяя пирамида $ECDF$ равна $ABCF$, потому, что эти двѣ пирамиды имѣютъ равныя основанія CFE и CFB (кн. 1, пред. 37), а вершины на прямой AD, параллельной плоскости $BCFE$, въ которой лежатъ оба основанія, слѣдовательно пирамида $ABCF$ можетъ быть разсматриваема, какъ имѣющая основаніемъ ABC, а вершину въ точкѣ F.

Фиг. 559.



Если означимъ чрезъ h_1, h_2, h_3 перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ D, E, F пирамидъ на ихъ общее основаніе $\triangle ABC$, то мы будемъ имѣть:

$$\text{об. приз.} = \triangle ABC \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

потому что h_1, h_2, h_3 будутъ высоты пирамидъ $ABCD$, $ABCE$ и $ABCF$, а площадь ихъ основанія есть $\triangle ABC$.

Если данная усѣченная призма будетъ прямоугольная, то высоты h_1, h_2, h_3 будутъ ребра AD, BE, CF.

8. *Объемъ пирамиды усѣченной параллельно основанію.*

Предложеніе 3. Если пирамида пересѣчена плоскостью параллельною основанію, то сѣченіе будетъ многоугольникъ подобный многоугольнику основанія и площади этихъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины пирамиды.

Доказат. Пусть данная пирамида будетъ $ABCDE$ и пусть AM будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины A на основаніи $BCDE$. Чрезъ точку L, взятую на этомъ перпендикулярѣ, проведемъ плоскость параллельную плоскости основанія, сѣченіе этой плоскости съ пирамидой будетъ многоугольникъ $FGHK$ (фиг. 560).

Соединимъ точки L съ G и M съ C. Прямыя FG и BC будутъ параллельны, такъ какъ онѣ суть пересѣченіе двухъ параллельныхъ плоскостей третьею плоскостью ABC (кн. 11, пред. 16), по той же причинѣ параллельны и прямыя GH и CD, слѣдовательно $\angle FGH = \angle BCD$ (кн. 11, пред. 10). По той же причинѣ и всѣ углы многоугольника $FGHK$ равны соотвѣтственнымъ угламъ многоугольника $BCDE$. Такъ какъ $BC \parallel FG$, то треугольники ABC и AFG равноугольны, и слѣдовательно:

$$BC : FG = AC : AG$$

но и треугольники ACD и AGH также равноугольны, слѣдовательно:

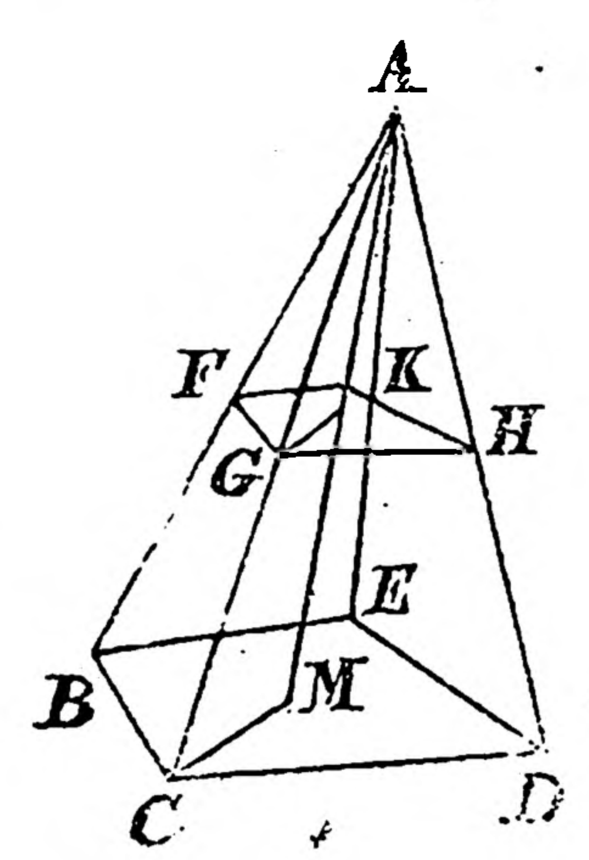
$$CD : GH = AC : AG$$

откуда:

$$BC : FG = CD : GH$$

Точно также легко показать, что всѣ стороны многоугольника $FGHK$ пропорціональны сторонамъ многоугольника $BCDE$, слѣдовательно многоу-

Фиг. 560.



гольники $FGHK$ и $BCDE$, будучи равноугольны и имѣя пропорціональныя стороны, будутъ подобны (кн. 6, опред. 1). Но площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ (кн. 6, пред. 22), слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\text{мног.}BCDE : \text{мног.}FGHK = BC^2 : FG^2$$

Изъ подобія треугольниковъ ABC и AFG, ACM и AGL мы имѣемъ:

$$BC : FG = AC : AG = AM : AL$$

откуда:

$$BC^2 : FG^2 = AC^2 : AG^2 = AM^2 : AL^2$$

слѣдовательно:

$$\text{мног.}BCDE : \text{мног.}\ FGHK = AM^2 : AL^2$$

Слѣдствіе. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что если двѣ пирамиды имѣютъ равныя основанія и равныя высоты, то ихъ сѣченія параллельныя основаніямъ и равноотстоящія отъ вершинъ будутъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, пусть основанія мног. $BCDEF$ и мног.$B'C'D'E'F'$ двухъ пирамидъ будутъ равны, пусть ихъ высота будетъ H. Если пересѣчемъ обѣ эти пирамиды плоскостями параллельными основаніямъ на разстояніи h отъ ихъ вершинъ, то мы будемъ имѣть:

$$\text{мног.}BCDEF : \text{мног.}bcdef = H^2 : h^2$$

и

$$\text{мног.}B'C'D'E'F' : \text{мног.}b'c'd'e'f' = H^2 : h^2$$

откуда:

$$\text{мног.}BCDEF : \text{мног.}B'C'D'E'F' = \text{мног.}bcdef : \text{мног.}b'c'd'e'f'$$

Но мног.$BCDEF$=мног.$B'C'D'E'F'$, слѣдовательно и многоугольники сѣченій также равны:

$$\text{мног.}bcdef = \text{мног.}b'c'd'e'f'$$

Предложеніе 4. Объемъ пирамиды, усѣченной плоскостью параллельно основанію, равенъ тремъ пирамидамъ, имѣющимъ высоту равную высотѣ усѣченной пирамиды, а основаніями: одна нижнее основаніе усѣченной пирамиды, другая верхнее основаніе той же пирамиды, а третяя будетъ имѣть основаніемъ средне-пропорціональную площадь между нижнимъ и верхнимъ основаніями усѣченной пирамиды.

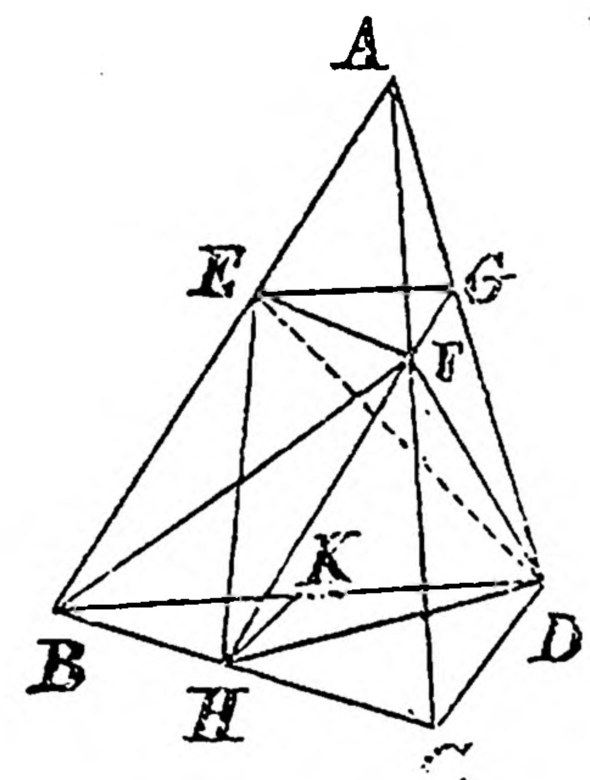
Доказат. Разсмотримъ сначала треугольную пирамиду $ABCD$, пересѣченную плоскостью параллельною основанію (фиг. 561). Пусть это сѣченіе будетъ $\triangle EFG$. Проведемъ плоскости FBD и FED, плоскости эти раздѣлятъ усѣченую пирамиду $BCDEFG$ на три пирамиды: $FBCD$, $FEGD$, $FEDB$.

Первая пирамида $FBCD$ имѣетъ основаніемъ нижнее основаніе усѣченной пирамиды, а вершину въ точкѣ F, слѣдовательно ея высота будетъ равна высотѣ усѣченной пирамиды.

Вторая пирамида $FEGD$ имѣетъ основаніемъ верхнее основаніе усѣченной пирамиды, а вершину въ точѣ D, слѣдовательно имѣемъ туже высоту что и первая пирамида.

Наконецъ третяя пирамида $FEDB$, равна пирамидѣ $HBED$, которой вершина H была получена, проведя въ плоскости ABC прямую $FH \parallel EB$, слѣдовательно пирамиды $FEDB$ и $HBED$ равны, имѣя одно основаніе

Фиг. 561.



EBD, а вершины лежатъ на прямой FH параллельной основанію EBD.

Пирамиду $HBED$ можно разсматривать, какъ имѣющую основаніемъ BHD, а вершину въ точкѣ E, и слѣдовательно ея высота будетъ равна высотѣ двухъ первыхъ пирамидъ. Взявъ $BK=EG$ проведемъ HK. Такъ какъ треугольники BCD и BHD имѣютъ одну высоту, то (кн. 6, пред. 1):

$$\triangle BCD : \triangle BHD = BC : BH$$

по той же причинѣ:

$$\triangle BHD : \triangle BHK = BD : BK$$

Но $BK=EG$, а $BH=EF$, такъ какъ $BHFE$ есть параллелограмъ. Кромѣ этого треугольники BCD и EFG подобны, то:

$$BC : EF = BD : EG$$

слѣдовательно:

$$\triangle BCD : \triangle BHD = BD : EG$$

$$\triangle BHD : BHK = BD : EG$$

но $\triangle BHK = \triangle EFG$ (кн. 1, пред. 4), слѣдовательно:

$$\triangle BCD : \triangle BHD = \triangle BHD : \triangle EFG$$

откуда видимъ, что основаніе $\triangle BHD$ третьей пирамиды есть средне-пропорціональная величина между верхнимъ и нижнимъ основаніями усѣченной пирамиды.

Если положимъ $\triangle BCD = A$, $\triangle EFG = A_1$, то $\triangle BHD = \sqrt{A.A_1}$. Слѣдовательно, означая чрезъ h, разстояніе между верхнимъ и нижнимъ основаніями усѣченной пирамиды, мы будемъ имѣть:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{h}{3}\left(A + \sqrt{AA_1} + A_1\right) \qquad \text{(a)}$$

Возьмемъ теперь многоугольную пирамиду и построимъ треугольникъ, коего площадь была бы равна площади многоугольника основанія данной пирамиды. На основаніи построеннаго треугольника построимъ треугольную пирамиду, коей высота была бы равна высотѣ данной пирамиды. Пересѣчемъ обѣ пирамиды плоскостями параллельными основаніямъ, на равномъ разстояніи отъ вершинъ. Такимъ образомъ получимъ двѣ усѣченныя пирамиды одну многоугольную, а другую, построенную, треугольную. Такъ какъ нижнія основанія этихъ пирамидъ равны, то равны и верхнія (прабав. IX, пред. 3, слѣд.). Но цѣлыя пирамиды равны и малыя равны, слѣдовательно равны и усѣченныя. Откуда объемъ усѣченной многоугольной пирамиды будетъ выраженъ также формулою (а).

Туже теорему можно доказать еще слѣдующимъ образомъ:

Пусть площадь нижняго основанія пирамиды будетъ A, а верхняя A_1. Пусть H будетъ высота цѣлой пирамиды, а h высота малой, то будемъ имѣть:

$$\text{об. больш. пирам.} = A.\frac{H}{3}$$

$$\text{об. мал. пирам.} = A_1\frac{h}{3}$$

Вычитая малую изъ большей, получимъ объемъ усѣченной пирамиды:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{AH}{3} - \frac{A_1h}{3}$$

Замѣчая, что мы имѣемъ:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{H^2}{h^2} \quad \text{и} \quad \frac{A+A_1}{A_1} = \frac{H^2+h^2}{h^2}$$

найдемъ:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3}\frac{A_1}{h^2}(H^3-h^3) = \frac{1}{3}\frac{A_1}{h^2}(H^2+Hh+h^2)(H-h)$$

откуда:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3}A_1\left(\frac{H^2+h^2}{h^2}+\frac{H}{h}\right)(H-h)$$

или сображаясь съ предъидущимъ:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3}A_1\left(\frac{A+A_1}{A_1}+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A_1}}\right)(H-h)$$

или

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3}\,(A+\sqrt{AA_1}+A_1)\,(H-h)$$

гдѣ $H-h$, есть высота усѣченной пирамиды.

9. *Боковая поверхность пирамиды усѣченной параллельно основанію* Поверхность такой пирамиды, очевидно, составлена изъ трапецій, складывая которыя, получится искомая поверхность. Если пересѣчемъ усѣченную пирамиду плоскостью параллельною основаніямъ и равно отстоящею отъ обѣихъ, то легко видѣть, что каждая сторона полученнаго сѣченія, есть полусумма сторонъ нижняго и верхняго основаній.

Если пирамида правильная, то всѣ трапеціи равны между собою и имѣютъ одну высоту, которая есть апоѳема усѣченной пирамиды, слѣдовательно боковая поверхность ея равна произведенію периметра сѣченія, равноотстоящаго отъ обѣихъ основаній, на апоѳему.

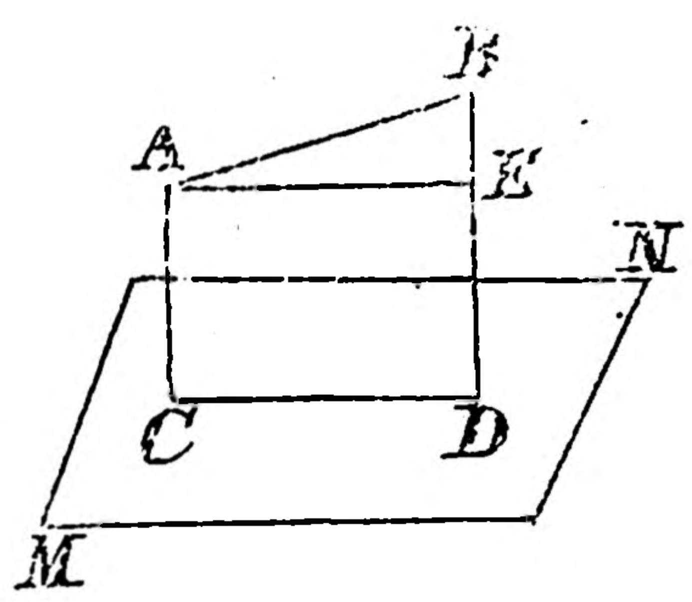
Цилиндръ и конусъ.

10. *Проэкція. Проэкціей* точки на прямой или на плоскости называютъ основаніе перпендикуляра опущеннаго изъ точки на прямую или на плоскость.

Проэкціей прямой, на прямой или на плоскости, называютъ прямую соединяющую проэкціи оконечностей данной прямой. Очевидно, что проэкція прямой, на плоскости параллельной прямой, равна и параллельна данной прямой. Во всѣхъ другихъ случаяхъ проэкція всегда меньше, проэктируемой.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ оконечностей A и B прямой AB опустимъ перпендикуляры AC и BD на плоскость MN (фиг. 562). Чрезъ точку A проведемъ прямую $AE = CD$, которая будетъ находится въ плоскости CDB (кн. 11, пред. 7). Проэкція CD прямой AB равна прямой AE, такъ какъ $ACDE$ есть параллелограмъ, а AE меньше AB, потому что AB есть гипотенуза, а AE катетъ прямоугольнаго треугольника AEB.

Фиг. 562.

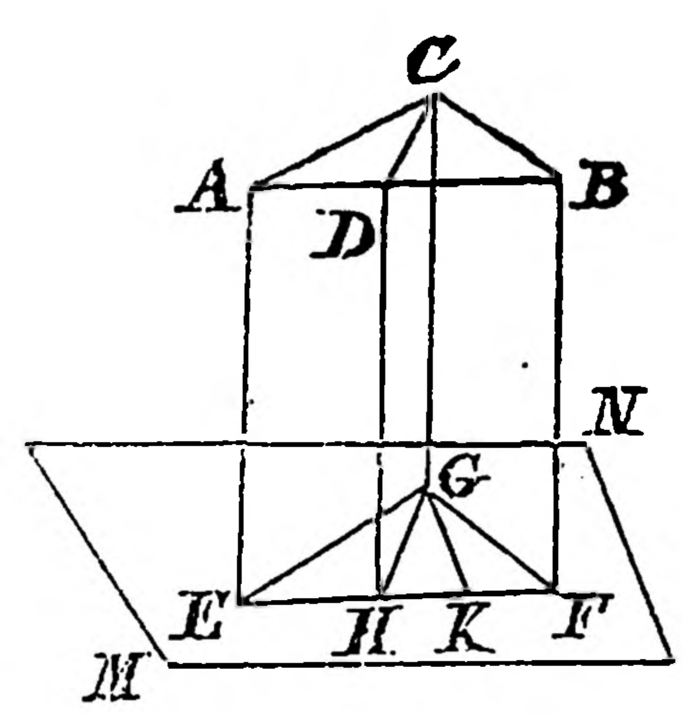


Проэкція кривой на плоскости есть кривая, проходящая чрезъ проэкціи всѣхъ точекъ проэктируемой кривой.

Проэкція многоугольника на плоскости есть многоугольникъ образованный проэкціей периметра, проэктируемаго многоугольника.

Очевидно проэкція многоугольника, на плоскости параллельной плоскости многоугольника, равна данному многоугольнику. Во всѣхъ другихъ случаяхъ она меньше. Для этого разсмотримъ треугольникъ ABC, коего основаніе есть AB, а высота CD, и пусть EFG будетъ его проэкція на плоскости MN. Пусть EF будетъ проэкція основанія AB, а GH проэкція высоты CD. Пусть наконецъ GK будетъ высота треугольника EFG (фиг. 563).

Фиг. 563.



Такъ какъ плоскость треугольника ABC не параллельна плоскости MN, то AB и CD не могутъ быть обѣ параллельны плоскости MN (кн. 11, пред. 10), а слѣдовательно ихъ проэкціи EF и GH обѣ или по крайней мѣрѣ одна будутъ меньше AB и CD. Но GK не можетъ быть больше GH, такъ какъ $\angle GKE = d$. Изъ этого видимъ, что основаніе и высота треугольника EFG или меньше, основанія и высоты треугольника ABC или одна изъ нихъ не больше, а другая меньше. А изъ этого слѣдуетъ, что:

$$\triangle ABC > \triangle EFG$$

Если это предложеніе вѣрно для треугольника, то очевидно, оно имѣетъ мѣсто и для многоугольника, такъ какъ каждый многоугольникъ есть сумма треугольниковъ, изъ коихъ каждый больше своей проэкціи.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что грань многогранника всегда меньше суммы остальныхъ его граней, такъ какъ, очевидно, что прокція этихъ граней на плоскости первой грани не меньше этой грани.

11. Многогранная поверхность или кривая поверхность называется *выпуклыми*, если пересѣченіе ея съ какою нибудь плоскостью, есть *выпуклый* многоугольникъ или *выпуклая* кривая.

Разсмотримъ два выпуклыхъ многогранника изъ коихъ одинъ весь находится внутри другаго. Продолжимъ стороны внутренняго многогранника до встрѣчи съ поверхностью внѣшняго, то разсуждая какъ мы разсуждали относительно выпуклыхъ многоугольниковъ (прибав. VII, пред. 15) найдемъ, что поверхность внутренняго многогранника меньше поверхности внѣшняго.

Это предложеніе остается справедливымъ какое бы нибыло число и величина сторонъ многогранниковъ, такъ какъ кривую поверхность можно разсматривать какъ предѣлъ вписанной въ кривую многогранной поверхности, число сторонъ которой неопредѣленно возрастаетъ, а величина ихъ неопредѣленно убываетъ. Слѣдовательно предъидущее предложеніе остается справедливымъ и тогда когда обѣ многогранныя поверхности или одна изъ нихъ суть поверхности кривыя *выпуклыя*.

12. *Поверхность и объемъ цилиндра.*

Если многоугольникъ основанія призмы вписанъ въ кругъ основанія цилиндра, то говорятъ, что призма *вписана* въ цилиндръ, если же многоугольникъ основанія призмы описанъ около круга основанія цилиндра, то говорятъ, что призма *описана* около цилидра; если при этомъ ребра вписанной призмы суть женератрисы цилиндра, а грани описанной призмы касаются цилиндра по его женератрисамъ. Какъ вписанная такъ и описанная призмы суть прямыя.

Возьмемъ цилиндръ, коего радіусъ основанія есть R, впишемъ и опишемъ, для простоты, правильныя около него призмы съ одинаковымъ числомъ сторонъ, коихъ число можетъ увеличиваться, а величина уменьшатся неопредѣленно. Такъ какъ описанная призма заключаетъ внутри себя цилиндръ, а цилиндръ заключаетъ вписанную призму, то (прибав. IX, 11) поверхность и объемъ цилиндра всегда заключается между поверхностями и объемами описанной и вписанной призмъ. Такъ какъ съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ сторонъ описанныя и вписанныя призмы стремятся сдѣлатся равными, то мы будемъ разсматривать цилиндръ какъ предѣлъ къ которому стремятся поверхности и объемы вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ призмъ, коихъ число сторонъ неопредѣленно возрастаетъ.

Если означимъ чрезъ P_1 периметръ описанной призмы, чрезъ P_2 периметръ основанія вписанной призмы, чрезъ $П_1$ площадь многоугольника основанія описанной призмы, чрезъ $П_2$ площадь многоугольника основанія вписанной призмы. Чрезъ Ок. означимъ окружность основанія цилиндра, а чрезъ Кр. площадь того же круга, то мы будемъ имѣть:

$$P_1 = \text{Ок.} + \varepsilon_1\ ,\quad P_2 = \text{Ок.} - \varepsilon_2$$

$$П_1 = \text{Кр.} + e_1\ ,\quad П_2 = \text{Кр.} - e_2$$

гдѣ ε_1, ε_2, e_1, e_2 будутъ количества убывающія неопредѣленно по мѣрѣ возрастанія числа сторонъ призмъ. Если чрезъ h означимъ высоту цилиндра, то это будетъ и высота обѣихъ призмъ.

Слѣдовательно (см. прибав. IX, 4):

$$\text{бок. повер. опис. приз.}=P_1h=(\text{Ок.}+\varepsilon_1)h$$

$$\text{бок. повер. впис. приз.}=P_2h=(\text{Ок.}-\varepsilon_1)h$$

а

$$\text{об. приз. опис.}=\Pi_1h=(\text{Кр.}+e_1)h$$

$$\text{об. приз. впис.}=\Pi_2h=(\text{Кр.}-e_2)h$$

Разность между боковыми поверхностями описанной и вписанной призмъ, есть:

$$\text{бок. пов. оп. пр.}-\text{бок. пов. вп. пр.}=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)h$$

а разность между объемами тѣхъ же призмъ есть:

$$\text{об. оп. пр.}-\text{об. вп. пр.}=(e_1+e_2)h$$

эти разности съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ числа сторонъ неопредѣленно убываютъ и могутъ быть сдѣланы менѣе всякой данной величины. Такъ какъ цилиндръ есть предѣлъ описанной и вписанной призмъ, то, прилагая разсужденія кн. X, пред. 1 и кн. XII, пред. 2, мы найдемъ, что:

Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія цилиндра на его высоту, а объемъ цилиндра равенъ произведенію площади основанія цилиндра на его высоту.

Но Ок.$=2\pi R$, Кр.$=\pi R^2$, слѣдовательно:

$$\text{бок. пов. цил.}=2\pi Rh$$

$$\text{об. цил.}=\pi R^2h$$

Если къ боковой поверхности цилиндра прибавимъ площади верхняго и нижняго основаній цилиндра, сумма которыхъ есть $2\pi R^2$, то получимъ полную поверхность цилиндра.

$$\text{пол. пов. цил.}=2\pi R\,(h+R)$$

А это выраженіе есть боковая поверхность цилиндра, имѣющаго тоже основаніе, и высоту $h+R$.

13. *Поверхность и объемъ конуса.* Если около круга основанія конуса опишемъ правильный многоугольникъ и впишемъ такой же многоугольникъ съ тѣмъ же числомъ сторонъ и вершины описаннаго и вписан-

наго многоугольниковъ соединимъ съ вершиною конуса, то получимъ правильныя пирамиды описанную и вписанную въ конусъ. Очевидно, что ребра вписанной пирамиды суть женератрисы конуса, а грань описанной пирамиды касается конуса также по женератрисѣ.

Такъ какъ описанная и вписанная пирамиды правильныя, то ихъ грани суть равные равнобедренные треугольники. Высота граней, описанной пирамиды, очевидно, есть апоѳема пирамиды, а женератриса конуса, которую означимъ чрезъ h. Означимъ апоѳему вписанной пирамиды чрезъ h_1, то мы будемъ имѣть, если означимъ высоту конуса и обѣихъ пирамидъ чрезъ H:

$$\text{бок. пов. оп. пир.}=P_1\frac{h}{2}=(\text{Ок.}+\varepsilon_1)\frac{h}{2}$$

$$\text{бок. пов. вп. пир.}=P_2\frac{h}{2}=(\text{Ок.}-\varepsilon_2)\frac{h_1}{2}$$

$$\text{об. опис. пир.}=\Pi_1\frac{H}{3}=(\text{Кр.}+e_1)\frac{H}{3}$$

$$\text{об. впис. пир.}=\Pi_2\frac{H}{3}=(\text{Кр.}-e_2)\frac{H}{3}$$

Такъ какъ поверхность и объемъ конуса меньше поверхности и объема описанной пирамиды и больше вписанной, а разности между поверхностями и объемами пирамидъ, съ увеличенiемъ числа сторонъ уменьшаются неопредѣленно, что видно изъ предъидущихъ выраженiй, то поверхность и объемъ конуса есть предѣлъ поверхностей и объемовъ пирамидъ описанныхъ и вписанныхъ, когда число сторонъ пирамидъ неопредѣленно увеличивается.

Но поверхность и объемъ описанной пирамиды суть:

$$\text{бок. пов. опис. пир.}=(\text{Ок.}+\varepsilon_1)\frac{h}{2}$$

$$\text{об. опис. пир.}=(\text{Кр.}+e_1)\frac{H}{3}$$

примѣняя къ этимъ уравненiямъ основную теорему предѣловъ (прибав. VII, пред. 19), найдемъ:

$$\text{пов. конус.}=\text{Ок.}\frac{h}{2}=2\pi R.\frac{h}{2}=\pi Rh$$

$$\text{об. конус.}=\text{Кр.}\frac{H}{3}=\pi R^2.\frac{H}{3}$$

гдѣ R есть радiусъ круга основанія.

Если необходимо имѣть полную поверхность конуса, то къ боковой его поверхности надобно прибавить площадь круга основанія πR^2, что даетъ:

$$\text{пол. пов. кон.}=\pi Rh+\pi R^2=\pi R(R+h)$$

изъ этого выраженія видимъ, что полная поверхность конуса, коего апоѳема есть h, равна боковой поверхности конуса, имѣющаго тоже основаніе, а апоѳемой $R+h$.

Легко также видѣть, что R, h, H связаны уравненіемъ:

$$h^2=R^2+H^2.$$

14. *Поверхность и объемъ конуса усѣченнаго параллельно основанію.*

Опишемъ около конуса правильную пирамиду, и будемъ увеличивать число сторонъ пирамиды, то поверхность и объемъ усѣченнаго конуса будетъ предѣлъ къ которому стремятся поверхность и объемъ усѣченной пирамиды, заключенной между тѣми же плоскостями, что и усѣченный конусъ. Разсуждая какъ выше, мы найдемъ, что боковая поверхность усѣченнаго конуса равна произведенію полусуммы окружностей верхняго и нижняго основаній усѣченнаго конуса, на его же сторону или женератрису. Если радіусъ нижняго основанія есть R, и верхняго r, сторона p, то:

$$\text{пов. усѣч. конус.}=\pi(R+r)p \qquad \text{(a)}$$

а полную поверхность получимъ прибавляя площади круговъ верхняго и нижняго основаній πR^2 и πr^2, слѣдовательно:

$$\text{пол. пов. усѣч. конус.}=\pi(R+r)p+\pi R^2+\pi r^2$$

Если чрезъ q означимъ высоту усѣченнаго конуса, то:

$$\text{об. усѣч. конус.}=\frac{1}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)q \qquad \text{(b)}$$

Выраженія (a) и (b) можно получить слѣдующимъ образомъ: означимъ апоѳему цѣлаго конуса чрезъ h, а отсѣченнаго чрезъ h_1, то мы будемъ имѣть:

$$\text{пов. бол. конус.}=\pi Rh$$

$$\text{пов. отсѣч. конус.}=\pi rh_1$$

откуда поверхность усѣченнаго конуса будетъ:

$$\text{пов. бол. кон.—пов. отсѣч. кон.=пов. усѣч. кон.}=\pi(Rh-rh_1)$$

Но:

$$h:h_1=R:r$$

а отсюда:

$$\frac{R-r}{R}=\frac{h-h_1}{h}$$

подставляя въ выраженіе $Rh-rh_1$ вмѣсто $h_1=\frac{rh}{R}$, найдемъ:

$$\text{пов. усѣч. кон.}=\pi(R^2-r^2)\,\frac{h}{R}=\pi(R+r)\,\frac{(R-r)h}{R}$$

откуда:

$$\text{пов. усѣч. кон.}=\pi(R+r)\,(h-h_1)=\pi(R+r)p$$

Если чрезъ H означимъ высоту большаго конуса, и чрезъ H_1 отсѣченнаго, то:

$$\text{об. больш. кон.}=\frac{1}{3}\pi R^2H$$

$$\text{об. отсѣч. кон.}=\frac{1}{3}\pi r^2H_1$$

слѣдовательно:

$$\text{об. усѣч. кон.=об. больш. кон.—об. отсѣч. кон.}=\frac{1}{3}\pi(R^2H-r^2H_1)$$

замѣчая, что:

$$R:r=H:H_1 \qquad \text{(c)}$$

и подставляя вмѣсто $H_1=\frac{rH}{R}$ въ предъидущее выраженіе, найдемъ:

$$\text{об. усѣч. кон.}=\frac{1}{3}\pi H\frac{(R^3-r^3)}{R}=\frac{1}{3}\pi\,(R^2+Rr+r^2)\,\frac{(R-r)H}{R}$$

Но изъ пропорціи слѣдуетъ, что:

$$\frac{R-r}{R}=\frac{H-H_1}{H}=\frac{q}{H}$$

Слѣдовательно:

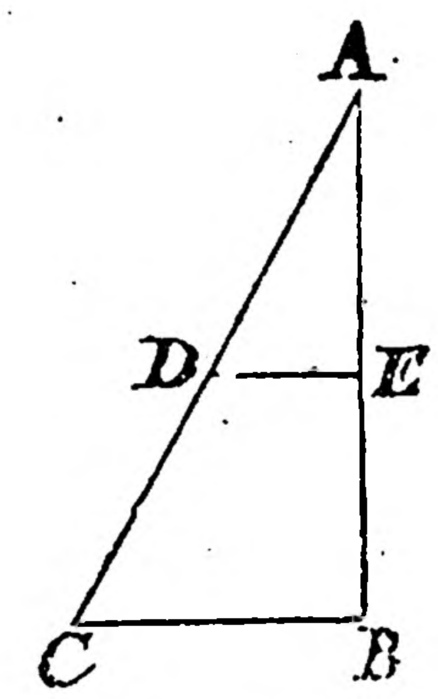
$$\text{об. усѣч. кон.}=\frac{1}{3}\,\pi q(R^2+Rr+r^2)$$

Замѣтимъ еще, что поверхности цѣлаго и усѣченнаго конусовъ можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ, D точка на срединѣ гипотенузы AC, DE перпендикуляръ къ AB (фиг. 564).

Въ конусѣ образованномъ вращеніемъ треугольника ABC около AB, окружность описанная точкою D будетъ равна половинѣ окружности, опи-

Фиг. 564.

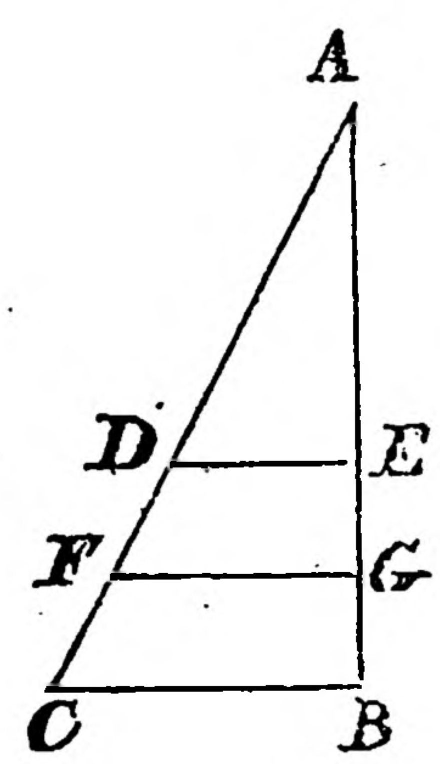


санной точкою C, такъ какъ $DE = \frac{1}{2} CB$ (кн. 6, пред. 2). Если $CB = R$, то $DE = \frac{1}{2} R$, но:

$$\text{пов. кон.} = 2\pi R . \frac{AC}{2} = 2\pi \frac{R}{2} AC = 2\pi . DE . AC$$

Точно также пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ, D какая нибудь точка его гипотенузы, F точка лежащая на срединѣ прямой DC, DE и FG прямыя перпендикулярныя къ AB (фиг. 565).

Фиг. 565.



Въ усѣченномъ конусѣ, образованномъ вращеніемъ трапеціи $CDEB$ около AB, окружность описанная точкою F равна полусуммѣ окружностей описанныхъ точками D и C, такъ какъ $FG = \frac{CB + DE}{2}$.

Но мы имѣемъ:

$$\text{пов. усѣч. кон.} = \pi(R + r)p = \pi(R + r) . CD$$

а. $R + r = 2FG$, слѣдовательно:

$$\text{пов. усѣч. кон.} = 2\pi FG . CD$$

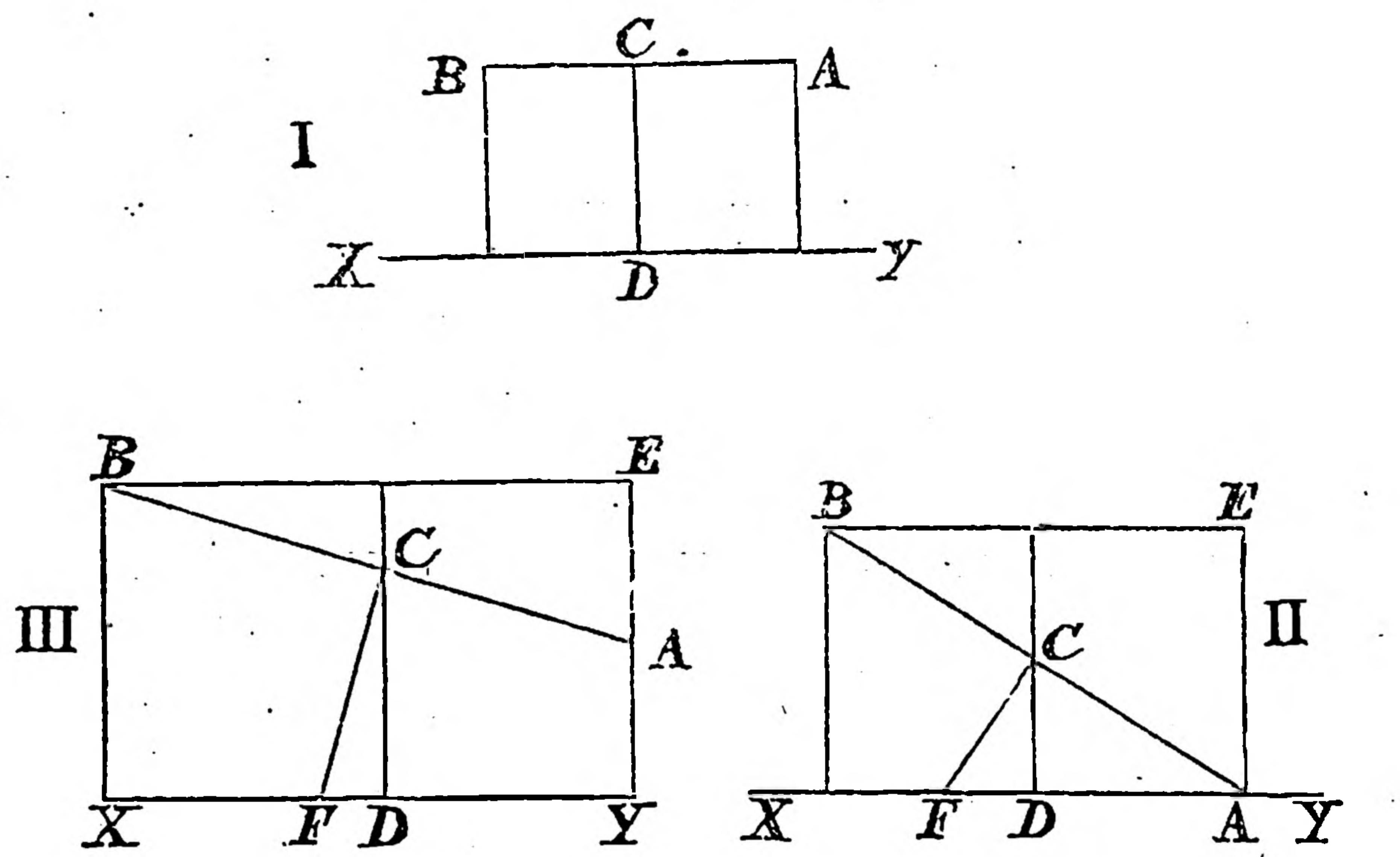
Шаръ.

15. *Предварительныя теоремы*. Чтобы найти мѣру поверхности шара необходимо изложить слѣдующія предварительныя теоремы:

1) Если конечная прямая AB, лежащая въ одной плоскости съ не-

опредѣленною прямою XY и вся по одну ея сторону (фиг. 566), вращается около XY, то поверхность описанная прямою AB будетъ или цилиндръ, если $AB \parallel XY$ (фиг. I), или конусъ, если AB не $\parallel XY$ и упирается однимъ концемъ въ XY (фиг. II), или наконецъ, усѣченный конусъ, если прямая AB не $\parallel XY$ и не встрѣчаетъ ее (фиг. III).

Фиг. 566.



Во всѣхъ этихъ случаяхъ, поверхность описанная прямою AB, будетъ равна:

$$2\pi.CD.AB$$

гдѣ CD есть перпендикуляръ опущенный изъ средины C прямой AB на XY (прибав. IX, 14).

Предъидущую мѣру поверхности, описанную прямой AB, можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Чрезъ точку B, во всѣхъ фигурахъ, проведемъ $BE \parallel BA$, изъ точекъ A и B проведемъ прямыя перпендикулярныя къ XY, а изъ C проведемъ перпендикуляръ къ AB до встрѣчи съ XY и CD перпендикуляръ къ XY. Такимъ образомъ получимъ два равноугольные треугольника ABE и FCD, слѣдовательно мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 16):

$$CD.AB = FC.BE$$

откуда:

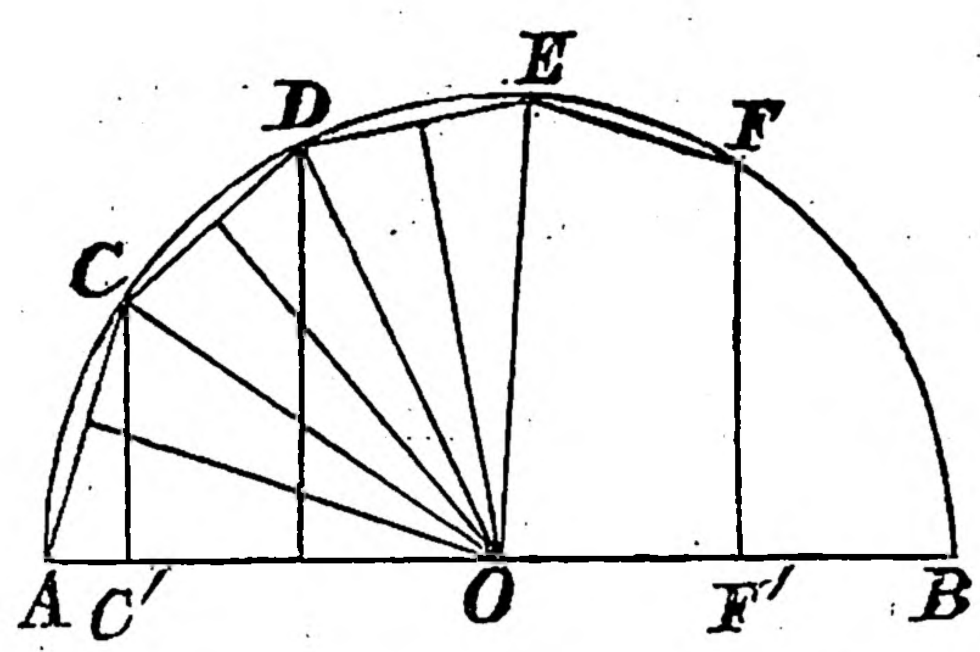
$$2\pi CD.AB = 2\pi FC.BE$$

Но $2\pi FC$ есть длина окружности, описанной радіусомъ FC, а BE есть проэкція прямой AB на XY. Слѣдовательно поверхность, описанная прямою AB, вращаясь около XY, будетъ равна произведенію окружности круга, имѣющаго радіусомъ часть перпендикуляра, возставленнаго къ AB изъ ея средины C, до встрѣчи съ XY, на проэкцію прямой AB на XY.

16. *Поверхность шара.* Впишемъ въ полукругъ правильный многоугольникъ $ACDEF....B$ и будетъ вращать полукругъ съ описаннымъ многоугольникомъ около діаметра AB, то поверхность описанная многоугольникомъ будетъ равна суммѣ поверхностей описанныхъ ея сторонами (фиг. 567). Итакъ какъ перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ многоугольника, встрѣчаютъ всѣ прямую вращенія AB въ центрѣ круга и всѣ равны, то описанная поверхность получится помножая окружность круга, коего радіусъ равенъ вышеупомянутому перпендикуляру, на проэкцію сторонъ многоугольника на діаметрѣ круга:

$$\text{пов. опис.} ACDEF.. = 2\pi.h.AB$$

Фиг. 567.



Это мѣра всей поверхности, а мѣра поверхности описанной частью полигона, напримѣръ $CDEF$ будетъ:

$$\text{пов. опис.} CDEF = 2\pi h.C'F'$$

гдѣ $C'F'$ есть проэкція кривой $CDEF$ на діаметрѣ AB.

Такъ какъ шаръ есть предѣлъ вписаннаго многогранника, коего число сторонъ неопредѣленно возрастаетъ, а величина неопредѣленно убываетъ, то, означая радіусъ шара чрезъ R и прилагая основную теорему предѣловъ, найдемъ:

$$\text{пов. опис. дуг.} ACDEF = 2\pi R.AF'$$

$$\text{пов. опис. дуг.} CDEF = 2\pi R.C'F'$$

Первое выраженіе есть поверхность шароваго сегмента, а второе поверхность шароваго пояса. Слѣдовательно *поверхность пояса равна поверхности цилиндра, коего основаніе есть большой кругъ шара, а высота есть высота пояса.* Тоже можно сказать и о сегментѣ.

Изъ этихъ обѣихъ выраженій получится поверхность шара, если сдѣлать $AF' = AB$ или $C'F' = AB = 2R$:

$$\text{пов. шара} = 4\pi R^2$$

Такъ какъ площадь круга, коего радіусъ есть R, равна πR^2, то, очевидно, что поверхность шара равна четыремъ площадямъ *большаго* круга шара. Если выраженіе $4\pi R^2$ написать въ формѣ $\pi(2R)^2$, то изъ него видно, что поверхность шара равна площади круга, коего радіусъ есть діаметръ шара.

Выраженіе сегмента:

$$\text{пов. сег.}=2\pi R.AF'$$

можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

Если соединимъ точку A съ F хордою AF, то (кн. 6, пред. 8) $AF^2=2R.AF'$, слѣдовательно:

$$\text{пов. сегм.}=\pi AF^2$$

т. е. поверхность сегмента равна площади круга, коего радіусъ есть хорда стягивающая дугу, описавшую сегментъ.

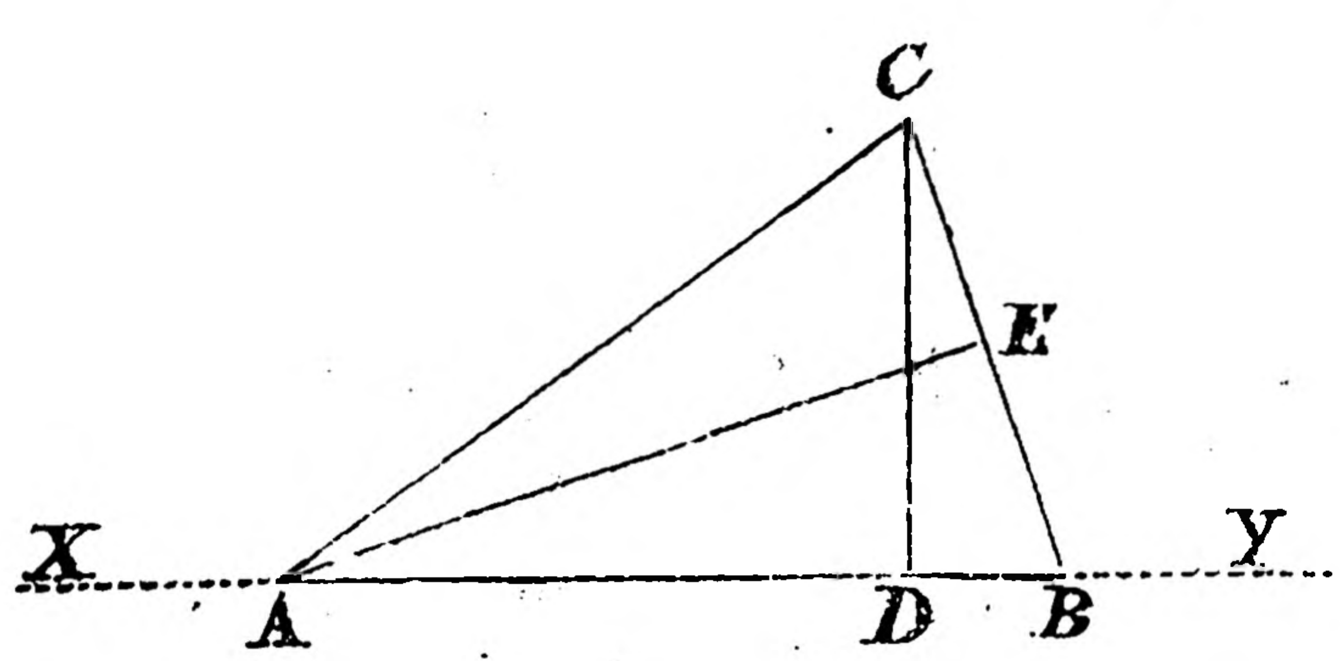
Объемъ шара.

17. *Предварительныя теоремы.*

Предложеніе. Если треугольникъ ABC сдѣлаетъ полный оборотъ около прямой XY, проходящей чрезъ его вершину A, то объемъ описанный имъ будетъ равенъ произведенію поверхности, описанной стороной BC, противолежащей вершинѣ A, на перпендикуляръ, опущенный изъ той же вершины на сторону BC.

1) Пусть ось вращенія XY совпадаетъ съ основаніемъ AB треугольника ABC (фиг. 568).

Фиг. 568.



Изъ вершины C опустимъ перпендикуляръ CD на AB, а изъ вершины A перпендикуляръ AE на BC.

Очевидно, что объемъ описанный треугольникомъ ABC будетъ равенъ суммѣ двухъ конусовъ, описанныхъ треугольниками ACD и BCD, слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } ACB=\tfrac{1}{3}\pi CD^2.AD+\tfrac{1}{3}\pi CD^2.DB=$$

$$=\tfrac{1}{3}\pi CD^2(AD+DB)=\tfrac{1}{3}\pi CD^2.AB=\tfrac{1}{3}\pi CD.CD.AB$$

Но изъ подобія треугольниковъ CDB и AEB мы имѣемъ (кн. 6, пред. 16):

$$CD.AB=BC.AE$$

слѣдовательно:

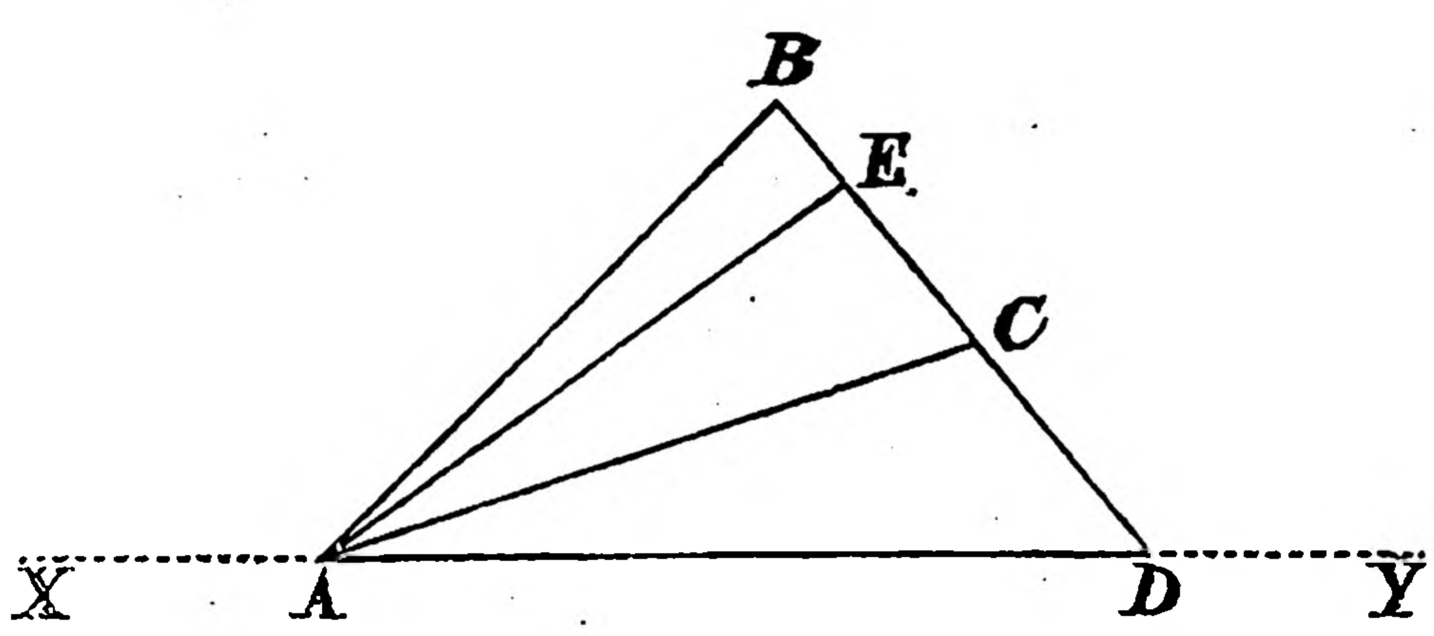
$$\text{об. опис. } ACB=\tfrac{1}{3}\pi CD.CD.AB=\tfrac{1}{3}\pi CD.BC.AE$$

но $\pi CD.BC$ есть поверхность описанная стороною BC, слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } ACB=\text{пов. опис. } BC.\tfrac{1}{3}AE$$

2) Ось XY не совпадаетъ съ основаніемъ треугольника ABC и сторона BC не параллельна оси XY (фиг. 569).

Фиг. 569.



Продолжимъ сторону BC до встрѣчи съ осью XY въ точкѣ D, а изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AE на BC.

Очевидно, что объемъ описанный треугольникомъ ABC равенъ разности объемовъ, описанныхъ треугольниками ABD и ACD, слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } ABC=\text{об. опис. } ABD-\text{об. опис. } ACD$$

соображаясь съ предъидущимъ найдемъ, что:

$$\text{об. опис. } ABC=\text{пов. опис. } BD.\tfrac{1}{3}AE-\text{пов. опис. } CD.\tfrac{1}{3}AE$$

откуда:

$$\text{об. опис. } ABC=(\text{пов. опис. } BD-\text{пов. опис. } CD)\tfrac{1}{3}AE$$

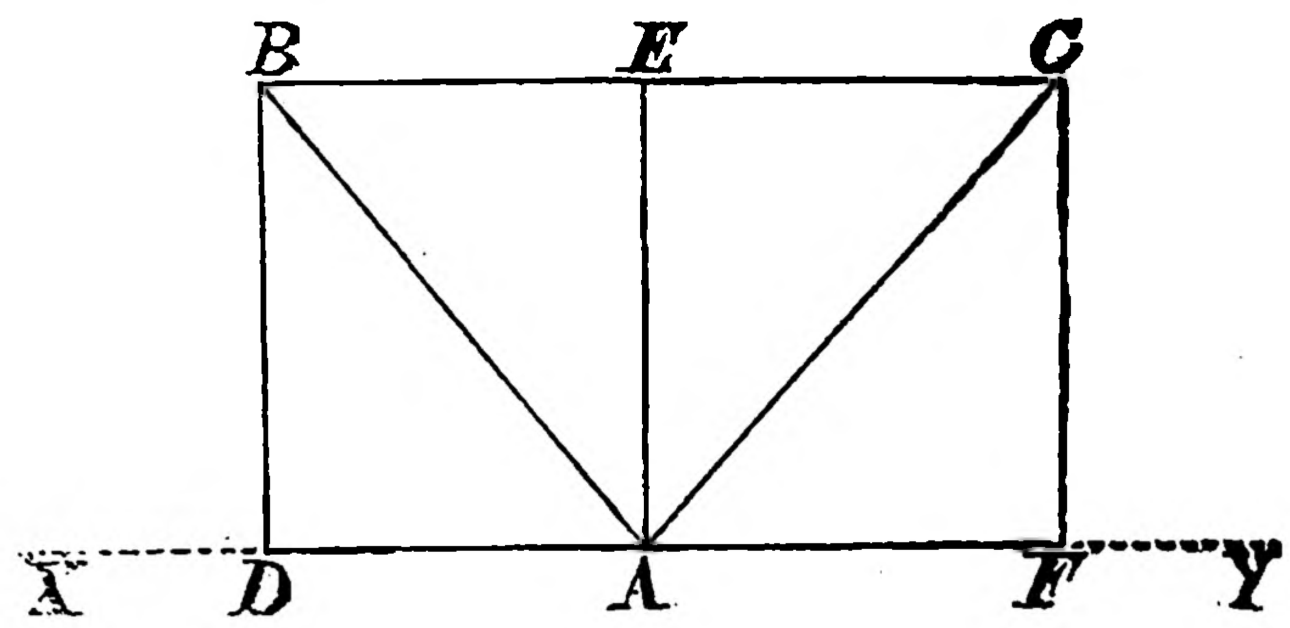
или

$$\text{об. опис. } ABC=\text{пов. опис. } BC.\tfrac{1}{3}AE.$$

3) Сторона $BC \parallel XY$ (фиг. 570).

Проведемъ BD, AE, CF перпендикулярно къ XY, то объемъ описанный BAC около XY будетъ равенъ объему цилиндра описаннаго сто-

Фиг. 570.



роною BC безъ двухъ равныхъ конусовъ описанныхъ треугольниками DBA и FCA.

$$\text{об. опис. } BAC = \text{об. цил. опис. } BC - 2 \text{ об. кон. опис. } ACF$$

Соображаясь съ предъидущимъ, найдемъ:

$$\text{об. опис. } BAC = \pi AE.^2 BC - 2\pi AE^2 . \tfrac{1}{3} AF$$

Но $AF = \frac{1}{2} BC$, слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } BAC = \pi AE.^2 BC - \pi AE.^2 \tfrac{1}{3} BC$$

откуда:

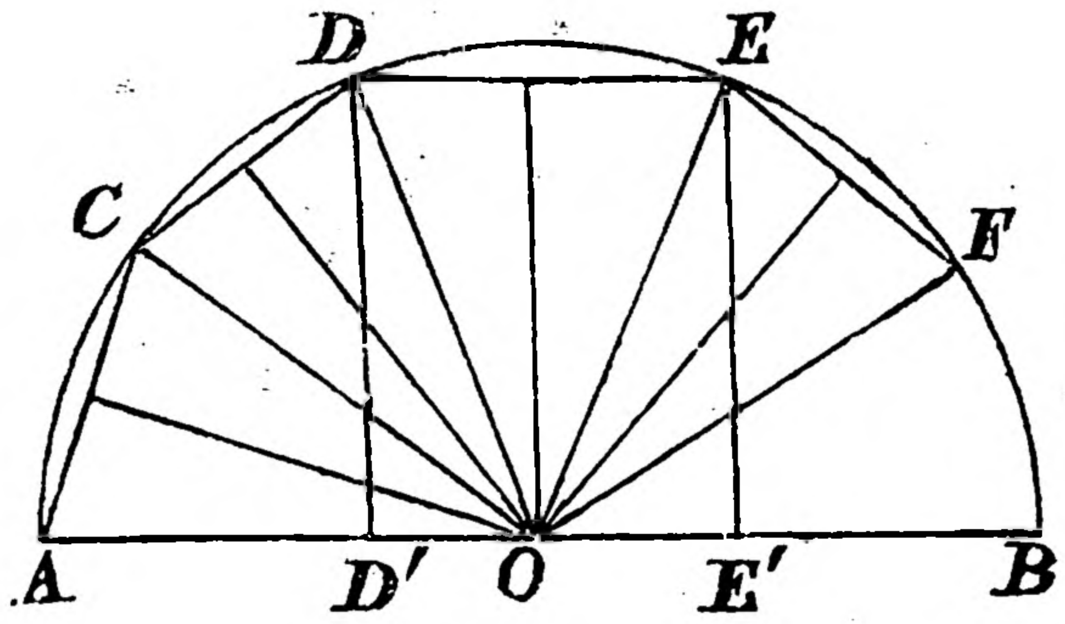
$$\text{об. опис. } BAC = \tfrac{2}{3} \pi AE^2 . BC = \tfrac{2}{3} \pi AE.BC.AE$$

Но $2\pi AE.BC$ есть поверхность описанная стороною BC, слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } BAC = \text{пов. опис. } BC. \tfrac{1}{3} AE$$

18. *Объемъ шара.* Впишемъ въ полукругъ ACB правильный многоугольникъ, котораго число сторонъ можетъ возрастать, а величина убывать неопредѣленно. Пусть такой многоугольникъ будетъ $ACDEFB$ (фиг. 571).

Фиг. 571.



Объемъ описанный многоугольникомъ $ACDEFB$ будетъ равенъ суммѣ объемовъ описанныхъ треугольниками ACO, CDO, DEO, EFO, FBO. Объемъ описанный каждымъ изъ этихъ треугольниковъ равенъ поверхности, описанной стороною многоугольника умноженной на треть апоѳемы, но всѣ апоѳемы равны, слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } ACDEFB = \text{пов. опис. } ACDEFB \cdot \tfrac{1}{3}\, OL \qquad (\alpha)$$

Такъ какъ предѣлъ тѣла описаннаго многоугольникомъ $ACDEFB$ есть объемъ шара, предѣлъ поверхности описанной тѣмъ же многоугольникомъ есть поверхность шара, а предѣлъ апоѳемы OL есть радіусъ R шара, то прилагая основную теорему предѣловъ къ уравненію (α) найдемъ:

$$\text{об. шар.} = \text{пов. шар. } \tfrac{1}{3}\, R$$

но пов. шар.$=4\pi R^2$, слѣдовательно:

$$\text{об. шар.} = \tfrac{4}{3}\, \pi R^3$$

Это выраженіе можно написать такъ:

$$\text{об. шар.} = \tfrac{8}{6}\, \pi R^3 = \frac{\pi(2R)^3}{6}$$

назвавъ чрезъ D діаметръ шара мы будемъ имѣть $D=2R$, откуда:

$$\text{об. шар.} = \frac{\pi D^3}{6}$$

19. *Объемъ шароваго сектора и сегмента.* Объемъ тѣла описаннаго частью полигона, напримѣръ $ACDEO$, равенъ суммѣ тѣлъ описанныхъ треугольниками ACO, CDO, DEO (фиг. 571). Слѣдовательно:

$$\text{об. тѣл. опис. } ACDEO = \text{об. опис. } ACO + \text{об. опис. } CDO + \text{об. опис. } DEO$$

соображаясь съ выше найденнымъ мы получимъ:

$$\text{об тѣл. опис. } ACDEO = \text{пов. опис. } AC \cdot \tfrac{1}{3}\, LO + \text{пов. опис. } CD \cdot \tfrac{1}{3}\, LO +$$

$$+ \text{пов. опис. } DE \tfrac{1}{3}\, LO$$

или

$$\text{об. тѣл. опис. } ACDEO = \text{пов. опис. } ACDE \cdot \tfrac{1}{3}\, LO$$

Если теперь перейдемъ къ предѣлу, то найдемъ, что объемъ шароваго сектора будетъ равенъ поверхности шароваго сегмента описаннаго дугою $ACDE$ умноженной на одну треть радіуса шара:

$$\text{об. шар. сек. } ACDEO = \text{пов. шар. сег. опис. } ACDE . \tfrac{1}{3} R$$

но:

$$\text{пов. шар. сег. оп. } ACDE = 2\pi R . AE'$$

слѣдовательно:

$$\text{об. шар. сек. } ACDEO = \tfrac{2}{3} \pi R^2 . AE'$$

Изъ этого выраженія получится объемъ шара, если $AE' = 2R$.

Объемъ шароваго сегмента. Объемъ шароваго сегмента, описаннаго частью круга ACD равенъ, очевидно, объему шароваго сектора, описаннаго частью круга $ACDO$ безъ объема конуса, описаннаго треугольникомъ $D'DO$ (фиг. 571). Слѣдовательно:

$$\text{об. шар. сег. опис. } ACD = \text{об. шар. сек. оп. } ACDO - \text{об. конус. } D'DO$$

или, соображаясь съ найденнымъ выше, мы найдемъ:

$$\text{об. шар. сег. опис. } ACD = \tfrac{2}{3} \pi R^2 . AD' - \tfrac{1}{3} \pi DD'^2 . D'O$$

Если высоту AD' сегмента назовемъ чрезъ H и замѣтимъ (кн. 6, пред. 8), что:

$$DD'^2 = (2R - H)H$$

то найдемъ, что:

$$\text{об. шар. сег. опис. } ACD' = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$$

Объемъ шара можно найти еще слѣдующимъ образомъ: представимъ, что около шара описанъ многогранникъ, коего число граней могло бы увеличиваться неопредѣленно, а величина уменьшаться неопредѣленно. Если вершины угловъ каждой такой грани, описаннаго многогранника, соединимъ съ центромъ шара, то получимъ пирамиды, коихъ вершины находятся въ центрѣ шара, а основанія будутъ касаться шара.

Всѣ эти пирамиды имѣютъ одну высоту—радіусъ шара, слѣдовательно, если чрезъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ означимъ ихъ основанія, то объемы всѣхъ этихъ пирамидъ будутъ:

$$\omega_1 \frac{R}{3}, \quad \omega_2 \frac{R}{3}, \quad \ldots, \quad \omega_n \frac{R}{3}$$

Если сложимъ эти объемы, то получимъ объемъ описаннаго около шара многогранника:

$$\text{об. мног.} = (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n) \frac{R}{3}$$

Слѣдовательно объемъ многогранника будетъ равенъ поверхности $\omega_1+\omega_2+ \,.\,.\, +\omega_n$ многогранника умноженной на треть радіуса.

Если къ предъидущему уравненію приложимъ основную теорему предѣловъ, то найдемъ, что:

$$\text{пред. об. мног.}=\text{пред.}(\omega_1+\omega_2+ \,.\,.\, +\omega_n).\frac{R}{3}$$

но предѣлъ объема многогранника есть объемъ шара, а пред. $(\omega_1+\omega_2\,.\,.+ +\omega_n)=4\pi R^2$, т. е. поверхность шара, слѣдовательно:

$$\text{об. шар.}=4\pi R^2.\frac{R}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Разсуждая подобнымъ образомъ, относительно шароваго сектора, мы найдемъ, что объемъ его равенъ шаровой поверхности его на треть радіуса шара, но шаровая поверхность сектора, есть поверхность сегмента, которая равна площади большаго круга шара умноженной на высоту сегмента, которая пусть, напримѣръ, будетъ H, слѣдовательно объемъ сектора будетъ:

$$\text{об. шар. сек.}=2\pi R.H.\frac{R}{3}$$

или

$$\text{об. шар. сек.}=\frac{2}{3}\pi R^2.H$$

Откуда, если $H=2R$, то найдемъ объемъ шара.

20. *Объемъ шароваго пояса.* Поясомъ называется часть шара заключенная между двумя параллельными плоскостями. Очевидно, что объемъ пояса есть разность объемовъ двухъ сегментовъ.

Если высоту большаго изъ нихъ назовемъ чрезъ H, а меньшаго чрезъ h, то объемы ихъ будутъ:

$$\text{об. сег. 1-го}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$$

$$\text{об. сег. 2-го}=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

вычитая получимъ объемъ шароваго пояса:

$$\text{об. шар. пояс.}=\pi R(H^2-h^2)-\frac{\pi}{3}(H^3-h^3)$$

Если высоту шароваго пояса назовемъ чрезъ q, а радіусы основаній чрезъ r_1 и r_2 то мы будемъ имѣть:

$$H-h=q,\quad r_1^2=H(2R-H),\quad r_2^2=h(2R-h) \qquad (1)$$

Предъидущее выраженіе для объема пояса можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\text{об. шар. пояс.}=\pi R(H+h)q-\frac{\pi}{3}(H^2+Hh+h^2)q \qquad (2)$$

Изъ выраженій (1) мы имѣемъ:

$$H^2+h^2=2R(H+h)-(r_1^{\,2}+r_2^{\,2})$$

подставляя во (2), послѣ нѣсколькихъ преобразованій, найдемъ:

$$\text{об. шар. пояс.}=\frac{\pi r_1^{\,2}q+\pi r_2^{\,2}q}{2}+\frac{\pi q^3}{6}$$

Формула замѣчательная по смыслу: объемъ шароваго пояса равенъ суммѣ объемовъ двухъ цилиндровъ изъ коихъ одинъ имѣетъ основаніемъ нижнее основаніе пояса, а другой верхнее, а высоту оба имѣютъ равную половинѣ высоты пояса, съ объемомъ шара коего діаметръ есть высота пояса.

ЗАДАЧИ.

Книга I.

Отъ 1 до 15.

1. На данной прямой построить равнобедренный треугольникъ, коего бы стороны были равны другой данной прямой?

2. Если въ пред. 2, книги 1, діаметръ меньшаго круга будетъ равенъ радіусу большаго, то показать гдѣ будетъ находится данная точка и гдѣ вершина построеннаго треугольника.

3. Если двѣ прямыя, пересѣкаясь подъ прямымъ угломъ, дѣлятъ одна другую пополамъ, то каждая точка одной изъ нихъ находится въ равномъ разстояніи отъ концовъ другой.

4. Если углы ABC и ACB при основаніи равнобедреннаго треугольника дѣлятся прямыми BD и CD пополамъ, то треугольникъ DBC будетъ равнобедренный.

5. Если въ равнобедренномъ треугольникѣ BAC, каждый изъ угловъ при основаніи вдвое больше третьяго угла A, то прямая BD, равнодѣлящая уголъ B, встрѣчаетъ сторону AC въ точкѣ D, такъ что $BD=AD$.

6. Если въ пред. 5, кн. 1, прямыя FC и BG встрѣчаются въ точкѣ H, то $FH=GH$.

7. Если въ пред. 5, кн. 1, прямыя FC и BG встрѣчаются въ точкѣ H, то прямая AH дѣлитъ уголъ BAC пополамъ.

8. Если стороны AB и AD четыреугольника $ABCD$ равны, и діагональ AC дѣлитъ уголъ BAD пополамъ, то стороны CB и CD будутъ также равны и діагональ AC будетъ дѣлитъ уголъ BCD пополамъ.

9. Два треугольника ACB и ADB построены на одномъ основаніи AB и при томъ такъ, что $AC=BD$ и $AD=BC$, а AD и BC пересѣкаются въ точкѣ O, показать, что треугольникъ AOB будетъ равнобедренный.

10. Противоположные углы въ ромбѣ равны.

11. Діагонали ромба дѣлятъ углы его пополамъ.

12. Если два равнобедренные треугольника построены на одномъ основаніи, то прямая, проходящая чрезъ ихъ вершины, пересѣкаетъ основаніе подъ прямымъ угломъ.

13. На данной прямой найти точку, которая бы находилась въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ?

14. Чрезъ данныя двѣ точки, лежащія съ противоположныхъ сторонъ данной прямой, провести двѣ прямыя, которыя бы пересѣкаясь на данной прямой, составляли уголъ, равнодѣлящая котораго есть данная прямая?

15. Если каждый изъ двухъ смежныхъ угловъ раздѣлить пополамъ, то равнодѣлящія будутъ перпендикулярны между собою.

16. Если четыре прямыя, пересѣкаясь въ одной точкѣ, образуютъ равные противоположные углы, то онѣ попарно составляютъ двѣ прямыя.

Отъ 16 до 26.

17. Въ треугольникѣ ABC уголъ A раздѣленъ пополамъ и равнодѣлящая встрѣчаетъ сторону BC въ точкѣ D, показать, что $BA>BD$, а $CA>CD$.

18. Въ пред. 17, кн. 1, соединяя точку A съ какою нибудь точкою прямой BC, показать, что $\angle ABC+\angle ACB<2d$.

19. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ сторона AD наибольшая, а BC наименьшая, показать, что $\angle ABC>\angle ADC$ и $\angle BCD>\angle BAD$.

20. Если чрезъ вершину A одного изъ угловъ квадрата проведемъ прямую, которая встрѣчаетъ одну изъ противоположныхъ сторонъ, а будучи продолжена встрѣчаетъ другую въ точкѣ F, то прямая AF больше діагонали квадрата.

21. Перпендикуляръ есть кратчайшая прямая, которая можетъ быть проведена между данною точкою и данною прямою. Изъ остальныхъ прямыхъ та, которая ближе къ перпендикуляру будетъ меньше той, которая дальше отъ перпендикуляра, и только двѣ равныя прямыя могутъ быть проведены чрезъ данную точку къ данной прямой одна съ одной стороны перпендикуляра, а другая съ другой.

22. Сумма разстояній какой нибудь точки отъ вершинъ угловъ треугольника больше половины суммы сторонъ треугольника.

23. Сумма всѣхъ сторонъ четыреугольника больше суммы его діагоналей.

24. Сумма двухъ сторонъ треугольника больше дважды взятой прямой, соединяющей вершину треугольника съ срединою его основанія.

25. Если сумма двухъ угловъ въ треугольникѣ равна третьему углу, то треугольникъ можетъ быть раздѣленъ на два равнобедренные треугольника.

26. Если въ треугольникѣ уголъ C равенъ суммѣ угловъ A и B, то сторона AB будетъ равна дважды взятой прямой, соединяющей вершину C съ срединой AB.

27. По данной сторонѣ, углу прилежащему ей и суммѣ остальныхъ сторонъ построить треугольникъ?

28. Перпендикуляры опущенные изъ какой нибудь точки прямой, равнодѣлящей уголъ, на стороны этого угла, равны.

29. На данной прямой найти точку, изъ которой, опущенные перпендикуляры на двѣ другія данныя прямыя, были бы равны?

30. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные изъ двухъ данныхъ точекъ, на прямую съ противоположныхъ ея сторонъ, были равны?

31. Въ треугольникѣ ABC проведена прямая, равнодѣлящая уголъ A; изъ точки B опущенъ перпендикуляръ на равнодѣлящую и встрѣчаетъ ее въ точкѣ D, прямая BD встрѣчаетъ сторону AC или ея продолженіе въ точкѣ E, показать что $BD=DE$.

32. Чрезъ данную точку P провести прямую, которая бы, встрѣчала въ точкахъ E и F стороны даннаго угла BAC, такъ чтобы $AE=AF$?

33. Показать что два прямоугольные треугольника, имѣющіе равные гипотенузы и по одному равному катету, равны.

Отъ 27 до 31.

34. Всякая прямая параллельная основанію равнобедреннаго треугольника составляетъ съ его сторонами равные углы.

35. Если двѣ прямыя A и B параллельны другимъ двумъ прямымъ C и D, каждая каждой, то уголъ составляемый прямыми A и B равенъ углу составляемому прямыми C и D.

36. Двѣ параллельныя прямыя пересѣчены третьей, чрезъ средину отрѣзка третьей, заключеннаго между параллельными, проведена какая нибудь прямая, показать, что она въ этой точкѣ дѣлится пополамъ.

37. Если чрезъ точку равноотстоящую отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ, проведемъ двѣ, какія нибудь прямыя, то онѣ отсѣкаютъ отъ параллельныхъ прямыхъ равные отрѣзки.

38. Если равнодѣлящая внѣшній уголъ треугольника параллельна основанію, то треугольникъ будетъ равнобедренный.

39. На данной прямой CD найти такую точку B, которую если соединимъ съ данною точкою A, то уголъ ABC между данною прямою CD и AB былъ бы равенъ данному углу?

40. Если въ треугольникѣ проведемъ равнодѣлящую одинъ изъ угловъ и чрезъ точку встрѣчи ея съ противоположной стороной проведемъ параллельныя остальнымъ сторонамъ, то отрѣзки этихъ прямыхъ, заключенные между точкою ихъ пересѣченія и сторонами треугольника, будутъ равны.

41. Сторона BC треугольника ABC продолжена до какой нибудь точки D, уголъ ACB раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ сторону AB въ точкѣ E. Чрезъ точку E проведена прямая параллельно сторонѣ BC и встрѣчаетъ сторону AC въ точкѣ F, а равнодѣлящую внѣшній уголъ ACD въ точкѣ G. Показать, что $EF=FG$.

42. На гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника ABC найти такую точку D чтобы прямая DB была равна перпендикуляру опущенному изъ D на AC?

43. Найти въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC на равныхъ сторонахъ AB и AC, такія точки D и E, чтобы $BD=DE=EC$?

44. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC проведена, какая нибудь прямая перпендикулярно къ его основанію BC, эта прямая встрѣчаетъ сторону AB въ точкѣ D, и продолженіе стороны AC въ точкѣ E, показать, что треугольникъ AED равнобедренный.

На 32.

45. Изъ вершинъ угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника опущенны перпендикуляры на противолежащія стороны, показать, что углы составляемые ими съ основаніемъ равны каждый, половинѣ угла противолежащаго основанію.

46. На сторонахъ какого нибудь треугольника ABC построенны равносторонніе треугольники BCD, CAE, ABF всѣ внѣшніе, показать, что прямыя AD, BE и CF равны.

47. Найти величину угловъ правильнаго восьмиугольника?

48. Чрезъ двѣ данныя точки провести двѣ прямыя такъ, чтобы онѣ съ данною прямою образовали равносторонній треугольникъ?

49. Равнодѣлящія углы при основаніи въ равнобедренномъ треугольникѣ встрѣчаются подъ угломъ равнымъ внѣшнему углу треугольника при основаніи.

50. Если одна изъ равныхъ сторонъ AB въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC продолжена до точки D такъ, что $AD=AB$ и проведена прямая CD, показать что $\angle BCD=d$.

51. Въ треугольникѣ ABC внѣшніе углы B и C раздѣлены пополамъ прямыми BD и CD, пересѣкающимися въ точкѣ D, показать, что $\angle BDC + \frac{1}{2}\angle BAC = d$.

52. Показать, что, какой нибудь уголъ въ треугольникѣ будетъ тупой, прямой или острый, смотря потому будетъ ли онъ больше, равенъ или меньше суммы остальныхъ двухъ угловъ.

53. Построить равнобедренный треугольникъ, коего уголъ, противолежащій основанію, былъ бы равенъ четырежды взятому углу пру основаніи?

54. Въ треугольникѣ ABC сторона BC раздѣлена пополамъ въ точкѣ E, и сторона AB въ точкѣ G; AE продолжена до точки F такъ, что $EF = AE$ и CG продолжена до точки H такъ что $CG = GH$, показать, что FB и HB составляютъ одну прямую линію.

55. Построить равнобедренный треугольникъ, въ которомъ одна треть каждаго изъ угловъ при основаніи была равна половинѣ угла въ его вершинѣ?

56. На данныхъ прямыхъ AB и AC найти двѣ такія точки P и Q, чтобы сумма $AP + PQ$ была равна данной прямой и чтобы уголъ APQ былъ равенъ данному углу?

57. Чрезъ вершины угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, проведены двѣ прямыя, составляющія, каждая, съ основаніемъ углы равные одной трети каждаго угла при основаніи съ противоположной стороны вершины и продолжены эти прямыя до встрѣчи съ продолженіями сторонъ, показать, что три, образованные такимъ образомъ треугольника, всѣ равнобедренны.

58. Проведены двѣ прямыя AEB и CED, пересѣкающіяся въ точкѣ E; проведены прямыя AC и DB, образующія два треугольника ACE и BED, углы ACE и DBE раздѣлены прямыми CF и BF, встрѣчающимися въ точкѣ F, пополамъ, показать что $\angle CFB = \frac{1}{2}(\angle EAC + \angle EDB)$.

59. Прямая соединяющая вершину прямаго угла съ срединой гипотенузы равна половинѣ гипотенузы.

60. Изъ вершины угла A треугольника ABC опущенъ перпендикуляръ на противоположную сторону или на ея продолженіе и встрѣчаетъ ее въ точкѣ D, изъ вершины угла B точно также опущенъ перпендикуляръ на противоположную сторону или на ея продолженіе и встрѣчаетъ ее въ точкѣ E, показать что прямыя, соединяющія точки D и E съ срединою стороны AB, равны.

61. Изъ вершинъ угловъ при основаніи въ треугольникѣ опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, продолженныя если необходимо; показать что прямая, соединяющая точки пересѣченія, дѣлится пополамъ перпендикуляромъ опущеннымъ на нее изъ средины основанія.

62. Если въ пред. 1, кн. 1, точки C и H будутъ пересѣченія круговъ, если продолжимъ AB до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ K, то треугольникъ CHK будетъ равносторонній.

63. Равнодѣлящія углы при основаніи равнобедреннаго треугольника встрѣчаютъ стороны въ точкахъ D и E, показать что прямая DE параллельна основанію.

64. Даны двѣ прямыя AB и AC, на первой изъ нихъ дана точка P, требуется чрезъ точку P провести прямую, которая бы встрѣчала AC въ точкѣ Q, такъ чтобы $\angle APQ = 3\angle AQP$?

65. По данной гипотенузѣ и суммѣ катетовъ построить прямоугольный треугольникъ?

66. По данной гипотенузѣ и разности катетовъ построить прямоугольный треугольникъ?

67. По данной гипотенузѣ и перпендикуляру, опущенному изъ вершины прямого угла на гипотенузу построить прямоугольный треугольникъ?

68. По данному периметру и одному углу построить прямоугольный треугольникъ?

69. Раздѣлить на три равныя части прямой уголъ?

70. Раздѣлить на три равныя части данную прямую?

71. Изъ данной точки A провести двѣ перпендикулярныя прямыя, которыя бы, встрѣчали данныя параллельныя прямыя, BC въ точкѣ P, а DE въ точкѣ Q, такъ чтобы $AP=AQ$?

72. Построить треугольникъ, котораго бы периметръ былъ данъ и котораго бы углы были равны угламъ даннаго треугольника?

Отъ 33 до 34.

73. Если въ четыреугольникѣ двѣ противоположныя стороны параллельны, и другія двѣ равны, но не параллельны, то сумма двухъ какихъ нибудь, изъ его противоположныхъ угловъ, равна двумъ прямымъ.

74. Если прямая линія соединяя концы двухъ равныхъ, но не параллельныхъ линій, составляетъ съ каждою изъ нихъ равные углы съ одной ея стороны, то другая прямая, соединяющая другіе концы равныхъ прямыхъ, будетъ параллельна первой.

75. Показать что невозможно провести чрезъ вершины угловъ при основаніи въ треугольникѣ, прямыя до встрѣчя съ противоположными сторонами, которыя бы взаимно дѣлились пополамъ.

76. Если противоположныя стороны въ четыреугольникѣ равны, то онъ есть параллелограмъ.

77. Если противоположные углы въ четыреугольникѣ равны, то онъ есть параллелограмъ,

78. Діагонали параллелограма взаимно дѣлятся пополамъ.

79. Если діагонали въ четыреугольникѣ взаимно дѣлятся пополамъ, то онъ есть параллелограмъ.

80. Если прямая, соединяющая противоположные углы параллелограма дѣлитъ эти углы пополамъ, то всѣ стороны въ параллелограмѣ равны.

81. Чрезъ данную точку провести такъ прямую, чтобы отрѣзокъ ея заключенный между двумя параллельными линіями былъ данной величины?

82. Прямыя, равнодѣлящія углы при какой нибудь изъ сторонъ параллелограма, перпендикулярны.

83. Прямыя, равнодѣлящія противоположные углы параллелограма или параллельны или совпадаютъ.

84. Если въ параллелограмѣ діагонали равны, то и всѣ его углы равны.

85. Найти такую точку, чтобы перпендикуляры опущенные изъ нея на двѣ данныя прямыя были равны двумъ даннымъ прямымъ? Сколько есть такихъ точекъ?

86. Провести прямую, которая бы была равна данной прямой, параллельна другой прямой и заключалась между двумя данными прямыми?

87. На сторонахъ AB, BC и CD параллелограма $ABCD$ построены равносторонніе треугольники, такъ что вершины треугольниковъ, построенныхъ на AB и CD лежатъ внѣ параллелограма, а треугольника построеннаго на BC, внутри параллелограма, показать что разстояніе вершинъ перваго и третьяго отъ втораго равны діагоналямъ параллелограма.

88. Если уголъ въ параллелограмѣ будетъ увеличиваться, а величина сторонъ оста-

ваться безъ измѣненія, то діагональ параллелограма, проходящая чрезъ вершину увеличивающагося угла будетъ уменьшаться.

89. Три точки A, B, C лежатъ на одной прямой линіи и при томъ такъ, что $AB=BC$, показать, что сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ A и C, на какую нибудь прямую, не проходящую между точками A и C, будетъ равна удвоенному перпендикуляру, опущенному изъ точки B на туже прямую.

90. Если изъ вершинъ угловъ параллелограма опустимъ перпендикуляры на какую нибудь прямую, проходящую внѣ параллелограма, то сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ противоположныхъ угловъ будетъ равна суммѣ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ остальныхъ двухъ противоположныхъ угловъ.

91. Если въ шестисторонней фигурѣ противоположныя стороны равны и параллельны, то три прямыя, соединяющія вершины противоположныхъ угловъ, будутъ пересѣкаться въ одной точкѣ.

92. Между двумя данными прямыми AB и AC дана точка E, требуется провести чрезъ эту точку такъ прямую, чтобы ея отрѣзокъ, заключенный между прямыми AB и AC въ точкѣ E дѣлился пополамъ?

93. Въ данный ромбъ вписать другой ромбъ, такъ чтобы одна изъ вершинъ угловъ вписаннаго ромба дѣлила сторону ромба пополамъ?

94. Стороны AB и CD параллелограма $ABCD$ въ точкахъ E и F раздѣлены пополамъ, показать, что прямыя BE и BF дѣлятъ діагональ AC на три равныя части.

Отъ 35 до 45.

95. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, показать, что если чрезъ средину стороны DC проведемъ прямую параллельно сторонѣ AB, то образуется параллелограмъ, коего площадь будетъ равна площади данной фигуры $ABCD$.

96. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ сторона $BC \parallel AD$, точка E есть средина стороны DC, показать, что треугольникъ AEB равенъ половинѣ четыреугольника $ABCD$.

97. Показать что всякая прямая, проходящая чрезъ точку пересѣченія діагоналей, дѣлится этой точкой и сторонами параллелограма пополамъ.

98. Чрезъ данную внутри параллелограма точку провести прямую такъ, чтобы она раздѣлила параллелограмъ пополамъ?

99. Построить ромбъ равный данному параллелограму?

100. Если два треугольника имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой, и если сумма угловъ, заключенныхъ между равными сторонами треугольниковъ, равна $2d$, то площади треугольниковъ равны.

101. Прямая, встрѣчающая стороны AD и BC въ точкахъ E и F, параллелограма $ABCD$, дѣлитъ его пополамъ, показать, что треугольники EBF и CED равны.

102. Показать, что четыре треугольника, на которые дѣлится параллелограмъ его діагоналями, равномѣрны.

103. Двѣ прямыя AB и CD пересѣкаются въ точкѣ E, $\triangle AEC=\triangle BED$, показать что $BC \parallel AD$?

104. Въ параллелограмѣ $ABCD$ чрезъ точку P на діагонали BT проведены прямыя PA и PC, показать что $\triangle PAB=\triangle PCB$?

105. Если построимъ треугольникъ, имѣющій двѣ стороны равныя діагоналямъ, какого нибудь, четыреугольника, и уголъ, заключенный между этими сторонами, равенъ одному изъ угловъ между діагоналями, то площадь построеннаго треугольника будетъ равна площади четыреугольника.

106. Прямая, соединяющая средины двухъ сторонъ, какого нибудь, треугольника, параллельна третьей его сторонѣ.

107. Прямыя, соединяющія средины смежныхъ сторонъ, какого нибудь четыреугольника, образуютъ параллелограмъ.

108. Точки D и E суть средины сторонъ AB и AC треугольника ABC, прямыя CD и BE пересѣкаются въ точкѣ F, показать, что треугольникъ BFC равенъ четыреугольнику $ADFE$.

109. Прямая, дѣлящая двѣ какія нибудь стороны треугольника, равна половинѣ третьей стороны.

110. На основаніи AC треугольника ABC взята, какая нибудь, точка D; AD, DC, AB, BC въ точкахъ E, F, G, H раздѣлены пополамъ, показать, что EG равна и параллельна FH.

111. Даны средины сторонъ треугольника, построить треугольникъ?

112. Если соединимъ средины двухъ сторонъ, какого нибудь треугольника, то отдѣленный треугольникъ будетъ равенъ четверти цѣлаго.

113. Стороны AB и AC треугольника ABC въ точкахъ E и F раздѣлены пополамъ; изъ вершины A опущенъ перпендикуляръ на сторону BC и встрѣчаетъ ее въ точкѣ D, показать что $\angle FDE = \angle BAC$ и что четыреугольникъ $AFDE$ равенъ половинѣ треугольника ABC.

114. Два равномѣрные треугольника построены на одномъ основаніи съ противоположныхъ сторонъ, показать, что основаніе или его продолженіе дѣлитъ пополамъ прямую, соединяющую вершины треугольниковъ.

115. Три совершенно равные параллелограма помѣщены на одной прямой равными сторонами такъ что составляютъ одинъ параллелограмъ; концы основанія перваго изъ нихъ соединены съ концами противоположной стороны третьяго, показать, что параллелограмъ образованный такимъ образомъ отдѣляетъ отъ втораго часть равную половинѣ каждаго изъ нихъ.

116. $ABCD$ есть параллелограмъ; изъ точки D проведена, какая нибудь прямая DFG, встрѣчающая BC въ точкѣ F, а продолженіе AB въ точкѣ G; проведены прямыя AF и CG, показать, что $\triangle ABF = \triangle CFG$.

117. Данъ треугольникъ ABC, построить треугольникъ, котораго бы площадь была равна площади даннаго треугольника и котораго бы основаніемъ была данная прямая AD, совпадающая съ AB?

118. Данъ треугольникъ ABC, построить треугольникъ, котораго бы площадь была равна площади даннаго треугольника, и который бы имѣлъ вершину въ данной точкѣ на прямой BC, и основаніе на сторонѣ AB?

119. Данъ четыреугольникъ $ABCD$, построить другой равный по площади съ даннымъ, имѣющій AB одной стороной, а другою стороной была бы прямая, проведенная чрезъ данную точку на CD, параллельно AB?

120. Данъ четыреугольникъ $ABCD$, построить треугольникъ, котораго бы основаніе было на прямой AB, вершина въ данной точкѣ P на CD и котораго бы площадь была равна площади даннаго четыреугольника?

121. Данъ треугольникъ ABC, построить треугольникъ, коего бы площадь была равна площади даннаго треугольника, коего основаніе было на прямой AB, а вершина въ данной точкѣ прямой параллельной AB?

122. Данный треугольникъ раздѣлить пополамъ прямою проведенную чрезъ данную точку на одной изъ сторонъ?

123. Раздѣлить пополамъ, данный четыреугольникъ, прямою проходящею чрезъ данную вершину угла четыреугольника?

124. Если чрезъ точку O, находящуюся внутри параллелограма $ABCD$ проведены двѣ прямыя параллельно сторонамъ, и если параллелограмы OB и OD равны, то точка O находится на діагонали AC.

Отъ 46 до 48.

125. На сторонахъ AC и BC треугольника ABC построенны квадраты $ACDE$ и $BCFH$, показать, что прямыя AF и BD равны.

126. Квадратъ построенный на сторонѣ треугольника, противолежащей острому углу, меньше суммы квадратовъ построенныхъ на сторонахъ составляющихъ острый уголъ.

127. Квадратъ, построенный на сторонѣ треугольника, противолежащей тупому углу, больше суммы квадратовъ построенныхъ на сторонахъ, составляющихъ тупой уголъ.

128. Если квадратъ, построенный на сторонѣ треугольника меньше суммы квадратовъ построенныхъ на остальныхъ сторонахъ, то уголъ, составленный этими сторонами будетъ острый; а если больше, то тупой.

129. Въ прямоугольномъ треугольникѣ проведена прямая параллельно гипотенузѣ, точки пересѣченія этой прямой съ катетами соединены съ вершинами, противолежащихъ угловъ, показать, что сумма квадратовъ, построеныхъ на этихъ прямыхъ, равна суммѣ квадратовъ построенныхъ на гипотенузѣ и на проведенной прямой параллельно гипотенузѣ.

130. Если, какую нибудь точку P соединимъ съ вершинами A, B, C, D прямоугольника, то сумма квадратовъ, построенныхъ на PA и PC равна суммѣ квадратовъ, построенныхъ на PB и PD.

131. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ построенный на одномъ изъ катетовъ равенъ трижды взятому квадрату построенному на другомъ катетѣ, и если изъ вершины прямого угла проведены двѣ прямыя одна къ срединѣ гипотенузы, а другая перпендикулярно гипотенузѣ, то эти прямыя дѣлятъ прямой уголъ на три равныя части.

132. Если въ треугольникѣ уголъ A прямой, а прямыя BE и CF соединяютъ вершины B и C съ срединами E и F катетовъ, то четыре раза взятая сумма квадратовъ построенныхъ на BE и CF равна пять разъ взятому квадрату построенному на BC.

133. На гипотенузѣ BC и катетахъ CA и AB построенны квадраты $BDEC$, AF и AG, показать, что сумма квадратовъ построенныхъ на DG и EF равна пять разъ взятому квадрату, построенному на гипотенузѣ BC.

Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія I-й книги.

134. Внутри треугольника ABC взята точка P, показать, что:

$$AP+BP+CP<AB+BC+CA$$

135. Изъ центровъ A и B двухъ круговъ проведены параллельные радіусы AP и BQ; прямая PQ встрѣчаетъ круги еще въ точкахъ R и S, показать, что $AR \parallel BS$.

136. Если возьмемъ внутри параллелограма, какую нибудь точку и соединимъ ее съ концами противоположныхъ сторонъ, то полученные, такимъ образомъ, треугольники будутъ составлять половину параллелограма.

137. Если четыреугольникъ одною діагональю дѣлится пополамъ, то вторая діагональ дѣлится первою пополамъ.

138. Четыреугольникъ, который обѣими діагоналями дѣлится пополамъ, есть параллелограмъ.

139. Если въ 5 пред. 1 кн. равныя стороны треугольника продолжить въ вершинѣ, а не ниже основанія, то 15 пред. 1 кн. можно доказать, основываясь на предложеніяхъ не дальше 5-го.

140. Дана точка A внѣ данной прямой и точка B на прямой, найти третью точку P на прямой, такую, чтобы сумма $AP+PB$ была данной длины?

141. Если изъ какой нибудь точки на сторонѣ равнобедреннаго треугольника проведемъ прямую, которая бы, встрѣчая продолженіе другой равной стороны, дѣлилась основаніемъ пополамъ, то сумма прямыхъ, заключенныхъ между вершиною и точками встрѣчи, проведенной прямой, съ равными сторонами треугольника, равна суммѣ обѣихъ равныхъ сторонъ.

142. Изъ всѣхъ параллелограмовъ, которые можно составить изъ діагоналей данной длины наибольшій есть ромбъ.

143. Показать на основаніи предложеній 18 и 32, кн. 1, что, если гипотенузу BC прямоугольнаго треугольника ABC въ точкѣ D раздѣлимъ пополамъ, то $AD=BD=CD$.

144. Если двѣ равныя прямыя пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то четыреугольникъ, составленный, соединяя ихъ концы, равенъ половинѣ квадрата, построеннаго на одной изъ этихъ прямыхъ.

145. Вписать въ треугольникъ параллелограмъ такъ, чтобы его діагонали пересѣкались въ данной точкѣ внутри треугольника?

146. Построить треугольникъ по данному основанію, разности сторонъ и разности угловъ при основаніи?

147. AB и AC суть двѣ данныя прямыя линіи, требуется на AD найти такую точку P, что если опустимъ перпендикуляръ PQ на AC, то чтобы сумма $AP+AQ$ была равна данной прямой линіи.

148. Разстояніе вершины треугольника отъ средины основанія; равна, больше или меньше половины основанія; смотря потому будетъ ли въ треугольникѣ въ вершинѣ уголъ прямой, острый или тупой.

149. Если на сторонахъ квадрата возьмемъ точки всѣ въ равномъ разстояніи отъ вершинъ угловъ и соединимъ эти точки прямыми, то полученный четыреугольникъ будетъ также квадратъ.

150. На данной прямой, какъ на основаніи, построить треугольникъ по данной разности сторонъ и точкѣ чрезъ которую должна проходить одна изъ сторонъ?

151. Въ треугольникѣ ABC, $AB>AC$, уголъ A раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ BC въ точкѣ D, показать, что $BD>CD$?

152. Если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ равенъ утроенному другому углу, то треугольникъ можно раздѣлить на два равнобедренные треугольника.

153. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC одна изъ равныхъ сторонъ, напримѣръ AB, въ точкѣ D раздѣлена пополамъ и продолжена ниже основанія до точки E такъ, что $AB=BE$, точки D и E соединены съ точкою C прямыми EC и ED, показать, что $EC=2ED$.

154. Найти геометрическое мѣсто точки, которой бы разстояніе отъ одной данной точки было равно двойному ея разстоянію отъ другой данной точки?

155. Прямая AB въ точкѣ C раздѣлена пополамъ, на AC и CB какъ на діагоналяхъ построены параллелограмы $ADCE$ и $CFBG$, на смежныхъ сторонахъ CD и CF, CE и CG построены параллелограмы $CDLF$ и $CGME$, показать что діагонали LC и CM этихъ послѣднихъ параллелограмовъ составляютъ одну прямую линію.

156. $ABCD$ есть прямоугольникъ, коего углы A и C суть противоположные, E ка-

кая нибудь точка на сторонѣ BC, F также какая нибудь точка на сторонѣ CD, показать, что дважды взятая площадь треугольника AEF вмѣстѣ съ прямоугольникомъ $BE.DF$ составляетъ площадь всего прямоугольника $ABCD$.

157. Два треугольника ABC и DBC построены на одномъ основаніи BC, сторона $AB=AC$, кругъ, проходящій чрезъ точки C и D, имѣетъ центръ E на AC или на ея продолженіи; кругъ, проходящій чрезъ точки B и D, имѣетъ центръ F на BA или на ея продолженіи, показать, что въ четыреугольникѣ $AEDF$ сумма двухъ его сторонъ равна суммѣ другихъ двухъ сторонъ.

158. Даны двѣ прямыя AB и AC, требуется найти на AB такую точку P, чтобы перпендикуляръ, опущенный изъ нея на AC былъ меньше прямой AP на данную длину.

159. Показать, что противоположныя стороны равноугольнаго шестиугольника параллельны и что сумма двухъ какихъ нибудь смежныхъ сторонъ, равна суммѣ сторонъ, которымъ эти послѣднія параллельны?

160. На сторонѣ BC, какъ на гипотенузѣ, квадрата $BDEC$, построимъ, какой нибудь, прямоугольный треугольникъ ABC, изъ вершинъ D и E квадрата опущены на AC и AB перпендикуляры DM и EN, показать, что $AM=AB$ и $AN=AC$.

161. Даны двѣ прямыя AB и AC и дана точка P, требуется чрезъ точку P провести прямую такъ, чтобы треугольникъ, составленный ею съ прямыми AB и AC былъ наименьшій?

162. Въ треугольникѣ уголъ C прямой; требуется провести прямую, параллельно данной прямой, такъ, чтобы части ея заключенныя между сторонами прямаго угла C и гипотенузою AB были равны?

163. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC уголъ при вершинѣ B равенъ четырежды взятому углу при основаніи, сторона AB продолжена до точки D такъ, что $BD=2AB$, точка D соединена съ точкою C, показать, что треугольники ACD и ABC равноугольны.

164. Чрезъ точку K внутри параллелограма $ABCD$ проведены прямыя параллельно сторонамъ, показать, что разность параллелограмовъ, коихъ KA и KC суть діагонали, равна дважды взятому треугольнику BKD.

165. Построить прямоугольникъ, по данному катету и разности между гипотенузою и другимъ катетомъ?

166. Въ треугольникѣ ABC проведены прямыя AD и BE, дѣлящія стороны BC и AC въ точкахъ D и E пополамъ, эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ G, показать, что $AG=2DG$.

167. Въ прямоугольномъ треугольникѣ BAC прямой уголъ раздѣленъ прямою AE пополамъ, изъ средины D гипотенузы BC возставленъ перпендикуляръ, который встрѣчается съ равнодѣлящею AE въ точкѣ E, показать что $AD=DE$.

168. На діагонали AC квадрата $ABCD$ построимъ ромбъ $AEFC$, коего площадь равна площади квадрата, и коего вершина остраго угла находится въ точкѣ A, показать, что если проведемъ AF, то уголъ BAC раздѣлится на три равныя части.

169. Даны двѣ перпендикулярныя прямыя AB и AC, D какая нибудь точка на прямой AB, E какая нибудь точка на AC, на DE, какъ на діагонали, построимъ половину квадрата, коего вершина есть G, показать, что геометрическое мѣсто точекъ, построенныхъ подобно точкѣ G, есть равнодѣлящая уголъ BAC.

170. Показать, что площадь квадрата есть наибольшая изъ всѣхъ параллелограмовъ, имѣющихъ одинъ периметръ.

171. Вписать, въ данный квадратъ, квадратъ данной величины?

172. Въ треугольникѣ ABC, $AD=\frac{1}{3}AB$ и $AE=\frac{1}{3}AC$; CD и BE пересѣкаются въ точкѣ F, показать, что $\triangle BFC=\frac{1}{2}\triangle BAC$ и что четыреугольникъ $ADEF=\triangle CFE=\triangle BDF$.

173. Въ треугольникѣ ACB уголъ C прямой; уголъ A раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ BC въ точкѣ D и уголъ B раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ AC въ точкѣ E; AD и BE пересѣкаются въ точкѣ O, показать, что треугольникъ AOB равенъ половинѣ четыреугольника $ABDE$.

174. Показать, что равносторонній треугольникъ не можетъ быть раздѣленъ прямою на такія двѣ части которыя бы совмѣщались.

175. Параллелограмы $ABCD$ и $ACED$ построены на равныхъ основаніяхъ BC и CE и между одними параллельными AD и BE, прямыя BD и AE пересѣкаются въ точкѣ F, показать, что $BF=2DF$.

176. На сторонахъ AC и BC треугольника ABC построены параллелограмы $AFGC$ и $CBKH$; FG и KH пересѣкаются въ точкѣ L, которая соединена съ C, чрезъ A и B проведены прямыя AD и BE параллельно CL и встрѣчаютъ FG и KH въ точкахъ D и E, показать, что $ADEB$ есть параллелограмъ, который равенъ суммѣ параллелограмовъ FC и CK.

177. Если въ четыреугольникѣ двѣ стороны параллельны, то прямая, проведенная параллельно этимъ сторонамъ, чрезъ пересѣченіе діагоналей дѣлится въ этой точкѣ пополамъ.

178. Два треугольника построены на одномъ основаніи и между одними параллельными линіями, показать, что ихъ стороны отсѣкаютъ равныя части отъ всякой прямой, проведенной параллельно основанію.

179. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC уголъ A прямой, сторона $AC=2AB$, то $\angle B>2\angle C$.

180. Раздѣлить параллелограмъ прямыми, проходящими чрезъ одну изъ вершинъ его, на три равныя части?

181. Треугольникъ AHK есть разносторонній; $ABCD$ ромбъ, коего сторона равна сторонѣ треугольника, а стороны BC и CD проходятъ чрезъ точки H и K, показать, что уголъ A ромба есть $\frac{10}{9}d$.

182. Чрезъ данную точку на сторонѣ треугольника провести двѣ прямыя такъ, чтобы онѣ раздѣлили треугольникъ на три равныя части?

183. Если въ пред. 35, кн. 1, проведемъ по діагонали въ каждомъ параллелограмѣ изъ концевъ основанія, точку пересѣченія этихъ діагоналей соединимъ съ точкою пересѣченія сторонъ или ихъ продолженій, то проведенная прямая раздѣлитъ основаніе пополамъ.

184. Если на двухъ сторонахъ треугольника построимъ, какіе нибудь параллелограмы, то сумма ихъ площадей будетъ равна площади параллелограма, коего основаніе есть третяя сторона, а другія стороны равны и параллельны прямой соединяющей вершину треугольника съ точкою пересѣченія сторонъ двухъ первыхъ параллелограмовъ.

Книга II.

Отъ 1 до 11.

185. Прямая линія раздѣлена на двѣ части, показать, что если дважды взятый прямоугольникъ построенный на частяхъ равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на тѣхъ же частяхъ, то прямая раздѣлена на двѣ равныя части.

186. Раздѣлить прямую на такія двѣ части, чтобы площадь прямоугольника, построеннаго на этихъ частяхъ была наибольшая?

187. Построить прямоугольникъ, коего бы площадь была равна разности площадей двухъ данныхъ квадратовъ?

188. Раздѣлить прямую на такія двѣ части, чтобы сумма квадратовъ построенныхъ на этихъ частяхъ была наименьшая?

189. Показать, что квадратъ построенный на суммѣ двухъ прямыхъ съ квадратомъ построеннымъ на разности тѣхъ же прямыхъ равны дважды взятой суммѣ квадратовъ построенныхъ на каждой прямой.

190. Раздѣлить данную прямую на такія двѣ части, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на нихъ, была равна данному квадрату?

191. Раздѣлить данную прямую на такія двѣ части, чтобы квадратъ, построенный на одной изъ нихъ, былъ равенъ дважды взятому квадрату построенному на другой?

192. Если въ пред. 11, кн. 2, CH продолжить такъ, чтобы CH встрѣтила BF въ точкѣ L, то прямыя CL и BF перпендикулярны.

193. Въ томъ же предложеніи, если прямыя BE и CH встрѣчаются въ точкѣ O, то AO и CL перпендикулярны.

194. Показать, что если прямая раздѣлена на части, какъ въ пред. 11, кн. 2, то прямоугольникъ, построенный на суммѣ и разности частей, равенъ прямоугольнику построенному на частяхъ.

Отъ 12 до 14.

195. Квадратъ построенный на основаніи равнобедреннаго треугольника равенъ дважды взятому прямоугольнику построенному на одной изъ равныхъ сторонъ и на суммѣ той же стороны съ отрѣзкомъ заключеннымъ между вершиною угла противолежащаго основанію, и основаніемъ перпендикуляра опущеннаго изъ конца другой равной стороны на первую.

196. Во всякомъ треугольникѣ сумма квадратовъ, построенныхъ на двухъ сторонахъ равна дважды взятому квадрату построенному на половинѣ третьей стороны съ дважды взятымъ квадратомъ построеннымъ на прямой, соединяющей вершину противолежащую третьей сторонѣ съ срединою этой стороны.

197. Въ треугольникѣ ABC сторона $AB=AC$, если AB продолжимъ ниже основанія до точки D, такъ чтобы $AB=BD$, то квадратъ построенный на CD будетъ равенъ суммѣ квадрата на AB съ дважды взятымъ квадратомъ на BC.

198. Сумма квадратовъ построенныхъ на сторонахъ параллелограма равна суммѣ квадратовъ построенныхъ на діагоналяхъ.

199. Данное основаніе треугольника дѣлится центромъ даннаго круга пополамъ, если вершина треугольника лежитъ на окружности, то сумма квадратовъ построенныхъ на сторонахъ треугольника будетъ величина постоянная.

200. Во всякомъ четыреугольникѣ сумма квадратовъ построенныхъ на діагоналяхъ равна дважды взятой суммѣ квадратовъ построенныхъ на прямыхъ соединяющихъ средины противоположныхъ сторонъ.

201. Если изъ точки пересѣченія діаметровъ параллелограма, какъ изъ центра описать кругъ, то сумма квадратовъ построенныхъ на прямыхъ, соединяющихъ, какую нибудь точку окружности съ вершинами параллелограма есть величина постоянная.

202. Сумма квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ четыреугольника, больше суммы квадратовъ, построенныхъ на діагоналяхъ, на четырежды взятый квадратъ, построенный на прямой, соединяющей средины діагоналей.

203. На діаметрѣ AB круга взяты двѣ точки C и D равноотстоящія отъ центра,

изъ какой нибудь точки E окружности проведены прямыя ED и EC, показать, что сумма квадратовъ на EC и ED равна суммѣ квадратовъ на AC и AD.

204. На основаніи BC треугольника взята точка D такъ, что сумма квадратовъ на AB и BD равна суммѣ квадратовъ на AC и CD, показать, что средина прямой AD равно отстоитъ отъ B и C.

205. Квадратъ, построенный на какой нибудь прямой, соединяющей вершину равнобедреннаго треугольника съ основаніемъ, больше квадрата построеннаго на сторонѣ, на прямоугольникъ изъ отрѣзковъ основанія.

206. На гипотенузѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC построенъ квадратъ $BDEC$, показать, что сумма квадратовъ на DA и AC равна суммѣ квадратовъ на EA и AB.

207. Въ треугольникѣ ABC, уголъ C прямой, изъ точки D на AC проведенъ перпендикуляръ DE къ AB, показать, что прямоугольникъ $AB.AE=AC.AD$.

208. Если чрезъ вершину одного изъ угловъ равносторонняго треугольника проведемъ прямую, которая бы пересѣкла продолженіе противоположной стороны и при томъ такъ, что прямоугольникъ, построенный на сторонѣ съ ея продолженіемъ и на продолженіи, былъ бы равенъ квадрату построенному на сторонѣ треугольника, то квадратъ, построенный на проведенной чрезъ вершину угла прямой, будетъ равенъ удвоенному квадрату построенному на сторонѣ треугольника.

209. Въ треугольникѣ ABC, углы B и C острые, если E и F суть точки въ которыхъ перпендикуляры, опущенные изъ противоположныхъ угловъ на стороны AC и AB ихъ пересѣкаютъ, то квадратъ на BC равенъ суммѣ прямоугольниковъ $AB.BF$ и $AC.CF$.

210. Раздѣлить данную прямую на такія двѣ части, чтобы прямоугольникъ, построенный на нихъ былъ равенъ квадрату, построенному на данной прямой, которая меньше половины прямой, которую требуется раздѣлить?

Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія II-й книги.

211. Продолжить одну изъ сторонъ даннаго треугольника такъ, чтобы прямоугольникъ построенный на сторонѣ и ея продолженіи, былъ равенъ разности квадратовъ, построенныхъ на другихъ сторонахъ?

212. Продолжить данную прямую такъ, чтобы сумма квадратовъ на данной прямой и на ея продолженіи была равна дважды взятому прямоугольнику, построенному на прямой съ продолженіемъ и на продолженіи?

213. Продолжить данную прямую такъ, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на данной прямой и на данной прямой съ продолженіемъ, была равна дважды взятому прямоугольнику, построенному на прямой съ продолженіемъ и на продолженіи?

214. Продолжить данную прямую такъ, чтобы прямоугольникъ, построенный на данной прямой съ продолженіемъ и на продолженіи, былъ равенъ квадрату построенному на данной прямой?

215. Построить равнобедренный тупоугольный треугольникъ такой, чтобы квадратъ, построенный на наибольшей сторонѣ, былъ равенъ трижды взятому квадрату, построенному на одной изъ равныхъ сторонъ?

216. Найти тупой уголъ треугольника, когда квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей тупому углу больше суммы квадратовъ изъ сторонъ, заключающихъ тупой уголъ, на прямоугольникъ, построенный на сторонахъ?

217. Построить прямоугольникъ равный данному квадрату, когда сумма смежныхъ сторонъ прямоугольника данной величины.

218. Построить прямоугольникъ равный данному квадрату, когда разность смежныхъ сторонъ прямоугольника равна данной величинѣ?

219. Наименьшій квадратъ, вписанный въ данный квадратъ будетъ тотъ, который равенъ половинѣ даннаго квадрата?

220. Раздѣлить данную прямую на двѣ части такъ, чтобы сумма квадратовъ построенныхъ на цѣлой прямой и на отрѣзкѣ, была равна удвоенному квадрату на другомъ отрѣзкѣ?

221. Два прямоугольника имѣютъ равныя площади и равные периметры, показать, что онѣ равны во всѣхъ своихъ частяхъ.

222. $ABCD$ есть прямоугольникъ, точка P такъ взята, что $PA+PC=PB+PD$, показать, что геометрическое мѣсто точки P есть двѣ прямыя, проведенныя чрезъ центръ прямоугольника параллельно его сторонамъ.

Книга III.

Отъ 1 до 15.

223. Изъ данной точки какъ изъ центра описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ концы діаметра даннаго круга?

224. Показать, что перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ четыреугольника, вписаннаго въ кругѣ, пересѣкаются въ постоянной точкѣ?

225. Если два круга пересѣкаются, то, двѣ какія нибудь, параллельныя, проведенныя чрезъ точки пересѣченія круговъ, равны.

226. Два круга, коихъ центры суть A и B, пересѣкаются въ точкѣ C, чрезъ C проведены двѣ хорды DCE и FCG одинаково наклоненныя къ AB и оканчивающіяся на кругахъ, показать, что $DE=FG$.

227. Чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія, двухъ данныхъ круговъ, провести наибольшую прямую, заключенную кругами?

228. Если изъ какой нибудь точки на діаметрѣ круга проведемъ прямыя, къ оконечностямъ параллельной діаметру хорды, то сумма квадратовъ, построенныхъ на этихъ прямыхъ, равна суммѣ квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ діаметра.

229. Даны внѣ круга PQR двѣ точки A и B; найти такую точку на окружности круга, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на AP и BP была наименьшая?

230. Если два какіе нибудь круга касаются, то оконечности двухъ, какихъ нибудь параллельныхъ діаметровъ и точки касанія круговъ лежатъ на одной прямой линіи.

231. Въ какомъ нибудь кругѣ на его радіусѣ, какъ на діаметрѣ, описанъ другой кругъ и проведены двѣ хорды большаго круга, одна перпендикулярно общему діаметру круга чрезъ центръ меньшаго круга, а другая чрезъ точку пересѣченія первой хорды съ малымъ кругомъ перпендикулярно къ первой хордѣ, показать, что отрѣзки одной хорды равны отрѣзкамъ другой, каждый каждому.

232. Чрезъ данную точку внутри круга провести наименьшую хорду?

233. Если O есть центръ какого нибудь круга, а P какая нибудь точка на окружности, PN перпендикуляръ изъ точки P на данный діаметръ, то прямая, равнодѣлящая уголъ OPN всегда проходитъ чрезъ одинъ или другой конецъ діаметра перпендикулярно къ данному діаметру.

234. Три круга касаются внѣшне въ точкахъ A, B, C, изъ точки A прямыя AB и AC продолжены до встрѣчи съ кругомъ BC въ точкахъ D и E, показать, что DE есть діаметръ круга BC и что этотъ діаметръ параллеленъ прямой, соединяющей центры двухъ другихъ круговъ?

235. На сторонахъ, какого нибудь четыреугольника, какъ на діаметрахъ, описаны круги, показать, что общая хорда двухъ смежныхъ круговъ параллельна общей хордѣ двухъ другихъ круговъ.

236. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга, имѣлъ бы свой центръ на данной прямой и проходилъ бы чрезъ данную точку на данной прямой?

Отъ 16 до 19.

237. Показать, что изъ данной точки внѣ круга можно провести двѣ касательныхъ къ кругу и что онѣ равны?

238. Провести касательную къ данному кругу, которая бы была параллельна данной прямой?

239. Провести касательную къ данному кругу, которая бы была перпендикулярна къ данной прямой?

240. На продолженіи діаметра, даннаго круга, найти точку, изъ которой касательная, проведенная къ кругу, была бы данной длины?

241. Даны два концентрическіе круга, показать, что всѣ хорды внѣшняго круга, касающіяся внутренняго, равны?

242. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы часть ея, отсѣкаемая даннымъ кругомъ, была данной длины не больше діаметра круга?

243. Изъ концевъ діаметра, какого нибудь круга проведены двѣ касательныя, которыя отсѣкаютъ отъ третьей касательной часть AB, если O есть центръ круга, то уголъ $AOB=d$.

244. Даннымъ радіусомъ описать кругъ, который бы касался даннаго круга и данной прямой?

245. Описанъ кругъ, касающійся даннаго круга и данной прямой, показать, что точки касанія находятся всегда на одной прямой, съ постоянною точкою на окружности даннаго круга.

246. Провести касательною къ двумъ даннымъ кругамъ?

247. Провести касательную къ данному кругу такъ, чтобы ея часть, отсѣченная другимъ даннымъ кругомъ, была данной длины?

248. Провести прямую, отъ которой, два данные круга, отсѣкали бы данныя длины?

249. Показать, что въ описанномъ около круга четыреугольникѣ, сумма двухъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ.

250. Показать, что исключая ромба, ни какой параллелограмъ не можетъ быть описанъ около круга.

251. Прямыя ABD и ACE касаются круга въ точкахъ B и C, если точки D и E такъ взяты, что $BD=CE$, то прямая DE касается круга?

252. Если четыреугольникъ описанъ около круга, то сумма угловъ при центрѣ, образуемыхъ прямыми, соединяющими съ центромъ концы противоположныхъ сторонъ, равна двумъ прямымъ угламъ.

253. Два радіуса круга проведены подъ прямымъ угломъ, будучи продолжены встрѣчаютъ прямую, которая касается круга, показать, что касательныя, проведенныя изъ точекъ пересѣченія, продолженныхъ радіусовъ съ касательною, будутъ параллельны.

254. Прямая линія касается двухъ круговъ, показать, что радіусы круговъ, проведенные въ точки касанія, параллельны, что также параллельны хорды, соединяющія точки касанія съ точками пересѣченія круговъ съ прямою проходящею чрезъ центры.

255. Если два круга могутъ быть такъ описаны, что касаются между собою и каждый трехъ сторонъ четыреугольника, то разность суммъ противоположныхъ сторонъ равна двойной общей касательной, заключенной между сторонами четыреугольника.

256. Діаметръ полукруга есть AB, а центръ C, показать, что центръ O вписаннаго въ полукругъ круга находится въ равномъ разстояніи отъ центра C и отъ касательной къ полукругу параллельной діаметру AB.

257. Если изъ точки внѣ круга проведены двѣ касательныя, то уголъ между ними вдвое больше угла заключеннаго хордою, соединяющею точки касанія и діаметромъ, проходящимъ чрезъ одну изъ точекъ касанія.

258. Четыреугольникъ образованъ діаметромъ круга, касательными изъ концевъ этого діаметра и третьею касательною, показать, что площадь такого четыреугольника равна половинѣ площади прямоугольника, построеннаго на діаметрѣ и на противоположной сторонѣ четыреугольника.

259. Если въ четыреугольникѣ, описаннаго около круга, двѣ стороны параллельны, то прямая, проведенная чрезъ центръ круга, параллельно параллельнымъ сторонамъ четыреугольника и оканчивающихся на другихъ двухъ сторонахъ, будетъ равна четвертой части всего периметра четыреугольника.

260. Описанъ рядъ круговъ, касающихся данной прямой въ данной ея точкѣ, показать, что касательныя, проведенныя въ точкахъ пересѣченія круговъ съ прямою параллельною данной прямой, всѣ касаются одного круга.

261. Изъ всѣхъ прямыхъ, которыя можно провести изъ двухъ данныхъ точекъ къ выпуклой части даннаго круга, наименьшая сумма двухъ будетъ въ той точкѣ окружности, въ которой прямыя, проведенныя изъ данныхъ точекъ, составляютъ равные углы съ касательною въ этой точкѣ.

262. Центръ даннаго круга есть C, CA одинъ изъ его радіусовъ, B точка на радіусѣ перпендикулярномъ къ CA, соединимъ A съ B и продолжимъ прямую AB до встрѣчи съ окружностью еще въ точкѣ D и пусть касательная въ точкѣ D пересѣкаетъ BC въ точкѣ E, показать, что BDE есть равнобедренный треугольникъ.

263. Діаметръ AB круга продолженъ до точки P такъ, что AP равна радіусу круга, чрезъ точку A проведена касательная AED, изъ точки P, проведена касательная PEC, касающаяся круга въ точкѣ C и пересѣкающая первую касательную въ точкѣ E, соединимъ B съ C и продолжимъ BC до встрѣчи съ AE въ точкѣ D, показать, что треугольникъ DEC равносторонній.

Отъ 20 до 22.

264. Проведены двѣ касательныя AB и AC къ кругу и на окружности круга внутри треугольника ABC взята, какая нибудь точка D, показать, что сумма угловъ ABD и ACD есть величина постоянная.

265. На окружностяхъ сегментовъ, описанныхъ на одной прямой AB, взяты двѣ, какія нибудь точки P и Q, углы PAQ и PBQ, прямыми AR и BR, пересѣкающимися въ точкѣ R, раздѣлены пополамъ, показать, что уголъ ARB есть величина постоянная.

266. На прямой AB описаны два сегмента одного круга, на окружности одного изъ сегментовъ взята, какая нибудь точка P, проведены прямыя APD и BPC, пересѣкающія окружность другаго сегмента въ точкахъ D и C, проведены прямыя AC и BD, пересѣкающіяся въ точкѣ Q, показать, что уголъ AQB есть величина постоянная.

267. Пусть APB будетъ постоянная хорда, проходящая чрезъ точку P пересѣченія двухъ круговъ AQP и PBR, пусть QPB будетъ какая нибудь другая хорда, проходящая

чрезъ точку P, показать, что прямыя AQ и RB, будучи продолжены, пересѣкаясь, образуютъ постоянный уголъ.

268. Въ треугольникѣ AOB на сторонахъ OB и OA взяты точки C и D такъ, что $\angle ODC = \angle OBA$, показать, что около четыреугольника $ABCD$ можно описать кругъ.

269. Въ четыреугольникѣ $ABCD$, вписанномъ въ кругъ, стороны AB и CD, будучи продолжены встрѣчаются въ точкѣ O, показать, что треугольники AOC и BOD равноугольны.

270. Показать, что изъ всѣхъ параллелограмовъ только прямоугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ.

271. Треугольникъ вписанъ въ кругъ, показать, что сумма угловъ, въ трехъ внѣшнихъ треугольнику сегментахъ, равна $4d$.

272. Четыреугольникъ вписанъ въ кругъ, показать, что сумма угловъ, въ четырехъ сегментахъ внѣшнихъ четыреугольнику, равна $6d$.

273. Раздѣлить кругъ на такія двѣ части, чтобы уголъ содержащійся въ одномъ сегментѣ, был равенъ дважды взятому углу въ другомъ сегментѣ?

274. Раздѣлить кругъ на такія двѣ части, чтобы уголъ, содержащійся въ одномъ сегментѣ, былъ равенъ пять разъ взятому углу въ другомъ сегментѣ?

275. Если уголъ составленный, какой нибудь стороною четыреугольника и продолженіемъ его смежной стороны, равенъ противолежащему углу четыреугольника, то каждая изъ сторонъ четыреугольника стягиваетъ, въ вершинахъ противоположныхъ, угловъ, равные углы.

276. Если двѣ, какія нибудь смежныя стороны шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, параллельны противоположнымъ сторонамъ, то и остальныя стороны параллельны.

277. Взяты четыре точки A, B, C, D на окружности круга, прямыя AB и CD, будучи продолжены, пересѣкаются въ точкѣ P, а прямыя AD и BC въ точкѣ Q, показать, что прямыя равнодѣлящія углы APC и AQC перпендикулярны между собою.

278. Если въ четыреугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, проведемъ такую прямую, которая бы образовала съ парою противоположныхъ сторонъ равные углы, то она образуетъ равные углы и съ другою парою противоположныхъ сторонъ.

279. Около четыреугольника можетъ быть одинъ кругъ описанъ, а другой въ него вписанъ, показать, что прямыя, соединяющія противоположныя точки касанія вписаннаго круга, перпендикулярны между собою.

Отъ 23 до 30.

280. Прямыя, соединяющія оконечности двухъ равныхъ хордъ, обращенныхъ въ одну сторону, параллельны.

281. Прямыя, соединяющія оконечности двухъ параллельныхъ хордъ, равны.

282. Общая хорда двухъ круговъ есть AB, чрезъ какую нибудь точку C на одной изъ окружностей проведены прямыя CAD и CBE, оканчивающіяся на другой окружности въ точкахъ D и E, показать, что длина дуги DE неизмѣняется.

283. Чрезъ точку C на окружности круга проведены прямыя ACB и DCE, встрѣчающія окружности еще въ точкахъ B и E, показать, что равнодѣлящія углы ACE и DCB пересѣкаютъ окружности въ точкахъ равноотстоящихъ отъ B и E.

284. Равнодѣлящія углы внутренній и противоположный внѣшній, четыреугольника вписаннаго въ кругъ, пересѣкаются на окружности.

285. AB есть діаметръ круга, D данная точка на окружности, провести хорду DE такъ, чтобы дуга между хордою и діаметромъ была равна три раза взятой другой.

286. Изъ концевъ A и B основанія треугольника ABC проведены прямыя, встрѣчающія противоположныя стороны въ точкахъ P и Q подъ даннымъ угломъ, показать, что

прямая FQ будетъ величина постоянная во всѣхъ треугольникахъ, имѣющихъ основаніемъ AB и тотъ же уголъ C.

287. Если два равные круга пересѣкаются и если чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія проведемъ прямую, встрѣчающую оба круга, то прямыя, соединяющія эти точки встрѣчи, съ другою общею точкою обоимъ кругамъ, будутъ равны.

288. OA, OB, OC суть три хорда круга, $\angle AOB=\angle BOC$, хорда OA ближе къ центру нежели хорда OB. Изъ точки B опущенъ перпендикуляръ на OA и встрѣчаетъ OA въ точкѣ P, а перпендикуляръ на OC, будучи продолженъ, встрѣчаетъ OA въ точкѣ Q, показать, что $AP=CQ$.

289. AB есть данный отрѣзокъ прямой, чрезъ точку A проведены двѣ прямыя одинаково наклоненныя къ AB, какой нибудь кругъ, проходящій чрезъ A и B пересѣкаетъ эти прямыя въ точкахъ L и M. Показать, что если AB находится между AL и AM, то сумма $AL+AM$ есть величина постоянная, а если AB не находится между AL и AM, то разность $AL-AM$ есть величина постоянная.

290. AOB и COD суть два перпендикулярные діаметра, E точка на дугѣ AC, а EFG есть хорда, пересѣкающая COD въ точкѣ F и проведенная въ такомъ направленіи, что EF равна радіусу круга. Показать, что дуга BG равна три раза взятой дугѣ AE.

291. Всѣ прямыя, равнодѣлящія углы противолежащіе основанію всѣхъ треугольниковъ, построенныхъ на одномъ основаніи и по одну его сторону и коихъ углы противолежащіе основанію равны, пересѣкаются въ одной точкѣ.

292. Если два круга касаются внутренно, то каждая хорда большаго круга, касающаяся меньшаго, въ точкѣ касанія дѣлится на два отрѣзка, которыя въ точкѣ касанія круга стягиваютъ равные углы.

На 31.

293. Построены прямоугольные треугольники на одной гипотенузѣ, показать, что вершины прямыхъ угловъ лежатъ на окружности круга, описаннаго на данной гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ.

294. Круги описанные на равныхъ сторонахъ равнобедреннаго треугольника, какъ на діаметрахъ, пересѣкаются въ срединѣ основанія.

295. Наибольшій прямоугольникъ, какой можно вписать въ кругъ есть квадратъ.

296. Гипотенуза AB, прямоугольнаго треугольника ABC, въ точкѣ D раздѣлена пополамъ, изъ точки D возставленъ перпендикуляръ FDE къ AB и на немъ взяты точки F и E такъ, что $AD=DF=DE$, точки F и E соединимъ съ точкою C, показать, что прямыя CF и CE суть равнодѣлящія углы ACB и его дополненіе.

297. На сторонѣ AB, какого нибудь треугольника ABC, какъ на діаметрѣ описанъ кругъ, EF есть діаметръ этого круга параллельный сторонѣ BC, показать, что прямыя EB и FB суть равнодѣлящія углы внутренній и внѣшній при B.

298. Если прямыя AD и CE перпендикулярны къ сторонамъ BC и AB треугольника ABC и проведена прямая DE, показать, что $\angle ADE=\angle ACE$.

299. Если два круга ABC и ABD пересѣкаются въ точкахъ A и B и проведены два діаметра AC и AD, показать, что прямая CD проходитъ чрезъ точку B.

300. Если O есть центръ круга, OA радіусъ на которомъ, какъ на діаметрѣ, описанъ кругъ, то окружность этого круга будетъ дѣлить всѣ хорды большаго круга, проходящія чрезъ точку A.

301. Описать кругъ, касающійся данной прямой въ данной точкѣ, такъ, чтобы касательныя проведенныя къ кругу изъ двухъ данныхъ точекъ на прямой были параллельны?

302. Описать кругъ даннымъ радіусомъ, такъ чтобы онъ касался данной прямой и

чтобы двѣ касательныя, проведенныя, изъ двухъ данныхъ, на данной прямой точекъ, были параллельны?

303. Если изъ вершинъ угловъ при основаніи какого нибудь треугольника, опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны или на ихъ продолженіе, если необходимо, то прямая, соединяющая точки ихъ встрѣчи, будетъ дѣлиться пополамъ перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ средины основанія.

304. Прямая AD есть діаметръ круга, B и C точки на окружности по одну сторону AD, перпендикуляръ, опущенный изъ точки D на продолженіе BC пересѣкаетъ ее въ точкѣ E, показать, что:

$$\square AD = \square AB + \square BC + \square CD + 2BC.CE$$

305. Прямая AB есть діаметръ полукруга, P точка на окружности, PM перпендикуляръ на AB; на AM и BM описаны, какъ на діаметрахъ, полукруги, AP и BP пересѣкаютъ эти полукруги въ точкахъ Q и R, показать, что QR будетъ общая къ нимъ касательная.

306. Даны двѣ прямыя AB и AC и даны на нихъ точки B и C. Изъ точки B опущенъ перпендикуляръ BD на AC, а изъ точки D опущенъ перпендикуляръ DE на AB; точно также изъ точки C, опущенъ перпендикуляръ CF на AB, а изъ точки F опущенъ перпендикуляръ FG на AC, показать, что $EG \parallel BC$.

307. Два круга пересѣкаются въ точкахъ A и B, изъ коихъ проведены хорды къ точкѣ C, на одной изъ окружностей, будучи продолжены, если необходимо, пересѣкаютъ другую окружность въ точкахъ D и E, показать, что прямая DE перпендикулярна къ діаметру, проходящему чрезъ точку C, перваго круга.

308. Если на гипотенузѣ и катетахъ, прямоугольнаго треугольника, будутъ построены квадраты, то прямая соединяющая точку пересѣченія діагоналей квадрата гипотенузы будетъ перпендикулярна къ прямой, соединяющей точки пересѣченія діагоналей квадратовъ на катетахъ.

309. Центръ даннаго круга есть C, AC прямая меньше радіуса круга, найти на окружности такую точку, чтобы уголъ, имѣющій вершину въ этой точкѣ, а стороны стягивали AC, былъ бы наибольшій?

310. Діаметръ полукруга есть AB, D и E, какія нибудь, на немъ точки. Проведемъ хорды AD и BE, которыя пересѣкутся, будучи продолжены въ точкѣ F, и хорды AE и BD, которыя пересѣкутся въ точкѣ G, показать, что прямая FG перпендикулярна къ AB.

311. Два равные круга касаются внѣшне, чрезъ точку касанія проведены по хордѣ въ каждомъ кругѣ перпендикулярно одна другой, показать, что прямая, соединяющая концы встрѣчи этихъ хордъ съ окружностями параллельна прямой, соединяющей центры круговъ.

312. На меньшей діагонали ромба, какъ на діаметрѣ, описанъ кругъ, который пересѣкаетъ стороны, точки пересѣченія соединены на крестъ съ концами этой діагонали, показать, что образованной такимъ образомъ параллелограмъ есть ромбъ, коего углы равны угламъ даннаго ромба.

313. Если двѣ хорды круга пересѣкаются внутри или внѣ подъ прямымъ угломъ, то сумма квадратовъ на ихъ отрѣзкахъ равна квадрату діаметра.

Отъ 32 до 34.

314. На окружности круга, коего центръ есть C, дана точка B, PA есть касательная въ какой нибудь точкѣ P, которая пересѣкаетъ продолженіе прямой BC въ точкѣ A

и проведемъ перпендикуляръ PD къ BC, показать, что прямая PB есть равнодѣлящая уголъ APD.

315. Если два круга касаются, то всякая прямая, проходящая чрезъ точку касанія отрѣзываетъ отъ круговъ подобные сегменты.

316. AB есть хорда круга, и AD касательная въ точкѣ A. DPQ есть какая нибудь прямая параллельная AB, пересѣкающая кругъ въ точкахъ P и Q, показать, что треугольники PAD и QAB равноугольны.

317. Два круга $ABDH$ и ABG пересѣкаются въ точкахъ A и B, изъ точки B проведена касательная къ одному изъ нихъ, а изъ точки A, какая нибудь хорда, пересѣкающая круги еще въ точкахъ G и H, показать, что $BG \parallel DH$.

318. Два круга пересѣкаются въ точкахъ A и B. Изъ точки A проведены касательныя AC и AD къ обоимъ кругамъ, касательная къ первому кругу пересѣкаетъ второй въ точкѣ C, и касательная ко второму кругу пересѣкаетъ первый въ точкѣ D. Если проведемъ прямыя CB и BD, то общая хорда AB, или ея продолженіе, дѣлитъ уголъ CBD пополамъ.

319. Два круга пересѣкаются въ точкахъ A и B, чрезъ какую нибудь точку P на окружности одного изъ круговъ проведены хорды PA и PB, которыя пересѣкаютъ другой кругъ еще въ точкахъ C и D, показать, что прямая CD параллельна касательной въ точкѣ P.

320. Если изъ какой нибудь точки на окружности круга, проведемъ хорду и касательную, то перпендикуляры, опущенные на нихъ изъ средины дуги, заключенной между ними, равны.

321. AB какая нибудь хорда круга, и P, какая нибудь точка на окружности, PM перпендикуляръ къ AB, продолженный до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ Q, AN перпендикуляръ къ касательной въ точкѣ P, показать, что треугольники NAM и PAQ равноугольны.

322. Два діаметра AOB и COD въ кругѣ перпендикулярны, P точка на окружности, касательная въ точкѣ P пересѣкаетъ продолженіе діаметра COD въ точкѣ Q, прямыя AP и BP пересѣкаютъ туже прямую въ точкахъ R и S, показать, что $RQ = SQ$.

323. По данному основанію, противолежащему углу и точкѣ на основаніи, въ которую падаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніи, построить треугольникъ?

324. По данному основанію, противолежащему основанію углу и по высотѣ, построить треугольникъ?

325. По данному основанію, противолежащему основанію углу и по длинѣ прямой, проведенной изъ вершины къ срединѣ основанія построить треугольникъ?

326. Показать, что изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одно основаніе и равные углы, противолежащіе основанію, наибольшій будетъ равнобедренный.

327. Изъ данной точки A внѣ круга, коего центръ есть O, провести прямую такъ, чтобы она, пересѣкая окружность въ точкахъ B и C, образовала наибольшій треугольникъ BOC?

328. Двѣ прямыя, составляющія постоянный уголъ, проходятъ чрезъ двѣ данныя точки, показать, что равнодѣлящая между ними уголъ всегда проходитъ чрезъ одну или другую изъ двухъ постоянныхъ точекъ?

329. По данному углу, противолежащей сторонѣ и по суммѣ двухъ остальныхъ сторонъ, построить треугольникъ?

Отъ 35 до 37.

330. Если два круга пересѣкаются, то касательныя, проведенныя изъ какой нибудь точки, на продолженіи общей хорды къ обоимъ кругамъ, равны.

331. Два круга пересѣкаются въ точкахъ A и B, показать, что общая имъ касательная дѣлится пополамъ хордою AB.

332. Если изъ вершинъ A и C треугольника ABC, опустимъ перпендикуляры AD и CE на стороны BC и AB, то прямоугольникъ, $BC.BD=BA.BE$.

333. Если изъ какой нибудь точки общей хорды двухъ пересѣкающихся круговъ проведемъ двѣ сѣкущія, одна къ одному, другая къ другому кругу, то четыре точки ихъ пересѣченія съ кругами лежатъ на окружности одного круга.

334. Изъ данной точки, какъ изъ центра описать кругъ, который бы пересѣкалъ данную прямую въ такихъ двухъ точкахъ, что прямоугольникъ построенный на ихъ разстояніяхъ отъ данной на прямой точки, былъ равенъ данному квадрату?

335. Два круга $ABCD$ и $EBCF$ имѣютъ общими касательными AE и DF и пересѣкаются въ точкахъ B и C, общая хорда BC продолжена до встрѣчи съ касательными въ точкахъ G и H, показать, что:

$$\square GH=\square AE+\square BC$$

336. Данъ рядъ пересѣкающихся круговъ, такого свойства, что касательныя, проведенныя къ нимъ изъ постоянной точки равны, показать, что хорды каждый разъ пересѣкающихся круговъ, проходятъ чрезъ эту точку.

337. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, изъ какой нибудь точки D на гипотенузѣ BC опущенъ перпендикуляръ на AC и пересѣкаетъ ее въ точкѣ E, а будучи продолженъ пересѣкаетъ продолженіе стороны BA въ точкѣ F, показать, что:

$$\square DE=BD.DC-AE.EC$$

и что:

$$\square DF=BD.DC+AF.FB$$

338. Требуется найти, на касательной къ кругу въ концѣ діаметра, такую точку, что если ее соединимъ съ другимъ концемъ діаметра, то прямоугольникъ построенный на части внѣ круга и на части въ кругѣ, будетъ равенъ данному квадрату, который не больше квадрата діаметра круга.

Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія III-й книги.

339. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался данной прямой въ данной на ней точкѣ?

340. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался бы даннаго круга въ данной на немъ точкѣ?

341. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга въ данной на немъ точкѣ и касался бы данной прямой?

342. AD и BE суть перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ A и B угловъ треугольника на противолежащія стороны, BF есть перпендикуляръ къ ED или къ продолженію ED, показать, что $\angle FBD=\angle EBA$.

343. Если въ треугольникѣ ABC изъ вершинъ B и C опущены перпендикуляры BE и CF на противоположныя стороны и K есть средина третьей стороны, то $\angle FEK=$ $=\angle EFK=\angle A$.

344. AB есть діаметръ круга, AC и AD двѣ хорды, пересѣкающія касательную въ точкѣ B, въ точкахъ E и F, показать, что $\angle FCE=\angle FDE$.

345. Показать, что четыре прямыя, равнодѣлящія углы четыреугольника, образуютъ четыреугольникъ, который можетъ быть вписанъ въ кругъ.

346. Найти кратчайшее разстояніе между двумя кругами, которыя не пересѣкаются?

347. Два круга пересѣкаются въ точкѣ A, требуется провести чрезъ эту точку прямую такъ, чтобы ея часть, заключенная между обоима кругами была равна данной прямой?

348. Если многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ вписанъ въ кругъ, то сумма угловъ чрезъ одинъ вмѣстѣ съ двумя прямыми углами равна прямому углу, взятому столько разъ сколько сторонъ въ многоугольникѣ.

349. Чрезъ данную точку на окружности круга провести хорду, которая бы встрѣчая данную хорду дѣлилась пополамъ?

350. Если равносторонній многоугольникъ описанъ около круга, то онъ необходимо будетъ и равноугольной, если число сторонъ будетъ нечетное, но неиначе.

351. AB есть діаметръ круга, коего центръ есть C, DCE есть секторъ, имѣющій постоянную дугу; проведемъ AE и BD, пересѣкающіяся въ точкѣ P, показать, что уголъ APB есть величина постоянная.

352. Неопредѣленное число треугольниковъ, построенно на основаніи BC, съ равными противолежащими основанію углами, изъ точекъ B и C опущены перпендикуляры, пересѣкающіеся въ точкѣ D, на противоположныя стороны, найти геометрическое мѣсто точекъ D и показать, что равнодѣлящія уголъ BDC проходятъ чрезъ одну точку.

353. Пусть O и C будутъ двѣ постоянныя точки на окружности круга, и OA, какая нибудь хорда. Если соединимъ A съ C и продолжимъ AC до B такъ чтобы $OB=OA$, то геометрическое мѣсто точки B есть окружность равная данной.

354. Изъ какой нибудь точки P, на діагонали BD параллелограма $ABCD$, проведены прямыя PE, PF, PG, PH перпендикулярно къ сторонамъ AB, BC, CD, DA, показать, что $EF \parallel GH$.

355. Чрезъ данную точку на данной хордѣ въ кругѣ проведены другія хорды, показать, что прямыя, соединяющія средину данной хорды съ срединами другихъ хордъ, образуютъ съ ними одинъ и тотъ-же уголъ.

356. Прямая ABC въ какой нибудь точкѣ B раздѣлена на двѣ части, ADB и CDB суть два подобные сегмента круговъ, имѣющихъ общую хорду BD, прямыя CD и AD продолжены до встрѣчи съ окружностями въ точкахъ F и E и наконецъ проведены прямыя AF, CE, BF, BE, показать, что треугольники ABF и CBE равноугольные и равнобедренные.

357. Если около двухъ данныхъ точекъ, какъ около центровъ, будемъ описывать круги, которые бы касались внѣшне, то общая касательная къ каждой парѣ такихъ круговъ будетъ касатся круга, котораго діаметръ есть прямая, соединяющая двѣ данныя точки.

358. Изъ данной точки A требуется провести двѣ прямыя линіи такъ, чтобы онѣ, составляя данный уголъ отдѣляли бы отъ данной прямой отрѣзокъ данной длины?

359. На данной прямой найти такую точку изъ которой касательныя проведенныя къ двумъ даннымъ кругамъ были равны?

360. Въ кругѣ даны двѣ не пересѣкающіяся хорды, данной длины, одна постоянная, другая, измѣняетъ положеніе, соединимъ противоположные концы такихъ хордъ прямыми, которыя пересѣкутся внутри круга, показать, что геометрическое мѣсто точки пересѣченія будетъ окружность, проходящая чрезъ концы постоянной хорды.

361. A и B суть центры двухъ круговъ, которые касаются внутренне въ C и касаются одинъ внутренне, а другой внѣшне третьяго круга, коего центръ находиться въ D, въ точкахъ E и F, показать, что $\angle ADB = 2\angle ECF$.

362. C есть ценръ круга, CP перпендикуляръ на хорду APB, показать, что сумма $PC+AP>CP$, если $CP=AP$.

363. AB, BC, CD суть три послѣдовательныя стороны, вписаннаго въ кругъ многоугольника, дуги AB, BC, CD въ точкахъ L, M, N раздѣлены пополамъ, прямая LM пересѣкаетъ BA и BC въ точкахъ P и Q, показать, что BPQ есть треугольникъ равнобедренный и что $\angle ABC+\angle BCD=2\angle LMN$.

364. На окружности даннаго круга найти такую точку изъ которой если проведемъ прямыя къ концамъ данной хорды, то разность между ними была бы равна данной прямой, которая не больше данной хорды.

365. Построить треугольникъ по данному периметру, разности отрѣзковъ основанія, на которые дѣлится основаніе перпендикуляромъ опущеннымъ на него изъ вершины и разности угловъ при основаніи.

366. На прямой AB, какъ на хордѣ, по одну ея сторону описаны два сегмента круговъ, взята, на окружности одного изъ сегментовъ, какая нибудь точка P, прямая BP пересѣкаетъ окружность другаго сегмента въ точкѣ Q, показать, что уголъ PAQ равенъ углу между касательными къ окружностямъ сегментовъ въ точкѣ A.

367. Данная прямая AKL пересѣкаетъ данный кругъ въ точкахъ K и L; APQ и ARS суть другія двѣ прямыя, составляющія равные углы съ прямою AKL, и пересѣкающія кругъ въ точкахъ P и Q, R и S, показать, что какое бы нибыло положеніе прямыхъ APQ и ARS, прямая, соединяющая средины прямыхъ PQ и RS, остается всегда параллельна сама себѣ.

368. Если около четыреугольника можетъ быть описанъ другой четыреугольникъ такъ, что двѣ смежныя его стороны одинаково наклонены къ той сторонѣ перваго четыреугольника, которая ихъ пересѣкаетъ обѣ, то около перваго четыреугольника можно описать кругъ.

369. Два круга касаются внутренне, въ точкѣ A, требуется чрезъ точку A провести такъ прямую, чтобы ея часть, заключенная между обоими кругами была равна данной прямой, которая не больше разности между діаметрами круговъ.

370. $ABCD$ есть параллелограмъ; AE перпендикулярна къ AB и CE перпендикулярна къ CB, показать, что ED, будучи продолжена, пересѣчетъ AC подъ прямымъ угломъ.

371. Изъ вершинъ угловъ треугольника опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, показать, что прямоугольники изъ отрѣзковъ перпендикуляровъ, на которые, каждый изъ нихъ дѣлится точкою ихъ пересѣченія, равны.

372. Два угла треугольника при основаніи раздѣлены прямыми пополамъ, изъ вершины опущены на нихъ перпендикуляры, показать, что прямая, проведенная чрезъ точки пересѣченія перпендикуляровъ съ равнодѣлящими, будетъ параллельна основанію треугольника и дѣлитъ пополамъ его стороны.

373. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ равный данной прямолинейной фигурѣ?

374. Въ остроугольномъ треугольникѣ ABC опущены перпендикуляры AD, BE; на AC и BC, какъ на діаметрахъ описаны круги, пересѣкающіе BE и AD въ точкахъ F, G, H и K, показать, что точки F, G, H, K лежатъ на окружности круга.

375. Въ кругѣ проведены два перпендикулярные діаметра, изъ ихъ концевъ проведены четыре параллельныя прямыя, показать, что онѣ дѣлятъ окружность на четыре равныя части.

376. Точка E есть средина полукруга AEB, CDE какая нибудь хорда, пересѣкающая діаметръ въ точкѣ D, а кругъ въ точкѣ C, показать, что квадратъ на CE равенъ дважды взятому четыреугольнику $AEBC$.

377. AB есть данная хорда по величинѣ и по положенію, а AC движущаяся хорда круга, въ каждомъ положеніи хорды AC строятъ параллелограмъ, коего смежныя стороны суть AB и AC, опредѣлить наибольшую діагональ, параллелограма, проходящую чрезъ точку A?

378. Если два равные круга будутъ помѣщены на такомъ разстояніи, что касательная, проведенная изъ центра одного изъ нихъ, къ другому, равна діаметру ихъ, то ихъ общая касательная равна радіусу круговъ.

379. На окружности даннаго круга найти точку, изъ которой, если проведемъ двѣ касательныя къ равному кругу, коего положеніе дано, то хорда, соединяющая точки касанія была бы равна хордѣ перваго круга, полученной, соединивъ точки пересѣченія касательныхъ съ кругомъ? Опредѣлить предѣлы возможности задачи?

380. Діаметръ круга есть AB, а AF есть какая нибудь хорда, C какая нибудь точка на AB, чрезъ C проведена прямая перпендикулярная къ AB, пересѣкающая продолженіе AF, если необходимо, въ точкѣ G, а окружность въ точкѣ D, показать, что $FA.AG = BA.AC = \square AD$?

381. Построить треугольникъ по данному основанію, противолежащему основанію углу и по данной длинѣ прямой, равнодѣлящей данный противолежащій основанію уголъ?

382. На окружности даннаго круга даны три точки A, B, C, найти такую точку P, что прямыя AP, BP, CP, пересѣкая окружность въ точкахъ D, E, F, отдѣляютъ дуги DE и EF данной длины каждая?

383. На окружности даннаго круга найти точку, сумма разстояній которой отъ двухъ данныхъ перпендикулярныхъ прямыхъ, не пересѣкающихъ кругъ, была бы наибольшая или наименьшая?

384. На сторонахъ треугольника описаны сегменты внутренне, круговъ вмѣщающіе каждый, избытокъ двухъ прямыхъ угловъ надъ угломъ противолежащимъ сторонѣ, показать, что радіусы трехъ круговъ равны и что ихъ хорды пересѣчены перпендикулярно къ противоположнымъ сторонамъ треугольника.

Книга IV.

Отъ 1 до 4.

385. Показать, что въ пред. 3, кн. 4, прямыя, которыя касаются круга въ точкахъ A и B, пересѣкаются.

386. Показать, что въ пред. 4, кн. 4, прямыя равнодѣлящія углы B и C, пересѣкаются.

387. Показать, что въ пред. 4, кн. 4, прямая DA дѣлитъ уголъ A пополамъ.

388. Если кругъ вписанный въ треугольникъ ABC касается сторонъ AB и AC въ точкахъ D и E и если будетъ проведена прямая линія изъ A къ центру круга, пересѣкая окружность въ точкѣ G, то точка G будетъ центръ круга вписаннаго въ треугольникъ ADE.

389. Показать, что прямыя соединяющія центры круговъ, вписанныхъ внѣшне въ треугольникъ, проходятъ чрезъ вершины угловъ треугольника.

390. Кругъ касается стороны BC треугольника ABC и продолженій сторонъ AB и AC, показать, что разстояніе точекъ касанія, стороны BC съ этимъ кругомъ и съ кругомъ вписаннымъ, равно разности сторонъ AB и AC.

391. Въ треугольникъ ABC вписанъ кругъ, касательными къ кругу отъ каждаго угла треугольника ABC отсѣченъ треугольникъ, показать, что сумма сторонъ этихъ трехъ треугольниковъ равна суммѣ сторонъ треугольника ABC.

392. D есть центръ круга вписаннаго въ треугольникъ ABC, прямая AD, будучи продолжена до встрѣчи въ O съ прямою, проведенную чрезъ точку B, перпендикулярно къ BD, показать, что точка O есть центръ круга, который касается стороны BC и продолженій сторонъ AB и AC.

393. Описаны три круга, изъ коихъ каждый касается одной стороны треугольника и продолженій остальныхъ сторонъ. Если D, E, F суть точки касанія сторонъ BC, AC, AB, то $AE=BD$, $BF=CE$ и $CD=AF$.

394. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга и двухъ прямыхъ, которыя сами касаются даннаго круга?

395. Если три точки касанія круга вписаннаго въ треугольникъ соединимъ прямыми линіями, то получится треугольникъ всегда остроугольный.

396. Сумма двухъ противоположныхъ сторонъ четыреугольника равна суммѣ двухъ остальныхъ его сторонъ и каждый его уголъ меньше двухъ прямыхъ, показать, что въ такой четыреугольникъ можно вписать кругъ.

397. Два круга HPL и KPM касаются внѣшне, имѣютъ общія касательныя HK и LM, соединимъ H съ L и K съ M, показать, что въ четыреугольникъ $HKLM$ можно вписатъ кругъ.

398. Вершины угловъ треугольника соединены съ центрами круговъ, вписанныхъ внѣшне въ треугольникъ, и притомъ соединены съ тѣми центрами круга, которые касаются сторонъ, противоположныхъ вершинамъ треугольника, показать, что эти три прямыя пересѣкаются въ центрѣ вписаннаго въ треугольникъ круга.

399. Дано положеніе двухъ сторонъ треугольника, периметръ котораго есть величина постоянная, показать, что третяя сторона касается нѣкотораго круга.

400. Дано основаніе треугольника, противолежащій уголъ и радіусъ вписаннаго круга, построить треугольникъ?

Отъ 5 до 9.

401. Въ пред. 5, кн. 4, показать, что перпендикуляръ, опущенный изъ точки F на BC дѣлитъ BC пополамъ.

402. Проведена прямая DE параллельно основанію BC въ треугольникѣ ABC, показать, что круги описанные около треугольниковъ ABC и ADE имѣютъ общую касательную.

403. Если круги, вписанный и описанный около треугольника, будутъ концентрическіе, то треугольникъ будетъ равносторонній.

404. Показать, что если прямая, соединяющая центры круговъ вписаннаго и описаннаго въ треугольникъ, проходитъ чрезъ вершину треугольника, то треугольникъ будетъ равнобедренный.

405. Общая хорда двухъ круговъ продолжена до точки P, прямая PA касается одного изъ круговъ въ точкѣ A, PBC есть какая нибудь хорда другаго круга: показать, что кругъ, проходящей чрезъ точки A, B, C касается круга, къ которому прямая PA есть касательная.

406. Четыреугольникъ $ABCD$ вписанъ въ кругъ, стороны AD и BC продолжены до встрѣчи въ точкѣ E, показать, что касательная въ точкѣ E къ кругу, описанному около треугольника ECD, параллельна сторонѣ AB.

407. Описать кругъ, который бы касался данной прямой и проходилъ бы чрезъ двѣ данныя точки?

408. Описать кругъ, который бы проходя чрезъ двѣ данныя точки, отсѣкалъ бы отъ данной прямой хорду данной длины?

409. Описать кругъ, котораго бы центръ находился на данной прямой и который бы отсѣкалъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ равныя хорды, данной длины?

410. Два треугольника имѣютъ равныя основанія и равные противолежащіе основанію углы, показать, что радіусы круговъ, описанныхъ около такихъ треугольниковъ, равны.

411. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки, и къ которому бы, проведенная касательная изъ третьей, данной точки, была данной длины?

412. C есть центръ круга, CA и CB, два перпендикулярные радіуса, чрезъ точку B проведена, какая нибудь хорда BP, пересѣкающая радіусъ CA въ точкѣ N; около треугольника ANP описанъ кругъ, показать, что прямая BA будетъ касательная къ этому кругу.

413. Прямыя AB и CD параллельны, прямыя соединяющія ихъ концы, пересѣкаются въ точкѣ E, показать, что круги, описанныя около треугольниковъ ABE и CDE, касаются.

414. Найти центръ круга отсѣкающаго три равныя хорды отъ сторонъ треугольника?

415. Если O есть центръ круга вписаннаго въ треугольникъ ABC, и прямая AO будетъ продолжена до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ F, то $FB=FO=FC$.

416. Противоположныя стороны вписаннаго въ кругъ четыреугольника пересѣкаются въ точкахъ P и Q, около треугольниковъ, такъ образованныхъ внѣ четыреугольника, описаны круги, пересѣкающіеся еще въ точкѣ R, показать, что точки P, R, Q лежатъ на одной прямой линіи.

417. $ACDB$ есть полукругъ, коего діаметръ есть AB; AD и BC двѣ хорды, пересѣкающіяся въ точкѣ E, показать, что кругъ, описанный около треугольника CDE, пересѣкаетъ данный полукругъ подъ прямымъ угломъ.

418. Діагонали, даннаго четыреугольника $ABCD$ пересѣкаются въ точкѣ O, показать, что центры круговъ, описанныхъ около треугольниковъ OAB, OBC, OCD, ODA, будутъ находится въ вершинахъ параллелограма.

419. Около треугольника ABC описанъ кругъ, касательная къ нему въ точкѣ C пересѣкаетъ продолженіе стороны AB въ D, кругъ, коего центръ находится въ D, а радіусъ DC, пересѣкаетъ AB въ E, показать, что EC есть равнодѣлящая уголъ ACB.

420. Дано положеніе двухъ прямыхъ AB и AC, BC есть прямая данной длины, точки D и E суть средины AB и AC, прямыя DF и EF проведены перпендикулярно къ AB и AC, показать, что AF будетъ величина постоянная для всѣхъ положеній BC.

421. Около равнобедреннаго треугольника ABC, въ которомъ $AB=AC$, описанъ кругъ, чрезъ точку A проведена прямая, пересѣкающая основаніе BC въ D, а кругъ въ E, показать, что кругъ, проходящій чрезъ точки B, D, E, касается стороны AB.

422. AC есть хорда даннаго круга, B и D суть двѣ данныя точки на хордѣ, обѣ внѣ или внутри круга. Если будетъ описанъ кругъ, проходящій чрезъ точки B и D и касающійся даннаго круга, то AB и CD стягиваютъ равные углы, имѣющіе вершины въ точкѣ касанія.

423. Внутри круга даны двѣ точки A и B, найти на окружности такую точку P, что если проведемъ прямыя PAH и PBK, которыя встрѣчаютъ окружность въ точкахъ H и K, то чтобы хорда HK была наибольшая?

424. Центръ даннаго круга находится въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ прямыхъ, описать кругъ, который бы касался данныхъ прямыхъ и, пересѣкая данный кругъ, отсѣкалъ бы отъ него сегментъ, вмѣщающій данный уголъ?

425. Центръ круга, описаннаго около треугольника ABC есть O; D, E, F суть основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ A, B, C на противоположныя стороны, показать, что OA, OB, OC перпендикулярны къ EF, FD, DE.

426. Если изъ какой нибудь точки на окружности круга проведемъ прямыя къ вершинамъ угловъ, вписаннаго въ кругъ квадрата, то сумма четырехъ квадратовъ на этихъ прямыхъ равна удвоенному квадрату на діаметрѣ.

427. Показать, что исключая квадрата, ни одинъ прямоугольникъ не можетъ быть описанъ около круга.

428. Описать кругъ около даннаго прямоугольника?

429. Если чрезъ концы двухъ діаметровъ круга проведемъ касательныя, то образуемый касательными четыреугольникъ будетъ ромбъ.

На 10.

430. Показать, что уголъ ACD, въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, равенъ трижды взятому углу въ вершинѣ треугольника.

431. Показать, что въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, есть два треугольника, имѣющіе тоже свойство и что есть также равнобедренный треугольникъ, коего равные углы равны каждый одной трети третьяго угла.

432. Показать, что основаніе треугольника, въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, равно сторонѣ правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ меньшій кругъ фигуры.

433. На данной прямой, какъ на основаніи, построить равнобедренный треугольникъ, коего третій уголъ равенъ тройному углу при основаніи.

434. Если положимъ, что въ кн. 4, пред. 10, два круга пересѣкаются еще въ точкѣ E, то $DE=DC$.

435. Если A есть вершина, а BD основаніе построеннаго треугольника въ кн. 4, пред. 10, а D одна изъ двухъ точекъ пересѣченія двухъ построенныхъ круговъ и E другая точка и AE, будучи продолжена, пересѣкаетъ BD въ точкѣ G, то GAB будетъ равнобедренный треугольникъ того же свойства.

436. Если въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, двѣ равныя хорды меньшаго круга будутъ продолжены до встрѣчи съ большимъ и если точки пересѣченія будутъ соединены, то образуется треугольникъ, имѣющій свойство требуемое предложеніемъ.

437. Положимъ, что въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, круги пересѣкаются еще въ точкѣ E, соединимъ A съ E и C съ E и продолжимъ прямыя AE и BD до встрѣчи въ точкѣ G, то фигура $CDGE$ будетъ параллелограмъ.

438. Показать, что меньшій кругъ, въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, равенъ кругу описанному около требуемаго треугольника.

439. Если, въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, AF есть діаметръ меньшаго круга, то DF будетъ радіусъ круга описаннаго около треугольника BCD.

Отъ 11 до 16.

440. Прямыя, соединяющія вершины, чрезъ одну, правильнаго пятиугольника, пересѣкаются въ вершинахъ другаго правильнаго пятиугольника.

441. $ABCDE$ есть правильный пятиугольникъ, проведемъ прямыя AC и BE и пусть BE пересѣкаетъ AC въ точкѣ F, показать что $AC=AB+BF$.

442. Показать, что каждый изъ треугольниковъ, образованныхъ, соединяя концы смежныхъ сторонъ правильнаго пятиугольника, меньше одной трети и больше четверти площади цѣлаго пятиугольника.

443. Построить правильный шестиугольникъ въ кругѣ по данному правильному треугольнику, построенному въ томъ же кругѣ и изъ построеніи показать, что сторона,

построеннаго шестиугольника равна радіусу круга и что площадь шестиугольника равна удвоенной площади треугольника.

444. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, коего бы углы относились между собою какъ числа 2, 5, 8?

445. Если $ABCDEF$ есть правильный шестиугольникъ, то, соединяя A съ C, B съ D, C съ E, D съ F, E съ A и F съ B, получимъ другой шестиугольникъ, коего площадь равна одной трети площади перваго.

446. Всякая равносторонняя фигура вписанная въ кругъ есть вмѣстѣ и равноугольная.

Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія IV-й книги.

Отъ 1 до 16.

447. Изъ вершинъ угловъ треугольника ABC опущены перпендикуляры на противоположныя стороны и встрѣчаютъ ихъ въ точкахъ D, E, F, показать, что DE и DF одинаково наклонены къ AD.

448. Точки касанія, вписаннаго въ кругъ треугольника, соединены прямыми линіями, изъ вершинъ, такимъ образомъ, полученнаго треугольника, опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, показать, что стороны треугольника, коего вершины суть основанія этихъ перпендикуляровъ, параллельны сторонамъ первоначальнаго треугольника.

449. Построить треугольникъ по данному углу и радіусамъ круговъ вписаннаго и описаннаго?

450. На данномъ основаніи построены треугольники, имѣющіе равные углы, противолежащіе основанію, показать, что центры круговъ вписанныхъ такъ, что они касаются одной стороны треугольника внѣшне, а другой и основанія касаются продолженій, лежатъ на окружности круга описаннаго около треугольниковъ.

451. Изъ вершинъ угловъ треугольника ABC опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, встрѣчаютъ окружность, описаннаго около треугольника круга, въ точкахъ D, E, F; если L будетъ точка встрѣчи перпендикуляровъ, то LD, LE, LF дѣлятся пополамъ сторонами треугольника.

452. Если $ABCDE$ есть правильный пятиугольникъ, и діагонали AC и BD пересѣкаются въ точкѣ O, то $AO=DO$ и $AC.CO=\square BC$.

453. Прямая PQ, данной длины движется, упираясь своими концами на двѣ данныя прямыя CP и CQ, изъ точекъ P и Q, возставленны перпендикуляры къ CP и CQ, пересѣкающіеся въ точкѣ R; перпендикуляры, опущенные изъ точекъ P и Q на CQ и CP пересѣкаются въ точкѣ S, показать, что геометрическія мѣста точекъ R и S суть окружности, имѣющія общій центръ въ точкѣ C.

454. На данной гипотенузѣ построены прямоугольные треугольники, показать, что геометрическое мѣсто центровъ, вписанныхъ въ треугольники круговъ, есть четверть окружности, коей данная гипотенуза есть хорда.

455. На данной прямой AB построить какой нибудь треугольникъ ACB, стороны AC и BC, построеннаго треугольника, раздѣлены пополамъ, изъ точекъ дѣленія возставлены перпендикуляры, пересѣкающіеся въ точкѣ D, найти геометрическое мѣсто точки D?

456. По данному основанію, одному углу при основаніи, по разстоянію между центромъ вписаннаго круга и центромъ круга, касающагося внѣшне основанія и продолженій другихъ сторонъ, построить треугольникъ?

457. Построить кругъ, который бы касался данной прямой въ данной точкѣ и дѣлилъ бы пополамъ окружность даннаго круга?

458. Построить кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и пересѣкалъ пополамъ окружности двухъ данныхъ круговъ?

459. Внутри даннаго круга построить три равные круга, которые бы касались между собою и даннаго круга?

460. Если радіусъ круга раздѣленъ, какъ въ кн. 2, пред. 11, то большій отрѣзокъ будетъ стороною правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ?

461. Если радіусъ круга будетъ раздѣленъ, какъ кн. 2, пред. 11, то квадратъ, построенный на большемъ отрѣзкѣ, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на радіусѣ, будетъ равенъ квадрату построенному на сторонѣ правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ.

462. Изъ вершины треугольника провести къ основанію его прямую такъ, чтобы квадратъ построенный на ней былъ равенъ прямоугольнику, построенному изъ отрѣзковъ основанія?

463. Проведены четыре прямыя въ одной плоскости, образующія четыре треугольника, показать, что круги, описанные около этихъ треугольниковъ, всѣ проходятъ чрезъ одну общую точку?

464. Перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ угловъ A и B треугольника ABC на противоположныя стороны пересѣкаются въ точки D, круги, описанные около ADC и DBC, пересѣкаютъ AB или продолженіе AB въ точкахъ E и F, показать, что $AE=BF$?

465. Четыре круга, проходящіе, каждый, чрезъ три центра круговъ, вписанныхъ въ треугольникъ равны.

466. Четыре круга описаны такъ, что каждый изъ нихъ касается внутренно трехъ сторонъ четыреугольника, показать, что центры этихъ круговъ лежатъ всѣ четыре на окружности одного круга?

467. Около треугольника ABC описанъ кругъ и изъ какой нибудь точки P окружности этого круга опущены перпендикуляры на BC, CA и AB, которые встрѣчаютъ еще окружность въ точкахъ D, E, F, показать, что треугольники ABC и DEF равны во всѣхъ своихъ частяхъ и что прямыя AD, BE, CF параллельны?

468. Изъ какой нибудь точки на окружности даннаго круга описанъ другой кругъ, пересѣкающій первый въ точкахъ A и B, изъ точки B въ описанномъ кругѣ проведена хорда BD, равная его радіусу, прямая AD пересѣкаетъ, данный кругъ въ точкѣ Q, показать, что прямая QD равна радіусу даннаго круга?

469. Внѣ даннаго квадрата взята такая точка, что если соединимъ ее съ вершинами угловъ квадрата, то уголъ между внѣшними прямыми дѣлится на три равныя части внутренними, показать, что геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть кругъ описанный около квадрата?

470. Два круга вписаны въ треугольники, образованные перпендикуляромъ опущеннымъ изъ вершины угла треугольника на противолежащую сторону; тоже самое сдѣлано относительно остальныхъ такихъ же перпендикуляровъ, показать, что сумма діаметровъ шести круговъ вмѣстѣ съ суммою сторонъ даннаго треугольника равна суммѣ этихъ перпендикуляровъ?

471. Описаны, въ одной плоскости три концентрическіе круга, провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между внутреннею и внѣшнею окружностями дѣлился пополамъ въ одной изъ точекъ средней окружности въ которыхъ онъ ее встрѣчаетъ?

Книга VI.

Отъ 1 до 2.

472. Показать, что одинъ изъ треугольниковъ кн. 4, пред. 10 есть среднепропорціональный между двумя остальными?

473. Чрезъ какую нибудь точку D, основанія треугольника ABC, проведены DE и DF параллельно сторонамъ AB и AC и встрѣчаютъ эти стороны въ точкахъ E и F, показать, что треугольникъ AEF есть среднепропорціональный между треугольниками FBD и EDC?

474. Изъ какой нибудь точки, взятой внутри равносторонняго треугольника, опущены перпендикуляры на его стороны, показать, что сумма этихъ перпендикуляровъ есть величина постоянная?

475. Найти внутри треугольника такую точку, которую, если соединимъ съ вершинами угловъ треугольника, то онъ раздѣлится на три равные треугольника?

476. Изъ какой нибудь точки E, общаго основанія треугольниковъ ACB и ADB, проведены параллельныя прямымъ AC и AD, встрѣчающія BC и BD въ точкахъ F и G, показать, что $FG \parallel CD$?

477. Изъ какой нибудь точки основанія треугольника проведены параллельныя его сторонамъ, показать, что точка пересѣченія діагоналей, такъ образованнаго параллелограма, лежитъ на извѣстной прямой.

478. Въ треугольникѣ ABC проведена прямая AD перпендикулярно къ прямой BD, дѣлящей уголъ B пополамъ, показать, что прямая, проведенная чрезъ D параллельно BC раздѣлитъ AC пополамъ.

479. Въ треугольникѣ ABC проведена, какая нибудь, прямая параллельно сторонѣ BC, встрѣчающая AB въ точкѣ D, а AC въ точкѣ E; соединимъ B съ E и C съ D эти прямыя встрѣтятся въ точкѣ F, показать, что треугольникъ $ADF = \triangle AEF$?

480. Въ треугольникѣ ABC, проведена какая нибудь прямая параллельно BC, встрѣчающая AB и AC въ точкахъ D и E, прямыя BE и CD пересѣкаются въ точкѣ F, показать, что AF, будучи продолжена, раздѣлитъ BC пополамъ.

481. Если двѣ стороны, какого нибудь четыреугольника параллельны, то всякая прямая, проведенная параллельно имъ, раздѣлитъ другія стороны или ихъ продолженія на части пропорціональныя.

482. Изъ данной точки P, на сторонѣ AB, или на ея продолженіи, въ треугольникѣ ABC, провести къ сторонѣ AC или ея продолженію, такъ прямую, чтобы она стороною BC дѣлилась пополамъ?

На 3.

483. Сторона BC треугольника ABC въ точкѣ D раздѣлена пополамъ, углы ADB и ADC прямыми DE и DF раздѣлены пополамъ, DE и DF встрѣчаютъ AB и AC въ точкахъ E и F, показать, что $EF \parallel BC$?

484. AB есть діаметръ, какого нибудь круга, CD какая нибудь хорда перпендикулярная къ AB и, E какая нибудь точка на CD; прямыя AE и BE, будучи продолжены, встрѣчаютъ окружность въ точкахъ F и G, показать, что въ четыреугольникѣ $CFDG$, какія нибудь двѣ смежныя стороны пропорціональны двумъ остальнымъ.

485. Приложить пред. 3, кн. 6, къ рѣшенію задачи: раздѣлить данную прямую на три равныя части?

486. На окружности круга, коего діаметръ есть AB, взята какая нибудь точка P, проведены прямыя PC и PD равно наклоненныя къ AP, но съ противоположныхъ ея сторонъ и пересѣкающія AB въ точкахъ C и D, показать, что $AC:BC=AD:BD$.

487. На какой нибудь прямой AB, взята какая нибудь точка D, найти такую точку P, на продолженіи AB, чтобы:

$$PA:PB=DA:DB$$

488. Изъ точки A проведены прямыя, составляющія углы BAC, CAD, DAE каждый, изъ коихъ равенъ $\frac{1}{2}d$, эти прямыя пересѣчены прямою $BCDE$, которая образуетъ равнобедренный треугольникъ BAE, показать, что BC или DE есть средне-пропорціональная между BE и CD.

489. Въ треугольникѣ ABC уголъ A прямою AD раздѣленъ пополамъ, эта прямая встрѣчаетъ основаніе въ точкѣ D, а точка O есть средина BC, показать, что $OD:OB=$ $=AC-AB:AC+AB$.

490. Прямыя AD и AE суть равнодѣлящія внутренній и внѣшній углы A треугольника ABC, онѣ встрѣчаютъ основаніе BC въ точкахъ D и E, O есть средина BC, показать, что:

$$OD:OB=OB:OE$$

491. Три точки D, E, F на сторонахъ треугольника ABC, будучи соединены, образуютъ второй треугольникъ DEF, котораго двѣ какія нибудь стороны со стороною даннаго треугольника, на которой онѣ пересѣкаются, образуютъ равныя углы, показать, что AD, BE, CF перпендикулярны къ BC, CA, AB.

Отъ 4 до 6.

492. Если два треугольника построены на одномъ основаніи и между двумя параллельными линіями, то всякая прямая параллельная основанію отсѣкаетъ отъ обѣихъ треугольниковъ равныя площади.

493. Прямыя AB и CD, данной величины, параллельны, E есть средина прямой CD, AC и BE встрѣчаются въ точкѣ F, а AE и BD въ точкѣ G, показать, что $FG \parallel AB$.

494. A, B, C суть три данныя точки на одной прямой линіи, чрезъ точку C проведена какая нибудь прямая, показать, что перпендикуляры опущенные на нее изъ точекъ A и B, находятся между собою въ постоянномъ отношеніи.

495. Если перпендикуляры, опущенные изъ двухъ данныхъ точекъ, на прямую, проходящую между этими точками, находятся между собою въ постоянномъ отношеніи, то прямая должна проходить чрезъ постоянную точку.

496. Найти такую прямую перпендикуляры на которую, опущенные изъ трехъ данныхъ точекъ, находятся между собою въ данномъ отношеніи?

497. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы части ея, заключенныя между данною точкою и перпендикулярами опущенными на прямую находились въ данномъ отношеніи между собою?

498. Касательная къ кругу въ точкѣ A пересѣкаетъ двѣ параллельныя касательныя въ точкахъ B и C, которыхъ точки касанія суть D и E, прямыя BE и CD пересѣкаются въ точкѣ F, показать, что AF параллельна касательнымъ BD и CE.

499. P и Q суть двѣ данныя точки, AB и CD двѣ данныя параллельныя прямыя, проведена какая нибудь, прямая чрезъ точку P, встрѣчающая AB въ точкѣ M, чрезъ точку Q проведена также какая нибудь прямая, встрѣчающая CD въ точкѣ N, показать,

что отношеніе $PM:QN$ есть величина постоянная и что прямая, проходящая чрезъ точки M и N проходятъ чрезъ постоянную точку.

500. Показать что одна діагональ въ четыреугольникѣ, въ которомъ двѣ стороны параллельны, и одна изъ нихъ въ двое болѣе другой, пересѣкаетъ другую въ точкѣ, лежащей на одной трети діагонали?

501. Въ точкахъ A и B на окружности круга коего центръ есть C проведены касательныя, пересѣкающіяся въ точкѣ F, изъ точки A опущенъ перпендикуляръ AN къ CB, показать, что $BF:BC=BN:NA$.

502. На сторонахъ AB и AC треугольника ABC взяты точки D и E и притомъ такъ что $BD=CE$, DE и BC продолжены до пересѣченія въ точкѣ F, показать, что $AB:AC=EF:DF$.

503. Если чрезъ вершину и концы основанія треугольника, проведемъ два круга, пересѣкающіеся на основаніи или на его продолженіи, то діаметры этихъ круговъ будутъ пропорціональны сторонамъ треугольника.

504. Найти такую точку изъ которой бы перпендикуляры, опущенные на стороны треугольника были въ данномъ отношеніи?

505. На смежныхъ сторонахъ прямоугольника построены два подобные треугольника и изъ ихъ вершинъ опущенны перпендикуляры на AB и AC, пересѣкающіеся въ точкѣ P. Если AB и AC будутъ сходственными сторонами, то точка P, во всѣхъ случаяхъ, будетъ находится на одной изъ діагоналей прямоугольника.

506. Показать, что въ фигурѣ кн. 1, пред. 43, EG и FH, будучи продолжены, пересѣкутся на продолженіи AC.

507. APB и CQD суть двѣ прямыя параллельныя линіи и $AP:PB=DQ:QC$, показать, что прямыя PQ, AC, BD, продолженныя, если необходимо, встрѣчаются въ одной точкѣ и что прямыя PQ, AD, BC также продолженныя, если необходимо, встрѣчаются въ одной точкѣ.

508. Если въ треугольникѣ ACB сторону AC продолжимъ до точки D, такъ чтобы $CD=AC$ и проведемъ прямую BD и если проведемъ, какую нибудь прямую, параллельно AB, встрѣчающую стороны AC и CB и изъ точекъ встрѣчи проведемъ параллельныя DB, то эти прямыя пересѣкутъ AB въ точкахъ равноотстоящихъ отъ концевъ A и B.

509. Если опишемъ кругъ, касающійся внѣшнѣ двухъ данныхъ круговъ, то прямая проходящая чрезъ точки касанія пересѣкаетъ прямую, соединяющую центры данныхъ круговъ, въ постоянной точкѣ.

510. Точка D есть средина стороны BC треугольника ABC, а P есть какая нибудь точка на AD, чрезъ точку P проведены прямыя BPE и CPE, встрѣчающія другія стороны треугольника въ точкахъ E и F, показать, что $EF \parallel BC$.

511. Діаметръ круга есть AB, E есть средина радіуса OB, на AE и EB, какъ на діаметрахъ описаны круги, PQL есть общая касательная, пересѣкающая данный кругъ въ P и Q, и продолженіе прямой AB въ точкѣ L, показать, что BL есть радіусъ меньшаго круга.

512. $ABCDE$ есть правильный пятиугольникъ, AD и BE пересѣкаются въ точкѣ O, показать, что сторона пятиугольника есть средне-пропорціональная между AO и AD.

513. $ABCD$ есть параллелограмъ, P и Q суть точки на прямой параллельной AB, PA и QB встрѣчаются въ R, а PD и QC встрѣчаются въ S, показать, что $RS \parallel AD$.

514. Даны двѣ точки A и B, AC и BD суть перпендикуляры къ данной прямой CD, AD и BC пересѣкаются въ E, EF есть перпендикуляръ къ CD, показать, что AF и BF составляютъ равные углы съ CD.

515. Изъ вершинъ параллелограма $ABCD$ опущены перпендикуляры на діагонали и пересѣкаютъ ихъ въ точкахъ E, F, G, H, показать, что $EFGH$ есть параллелограмъ подобный параллелограму $ABCD$.

516. Если два круга пересѣкаются въ данной точкѣ, а центры ихъ лежатъ на двухъ данныхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку, то, какая бы нибыла величина круговъ, ихъ общія касательныя пересѣкаются на одной изъ двухъ постоянныхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку.

Отъ 7 до 18.

517. Если два круга, касаясь между собою касаются данной прямой, то часть прямой, заключенная между точками касанія будетъ средне-пропорціональная между діаметрами круговъ.

518. Раздѣлить данную дугу круга на двѣ части, коихъ бы хорды находились между собою въ данномъ отношеніи.

519. Въ данномъ треугольникѣ провести прямую параллельно одной изъ его сторонъ такъ, чтобы она была средне-пропорціональная между отрѣзками основанія.

520. Въ треугольникѣ ABC изъ вершины A опущенъ перпендикуляръ на BC и встрѣчаетъ BC въ точкѣ D между B и C, показать, что если AD есть средне-пропорціональная между BD и BC, то уголъ BAC есть прямой.

521. Въ треугольникѣ ABC изъ вершины A опущенъ перпендикуляръ на противоположную сторону BC и встрѣчаетъ ее въ точкѣ D между B и C, показать, что если BA есть средне-пропорціональная между BD и BC, то уголъ $\angle BAC=d$.

522. Центръ круга есть C, A есть точка внутри круга, прямая CA продолжена до B такъ, что радіусъ круга есть средне-пропорціональная между CA и CB, показать, что если P будетъ, какая нибудь точка на окружности, то $\angle CPA=\angle CBP$.

523. Дана точка O на данной прямой OA, данный кругъ движется такъ, что постоянно касается прямой OA, изъ точки O проведена касательная OP къ кругу, на продолженіи OP взята точка Q такъ, что PQ есть третяя пропорціональная къ OP и къ радіусу круга, показать, что при движеніи круга по прямой OA, точка Q движется также по прямой.

524. Двѣ данныя параллельныя линіи касаются круга, SPF есть третяя касательная, пересѣкающая первыя двѣ въ S и F, а кругъ въ P, показать, что прямоугольникъ $SP.PF$ есть величина постоянная для всѣхъ положеній точки P.

525. Въ данномъ треугольникѣ ABC уголъ $C=d$, изъ A возставленъ перпендикуляръ къ AB, встрѣчающій продолженіе BC въ E, изъ B возставленъ также перпендикуляръ, встрѣчающій продолженіе AC въ D, показать, что $\triangle ECD=\triangle ACB$.

526. Найти на сторонѣ треугольника точку изъ которой, если проведемъ двѣ прямыя: одну къ противоположной вершинѣ, а другую параллельно основанію, то чтобы треугольники образуемые ею со сторонами треугольника и съ основаніемъ были равны?

527. Въ треугольникѣ ABC проведена равнодѣлящая уголъ ABC, она встрѣчаетъ прямыя, проведенныя чрезъ A и C параллельно BC и AB, въ точкахъ E и F, показать, что $\triangle CBE=\triangle ABF$.

528. Показать что діагонали, вписаннаго въ кругъ четыреугольника, дѣлятъ четыреугольникъ на четыре треугольника, подобные по два и вывесть теорему 35, кн. 3.

529. AB и CD суть двѣ хорды круга, проходящаго чрезъ точку O, EF какая нибудь хорда параллельная OB, прямыя CE и DF пересѣкаютъ AB въ G и H, прямыя DE и CF пересѣкаютъ AB въ K и L, показать, что $OG.OH=OK.OL$.

530. $ABCD$ есть четыреугольникъ вписанный въ кругъ, прямыя CE и DE, равнодѣлящія углы ACB и ADB, пересѣкаютъ BD и AC въ F и G, показать, что $EF:EG=ED:EC$.

531. Изъ вершины треугольника проведены двѣ прямыя, изъ коихъ одна пересѣкаетъ основаніе треугольника въ какой нибудь точкѣ, а другая пересѣкаетъ окружность, описаннаго около треугольника круга, такъ что отдѣляемый ею сегментъ круга содержитъ уголъ равный углу, который первая прямая составляетъ съ основаніемъ, показать, что прямоугольникъ, заключенный между сторонами треугольника равенъ прямоугольнику, заключенному между проведенными прямыми.

532. Прямая, равнодѣлящая уголъ C треугольника ACB, встрѣчаетъ основаніе въ точкѣ D и продолжена до точки E такъ, что $CD.CE=AC.CB$, показать, что если основаніе и уголъ C будутъ даны, то положеніе точки E будетъ постоянное.

533. Въ прямоугольный треугольникъ ABC вписанъ квадратъ, одна изъ сторонъ DE квадрата совпадаетъ съ гипотенузою AB треугольника, показать, что площадь квадрата равна площади прямоугольника $AD.BE$.

534. Въ параллелограмѣ $ABCD$ изъ B проведена прямая линія, пересѣкающая діагональ AC въ F, сторону DC въ G, и продолженіе стороны AD въ E, показать, что $\square BF=EF.FG$.

535. Если чрезъ вершину равнобедреннаго треугольника проведемъ прямую до встрѣчи съ основаніемъ и съ окружностью круга, описаннаго около треугольника, то прямоугольникъ заключенный между цѣлою прямою и ея частью отъ вершины до основанія, равенъ квадрату построенному на одной изъ равныхъ сторонъ треугольника.

536. Изъ точки A проведены двѣ касательныя къ кругу, коего центръ есть E, точки касанія соединены прямою, которая пересѣкаетъ EA въ H, на HA, какъ на діаметрѣ описанъ кругъ, показать, что касательныя, проведенныя изъ точки E къ этому кругу, пересѣкутъ его на окружности даннаго круга.

Отъ 19 до пред. с.

537. Построенъ равнобедренный треугольникъ, въ коемъ каждый изъ угловъ при основаніи равенъ удвоенному третьему углу, если углы при основаніи раздѣлимъ пополамъ и проведемъ равнодѣлящія до встрѣчи съ противоположными сторонами, то соединяя точки встрѣчи ихъ прямою треугольникъ раздѣлится на двѣ части, которыя относятся между собою, какъ основаніе къ сторонѣ треугольника.

538. Всякій правильный многоугольникъ, вписанный въ кругъ есть средне-пропорціональный между вписаннымъ и описаннымъ правильными многоугольниками съ половиннымъ числомъ сторонъ.

539. Показать, что въ пред. 24, кн. 6, $EG \parallel KH$.

540. Раздѣлить треугольникъ на двѣ равныя части прямою перпендикулярною одной изъ его сторонъ?

541. Чрезъ точку P, на діагонали AC параллелограма $ABCD$, проведена прямая, встрѣчающая BC въ точкѣ E, а AD въ точкѣ F; чрезъ туже точку P проведена еще другая прямая, встрѣчающая AB въ точкѣ G, и CD въ точкѣ H, показать, что $GF \parallel EH$.

542. Чрезъ данную точку провести хорду въ данномъ кругѣ такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась въ данномъ отношеніи?

543. Чрезъ данную точку внутри круга провести прямую такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась пополамъ?

544. Показать, что въ пред. 11, кн. 2, есть еще четыре прямыя, исключая данной, которыя раздѣлены въ томъ же отношеніи.

545. Построить треугольникъ по данному основанію, противолежащему углу и по данному прямоугольнику, заключенному между остальными сторонами?

546. Около равносторонняго треугольника описанъ кругъ и изъ какой нибудь точки на окружности проведены прямыя къ вершинамъ треугольника, показать, что одна изъ этихъ прямыхъ равна суммѣ двухъ другихъ.

547. Изъ концевъ B и C основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC проведены прямыя перпендикулярно къ AB и AC, пересѣкающіяся въ точкѣ D, показать, что $BC.AD=2AB.DB$.

448. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC сторона $AB=AC$, точка F есть средина BC, на какую нибудь прямую, проходящую чрезъ точку A опущены перпендикуляры FG и CE, показать, что $BC.EF=FC.EG+FA.FG$.

Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія VI-й книги.

Отъ 1 до пред. с.

549. AB есть діаметръ круга, P какая нибудь точка на его окружности, проведены прямыя AP и BP и если необходимо, то онѣ и продолжены, изъ какой нибудь точки C на AB проведена прямая перпендикулярно къ AB, пересѣкающая AP въ точкѣ D, а BP въ точкѣ E и окружность круга въ точкѣ F, показать, что CD есть третяя пропорціональная къ CE и CF.

550. Три точки A, B, C лежатъ на одной прямой линіи, въ точкѣ D отрѣзки AB и BC стягиваютъ равные углы, показать, что геометрическое мѣсто точки D есть окружность круга.

551. Если изъ вершины квадрата проведемъ прямую, отрѣзывающую четвертую часть діагонали, то эта прямая отрѣжетъ отъ стороны квадрата одну третею часть. Слѣдовательно, если проведемъ чрезъ всѣ вершины подобныя прямыя, то образуется квадратъ, составляющій двѣ пятыя части даннаго квадрата.

552. Стороны AB и AC треугольника ABC, продолжены до какихъ нибудь точекъ D и E, такъ чтобы $DE \| BC$. Прямая DE въ точкѣ F раздѣлена такъ что $DF:FE=BD:CF$, показать, что геометрическое мѣсто точки F есть прямая линія.

553. Точки A, B, C лежатъ по порядку на одной прямой, найти на той же прямой точку P такую, чтобы $PA:PB=PB:PC$?

554. Даны двѣ точки A и B на окружности даннаго круга и точка P движущаяся на той же окружности, на прямой PB взята точка D такъ что $PD:PA$ есть постоянная величина, на PA взята точка E такъ что $PE:PB$ равна той же величинѣ, т. е. $PD:PA=PE:PB=k$, показать, что прямая DE во всѣхъ положеніяхъ касается постояннаго круга.

555. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC уголъ A равенъ четырежды взятому одному изъ остальныхъ угловъ, показать, что если въ точкахъ D и E прямая BC раздѣлена на три равныя части, то треугольникъ ADE будетъ равносторонній.

556. Изъ вершинъ противоположныхъ угловъ прямоугольника опущены перпендикуляры на діагональ, показать, что эти перпендикуляры раздѣлятъ діагональ на равныя части, если квадратъ одной стороны прямоугольника равенъ удвоенному квадрату другой?

557. Прямая AB раздѣлена въ точкѣ C на какія нибудь двѣ части; на цѣлой AB, и на ея частяхъ AC и BC построены равносторонніе треугольники ADB, ACE, BCF, изъ коихъ два послѣдніе съ одной стороны прямой, а первый съ противоположной стороны; G, H, K суть центры круговъ вписанныхъ въ эти треугольники, показать, что $\angle AGH=\angle ADC$, $\angle BGK=\angle BDC$ и что $GH=GK$.

558. На катетахъ прямоугольнаго треугольника построены квадраты, показать, что если соединимъ вершины острыхъ угловъ треугольника съ противолежащими вершинами квадратовъ, то эти прямыя отрѣжутъ отъ катетовъ треугольника равные отрѣзки, каждый изъ коихъ есть средне-пропорціональный между остальными отрѣзками.

559. Даны двѣ прямыя и положеніе точки между ними, чрезъ данную точку провести двѣ прямыя, которыя бы, оканчиваясь на данныхъ прямыхъ, находились въ данномъ отношеніи и составляли данный уголъ?

560. Изъ точки A, на окружности круга ABC, какъ изъ центра описанъ кругъ PBC, пересѣкающій первый кругъ въ точкахъ B и C, проведена, какая нибудь, хорда AD перваго круга, встрѣчающая общую хорду BC въ точкѣ E, а окружность другаго круга въ точкѣ O, показать, что $\angle EPO = \angle DPO$, какое бы нибыло положеніе точки P.

561. Треугольники ABC и ABF построены на одномъ основаніи и при томъ такъ, что $\triangle ABC : \triangle ABF = 2:1$, продолженія сторонъ AF и BF встрѣчаютъ стороны AB и BC въ точкахъ D и E, отъ точки F на FB отложена $GF = FE$, въ точкѣ O отрѣзокъ GB раздѣленъ пополамъ, показать, что $BO : BE = DF : DA$.

562. Точка A есть центръ круга; другой кругъ, проходящій чрезъ A, пересѣкаетъ первый въ точкахъ B и C, AD есть хорда послѣдняго круга, встрѣчающая BC въ точкѣ E, изъ точки D проведены касательныя DF и DG къ первому кругу, показать, что точки G, E, F лежатъ на одной прямой линіи.

563. На сторонахъ AB и AC треугольника взяты точки D и E, AB и AC продолжены до точекъ F и G, такъ, что $BF = AD$ и $CG = AE$, проведены прямыя BG и CF, встрѣчающіяся въ точкѣ H, показать, что $\triangle FHG = \triangle BHC + \triangle ADE$.

564. Если, въ какомъ нибудь треугольникѣ ABC, взято $BD = \frac{1}{4} BC$ и $CE = \frac{1}{4} AC$, то прямая линія, проведенная чрезъ C и чрезъ пересѣченіе прямыхъ BE и AD, дѣлитъ сторону AB на двѣ части, которыя относятся между собою какъ 9:1.

565. Вписана въ кругъ, какая нибудь прямолинейная фигура, показать, что если раздѣлимъ пополамъ дуги и чрезъ точки дѣленія проведемъ касательныя къ кругу, то образуется описанная прямолинейная фигура подобная вписанной.

566. Найти средне-пропорціональную площадь между площадями двухъ прямоугольныхъ подобныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общій катетъ?

567. На сторонахъ AC и BC треугольника ABC взяты точки D и E такъ, что CD и CE составляютъ первая одну треть AC, а вторая одну треть BC, проведены двѣ прямыя BD и AE, пересѣкающіяся въ точкѣ O, показать, что $EO = \frac{1}{4} AE$ и $DO = \frac{1}{4} BD$.

568. Діаметры двухъ, касающихся внѣшне въ точкѣ C, круговъ суть CA и CB, хорда AD, перваго круга, будучи продолжена касается втораго круга въ E, а хорда BF, втораго круга, будучи продолжена, касается перваго круга въ точкѣ G, показать, что $AD.BF = 4DE.FG$.

569. Два круга пересѣкаются въ точкѣ A, проведена прямая BAC, пересѣкающая круги въ точкахъ B и C, изъ точекъ B и C, какъ изъ центровъ описаны два круга, каждый изъ коихъ пересѣкаетъ одинъ изъ первыхъ подъ прямымъ угломъ, показать, что эти круги и кругъ, коего діаметръ есть BC, пересѣкаются въ одной точкѣ.

570. $ABCDEF$ есть правильный шестиугольникъ, показать, что BF дѣлитъ AD въ отношеніи 1:3.

571. Въ треугольникахъ ABC и DEF углы A и D равны и $AB = DF$, показать, что $\triangle ABC : \triangle DEF = AC : DE$.

572. Если M и N суть точки, въ которыхъ круги вписанный внутри и вписанный

внѣ въ треугольникъ ABC, касаются стороны AC, то если продолжимъ BM до встрѣчи съ кругомъ вписаннымъ внѣ еще въ точкѣ P, то NP будетъ діаметръ.

573. Въ треугольникѣ ABC уголъ A прямой, D есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки A на BC, DM, DN суть перпендикуляры, опущенные изъ D на AB и AC, показать, что $\angle BMC = \angle BNC$.

574. Если изъ точки дѣлящей пополамъ данную дугу круга, проведемъ двѣ прямыя, пересѣкающія хорду данной дуги и окружность круга въ четырехъ точкахъ, то эти точки лежатъ на окружности одного круга.

575. Вписанный внутренне въ треугольникъ ABC кругъ касается стороны AB въ точкѣ D, а вписанный внѣ касается той же стороны въ точкѣ E, показать, что прямоугольникъ изъ радіусовъ круговъ$=AD.DB=AE.EB$.

576. Показать, что геометрическое мѣсто средины прямой, проведенной параллельно основанію треугольника, есть прямая линія.

577. Вписанъ въ треугольникъ параллелограмъ, коего одна сторона лежитъ на основаніи треугольника, а смежныя ей стороны параллельны данному направленію, показать, что геометрическое мѣсто пересѣченія діагоналей такихъ параллелограмовъ есть прямая проходящая чрезъ средину основанія треугольника.

578. На прямой AB, какъ на гипотенузѣ, построимъ прямоугольный треугольникъ, изъ A и B проведены прямыя, дѣлящія противоположныя стороны пополамъ показать, что геометрическое мѣсто пересѣченія этихъ прямыхъ есть кругъ.

579. Изъ данной точки, внѣ двухъ данныхъ не пересѣкающихся круговъ, провести прямую такъ, чтобы части этой прямой, заключающіяся въ кругахъ были пропорціональны радіусамъ круговъ?

580. Въ данный треугольникъ вписать ромбъ такъ, чтобы одна изъ его вершинъ находилась въ данной на основаніи точкѣ, и одна сторона лежала на основаніи?

581. Въ треугольникѣ ABC уголъ C прямой, $ABDE$ есть квадратъ, построенный на гипотенузѣ AB, F, G, H суть точки пересѣченія діагоналей квадрата и діагоналей съ катетами, показать что $\angle DCE + \angle GFH = d$?

Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія первыхъ шести книгъ.

582. Дана постоянная точка O и прямая, чрезъ точку O проведена, какая нибудь прямая, пересѣкающая данную прямую въ точкѣ P, на прямой OP отложенъ отрѣзокъ OQ такъ, что прямоугольникъ $OP.OQ$ есть величина постоянная, показать, что геометрическое мѣсто точки Q есть окружность круга.

583. Дана постоянная точка O на окружности круга, чрезъ точку O проведена, какая нибудь прямая, пересѣкающая окружность въ точкѣ P, на прямой OP взята точка Q такъ, что прямоугольникъ $OP.OQ$ есть величина постоянная, показать, что геометрическое мѣсто точки Q есть прямая линія.

584. Противоположныя стороны вписаннаго въ кругъ четыреугольника, будучи продолжены, пересѣкаются въ точкахъ P и Q, показать, что квадратъ построенный на PQ равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на проведенныхъ къ кругу касательныхъ изъ точекъ P и Q.

585. Вписанъ въ кругъ четыреугольникъ $ABCD$, противоположныя стороны AB и DC пересѣкаются въ точкѣ F, а BC и AD въ точкѣ E, показать, что кругъ описанный на EF, какъ на діаметрѣ, пересѣкаетъ данный кругъ $ABCD$ подъ прямымъ угломъ.

586. Изъ вершины прямоугольнаго треугольника опущенъ на гипотенузу перпендикуляръ, изъ основанія перпендикуляра опущены перпендикуляры на катеты, показать, что

прямоугольный треугольникъ, коего катетами суть эти послѣдніе перпендикуляры, не можетъ быть больше одной четверти даннаго треугольника.

587. Если соединимъ оконечности двухъ пересѣкающихся прямыхъ такъ, чтобы образовалось два противоположныхъ вершинами треугольника, то фигура образованная, соединяя точки, дѣлящія данныя прямыя пополамъ, будетъ параллелограмъ, коего площадь равна полуразности площадей треугольниковъ.

588. AB и AC суть двѣ касательныя къ кругу въ точкахъ B и C, R есть какая нибудь точка, на прямой, соединяющей средины касательныхъ AB и AC, показать, что отрѣзокъ AR равенъ касательной, проведенной къ кругу изъ точки R.

589. AB и AC суть касательныя къ кругу, PQ есть хорда круга, которая, если необходимо должна быть продолжена, пересѣкаетъ прямую, соединяющую средины касательныхъ AB и AC, въ точкѣ R, показать, что $\angle RAP = \angle AQR$.

590. Если въ какомъ нибудь четыреугольникѣ проведемъ діагонали, то образуется каждыми двумя смежными сторонами и одною изъ діагоналей четыре треугольника, показать, что четыре круга, проходящіе чрезъ средины сторонъ каждаго изъ сказанныхъ треугольниковъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

591. Изъ какой нибудь точки опущены перпендикуляры на три равнодѣлящія углы равносторонняго треугольника, показать, что одинъ изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ другихъ.

592. Два круга пересѣкаются въ точкахъ A и B, изъ точки B возставленъ перпендикуляръ CBD къ AB, встрѣчающій круги въ точкахъ C и D, чрезъ точку A, проведена равнодѣлящая уголъ внутренній или внѣшній между AC и AD, эта равнодѣлящая встрѣчаетъ окружности въ E и F, показать, что касательныя въ точкахъ E и F пересѣкаются на продолженіи прямой AB.

593. Раздѣлить треугольникъ двумя прямыми на три части, которыя бы, будучи расположены въ извѣстномъ порядкѣ, образовали параллелограмъ съ углами данной величины.

594. $ABCD$ есть параллелограмъ а P, какая нибудь точка, показать, что треугольникъ PAC равенъ разности треугольниковъ PAB и PAD, если точка P находится внутри угла PAD или внутри противоположнаго ему угла; и равенъ суммѣ треугольниковъ PAB и PAD, если P находится въ какомъ нибудь другомъ положеніи.

595. Два круга пересѣкаются, проведена прямая $ABCDE$, которая пересѣкаетъ одинъ кругъ въ точкахъ A и D, а другой въ точкахъ B и E, а ихъ общую хорду пересѣкаетъ въ точкѣ C, показать, что $\square BD : \square AE = BC.CD : AC.CE$.

Книга XI.

Отъ 1 до 12.

596. Показать, что равныя прямыя, проведенныя изъ данной точки до встрѣчи съ данною плоскостью одинаково наклонены къ плоскости.

597. Если двѣ прямыя находящіяся въ одной плоскости одинаково наклонены къ другой плоскости, то онѣ одинаково наклонены и къ общему сѣченію обѣихъ плоскостей.

598. Изъ точки A опущенъ перпендикуляръ на плоскость и встрѣчаетъ ее въ точкѣ B, изъ B опущенъ перпендикуляръ на прямую находящуюся въ плоскости и встрѣчаетъ прямую въ точкѣ C, показать, что AC есть перпендикуляръ къ упомянутой прямой.

599. Въ треугольникѣ ABC перпендикуляры изъ вершинъ A и B на стороны BC и AC встрѣчаются въ точкѣ D, изъ D возставленъ перпендикуляръ къ площади треуголь-

ника, E есть какая нибудь на немъ точка, показать, что прямая, соединяющая E съ одною изъ вершинъ треугольника, перпендикулярна къ прямой, проведенной чрезъ эту вершину параллельно противоположной сторонѣ треугольника.

600. Чрезъ двѣ данныя точки внѣ данной плоскости проведены двѣ прямыя пересѣкающіяся на плоскости, найти когда ихъ сумма будетъ наименьшая?

601. Три прямыя линіи, не лежащія въ одной плоскости, пересѣкаются въ одной точкѣ, одна плоскость пересѣкаетъ ихъ въ равномъ разстояніи отъ точки общаго ихъ пересѣченія, показать, что перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на плоскость, встрѣчаетъ ее въ центрѣ круга, описаннаго около треугольника, образованнаго тремя точками прямыхъ встрѣчающихъ плоскость треугольника.

602. Показать построеніе прямой одинаково наклоненной къ тремъ прямымъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ?

603. Изъ точки E опустить перпендикуляры EC и ED на двѣ плоскости CAB и DAB, пересѣкающіяся по прямой AB, изъ D опустимъ перпендикуляръ DF на плоскость CAB, встрѣчающій ее въ точкѣ F, показать, что прямая CF, продолженная, если необходимо, перпендикулярна къ AB.

604. Изъ точки опущены перпендикуляры на плоскость и на прямую въ этой плоскости, показать, что прямая, соединяющая основанія перпендикуляровъ, перпендикулярна къ прямой на плоскости.

Отъ 13 до 21.

605. Общее основаніе двухъ пирамидъ есть BCD, вершины A и E пирамидъ лежатъ въ плоскости, проходящей чрезъ BC; AB и AC перпендикулярны къ гранямъ BED и CED, показать, что углы при A вмѣстѣ съ углами при E составляютъ болѣе четырехъ прямыхъ угловъ.

606. Внутри даннаго треугольника вписанъ другой треугольникъ, показать, что сумма угловъ стягиваемыхъ сторонами внутренняго треугольника въ какой нибудь точкѣ, не лежащей въ плоскости треугольника, меньше суммы угловъ стягиваемыхъ, въ той же точкѣ, сторонами внѣшняго треугольника.

607. Чрезъ концы двухъ параллельныхъ прямыхъ (отрѣзковъ) AB и CD, проведены параллельныя линіи Aa, Bb, Cc, Dd, пересѣкающія, какую нибудь плоскость въ точкахъ a, b, c, d, показать, что $AB:CD=ab:cd$.

608. Показать, что перпендикуляръ опущенный изъ вершины правильнаго тетраедра на противоположную грань равенъ трыжды взятому перпендикуляру, опущенному изъ основанія перваго перпендикуляра на одну изъ граней.

609. Основаніе треугольной пирамиды есть равносторонній треугольникъ, углы при вершинѣ суть прямые, показать, что сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки основанія на остальныя три грани есть величина постоянная.

610. Три прямыя линіи, не лежащія въ одной плоскости, пересѣкаются въ одной точкѣ, чрезъ эту послѣднюю точку проведена еще прямая, внутри трегранаго угла, образуемаго тремя первыми прямыми, показать, что сумма угловъ, образуемыхъ четвертою прямою съ тремя первыми меньше суммы и больше полусуммы угловъ, образуемыхъ тремя первыми между собою.

611. Три прямыя линіи, не лежащія въ одной плоскости, пересѣчены тремя плоскостями, въ одномъ и томъ же отношеніи, двѣ изъ плоскостей параллельны, показать, что и третяя будетъ параллельна двумъ первымъ, если точки пересѣченія ея съ тремя прямыми не лежатъ на одной прямой линіи.

612. Провести двѣ параллельныя плоскости, одну чрезъ одну прямую, а другую чрезъ другую не пересѣкающуюся съ первою прямою?

613. Если двѣ не параллельныя плоскости, пересѣчены двумя параллельными плоскостями, то линіи пересѣченія первыхъ двухъ съ двумя послѣдними образуютъ равные углы.

614. Изъ точки A, находящейся на одной изъ двухъ плоскостей, проведены прямыя AB и AC, первая перпендикулярно къ первой плоскости, а вторая перпендикулярно ко второй, прямыя AB и AC встрѣчаютъ вторую плоскость въ точкахъ B и C, показать, что BC есть перпендикуляръ къ пересѣченію двухъ плоскостей.

615. Многоугольники, образованные пересѣченіемъ призмы параллельными плоскостями равны.

616. Многоугольники образованные пересѣченіемъ пирамиды параллельными плоскостями, подобны.

617. Прямая линія $PBbp$ пересѣкаетъ двѣ параллельныя плоскости въ B и b, точки P и p равно отстоятъ отъ плоскостей; PAa и pcC суть другія двѣ прямыя, проведенныя чрезъ точки P и p до пересѣченія съ плоскостями, показать, что треугольники ABC и abc равны.

618. Изъ точекъ A и B надъ данною плоскостью опущены перпендикуляры AE и BF на нее; проведена еще плоскость чрезъ A перпендикулярно къ AB, показать, что пересѣченіе этой плоскости съ данною перпендикулярно къ прямой EF.

Книга XII.

Отъ 1 до 18.

619. Что означаетъ выраженіе: квадратура круга невозможна? Показать пріемъ съ помощью котораго Архимедъ первый нашелъ приближенное отношеніе окружности къ діаметру?

620. Построить кругъ, коего площадь была бы равна удвоенной площади другаго даннаго круга?

621. Данъ кругъ ABC, требуется построить кругъ abc концентрическій съ даннымъ, коего бы площадь была равна утроенной площади даннаго круга?

622. Данный кругъ раздѣлить, концентрическими кругами, на нѣсколько равныхъ частей?

623. Данный кругъ раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей, коихъ бы периметры были равны окружности даннаго круга?

624. Два круга касаются внутренне, площадь луночки, отдѣленной отъ большаго круга меньшимъ, равна удвоенной площади меньшаго круга, найти отношеніе между діаметрами круговъ?

625. Діаметръ даннаго круга раздѣленъ на двѣ части, на каждой изъ нихъ построимъ, какъ на діаметрѣ кругъ, площадь заключающаяся между данною окружностью и окружностями, построенныхъ круговъ, равна суммѣ площадей построенныхъ круговъ, найти въ какомъ отношеніи раздѣленъ діаметръ даннаго круга?

626. Около правильнаго тетраедра описать шаръ и найти радіусъ шара, когда ребро тетраедра есть единица?

627. Дана неправильная часть шара, показать какъ практически построить радіусъ шара къ которому принадлежитъ данная часть поверхности шара?

628. Три шара положены на горизонтальной плоскости, такъ что всѣ касаются между

собою, построить треугольникъ, коего вершины находятся въ точкахъ прикосновенія шаровъ съ горизонтальною плоскостью?

629. Построить пять правильныхъ тѣлъ?

630. Въ тетраедръ вписать шаръ?

631. Найти объемъ пирамиды по данной высотѣ и основанію, какая бы нибыла фигура этого послѣдняго?

632. Изъ десяти шаровъ сложена треугольная пирамида слѣдующимъ образомъ: на землѣ лежитъ шесть шаровъ, на этихъ послѣднихъ три шара, и на этихъ трехъ лежитъ одинъ, найти разстояніе этого послѣдняго шара отъ земли?

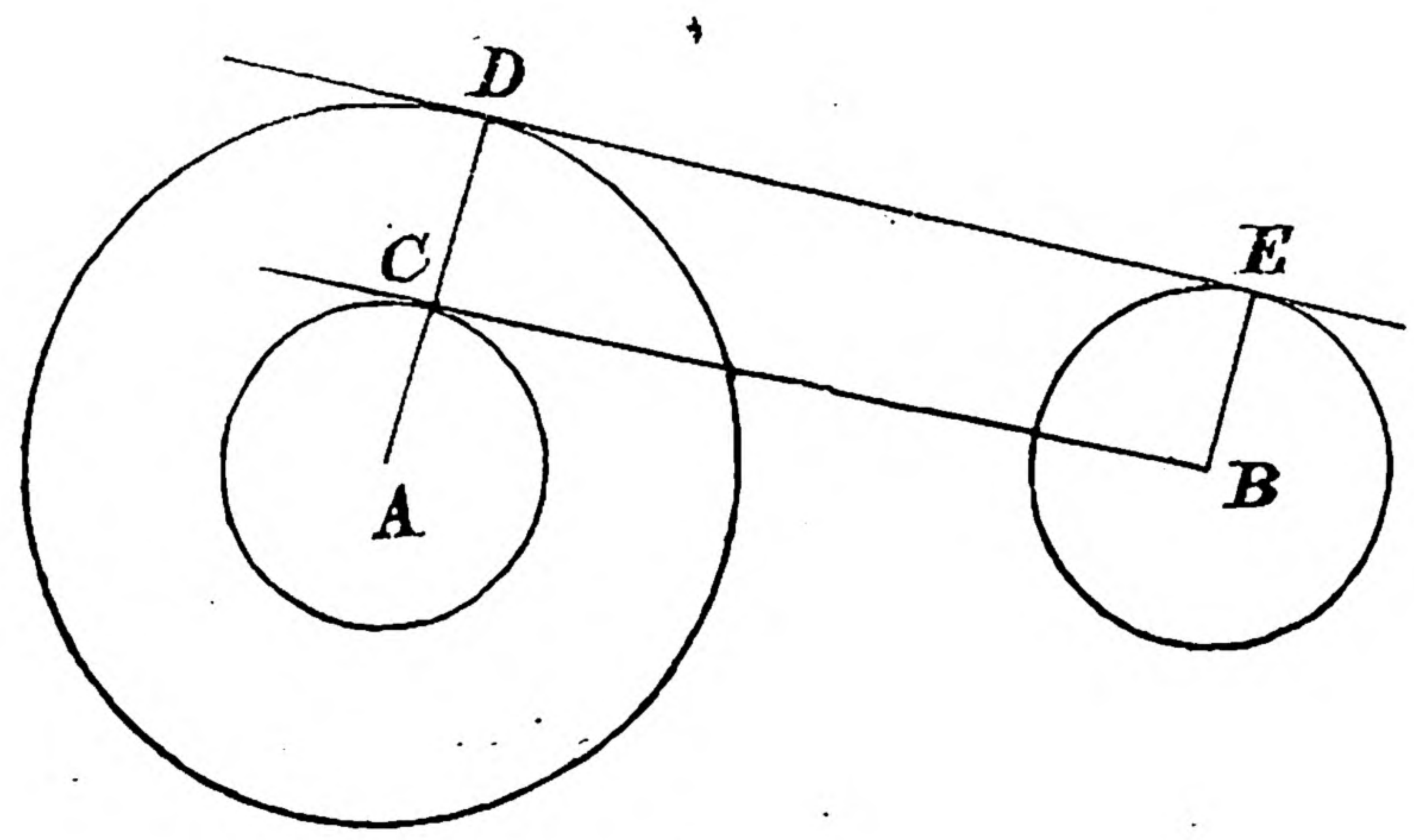
633. Найти отношеніе между угломъ въ сегментѣ круга и прямымъ угломъ, когда сегментъ круга равенъ одной четверти площади даннаго круга?

Рѣшеніе нѣкоторыхъ, заслуживающихъ особеннаго вниманія, задачъ

634. Провести касательную къ двумъ даннымъ кругамъ?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ центръ большаго круга, а B центръ меньшаго. Изъ центра A радіусомъ равнымъ разности радіусовъ данныхъ круговъ опишемъ кругъ, изъ центра B проведемъ касательную къ описанному кругу и пусть она касается круга въ точкѣ C (фиг. 572).

Фиг. 572.



Соединимъ A съ C и продолжимъ прямую AC до встрѣчи ея съ окружностью большаго круга въ точкѣ D. Проведемъ радіусъ $BE \parallel AD$, соединимъ D съ E, то DE и будетъ общая касательная.

Такъ какъ изъ точки B къ кругу, коего радіусъ есть AC, можно провести двѣ касательныя, то можно показать, что обѣ касательныя пересѣкутся въ точкѣ, лежащей на продолженіи прямой AB, соединяющей центры данныхъ круговъ. Это построеніе прилагается не только тогда, когда круги находятся одинъ внѣ другаго, но и тогда когда они касаются или пересѣкаются.

Если круги находятся одинъ внѣ другаго, то можно найти еще два рѣшенія. Изъ центра A опишемъ кругъ радіусомъ равнымъ суммѣ радіусовъ данныхъ круговъ и поступая какъ и прежде, только съ тѣмъ исключеніемъ, что BE и AD должны быть проведены въ противоположныхъ направленіяхъ, или же съ противоположныхъ сторонъ прямой AB. Можно и здѣсь показать, что двѣ, такимъ образомъ, проведенныя касательныя пересѣкутся въ точкѣ лежащей на AB.

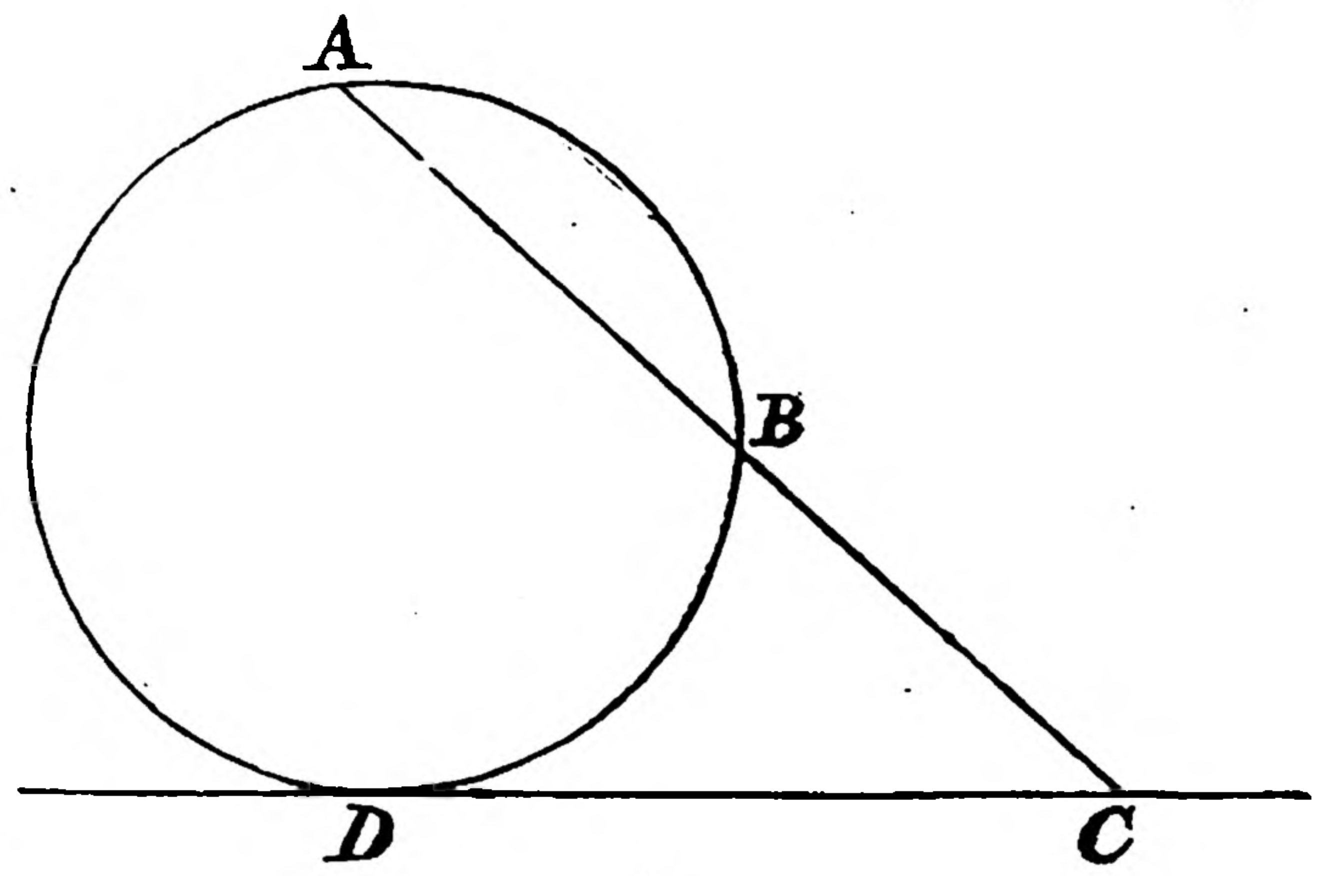
635. Описать кругъ, проходящій чрезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой линіи?

Рѣшеніе. Эта задача рѣшена въ 5 предл. 4 книги Евклида.

636. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки, лежащія по одну сторону данной прямой, и касался бы этой прямой?

Рѣшеніе. Пусть A и B будутъ данныя точки и EC данная прямая, соединимъ A и B прямою и продолжимъ ее до встрѣчи съ EC въ точкѣ C (фиг. 573).

Фиг. 573.



Построимъ квадратъ равный прямоугольнику $AC.BC$ и на данной прямой отъ точки C отложимъ отрѣзокъ CE равный сторонѣ построеннаго квадрата (кн. 2, пред. 14). Чрезъ точки A, B, E проведемъ кругъ (кн. 3, пред. 37), это и будетъ искомый кругъ.

Отрѣзокъ CE можетъ быть отложенъ отъ точки C и въ другую сторону, поэтому задача имѣетъ два рѣшенія.

Если прямая $AB \parallel CE$, то предъидущее построеніе не имѣетъ мѣста, а въ этомъ случаѣ поступаютъ слѣдующимъ образомъ: отрѣзокъ AB въ точкѣ D дѣлятъ пополамъ, изъ точки D возставляютъ перпендикуляръ къ AB и продолжаютъ его до встрѣчи съ данною прямою въ точкѣ C, и чрезъ три точки A, B и C проводятъ кругъ, который и есть требуемый.

637. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался бы двухъ данныхъ прямыхъ (фиг. 574)?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная точка, продолжимъ данныя прямыя до встрѣчи въ точкѣ B и соединимъ B съ A. Чрезъ точку B проведемъ BC равнодѣлящую уголъ между данными прямыми, въ которомъ лежитъ точка A, на этой равнодѣлящей возьмемъ, какую нибудь точку C и изъ нея опустимъ перпендикуляръ на одну изъ данныхъ прямыхъ, который встрѣчаетъ прямую въ точкѣ D, изъ точки C, какъ изъ центра, радіусомъ CD опишемъ кругъ, который встрѣчаетъ AB или ея продолженіе въ точкѣ E. Соединимъ C съ E и чрезъ A проведемъ $AF \parallel CE$, пусть AF встрѣчаетъ BC или ея продолженіе въ точкѣ F. Кругъ описанный изъ F, какъ изъ центра, радіусомъ FA будетъ касаться данныхъ прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, опустимъ изъ F перпендикуляръ FG на BD, который встрѣчаетъ BD въ точкѣ G. Такъ какъ (кн. 6, пред. 4):

$$CE : FA = BC : BF$$

а

$$CD : FG = BC : BF$$

то:

$$CE : FA = CD : FG$$

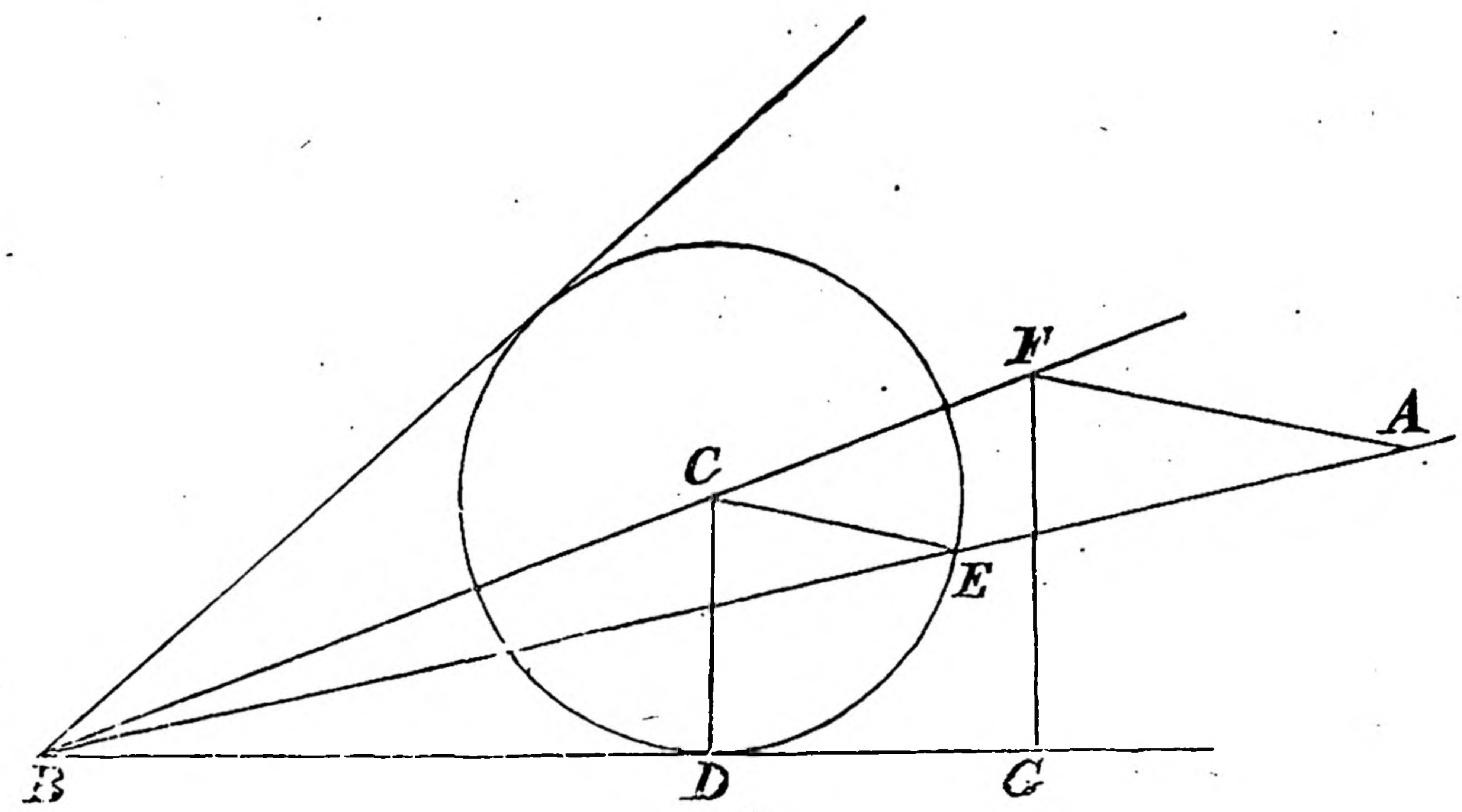
откуда:

$$CE : CD = FA : FG$$

но $CE = CD$, слѣдовательно и $FA = FG$.

Если точка A будетъ находится на прямой BC, то точка E опредѣляется какъ и выше, и затѣмъ D соединяютъ съ E и чрезъ точку A проводятъ $AG \| DE$. Эта прямая

Фиг. 574.



встрѣчаетъ BD или ея продолженіе въ точкѣ G, изъ точки G возставляютъ перпендикуляръ, пересѣченіе котораго съ BC и будетъ центръ искомаго круга.

Такъ какъ кругъ, описанный изъ точки C, какъ изъ центра, радіусомъ CD, пересѣкаетъ AB въ двухъ точкахъ, то задача имѣетъ два рѣшенія.

Если точка A находится на одной изъ данныхъ прямыхъ, то надобно изъ этой точки возставить перпендикуляръ къ этой прямой, пересѣченіе котораго съ одной изъ равнодѣлящихъ уголъ между данными прямыми и будетъ центръ искомаго круга.

Если двѣ данныя прямыя параллельны, то прямая BC проводится параллельно обѣимъ прямымъ въ равномъ отъ каждой изъ нихъ разстояніи.

638. Описать кругъ, который бы касался трехъ данныхъ прямыхъ, изъ коихъ не болѣе двухъ могли бы быть параллельны?

Рѣшеніе. Эта задача рѣшена въ кн. 4, пред. 4. Замѣтимъ только, что если три данныя прямыя образуютъ треугольникъ, то можно описать четыре круга удовлетворяющіе требованію задачи: одинъ кругъ касается всѣхъ сторонъ треугольника, а три остальные касаются одной стороны и двухъ продолженій сторонъ. Если изъ трехъ данныхъ прямыхъ двѣ параллельны, то можно описать только два круга одинъ съ одной, а другой съ другой стороны не параллельной прямой.

639. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга и данной прямой въ данной на ней точкѣ (фиг. 575)?

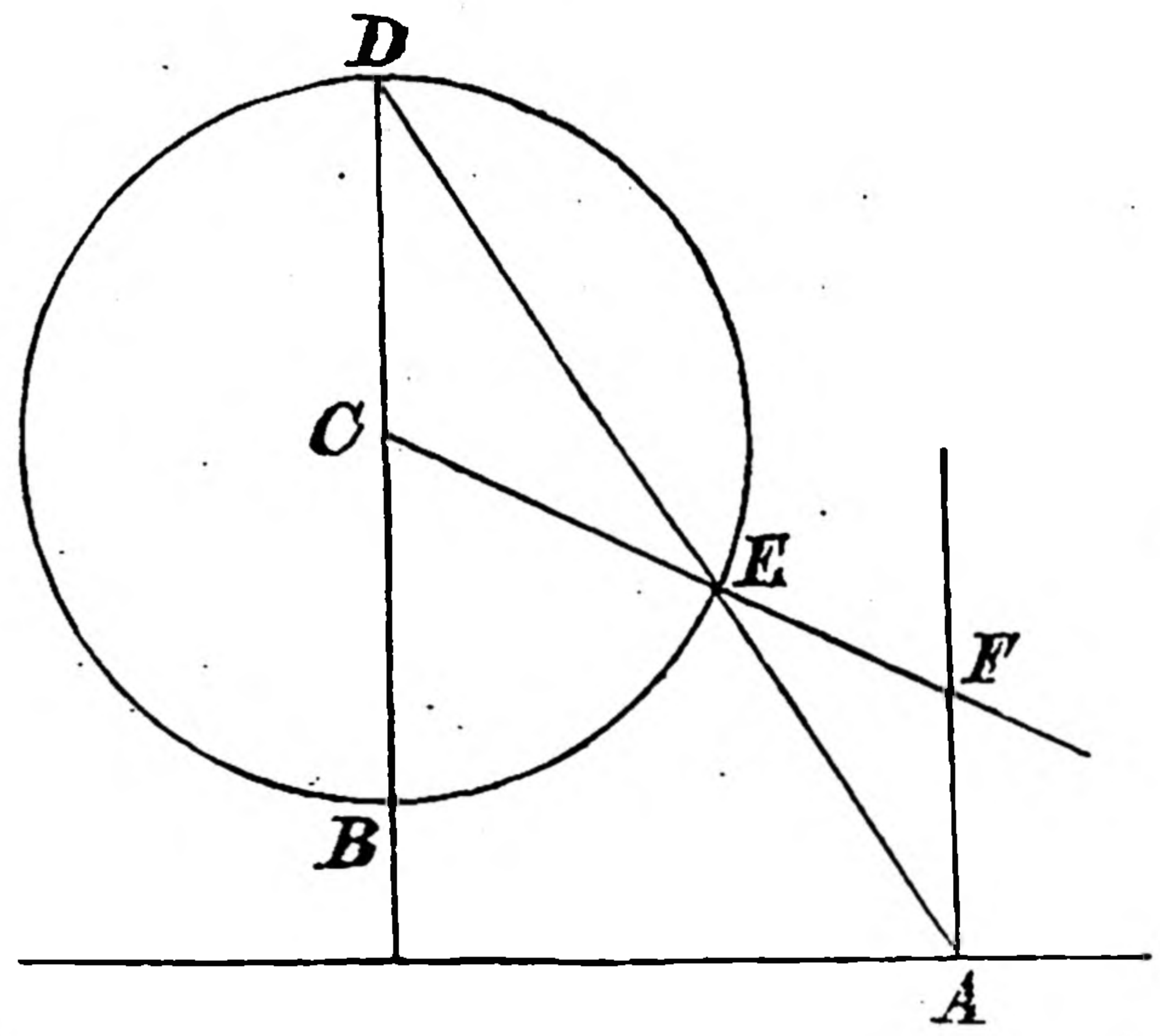
Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная точка на данной прямой, и C центръ даннаго круга. Чрезъ точку C проведемъ прямую BD перпендикулярно къ данной прямой, которая пересѣкаетъ окружность круга въ точкахъ B и D, изъ коихъ D есть точка, лежащая дальше отъ прямой. Соединимъ точку D съ A, прямая AD пусть пересѣкаетъ окружность въ точкѣ E. Изъ данной точки A возставимъ перпендикуляръ къ данной прямой, который пересѣчетъ прямую CE, соединяющую центръ круга съ точкою E, въ точкѣ F. Точка F и будетъ центръ искомаго круга, а AF радіусъ его.

Въ самомъ дѣлѣ, $\angle AEF = \angle CED$ (кн. 1, пред. 15) и $\angle EAF = \angle CDE$ (кн. 1 пред. 29), слѣдовательно $\angle AEF = \angle EAF$, а потому $AF = EF$ (кн. 1, пред. 6).

Второе рѣшеніе задачи получится соединяя точку A съ точкою B, лежащую на данной окружности ближе къ данной прямой.

Если данная прямая не пересѣкаетъ данную окружность, то кругъ полученный въ первомъ рѣшеніи съ даннымъ кругомъ касается внѣшне, а кругъ полученный во второмъ рѣшеніи касается даннаго внутренне.

Фиг. 575.



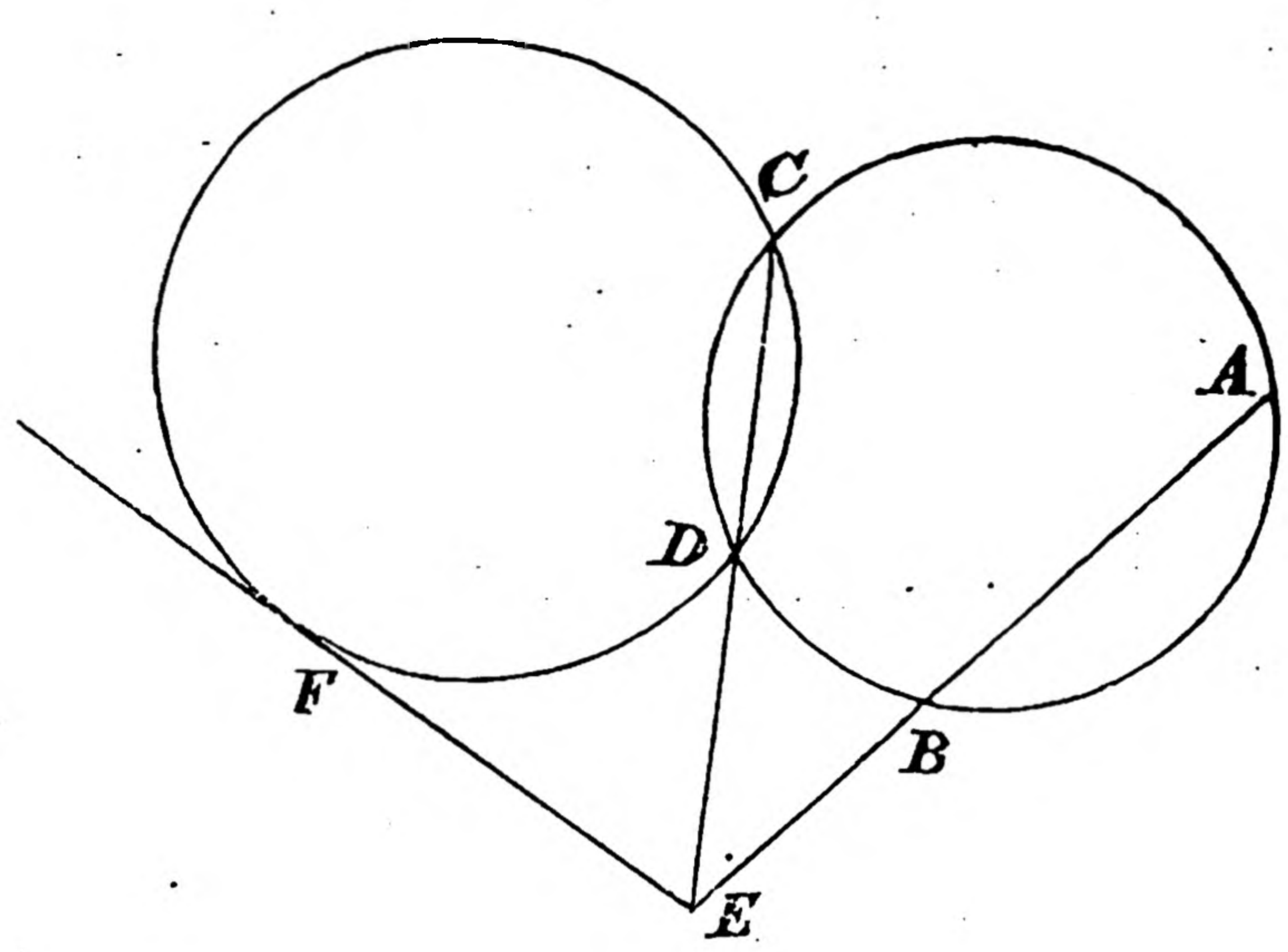
Если данная прямая пересѣкаетъ данный кругъ, то оба рѣшенія дадутъ круги, касающіеся даннаго круга внѣшне.

640. Описать кругъ который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки и касался бы даннаго круга (фиг. 576)?

Рѣшеніе. Пусть A и B будутъ данныя точки. На окружности даннаго круга возьмемъ, какую нибудь точку C и опишемъ кругъ, проходящій чрезъ три точки A, B, C.

Если этотъ кругъ касается даннаго, то онъ и есть требуемый, если же нѣтъ, то пусть точка D будетъ другая точка встрѣчи его съ даннымъ кругомъ.

Фиг. 576.



Продолжимъ прямыя AB и CD до встрѣчи ихъ въ точкѣ E, изъ точки E проведемъ касательную EF къ данному кругу, пусть точка F будетъ точка касанія. Кругъ описанный чрезъ точки A, B, F и будетъ требуемый (кн. 3, пред. 35, 37).

Задача эта имѣетъ два рѣшенія, такъ какъ изъ точки E къ данному кругу можно провести двѣ касательныя.

Если перпендикуляръ, возставленный изъ средины хорды AB, проходитъ чрезъ центръ даннаго круга, то въ этомъ случаѣ, точка E находится на безконечности, такъ какъ $AB \parallel CD$ и точка F получится, проводя касательныя къ данному кругу параллельно хордѣ AB.

641. Описать кругъ, который бы касался двухъ данныхъ прямыхъ и даннаго круга?

Рѣшеніе. Проведемъ двѣ прямыя параллельно даннымъ прямымъ на разстояніи радіуса даннаго круга отъ каждой изъ данныхъ прямыхъ и съ противоположной ихъ стороны относительно даннаго круга. Опишемъ кругъ, касающійся проведенныхъ прямыхъ и проходящій чрезъ центръ даннаго круга. Кругъ, имѣющій центръ этого послѣдняго круга, а радіусомъ разность радіусовъ описаннаго и даннаго круговъ, будетъ требуемый.

Такъ какъ можно описать два круга касающихся проведенныхъ прямыхъ и проходящихъ чрезъ центръ даннаго круга, то задача имѣетъ два рѣшенія, въ одномъ изъ рѣшеній кругъ будетъ касаться даннаго круга внѣшне, а въ другомъ внутренне.

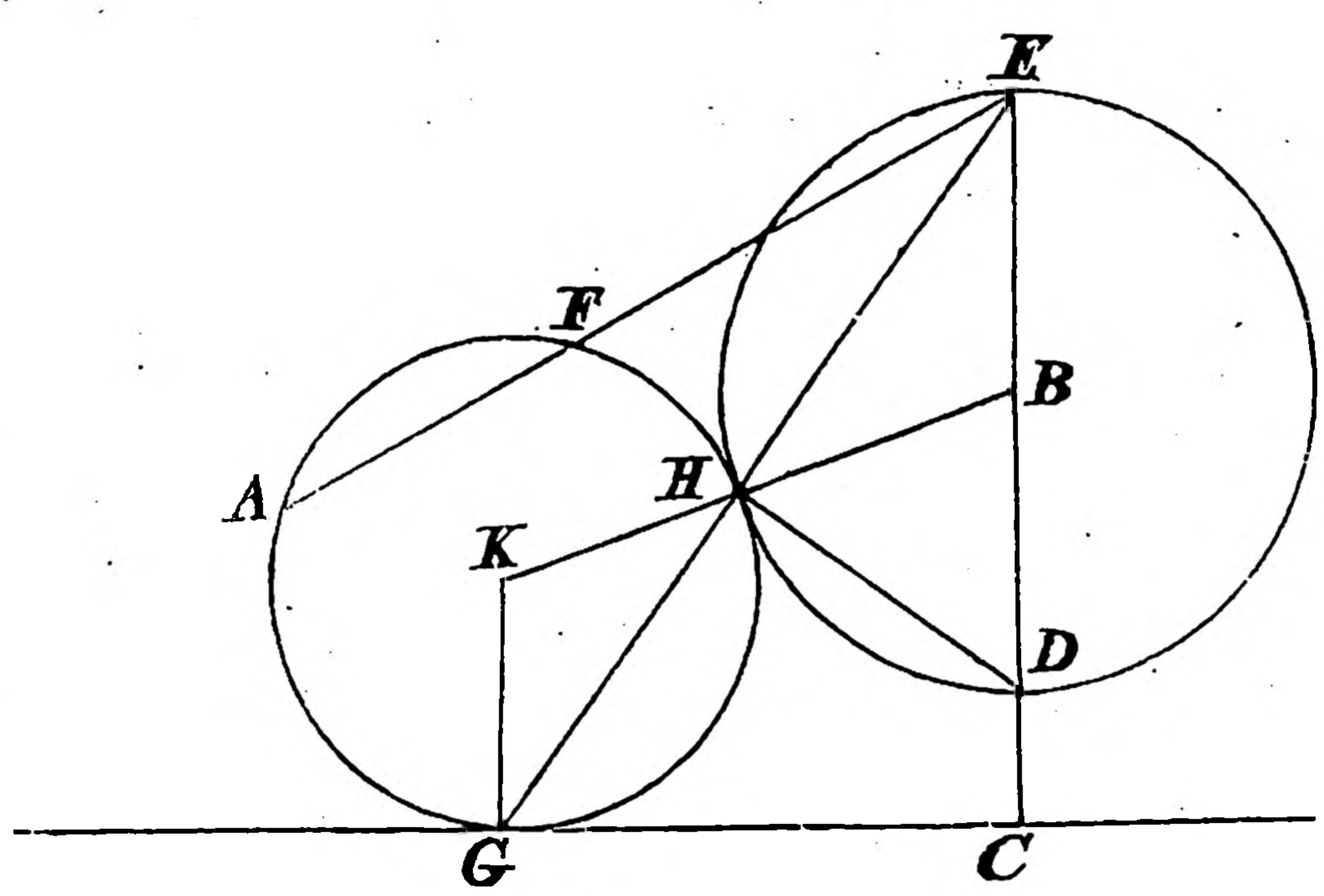
Если провести прямыя параллельно даннымъ, съ той же стороны ихъ съ коихъ лежитъ центръ даннаго круга, то получится два рѣшенія въ которыхъ искомые круги касаются даннаго оба внутренне.

Слѣдовательно задача имѣетъ четыре рѣшенія.

642. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку, касался бы данной прямой и даннаго круга (фиг. 577)?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная точка, GC данная прямая и B центръ даннаго круга. Изъ центра B опустимъ перпендикуляръ на данную прямую, который встрѣтитъ ее въ точкѣ C, а окружность въ точкахъ E и D. Соединимъ A съ E и на прямой AE опредѣлимъ точку F такъ, чтобы $EA.EF{=}EC.ED$; это можно сдѣлать проведя кругъ чрезъ точки A, C, D, который пересѣчетъ прямую EA въ искомой точкѣ F (кн. 3, пред. 36, слѣд.). Опишемъ кругъ, который бы проходилъ чрезъ точки A и F и касался бы данной прямой. Это и будетъ искомый кругъ.

Фиг. 577.



Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что описанный такимъ образомъ кругъ касается данной прямой въ точкѣ G, соединимъ G съ E, прямая EG пересѣчетъ данный кругъ въ точкѣ H, проведемъ прямую DH. Такъ какъ треугольники EHD и ECG подобны, то $EC.ED{=}$ ${=}EG.EH$ (кн. 3, пред. 31, кн. 6, пред. 4 и 16). Слѣдовательно $EA.EF{=}EH.EG$, а потому точка H находится на окружности описаннаго круга (кн. 3, пред. 36, слѣд.). Пусть K будетъ центръ круга, проходящаго чрезъ A и F и касающагося данной прямой въ точкѣ G. Проведемъ прямыя KG, KH и HB.

Легко можно показать, что $\angle KHG{=}\angle EHB$ (кн. 1, пред. 29, 5). Слѣдовательно KHB есть прямая линія, а потому описанный кругъ касается даннаго круга.

Такъ какъ задача: провести кругъ чрезъ двѣ данныя точки и касающійся данной прямой имѣетъ два рѣшенія, то и здѣсь получится два рѣшенія.

Для рѣшенія задачи мы соединили точку A съ E, но можно соединить A съ D и точно также получить еще два рѣшенія, слѣдовательно задача имѣетъ *четыре* рѣшенія.

643. Описать кругъ, который бы касался двухъ данныхъ круговъ и данной прямой?

Рѣшеніе. Пусть PQ будетъ данная прямая, A центръ меньшаго, а B центръ большаго круга, AD и BC ихъ радіусы.

Здѣсь могутъ быть слѣдующіе случаи: 1-й искомый кругъ можетъ касаться внѣшне обоихъ данныхъ круговъ, 2-й онъ можетъ касаться обоихъ внутренне и 3-й онъ можетъ касаться одного внѣшне, а другаго внутренне.

Положимъ центръ искомаго круга, касающагося внѣшне обоихъ данныхъ круговъ, есть O. Изъ точки O какъ изъ центра опишемъ кругъ проходящій чрезъ центръ A меньшаго круга, эта окружность касается круга описаннаго изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ разности радіусовъ данныхъ круговъ и касается прямой P_1Q_1, проведенной параллельно PQ на разстояніи отъ нея равномъ радіусу меньшаго изъ данныхъ круговъ, и съ противоположной стороны прямой PQ относительно центра B. Слѣдовательно рѣшеніе настоящей задачи сведено на рѣшеніе предъидущей (638).

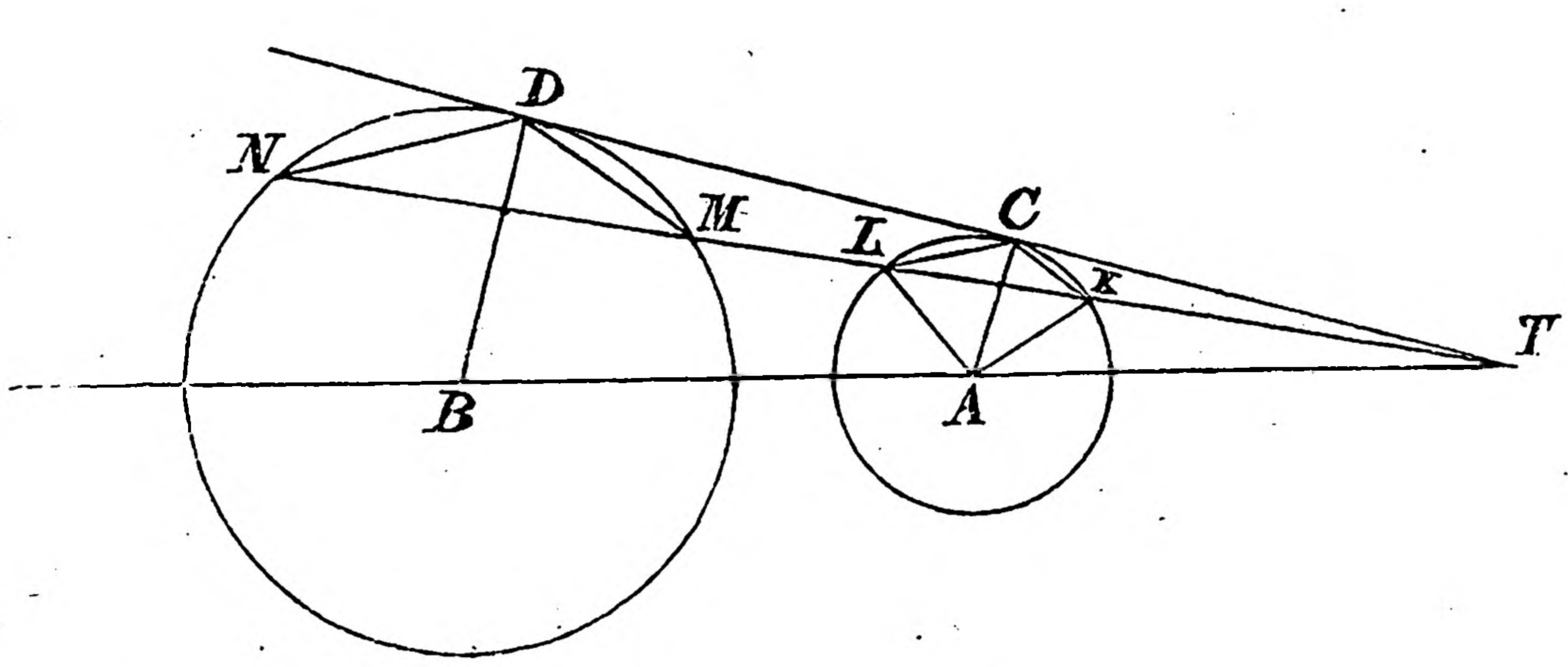
Эта послѣдняя задача (638) имѣетъ *четыре* рѣшенія, изъ коихъ только *два* даютъ рѣшеніе предложенной задачи: эти окружности, касаются внѣшне круга, описаннаго около B, радіусомъ $BF=BC-AD$. Въ самомъ дѣлѣ, если разсмотримъ окружность O', проходящую чрезъ A, касающуюся прямой P_1Q_1 и имѣющую внутренне касаніе съ кругомъ BF, то кругъ концентрическій съ кругомъ O' можетъ касаться круга AD и прямой PQ, но онъ не касается окружности BC.

Если прямую P_1Q_1 замѣнимъ прямою P_2Q_2 симметрично расположенной къ прямой P_1Q_1 относительно PQ и разсмотримъ вспомогательную окружность BF, то найдемъ *два* другіе круга удовлетворяющіе задачѣ.

Наконецъ если прямыя P_1Q_1 и P_2Q_2 будемъ послѣдовательно сочетать съ окружностью, описанной изъ точки B, какъ изъ центра радіусомъ равнымъ $BC+AD$, то получимъ еще *четыре* рѣшенія, слѣдовательно предложенная задача можемъ имѣть до *восьми* рѣшеній.

644. Пусть A будетъ центръ круга, B центръ другаго большаго, пусть CD будетъ прямая, касающаяся перваго круга въ точкѣ C, а втораго въ точкѣ D и пересѣкающая продолженіе прямой AB въ точкѣ T. Изъ точки T проведена, какая нибудь прямая, пересѣкающая кругъ A въ точкахъ K, L, а кругъ B въ точкахъ M, N, слѣдовательно точки пересѣченія такой прямой будутъ T, K, L, M, N. Я говорю, что прямыя: AK, KC, CL, LA соотвѣтственно параллельны прямымъ BM, MD, DN, NB, и что $TK.TN=TL.TM=TC.TD$ (фиг. 578).

Фиг. 578.



Доказат. Проведемъ прямыя AC и BD. Треугольники TAC и TBD подобны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4 и кн. 5, пред. 16):

$$TA:TB=AC:BD=AK:BM$$

Откуда треугольники TAK и TBM подобны (кн. 6, пред. 7), слѣдовательно

$\angle TAK = \angle TBM$, откуда $AK \| BM$. Точно также $AL \| BN$. Такъ какъ $AK \| BM$ и $AC \| BD$, то $\angle CAK = \angle DBM$, а слѣдовательно $\angle CLK = \angle DNM$ (кн. 3, пред. 20), откуда $CL \| DN$. Точно также $CK \| DM$.

Изъ кн. 3, пред. 37 и кн. 6, пред. 16, мы имѣемъ:

$$TM : TD = TD : TN$$

и (кн. 6, пред. 4):

$$TM : TD = TK : TC$$

слѣдовательно:

$$TK : TC = TD : TN$$

откуда прямоугольникъ $TK.TN = TC.TD$. Точно также $TL.TM = TC.TD$.

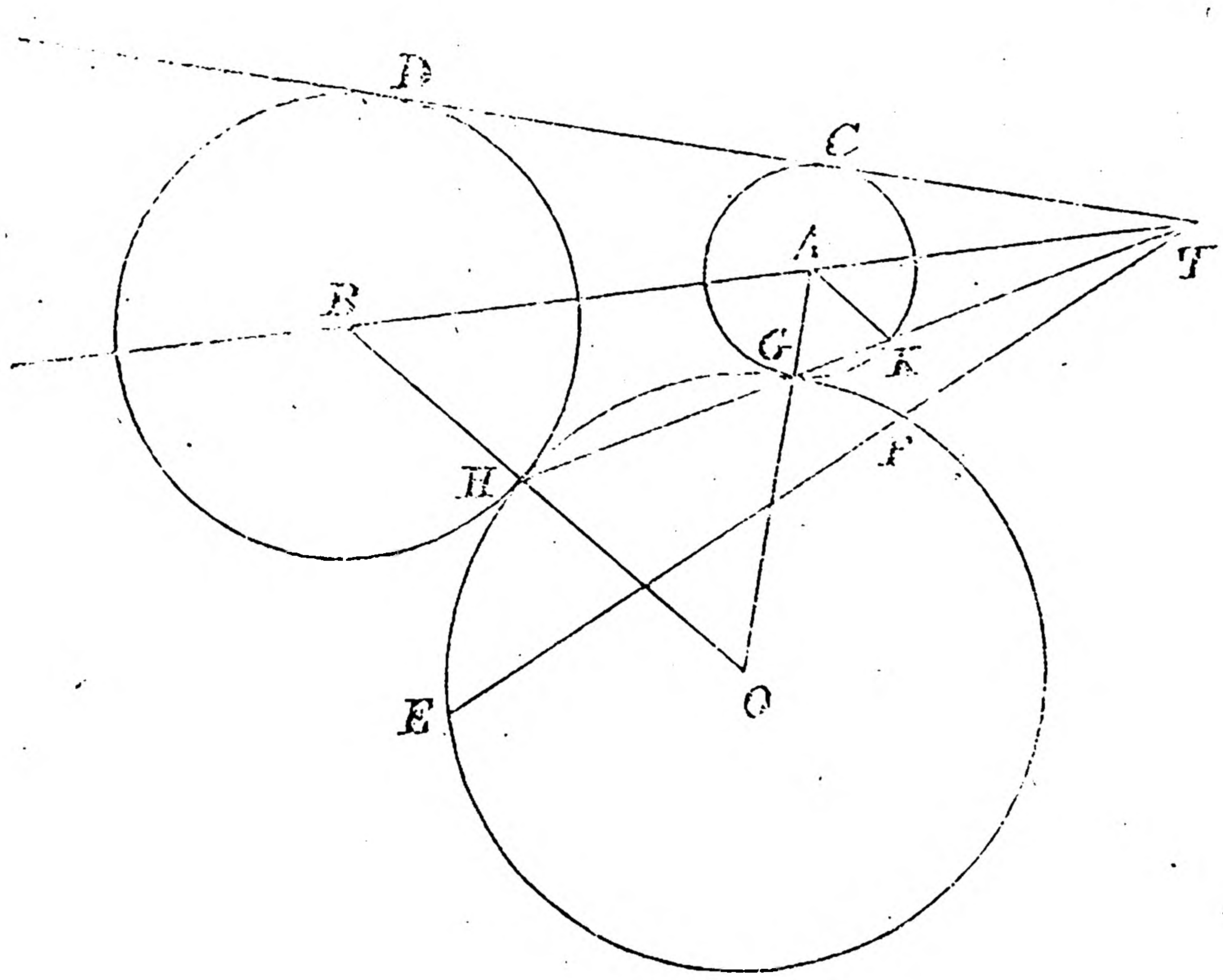
Если круги находятся одинъ внѣ другаго, то мы можемъ предположить, что касательная къ обоимъ кругамъ пересѣкаетъ прямую AB въ точкѣ T, лежащей между A и B и предъидущія свойства будутъ имѣть мѣсто лишь бы измѣнить буквы K на L, такъ что пять буквъ будутъ, въ этомъ случаѣ, въ слѣдующемъ порядкѣ: L, K, T, M, N.

Точка T называется *центромъ подобія* двухъ круговъ, слѣдовательно, если круги находятся одинъ внѣ другаго, то центровъ подобія есть два.

645. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался бы двухъ данныхъ круговъ (фиг. 579)?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ центръ меньшаго круга, а B центръ большаго, E данная точка.

Фиг. 579.



Проведемъ касательную къ обоимъ даннымъ кругамъ, пусть она касается ихъ въ точкахъ C и D и встрѣчаетъ продолженіе прямой BA въ точкѣ T. Соединимъ данную точку E съ T и раздѣлимъ прямую TE въ точкѣ F такъ, чтобы $TE.TF = TC.TD$. Опишемъ кругъ, проходящій чрезъ точки E и F и касающійся одного изъ данныхъ круговъ. Положимъ, что описанный кругъ касается меньшаго круга и пусть точка касанія будетъ G. Слѣдовательно остается показать, что этотъ кругъ касается и большаго круга. Для этого проведемъ прямую TG и продолжимъ ее до встрѣчи съ большимъ кругомъ въ точкѣ H, то $TG.TH = TC.TD$ (644), откуда $TG.TH = TE.TF$, слѣдовательно, описанный кругъ проходитъ чрезъ точку H.

Пусть O будетъ центръ этого круга, поэтому OGA есть прямая линія; остается показать что OHB есть прямая линія.

Пусть TG пересѣкаетъ меньшій кругъ еще въ точкѣ K, то $AK \| BH$ (644), откуда уголъ $\angle AKT = \angle BHG$ и $\angle AKG = \angle AGK = \angle OGH = \angle OHG$. Слѣдовательно $\angle BHG + \angle OHG = \angle AKT + \angle AKG = 2d$, откуда видимъ, что OHB есть прямая линія.

Такъ какъ задача (643) имѣетъ два рѣшенія, то и настоящая задача имѣетъ также два рѣшенія, но если круги находятся одинъ внѣ другаго, то можно вмѣсто внѣшняго центра подобія круговъ T взять внутренній (644) и получить еще два рѣшенія задачи, слѣдовательно она имѣетъ четыре рѣшенія. Кругъ проходя чрезъ данную точку можетъ касаться: 1-е обоихъ круговъ внѣшне, 2-е обоихъ внутренне и 3-е одного внѣшне, а другаго внутренне.

646. Описать кругъ, который бы касался трехъ данныхъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ центръ наименьшаго изъ трехъ данныхъ круговъ, или по крайней мѣрѣ не большаго изъ остальныхъ. Пусть B и C будутъ центры остальныхъ данныхъ круговъ. Изъ B, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ разности радіусовъ круговъ A и B, опишемъ кругъ. Точно также изъ центра C радіусомъ равнымъ разности радіусовъ круговъ A и C, опишемъ кругъ. Затѣмъ опишемъ кругъ который бы касался двухъ описанныхъ круговъ внѣшне и проходилъ чрезъ центръ A (645), то кругъ, имѣющій центромъ центръ этого послѣдняго круга, а радіусомъ разность радіусовъ его и круга, коего центръ есть A, и будетъ одинъ изъ искомыхъ круговъ. Этотъ кругъ будетъ касаться внѣшне.

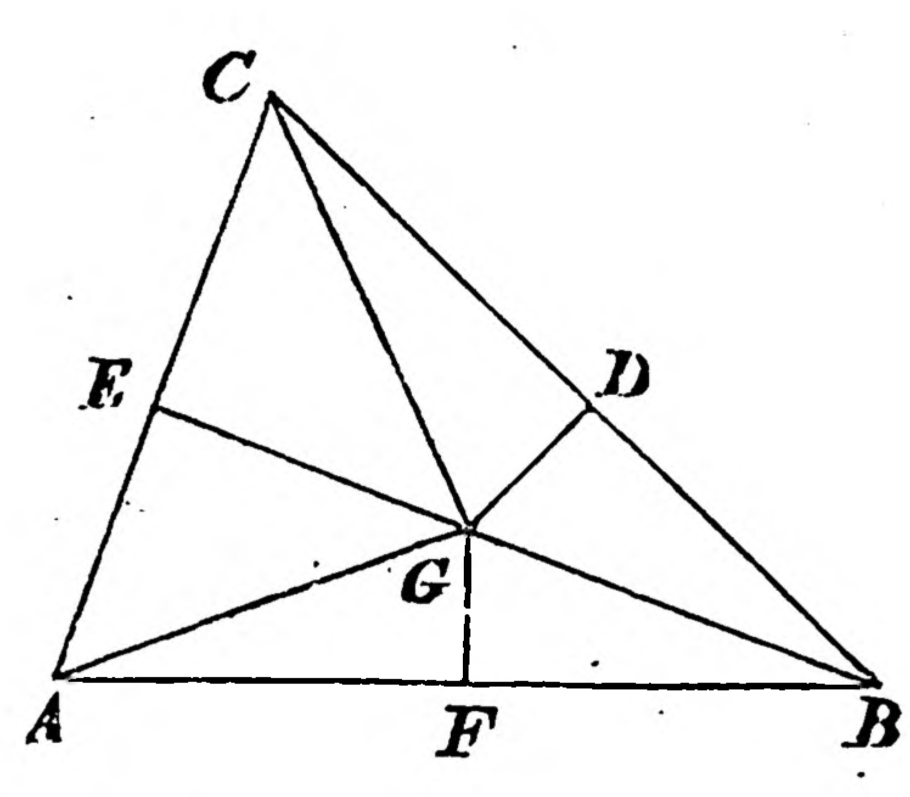
Точно также можно описать кругъ, касающійся внутренне трехъ данныхъ круговъ.

Можно описать кругъ такъ, что онъ будетъ касаться двухъ внѣшне и одного внутренне и двухъ внутренне и одного внѣшне, слѣдовательно задача имѣетъ *восемь* рѣшеній.

647. Если изъ срединъ сторонъ, какого нибудь треугольника возставимъ перпендикуляры, то всѣ три перпендикуляра пересѣкутся въ одной точкѣ (фиг. 580).

Доказат. Пусть ABC будетъ треугольникъ, раздѣлимъ стороны BC и AC, въ точкахъ D и E, пополамъ. Изъ точекъ D и E возставимъ перпендикуляры къ BC и AC, пусть эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ G, надобно показать, что перпендикуляръ возставленный изъ средины стороны AB пройдемъ чрезъ точку G.

Фиг. 580.

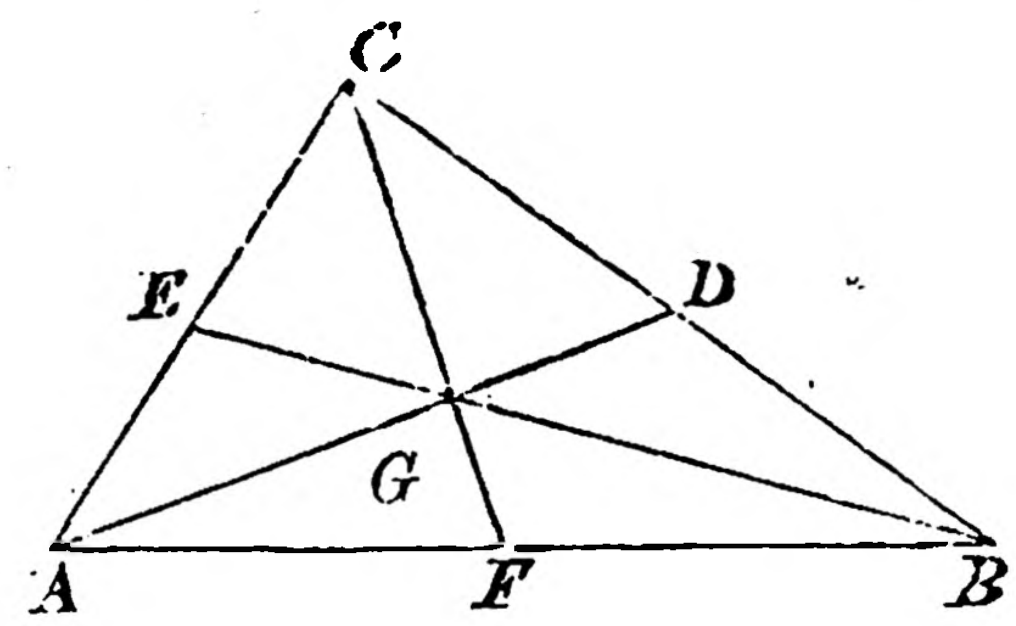


Изъ равенства треугольниковъ BDG и CDG, мы имѣемъ $BG = CG$, и изъ равенства треугольниковъ CEG и AEG, мы имѣемъ $CG = AG$; слѣдовательно $AG = BG$. Если теперь соединимъ точку G съ срединою стороны AB, то легко показать, изъ равенства треугольниковъ AGF и BGF, что GF есть перпендикуляръ къ AB.

648. Если, въ какомъ нибудь треугольникѣ соединимъ прямыми линіями вершины угловъ съ срединами противоположныхъ сторонъ, то эти три прямыя пересѣкутся въ одной точкѣ (фиг. 581).

Доказат. Пусть ABC будетъ треугольникъ, пусть точки D, E, F будутъ средины сторонъ его, проведемъ BE и CF, пусть эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ G, соединимъ A съ G и G съ D. Я говорю, что AGD есть прямая линія.

Фиг. 581.



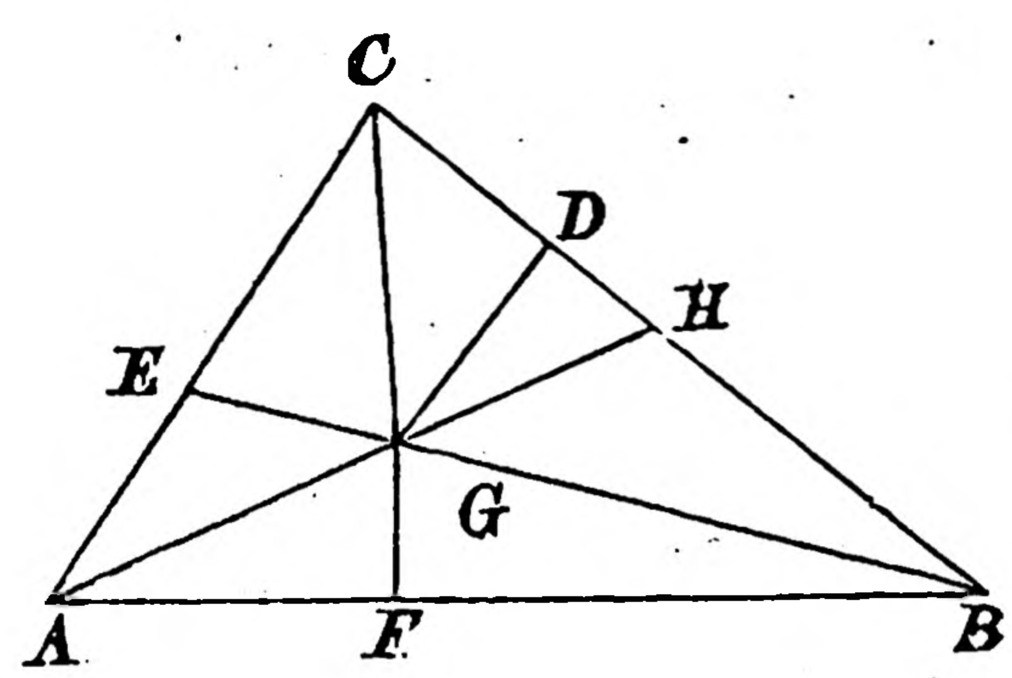
Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ $\triangle BEA = \triangle BEC$ и $\triangle GEA = \triangle GEC$ (кн. 1, пред. 38), слѣдовательно (кн. 1, акс. 3) $\triangle BGA = \triangle BGC$.

Точно также $\triangle CGA = \triangle CGB$, слѣдовательно $\triangle BGA = \triangle CGA$ и $\triangle BGD = \triangle CGD$ (кн. 1, пред. 38), слѣдовательно $\triangle BGA + \triangle BGD = \triangle CGA + \triangle CGD$. Слѣдовательно сумма $\triangle BGA + \triangle BGD = \frac{1}{2} \triangle ABC$. Откуда видно, что точка G должна находится на прямой AD, т. е. отрѣзки AG и GD составляютъ одну прямую линію.

649. Прямыя равнодѣлящія углы, какого нибудь, треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ (фиг. 582).

Доказат. Пусть ABC будетъ какой нибудь треугольникъ, проведемъ равнодѣлящія углы B и C, пусть онѣ встрѣтятся въ точкѣ G, соединимъ A съ G. Я говорю, что AG будетъ равнодѣлящая уголъ A.

Фиг. 582.



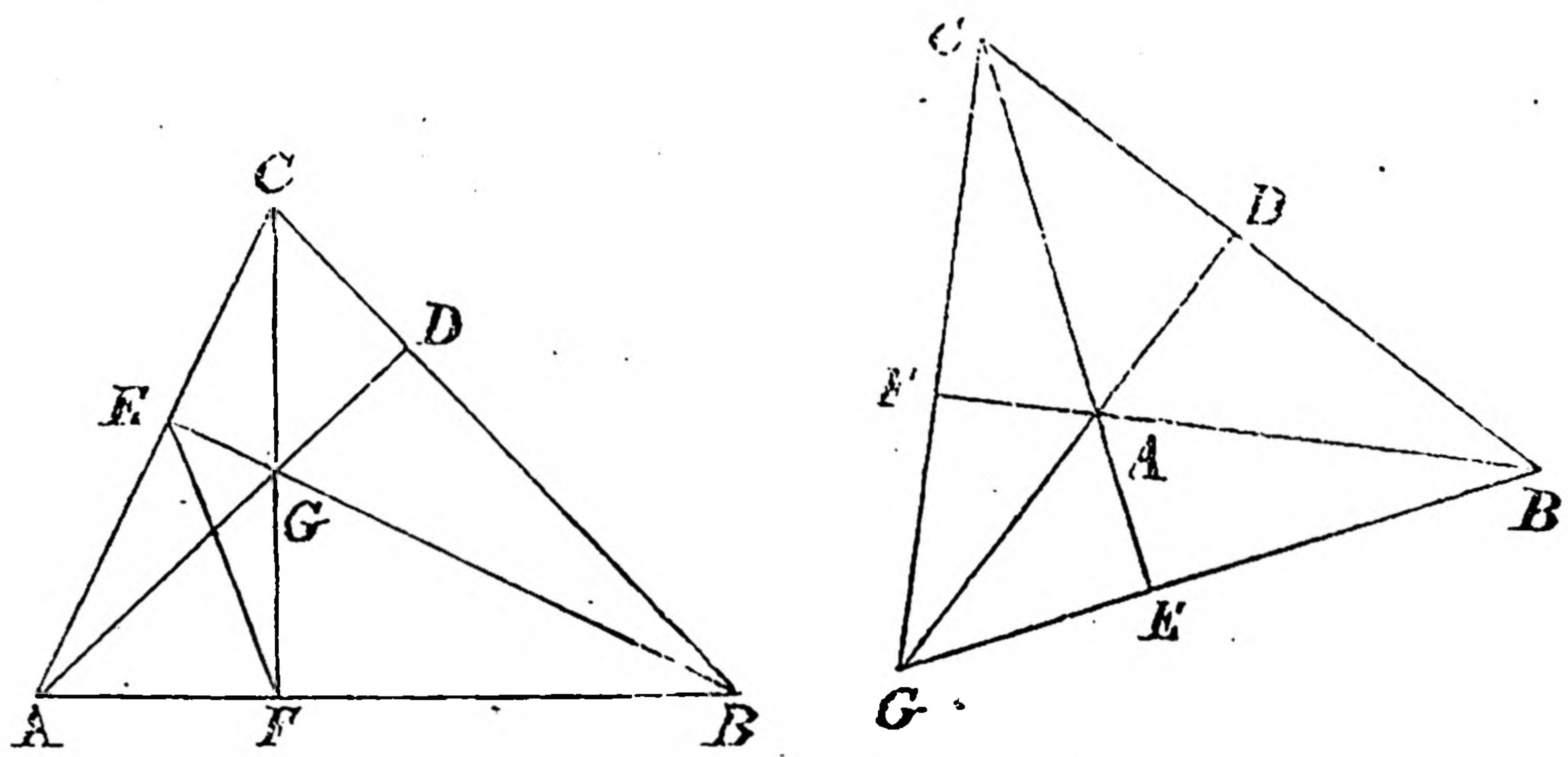
Опустимъ изъ точки G на сторону BC перпендикуляръ GD, на AC перпендикуляръ GE и на AB перпендикуляръ GF.

Изъ равенства треугольниковъ BGF и BGD, мы имѣемъ $GF = GD$, и изъ равенства треугольниковъ CGE и CGD мы имѣемъ $GE = GD$, слѣдовательно $GF = GE$. Теперь, легко доказать равенство треугольниковъ AFG и AEG, откуда будемъ имѣть, что $\angle FAG = \angle GAE$, т. е. что AG есть равнодѣлящая.

650. Если изъ вершинъ, какого нибудь треугольника опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны, то онѣ пересѣкутся всѣ три въ одной точкѣ (фиг. 583).

Доказат. Если чрезъ вершины треугольника ABC проведемъ прямыя параллельно противолежащимъ сторонамъ, то легко видѣть, что образуется треугольникъ коего стороны

Фиг. 583.

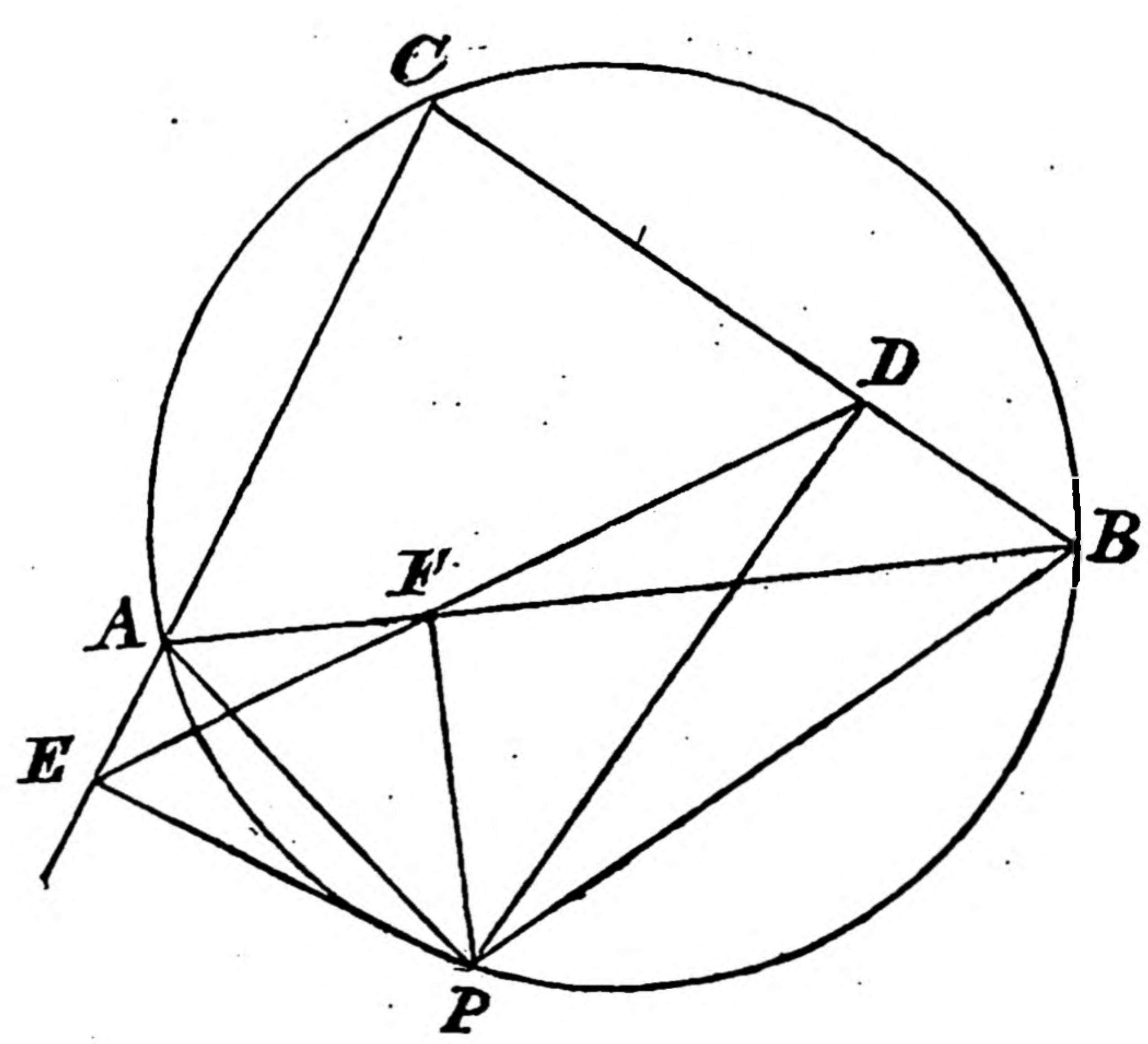


будутъ вдвое больше сторонъ даннаго, и перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ даннаго на противоположныя его стороны, будутъ перпендикуляры возставленные изъ срединъ сторонъ построеннаго треугольника, слѣдовательно (647) пересѣкутся въ одной точкѣ.

651. Если изъ какой нибудь точки опустимъ перпендикуляры на стороны, вписаннаго въ кругъ треугольника, то три точки встрѣчи перпендикуляровъ со сторонами треугольника лежатъ на одной прямой линіи (фиг. 584).

Доказат. Пусть ABC будетъ треугольникъ, вписанный въ кругъ, и P какая нибудь точка на окружности круга. Изъ точки P опустимъ перпендикуляры PD, PE, PF на стороны BC, CA, AB. Я говорю, что точки D, E, F лежатъ на одной прямой линіи.

Фиг. 584.



Такъ какъ около четыреугольника $PEAF$ можетъ быть описанъ кругъ, то $\angle PFE = \angle PAE$. Но $\angle PAE + \angle PAC = 2d$ и $\angle PAC + \angle PBC = 2d$, слѣдовательно $\angle PAE = \angle PBC$ и $\angle PFE = \angle PBC$.

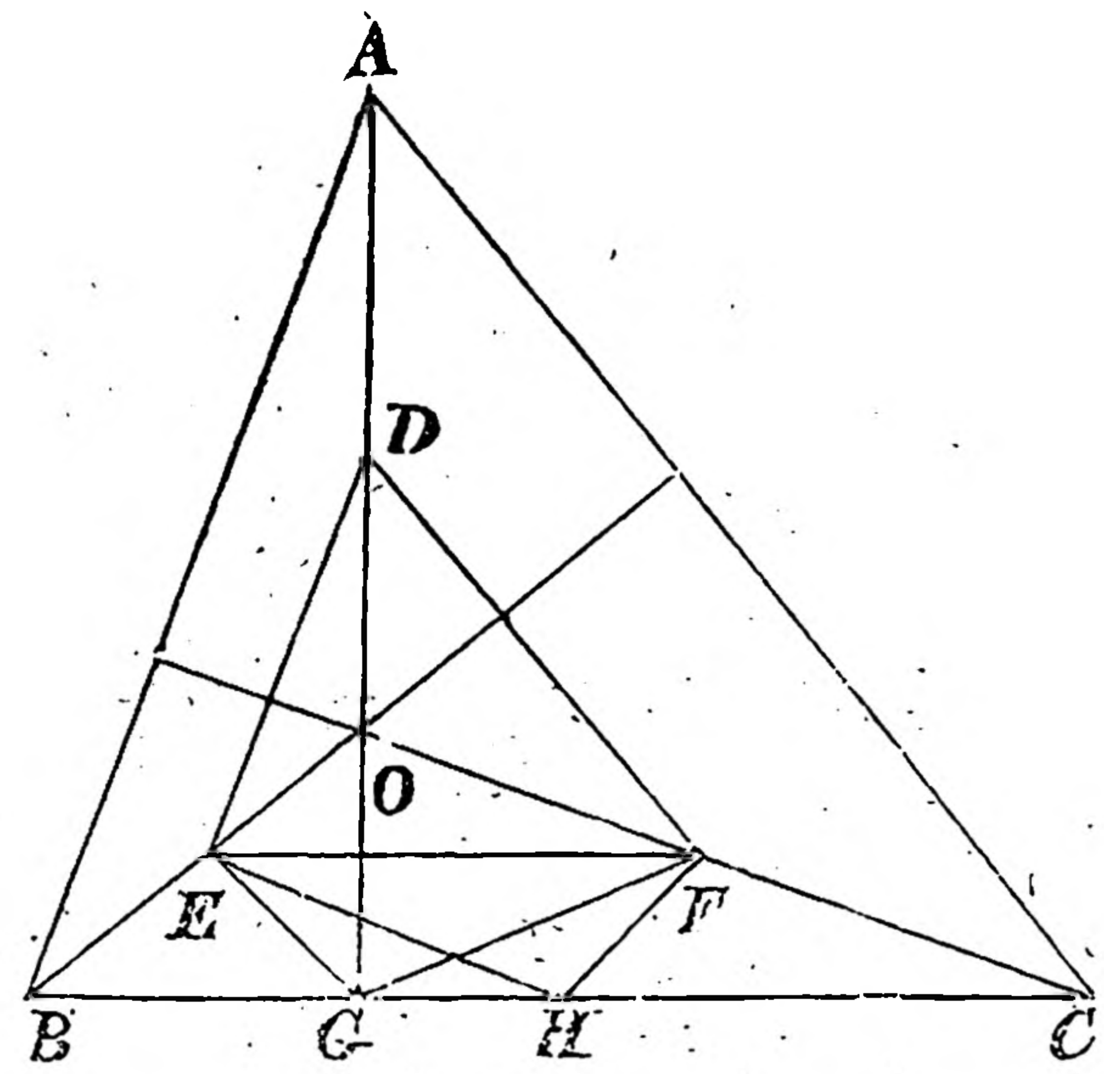
Около четыреугольника $PFDB$ можно также описать кругъ, слѣдовательно $\angle PFD + \angle PBD = 2d$. Но мы видѣли, что $\angle PBD = \angle PFE$, слѣдовательно $\angle PFD + \angle PFE = 2d$, откуда видимъ, что EF и FD составляютъ одну прямую линію.

652. Пусть въ какомъ нибудь треугольникѣ ABC, точка O будетъ пересѣченіе перпендикуляровъ изъ точекъ A, B, C на противоположныя стороны треугольника. Я говорю, что кругъ проходящій чрезъ средины OA, OB, OC, пройдетъ чрезъ основанія перпендику-

ляровъ и чрезъ средины сторонъ треугольника. Слѣдовательно кругъ этотъ проходитъ чрезъ девять опредѣленныхъ точекъ въ треугольникѣ, а потому называется кругомъ *девяти точекъ* (фиг. 585).

Доказат. Пусть D, E, F будутъ средины отрѣзковъ OA, OB, OC, пусть H будетъ средина стороны BC, и G основаніе перпендикуляра опущеннаго изъ точки A на BC.

Фиг. 585.



Такъ какъ треугольникъ OBG прямоугольный, а E есть средина гипотенузы OB, то $EG = EO$, слѣдовательно $\angle EGO = \angle EOG$. Точно также $\angle FGO = \angle FOG$, слѣдовательно $\angle FGE = \angle FOE$. Но $\angle FOE + \angle BAC = 2d$, слѣдовательно $\angle FGE + \angle BAC = 2d$. Такъ какъ $ED \| AB, DF \| AC$ (кн. 6, пред. 2), то $\angle BAC = \angle EDF$, слѣдовательно $\angle FGE + \angle EDF = 2d$, откуда видимъ, что точка G находится на окружности круга, проходящаго чрезъ точки D, E, F.

Такъ какъ, $FH \| OB$, $EH \| OC$, то $\angle EHF = \angle EGF$. Слѣдовательно точка H находится на окружности того же круга.

Точно тоже можно показать и относительно остальныхъ сторонъ треугольника ABC.

Кругъ *девяти точекъ* имѣетъ нѣсколько замѣчательныхъ свойствъ, изъ коихъ мы укажемъ на два слѣдующія:

1. *Радіусъ круга девяти точекъ равенъ половинѣ радіуса круга описаннаго около даннаго треугольника.*

Такъ какъ стороны треугольника DEF параллельны сторонамъ треугольника ABC и равны половинѣ каждая каждой, то треугольники ABC и DEF подобны. Откуда слѣдуетъ что радіусъ круга, описаннаго около треугольника DEF равенъ половинѣ радіуса круга описаннаго около треугольника ABC.

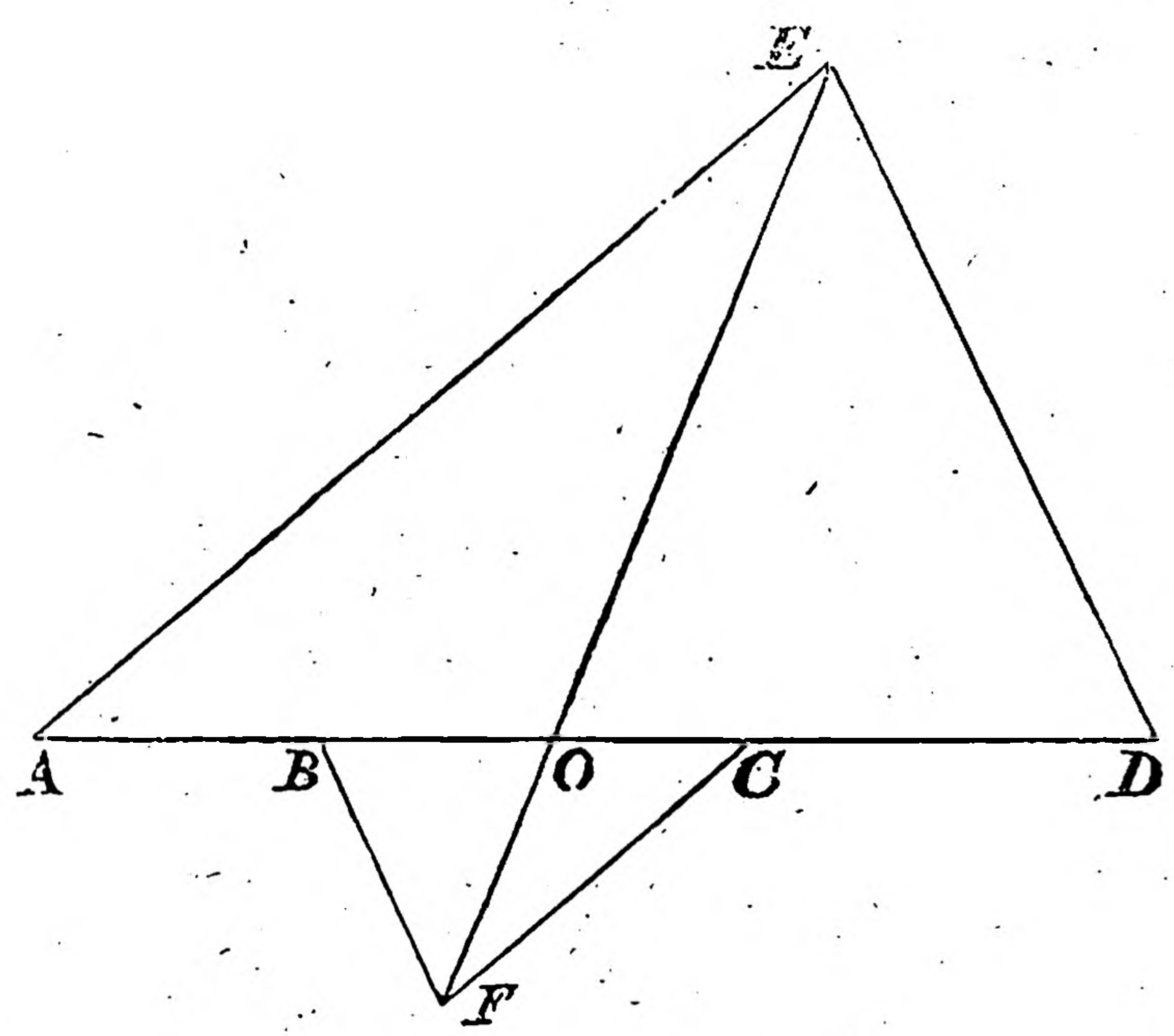
2. *Если S есть центръ круга описаннаго около треугольника ABC, то центръ круга девяти точекъ будетъ средина прямой OS.*

Въ самомъ дѣлѣ, $HS \| GO$, потому что обѣ эти прямыя перпендикулярны къ BC, слѣдовательно перпендикуляръ возставленный изъ средины GH пройдемъ чрезъ средину OS. Но H и G находятся на окружности круга девяти точекъ, слѣдовательно этотъ перпендикуляръ пройдетъ и чрезъ центръ круга. Дѣлая подобныя разсужденія относительно остальныхъ сторонъ даннаго треугольника ABC легко видѣть, что средина OS и есть центръ круга девяти точекъ. Можно также показать, что кругъ девяти точекъ, какого нибудь треугольника, касается вписаннаго внутри и вписаннаго внѣ въ данный треугольникъ, круговъ.

653. На данной прямой найти точку, которой разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ на прямой составляли бы прямоугольникъ равный прямоугольнику составленному изъ разстояній той же точки отъ двухъ другихъ данныхъ точекъ на той же прямой (фиг. 586)?

Рѣшеніе. Пусть A, B, C, D будутъ четыре данныя точки на одной прямой. Требуется найти на той же прямой такую точку O, чтобы $OA.OB=OC.OD$.

Фиг. 586.



На AD построимъ, какой нибудь треугольникъ AED, а на BC построимъ треугольникъ CFB подобный треугольнику AED и при томъ такъ, чтобы $CF \parallel AE$, $BF \parallel ED$; соединимъ E съ F и пусть EF встрѣчаетъ данную прямую въ точкѣ O. Я говорю, что точка O и есть искомая.

Такъ какъ $OE:OA=OF:OC$ (кн. 6, пред. 4), то $OE:OF=OA:OC$ (кн. 5, пред. 16). Точно также $OE:OF=OD:OB$. Слѣдовательно $OA:OC=OD:OB$ (кн. 5, пред. 11), откуда:

$$OA.OB=OC.OD$$

Съ измѣненіемъ положенія точекъ A, B, C, D измѣняется и положеніе точки O, но при извѣстномъ опредѣленномъ порядкѣ данныхъ точекъ *одна только* точка будетъ удовлетворять требуемому условію.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть P будетъ другая точка удовлетворяющая тому же условію, т. е. что $PA.PB=PC.PD$. Соединимъ P съ E и пусть PE пересѣкаетъ продолженіе FC въ точкѣ G, соединимъ B съ G.

Такъ какъ $PA.PB=PC.PD$, то:

$$PA:PC=PD:PB$$

но (кн. 6, пред. 2):

$$PA:PC=PE:PG$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$PD:PB=PE:PG$$

а потому $BG \parallel DE$.

Но по построенію $BF \parallel ED$, слѣдовательно BG и BF сами параллельны (кн. 1, пред. 30), что нелѣпо. Слѣдовательно точка P не есть требуемая.

654. Вписать въ данный кругъ O треугольникъ MNP, коего бы стороны были параллельны даннымъ прямымъ AB, CD, EF?

Рѣшеніе. Чрезъ какую нибудь точку на окружности круга проведемъ хорды, одну параллельно прямой AB, а другую параллельно CD, соединяя точки пересѣченія окружности съ проведенными хордами получимъ хорду извѣстной длины. Теперь остается провести хорду параллельно третьей прямой EF и имѣющую длину равную выше упомянутой хордѣ, пусть эта хорда будетъ MN, чрезъ точку M проведемъ хорду $MP \parallel AB$ и соединимъ P съ X, полученный треугольникъ будетъ искомый.

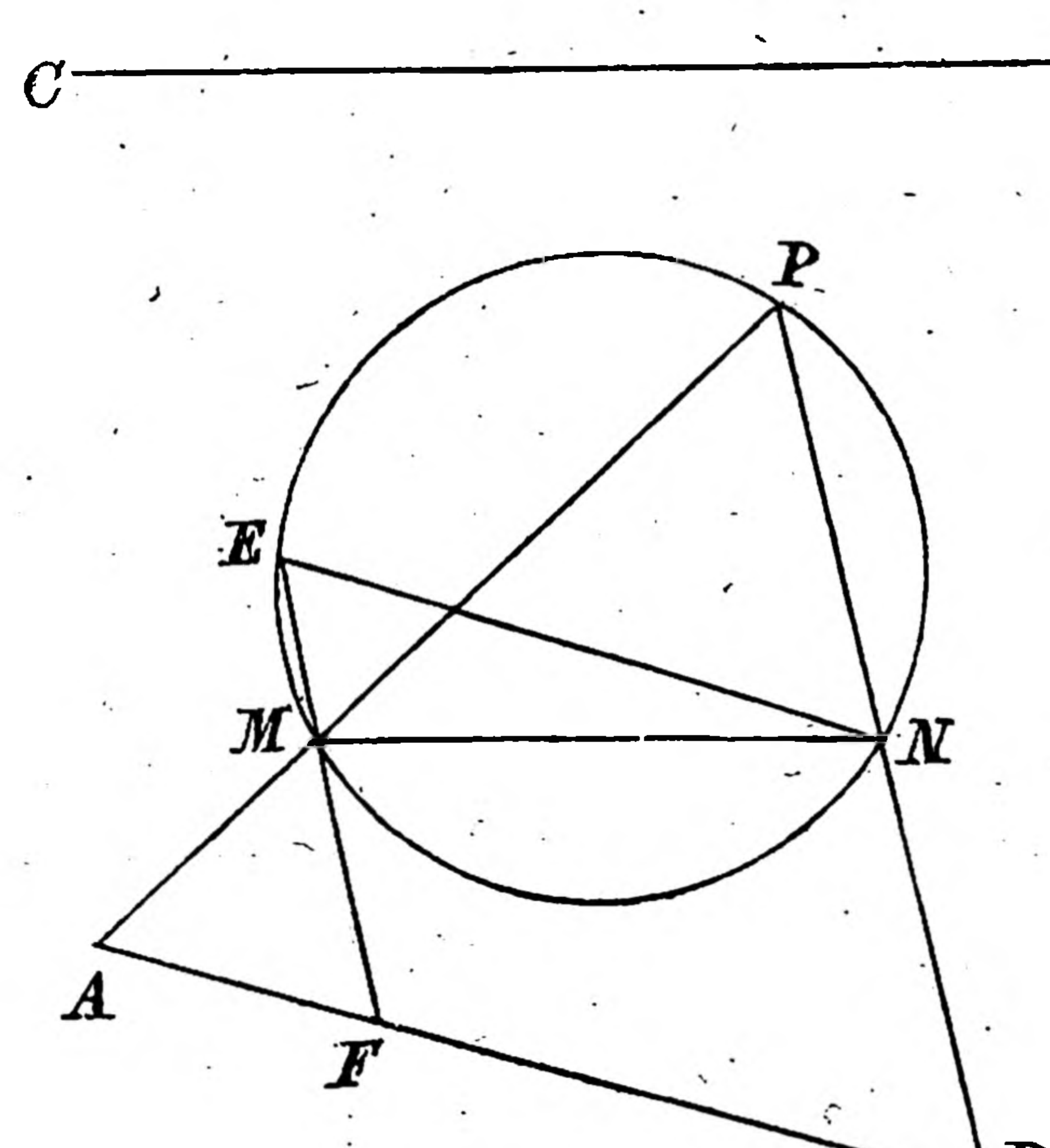
Такъ какъ въ кругѣ можно провести двѣ хорды данной величины параллельно данному направленію, то настоящая задача имѣетъ два рѣшенія, т. е. можно построить два треугольника, которые будутъ симметрично расположены относительно центра круга.

655. Въ данный кругъ O вписать треугольникъ MNP, коего бы двѣ стороны были параллельны двумъ даннымъ прямымъ AB и CD, и чтобы третяя сторона проходила чрезъ данную точку L?

Рѣшеніе. Чрезъ какую нибудь точку на окружности даннаго круга проведемъ двѣ хорды параллельно одну прямой AB, а другую параллельно CD, соединяя точки пересѣченія, проведенныхъ хордъ съ окружностью получимъ хорду данной длины, остается рѣшить задачу: чрезъ данную точку L провести прямую такъ, чтобы она, пересѣкаясь съ окружностью образовала хорду данной длины. Пусть эта хорда будетъ MN, остается чрезъ точку M провести $MP \parallel AB$ и точку P соединить съ точкою N.

656. Въ данный кругъ O вписать треугольникъ MNP, коего бы двѣ стороны проходили чрезъ данныя точки A и B, а третяя была бы параллельна данной прямой CD (фиг. 587)?

Фиг. 587.



Рѣшеніе. Чрезъ неизвѣстную точку N проведемъ $NE \parallel AB$ и проведемъ хорду EM. Пусть F будетъ точка въ которой эта хорда, продолженная если необходимо, встрѣчаетъ прямую AB. Если бы эта точка была извѣстна, то задача была бы рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ ENM равенъ углу между прямыми AB и CD, слѣдовательно длина хорды EM можетъ быть опредѣлена, а потому можетъ быть опредѣлено и ея положеніе.

Чтобы найти положенiе точки F, замѣтимъ, что $\angle AFM = \angle FEN = \angle APB$, слѣдовательно треугольники PAB и MAF подобны, откуда:

$$AB : AM = AP : AF$$

или

$$AM \,.\, AP = AB \,.\, AF$$

Если проведемъ, какую нибудь сѣкущую AGH, то будемъ имѣть:

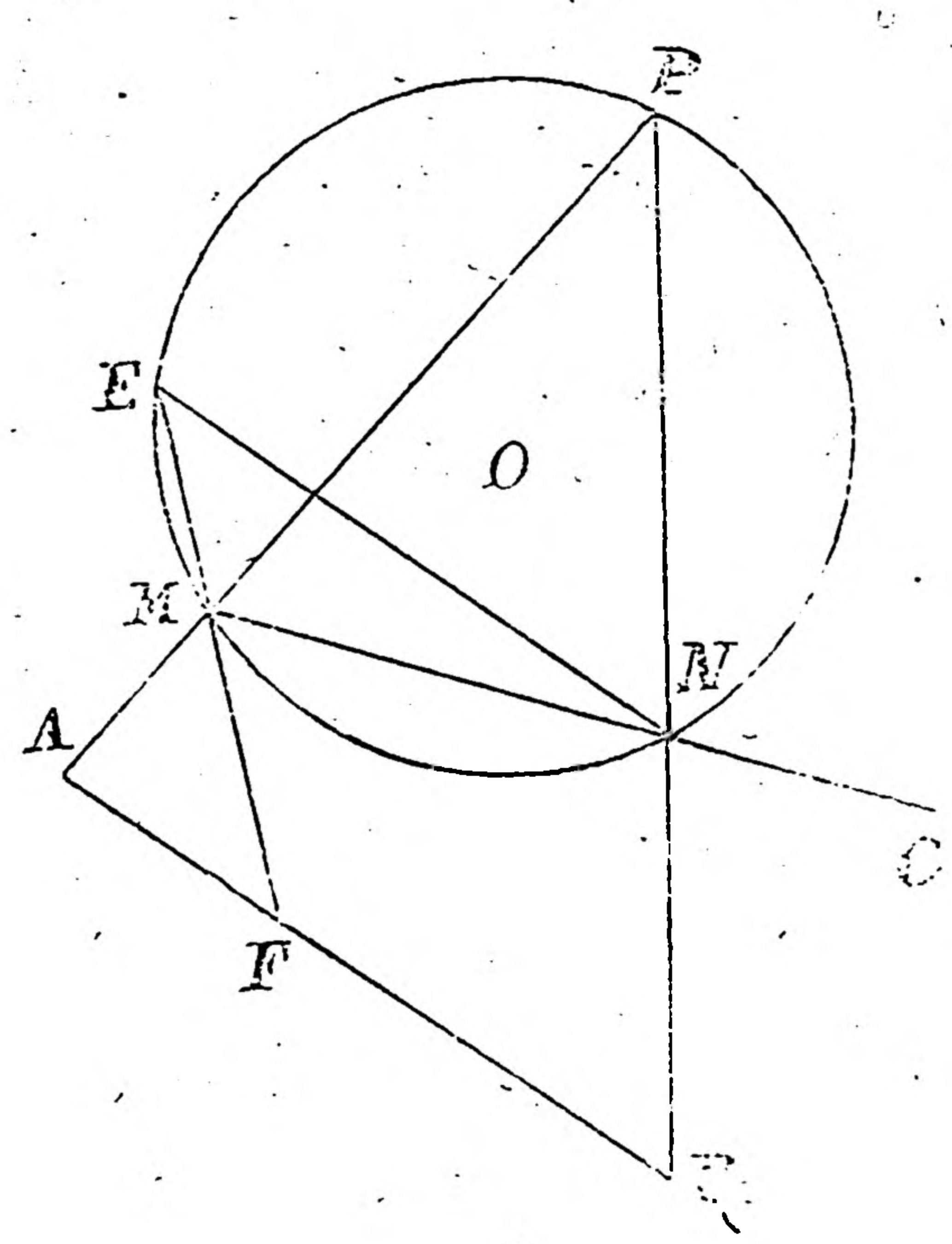
$$AG . AH = AB . AF$$

Въ этомъ уравненiи все извѣстно исключая AF. И какъ точки G, H, F, B находятся на одной окружности, то кругъ, проходящiй чрезъ точки G, H, B пересѣчетъ прямую AB въ искомой точкѣ F.

657. Вписать въ данный кругъ треугольникъ, котораго бы стороны проходили чрезъ три данныя точки (фиг. 588)?

Рѣшенiе. Пусть A, B, C будутъ данныя точки и O данный кругъ. Положимъ, что PMN есть искомый треугольникъ.

Фиг. 588.



Проведемъ $NE \parallel AB$ и опредѣлимъ точку F какъ въ предъидущей задачѣ. Построивши точку F остается только вписать въ данный кругъ треугольникъ, котораго бы двѣ стороны проходили чрезъ точки C и F, а третяя была бы параллельна прямой AB, т. е. задача сведена на предъидущую.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

X. О величинахъ наибольшихъ (maximum) и наименьшихъ (minimum).

1. Если геометрическая величина, какого бы то нибыло рода, измѣняясь непрерывно по извѣстному закону, переходитъ въ извѣстный моментъ ея измѣненія чрезъ величину большую непосредственно ей предшествовавшихъ и послѣдующихъ величинъ, то говорятъ что она *наибольшая* (maximum), хотя бы она въ другой какой нибудь моментъ измѣненія и имѣла абсолютно большую величину. Если величина переходитъ чрезъ величину меньшую непосредственно ей предъидущихъ и послѣдующихъ, то говорятъ что она *наименьшая* (minimum), хотя бы она въ какой нибудь другой моментъ ея измѣненія и имѣла величину абсолютно меньшую. Слѣдовательно выраженія *maximum* и *minimum* употребляемыя въ геометріи суть относительныя, а не обсолютныя.

2. Въ геометрическихъ фигурахъ высшихъ порядковъ различныя измѣняющіяся величины, связанныя съ ними, могутъ въ продолженіе ихъ измѣненія переходить чрезъ нѣсколько *наибольшихъ* и нѣсколько *наименьшихъ* величинъ, разумѣется наибольшая слѣдуетъ за наименьшею и т. д., одна слѣдуетъ за другою. Но въ элементарной геометріи гдѣ разсматривается точка, прямая линія и кругъ, перемѣнная величина, связанная съ ними, рѣдко, въ продолженіе своего измѣненія, переходитъ больше какъ чрезъ одно простое *maximum* и одно простое *minimum*. Напримѣръ разстояніе точки, движущейся по кругу, отъ данной точки или отъ данной прямой, какое бы нибыло ея положеніе относительно круга, будетъ *maximum* только для разстоянія, проходящаго чрезъ центръ и *minimum* для разстоянія, которое, будучи продолжено, пройдетъ чрезъ центръ круга. Во всѣхъ такихъ случаяхъ *maximum* и *minimum* суть величины нетолько относительныя, но абсолютно наибольшія и наименьшія, которыя перемѣнная величина можетъ получить въ продолженіи своего измѣненія.

3. *Взаимными* геометрическими величинами называются такія которыхъ произведеніе равно единицѣ. Напримѣръ, если площадь прямоуголь-

ника равна единицѣ, то основанiе и высота прямоугольника суть величины *взаимныя*. Изъ этого легко видѣть, что если какая нибудь величина получаетъ *maximum* или *minimum*, то взаимная получитъ *minimum* или *maximum*.

4. Приведемъ нѣсколько примѣровъ простыхъ, но основательныхъ, къ которымъ приводится большая часть вопросовъ относительно *maximum* и *minimum*.

Примѣръ 1. Если дана величина двухъ сторонъ треугольника, то наибольшая площадь треугольника будетъ тогда, когда данныя стороны будутъ составлять прямой уголъ.

Доказат. Какое бы нибыло наклоненiе данныхъ сторонъ треугольника, площадь его равна всегда половинѣ произведенiя одной изъ данныхъ сторонъ на перпендикуляръ, опущенный изъ конца другой на первую. Но такъ какъ этотъ перпендикуляръ будетъ наибольшiй (равенъ второй сторонѣ) когда уголъ между сторонами прямой, то слѣдовательно и т. д.

Примѣръ 2. Если на данномъ отрѣзкѣ прямой взята точка, то произведенiе ея разстоянiй отъ концевъ отрѣзковъ будетъ *наибольшее*, когда точка дѣлитъ отрѣзокъ пополамъ, а сумма квадратовъ этихъ разстоянiй будетъ *наименьшая.*

Доказат. На данномъ отрѣзкѣ, какъ на дiаметрѣ, опишемъ полукругъ и изъ какой нибудь точки отрѣзка возставимъ къ нему перпендикуляръ, то квадратъ построенный на этомъ перпендикулярѣ равенъ прямоугольнику построенному на отрѣзкахъ. Но сторона квадрата, а слѣдовательно и его площадь будетъ *наибольшая*, когда взятая точка будетъ средина даннаго отрѣзка, слѣд. и т. д.

Такъ какъ квадратъ построенный на данномъ отрѣзкѣ равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на отрѣзкахъ, на которые онъ раздѣленъ взятою точкою съ дважды взятымъ прямоугольникомъ построеннымъ на отрѣзкахъ (кн. 2, пред. 4), то, очевидно, что сумма квадратовъ построенныхъ на отрѣзкахъ будетъ *наименьшая*, когда взятая точка дѣлитъ данный отрѣзокъ пополамъ.

Примѣръ 3. Если въ какомъ нибудь треугольникѣ одну изъ сторонъ раздѣлимъ пополамъ и чрезъ точку дѣленiя проведемъ параллельныя остальнымъ двумъ сторонамъ треугольника, то образуется вписанный параллелограмъ, коего площадь будетъ наибольшая.

Доказат. Пусть данный треугольникъ будетъ ABC, возьмемъ на сторонѣ AB, какую нибудь точку O, чрезъ эту точку проведемъ прямыя параллельно сторонамъ AC и BC, пусть точки встрѣчи этихъ параллельныхъ съ AC и BC будутъ F и E. Такимъ образомъ образовался параллелограмъ $OFCE$, я говорю что площадь его будетъ *наибольшая* когда точка O дѣлитъ AB пополамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{OA} \text{ и } \frac{BC}{AB}=\frac{EB}{OB}$$

откуда перемножая, найдемъ:

$$\frac{AC.BC}{AB^2}=\frac{AF.EB}{OA.OB}$$

но

$$AF:FO=OE:EB$$

или

$$AF.EB=OF.OE$$

слѣдовательно:

$$\frac{AC.BC}{AB^2}=\frac{OF.OE}{OA.OB}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что отношеніе $OF.OE:OA.OB$ есть величина постоянная, слѣдовательно произведеніе $OF.OE$ измѣняется, съ перемѣщеніемъ точки O на AB, пропорціонально произведенію $OA.OB$, но это послѣднее произведеніе будетъ *наибольшее*, когда точка O находится на срединѣ AB. Слѣдовательно и произведеніе $OF.OE$ будетъ *наибольшее*, но оно пропорціонально площади параллелограма $OFEB$, которая слѣдовательно будетъ *наибольшая*.

Точно также можно показать, что когда точка O находится на срединѣ AB, то произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ O на стороны AC и BC или вообще произведеніе двухъ прямыхъ, проведенныхъ параллельно двумъ даннымъ направленіямъ, до встрѣчи съ AC и BC, будетъ *наибольшее*.

Примѣръ 4. Если равнодѣлящую точку, какой нибудь дуги круга, соединимъ съ ея концами прямыми линіями, то сумма квадратовъ изъ разстояній равнодѣлящей точки отъ концевъ дуги будетъ *maximum* или *minimum* для внутренней равнодѣлящей точки и *minimum* или *maximum* для внѣшней равнодѣлящей, смотря потому будетъ-ли дуга больше или меньше полуокружности.

Доказат. Пусть AB будетъ дуга, C средина хорды этой дуги, M и N равнодѣлящія дугу точки, первая внутренне, а вторая внѣшне, P какая нибудь точка на дугѣ, PQ перпендикуляръ изъ точки P на хорду AB (фиг. 589).

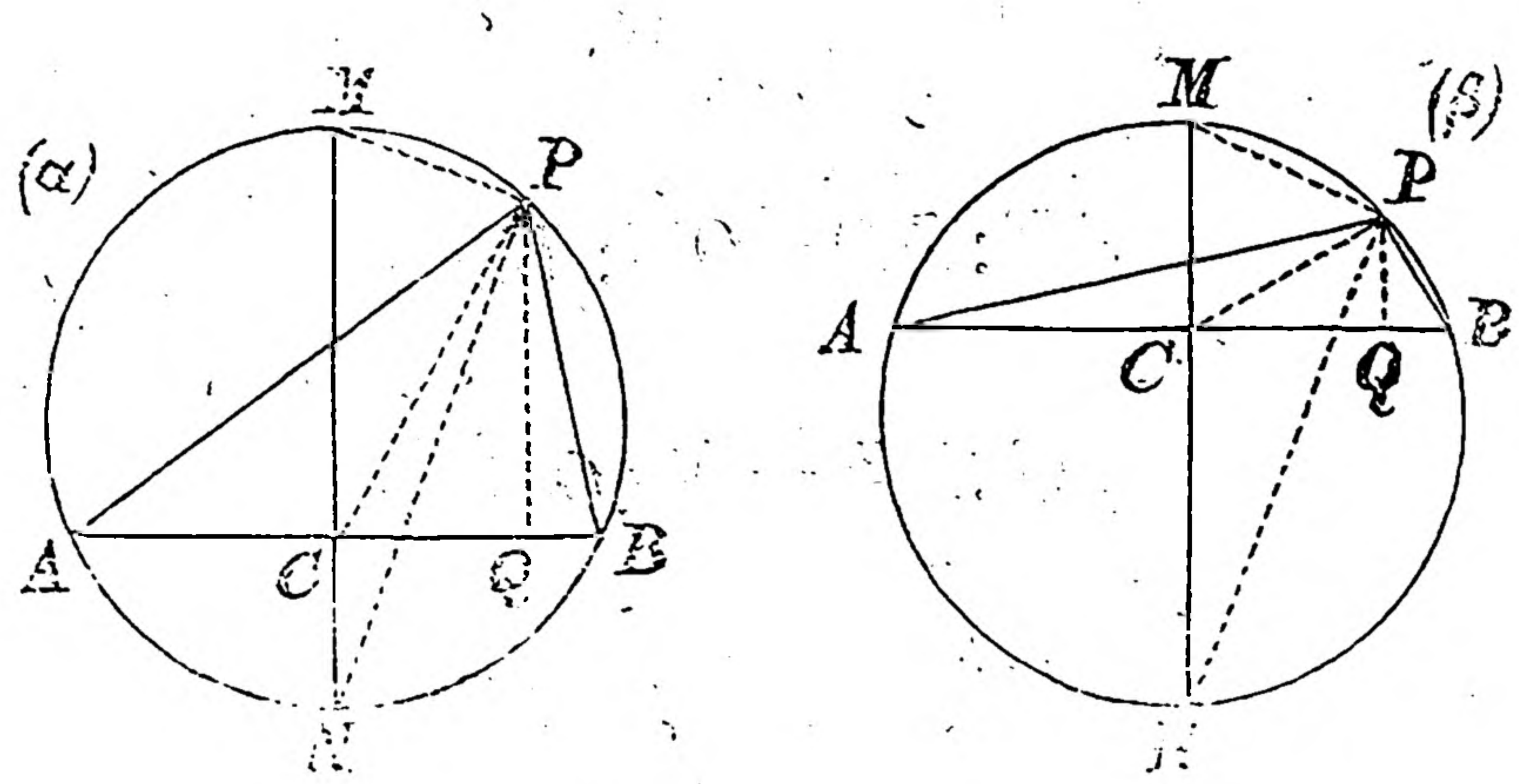
Какое бы нибыло положеніе точки P, мы всега имѣемъ (кн. 2, пред. 12, 13):

$$PA^2 = PC^2 + CA^2 \pm 2CA.CQ,\quad PB^2 = PC^2 + CB^2 \mp CB.CQ$$

откуда, складывая, получимъ:

$$PA^2 + PB^2 = CA^2 + CB^2 + 2CP^2$$

Фиг. 589.



Вторая часть этого выраженія, а слѣдовательно и первая, будетъ *maximum* или *minimum*, если CP будетъ *maximum* или *minimum*, т. е. когда точка P будетъ въ точкѣ M или N, въ первомъ случаѣ, и въ N или M, во второмъ (кн. 3, пред. 7).

Примѣръ 5. Для внутренней или внѣшней равнодѣлящей точки, какой нибудь дуги круга, сумма и произведеніе разстояній отъ концевъ дуги и площадь треугольника, образованнаго этими разстояніями и хордою дуги суть *maximum*.

Доказат. Какое бы нибыло положеніе точки P на дугѣ (фиг. 588) мы всегда имѣемъ $PA.PB = MN.PQ$ (кн. 6, пред. 16), а $\triangle APB = \frac{1}{2} AB.PQ$. Изъ этихъ выраженій легко видѣть что произведеніе $PA.PB$ и площадь $\triangle APB$ будетъ *maximum*, когда точка P находится въ M. Остается только показать, что въ этомъ случаѣ и сумма $AP+PB$ будетъ *maximum*. Въ самомъ дѣлѣ, для всякаго положенія точки P съ той же стороны хорды AB съ какой лежитъ и точка M, мы имѣемъ (кн. 6, пред. 16, слѣд.) по теоремѣ Птоломея:

$$PA.NB + PB.NA = PN.AB$$

и такъ какъ $NA = NB$, то:

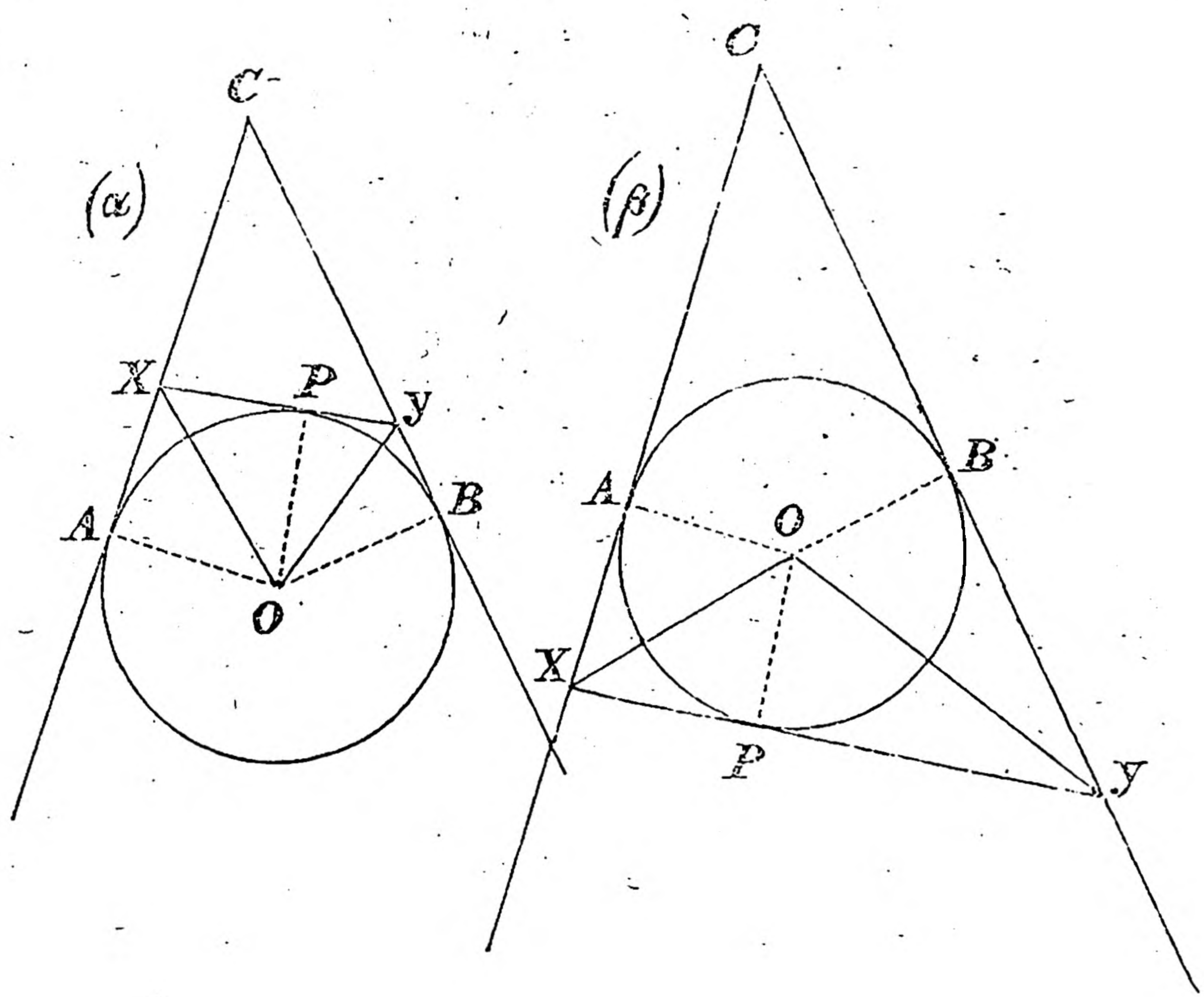
$$\frac{PA+PB}{PN} = \frac{AB}{NA}$$

слѣдовательно отношеніе $(PA+PB):PN$ есть величина постоянная, и поэтому $PA+PB$ будетъ *maximum* вмѣстѣ съ PN, т. е. когда точка P будетъ въ M. Точно также можно показать (замѣщая точку M точкою N), что для всякаго положенія точки P, съ той же стороны хорды AB съ какой находится и точка N, сумма $PA+PB$ будетъ *maximum*, когда точка P находится въ N.

Примѣръ 6. Для точки равнодѣлящей, внутренне или внѣшне, какую нибудь дугу круга, отрѣзокъ касательной, заключенный между двумя касательными проведенными въ концахъ дуги и площадь треугольника, коего основаніе есть этотъ отрѣзокъ, а вершина въ центрѣ круга, будутъ оба *minimum*.

Доказат. Пусть AB будетъ дуга, AC и BC касательныя къ кругу въ концахъ дуги AB, XY отрѣзокъ касательной въ какой нибудь точкѣ P на дугѣ AB, O центръ даннаго круга (фиг. 590).

Фиг. 590.



Какое бы нибыло положеніе точки P, прямыя OX и OY дѣлятъ углы AOP и BOP пополамъ (кн. 3, пред. 17), слѣдовательно $\angle XOY = \frac{1}{2}\angle AOB$, соотвѣтствующаго, данной дугѣ AB. Слѣдовательно въ треугольникѣ XOY высота OP и уголъ XOY суть величины постоянныя. Изъ сказаннаго выше видно, что если противолежащій основанію уголъ въ треугольникѣ есть величина постоянная, то высота и площадь треугольника, при данномъ основаніи, будутъ вмѣстѣ *maximum*, а основаніе и площадь, при данной высотѣ, будутъ вмѣстѣ *minimum*, когда треугольникъ будетъ равнобедренный, слѣдовательно для треугольника XOY, когда точка P будетъ равнодѣлящая внутренне или внѣшне дугу AB.

Примѣръ 7. Для точки равнодѣлящей, внутренне, какую нибудь дугу круга, площадь треугольника, образованная касательными къ кругу въ точкахъ: равнодѣлящей, и въ концахъ дуги, будетъ *maximum* или *minimum*, а для равнодѣлящей внѣшне, *minimum* или *maximum*, смотря потому будетъ-ли данная дуга круга меньше или больше полуокружности.

Доказат. Такъ какъ въ обоихъ случаяхъ (фиг. 590) пятиугольная площадь $XAOBY$ равная двойной площади $\triangle XOY$ есть, по предъидущему, *minimum* для каждой изъ равнодѣлящихъ точекъ дугу AB, и четыреугольная площадь $AOBC$ постоянна какое бы нибыло положеніе отрѣзка XY, то, такъ какъ:

$$\triangle XCY = AOBC - XAOBY$$

въ первомъ случаѣ (фиг. α), и во второмъ (фиг. β):

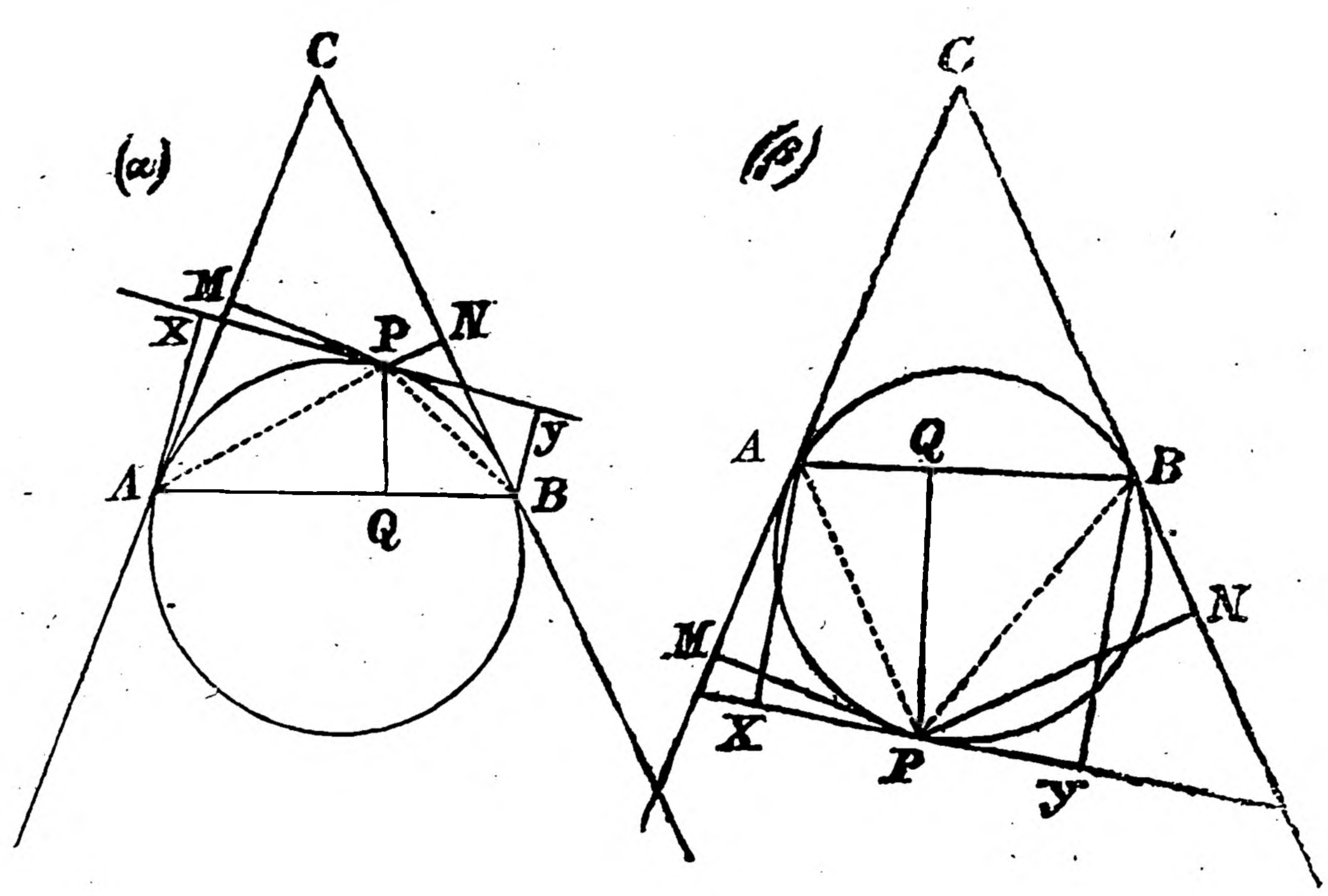
$$\triangle XCY = AOBC + XAOBY$$

то треугольникъ XCY будетъ *maximum* въ первомъ случаѣ и *minimum* во второмъ.

Примѣръ 8. Для каждой изъ равнодѣлящихъ точекъ, внутренней или внѣшней какой нибудь дуги круга, произведеніе перпендикуляровъ опущенныхъ изъ этихъ точекъ на касательныя въ концахъ дуги и произведеніе перпендикуляровъ опущенныхъ изъ концевъ дуги на касательную въ равнодѣлящей точкѣ, будутъ оба *minimum* (фиг. 591).

Доказат. Пусть AB будетъ данная дуга, а P, какая нибудь, на ней точка внутренняя или внѣшняя, PM и PN перпендикуляры изъ точки P на касательныя AC и CB, AX и BY перпендикуляры изъ точекъ A и B на касательную XY въ точкѣ P, наконецъ, пусть PQ будетъ перпендикуляръ изъ P на AB.

Фиг. 591.



Соединимъ точку P съ A и B, то изъ равенства двухъ паръ треугольниковъ APM и PAX, BPN и PBY мы имѣемъ $PM = AX$ и $PN = BY$, слѣдовательно $PM.PN=AX.BY$ а также изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ APM (или PAX) и BPQ, BPN (или PBY) и APQ (кн. 3, пред. 32), мы имѣемъ:

$$AX:PQ=PQ:BY$$

откуда:

$$PM:PQ=PQ:PN$$

слѣдовательно:

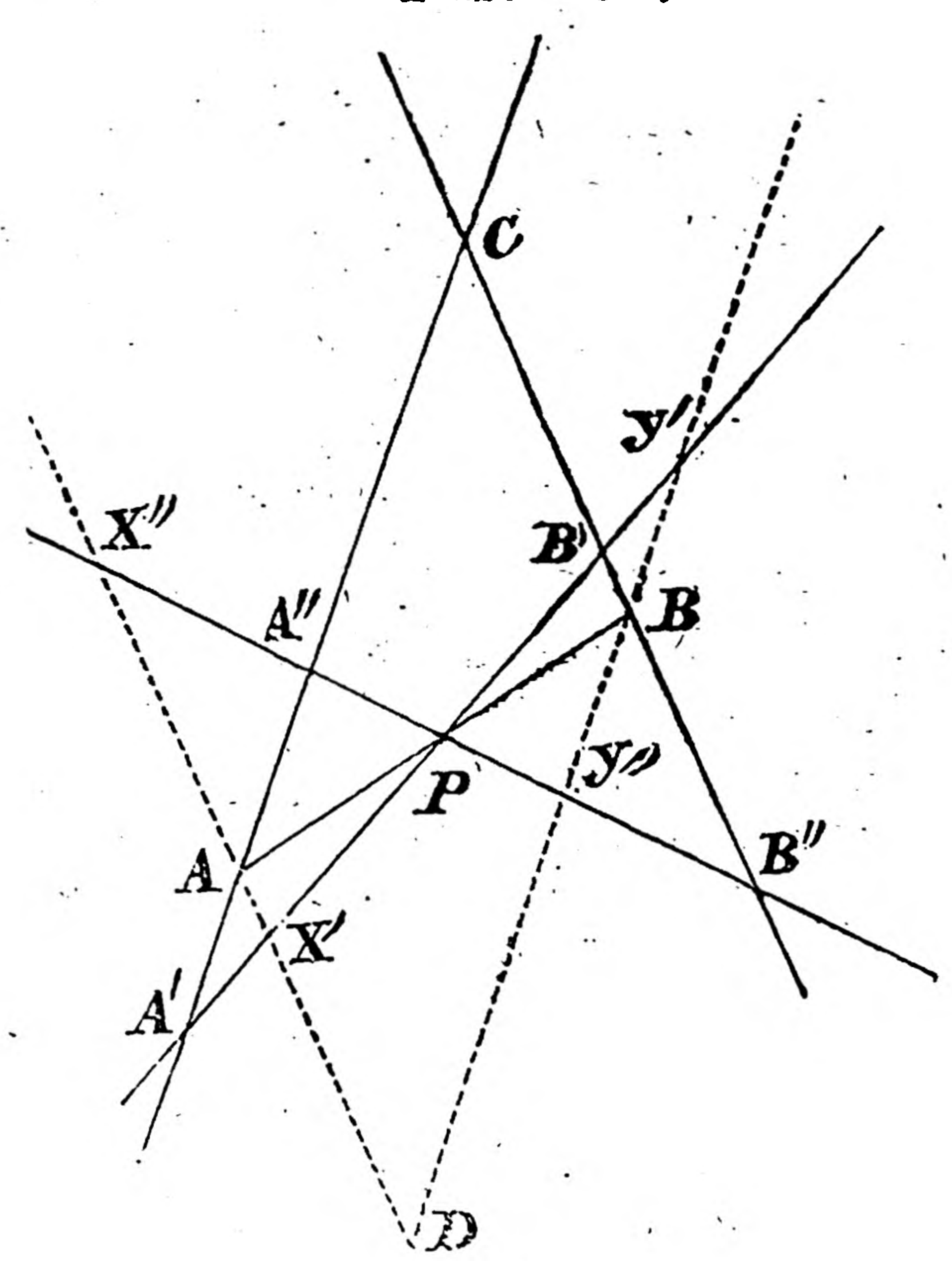
$$PM.PN=PQ^2=AX.BY=PA.PB$$

откуда и вытекаетъ предложенная теорема.

Примѣръ 9. Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку и образующихъ съ двумя данными прямыми треугольники *наименьшую* площадь будетъ имѣть тотъ изъ нихъ, который образованъ прямою, дѣлящеюся въ данной точкѣ пополамъ (фиг. 592).

Доказат. Пусть P будетъ данная точка, а AC и BC данныя прямыя. Пусть AB будетъ отрѣзокъ, дѣлящійся въ точкѣ P пополамъ, а $A'B'$ или $A''B''$, какіе нибудь другіе отрѣзки. Чрезъ точки A и B проведемъ $AD \parallel BC$, $BD \parallel AC$, пусть онѣ пересѣкаютъ $A'B'$ въ X' и Y' и $A''B''$ въ X'' и Y''.

Фиг. 592.



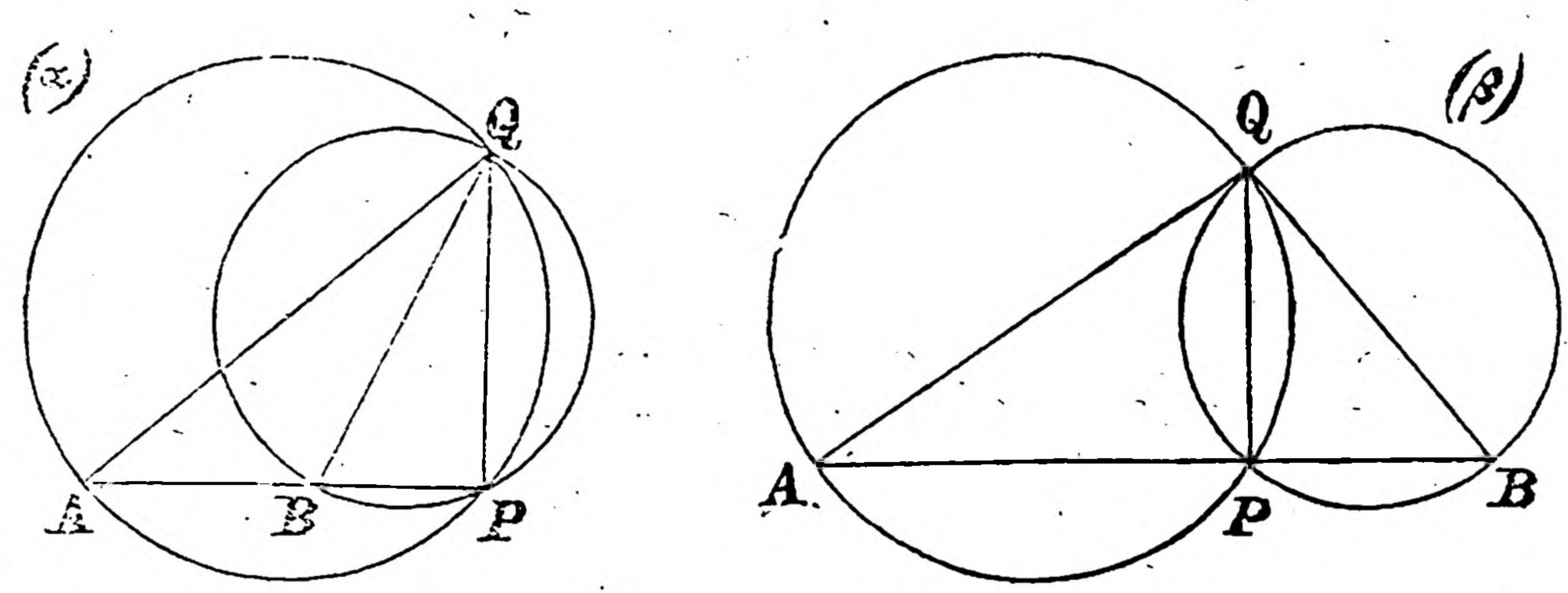
Такъ какъ, очевидно (кн. 1, пред. 4), что $\triangle APX'=\triangle BPB'$ и $\triangle BPY''=\triangle APA''$, то треугольникъ ABC меньше треугольниковъ $A'CB'$, или $A''CB''$ и т. д., слѣдовательно....

Задача провести прямую чрезъ данную точку такъ, чтобы она въ этой точкѣ, двумя данными прямыми дѣлилась пополамъ есть только частный случай дѣленія прямой въ данномъ отношеніи, рѣшеніе этой послѣдней задачи вытекаетъ изъ предъидущаго построенія и есть слѣдующее: чрезъ точку P проведемъ, какія нибудь прямыя PA' или PA'' до встрѣчи съ AC въ A' и A'', продолжимъ эти прямыя въ противоположныя стороны до точекъ Y' и Y'' такъ, чтобы отношенія $PA':PY'$ или $PA'':PY''$ были оба равны данному отношенію. Чрезъ точки Y или Y'' проведемъ прямыя $Y'B$ или $Y''B$ параллельно AC, которыя пересѣкутъ другую данную прямую BC въ искомой точкѣ B.

Примѣръ 10. Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ круговъ, *наибольшій* отрѣзокъ, заключенный между данными кругами, будетъ той прямой, которая перпендикулярна къ общей хордѣ круговъ, а *наибольшая* площадь будетъ въ томъ треугольникѣ, котораго основаніемъ будетъ наибольшій отрѣзокъ, а вершина въ другой точкѣ пересѣченія круговъ (фиг. 593).

Доказат. Пусть PQA и PQB будутъ два круга, P и Q точки ихъ пересѣченія, AB какая нибудь прямая, проходящая чрезъ точку P и пересѣкающая круги въ точкахъ A и B, соединимъ точки A и B съ другою точкою пересѣченія Q.

Фиг. 593.



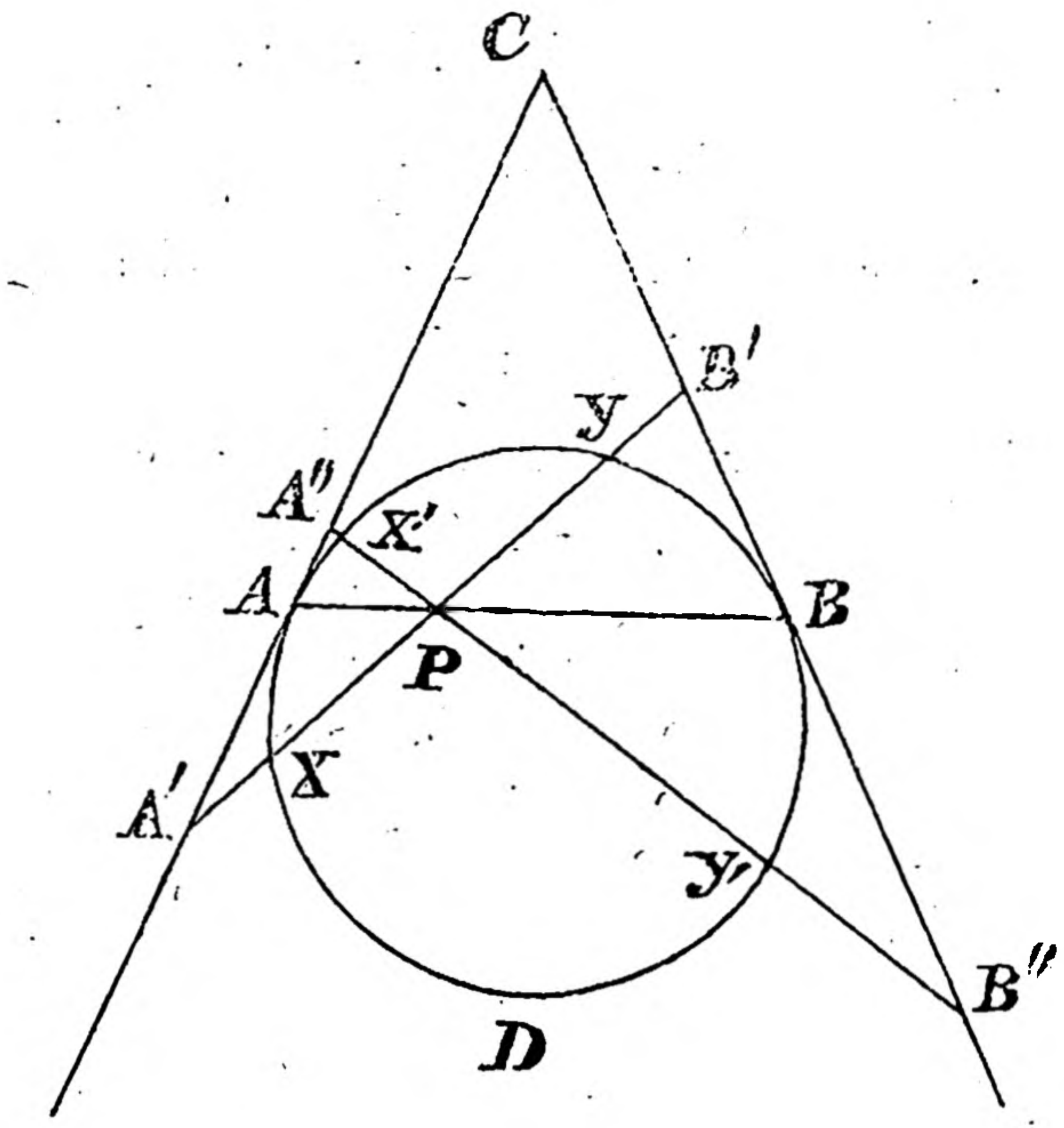
Какое бы нибыло положеніе прямой AB треугольники AQB будутъ подобны, такъ какъ углы PAQ и PBQ будутъ постоянны (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно основаніе AB, площадь AQB и стороны QA и QB будутъ всѣ вмѣстѣ *maximum*, но стороны QA и QB будутъ тогда *maximum*, когда онѣ проходятъ чрезъ центры круговъ, т. е. когда AB перпендикулярна къ PQ (кн. 3, пред. 31).

Примѣръ 11. Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку, наибольшая площадь прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ, продолженныхъ въ противоположныя стороны отъ данной точки до встрѣчи съ двумя данными прямыми, будетъ той прямой, которая съ данными прямыми составляетъ равные углы (фиг. 594).

Доказат. Пусть P будетъ данная точка, AC и BC данныя прямыя, AB прямая, составляющая съ AC и BC равные углы, $A'B'$ и $A''B''$ другія, какія нибудь прямыя, проходящія чрезъ точку P. Если чрезъ точки A и B проведемъ кругъ ADB, который бы въ этихъ точкахъ касался прямыхъ AC и CB, то, если X' и Y' или X'' и Y'' будутъ точки пересѣченія прямыхъ $A'B'$ и $A''B''$ съ кругомъ, мы будемъ имѣть (кн. 3, пред. 35)

$AP.PB = PX'.PY' = PX''.PY'' < PA'.PB'$, $PA''.PB''$, такъ какъ точки A', B', A'', B'' лежатъ внѣ круга, слѣдовательно и т. д.

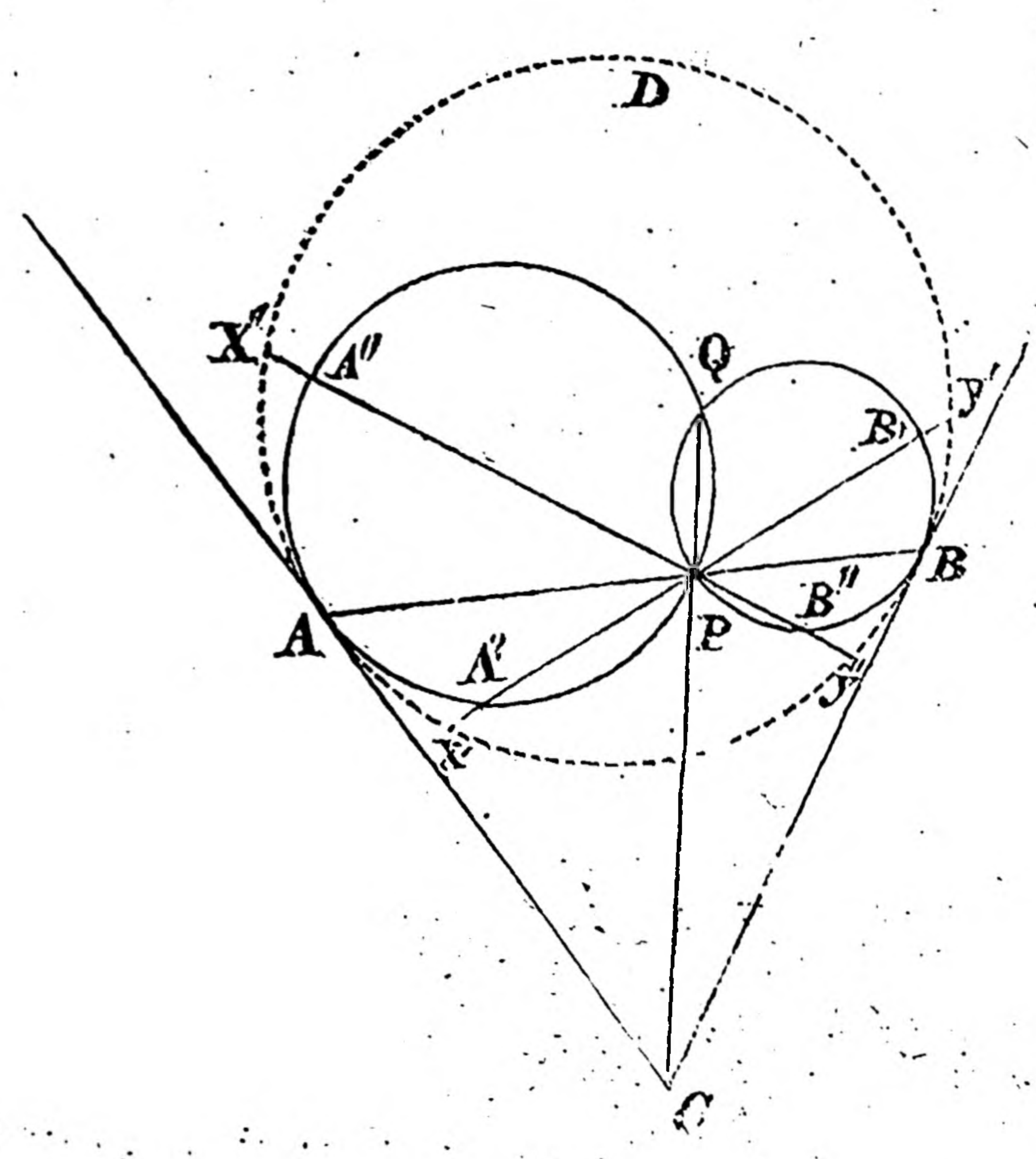
Фиг. 594.



Примѣръ 12. Такое же предложеніе какъ и предъидущее, только двѣ данныя прямыя замѣщаются двумя данными кругами, а данная точка замѣщается одною изъ точекъ пересѣченія круговъ (фиг. 595).

Доказат. Пусть PAQ и PBQ будутъ данные круги, P и Q точки ихъ пересѣченія, AB прямая, проходящая чрезъ точку P и составляющая съ кругами равные углы, т. е. съ касательными AC и BC въ концахъ A и B прямой AB, наконецъ пусть $A'B'$ или $A''B''$ будутъ другія, какія нибудь, прямыя проходящія чрезъ точку P. Если представимъ, что чрезъ точки A и B проведенъ кругъ ADB касающійся AC и BC и пересѣкающій прямыя $A'B'$ и $A''B''$ въ точкахъ X', Y', X'', Y'', то мы будемъ имѣть $AP.BP = PX'.PY' = PX''.PY'' < PA'.PB'$ или $PA''.PB''$, такъ какъ два данные круга находятся внутри построеннаго круга, слѣдовательно и т. д.

Фиг. 595.

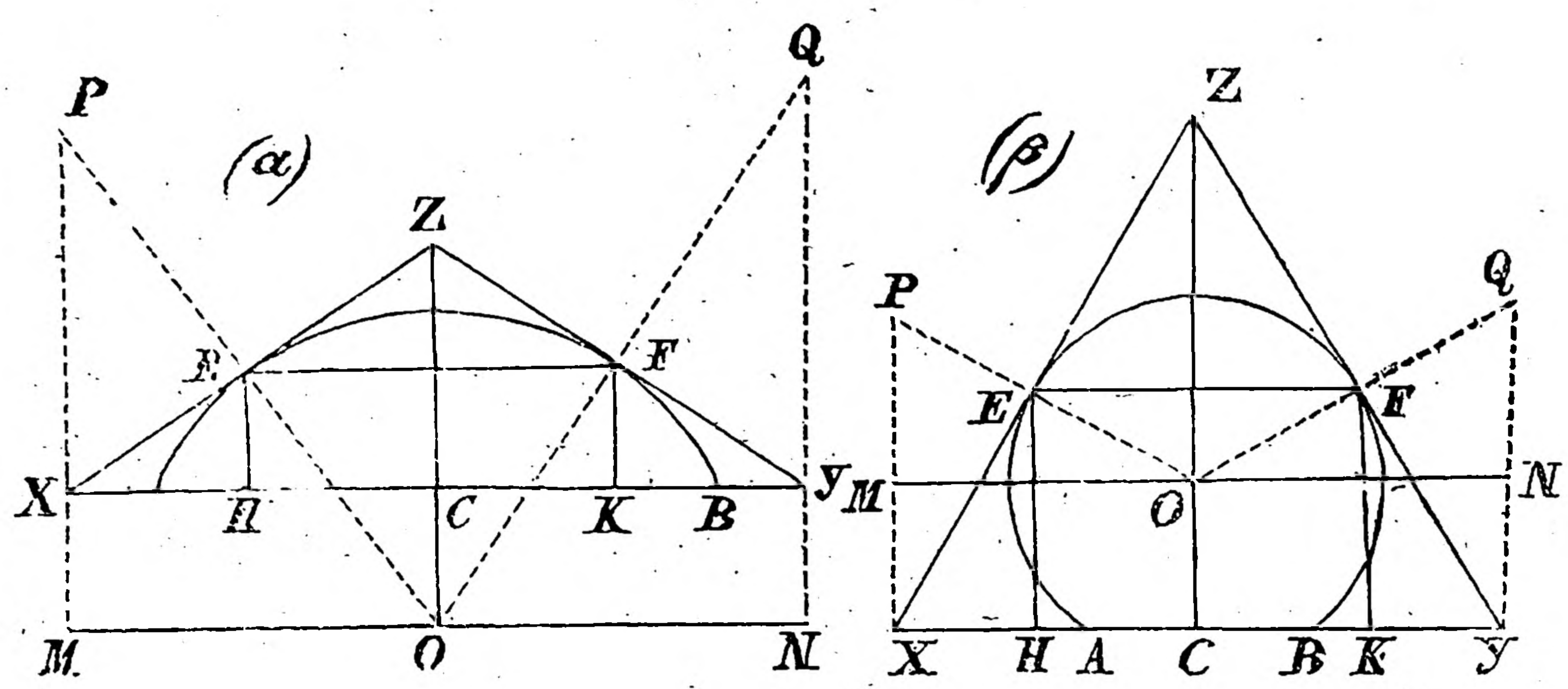


Примѣръ 13. Наибольшая площадь прямоугольника, вписаннаго въ

какой нибудь сегментъ круга, будетъ въ томъ прямоугольникѣ, въ которомъ сторона параллельная основанію, дѣлитъ пополамъ стороны треугольника, образованнаго касательными къ окружности, въ точкахъ пересѣченія стороны съ окружностью, и основаніемъ сегмента (фиг. 596).

Доказат. Пусть $AEFB$ будетъ сегментъ, EF хорда параллельная основанію AB, которая дѣлитъ касательныя XZ и YZ, образующія съ основаніемъ XY треугольникъ XYZ, пополамъ въ точкахъ E и F.

Фиг. 596.



Такъ какъ прямоугольникъ $EFKH$ вписанъ въ треугольникъ XZY имѣетъ наибольшую площадь (см. пр. 3), то онъ имѣетъ наибольшую площадь и относительно сегмента $AEFB$, который находиться внутри треугольника.

Остается рѣшить задачу: провести EF такъ, чтобы касательныя ZX и ZY въ точкахъ E и F дѣлились пополамъ. Эта задача есть частный случай болѣе общей провести EF такъ, чтобы касательныя ZX и ZY въ точкахъ E и F дѣлились въ данномъ отношеніи. Эта послѣдняя задача рѣшается слѣдующимъ образомъ: чрезъ центръ O проведемъ OC перпендикулярно, а MN параллельно AB, OC очевидно пройдетъ чрезъ Z. Полагая, что точки X и Y найдены, проведемъ XM и YN параллельныя OC, которыя пересѣкутъ радіусы OE и OF, полагая ихъ извѣстными, въ точкахъ P и Q. Изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ PEX и OEZ, QFY и OFZ будемъ имѣть:

$$\frac{PE}{EO}=\frac{QF}{FO}=\text{данн. отнош.}$$

Но $EO=FO$, слѣдовательно $PE=QF$, а также $PO=QO$, откуда $PE.PO=QF.QO$. Но радіусъ круга есть величина извѣстная, слѣдовательно и величины, PE, QF, PO, QO, $PE.PO$, $QF.QO$ будутъ также извѣстны.

Изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ PEX и PMO, QFY и QNO, мы имѣемъ:

$$PM.PX = PE.PO, \quad QN.QY = QF.QO$$

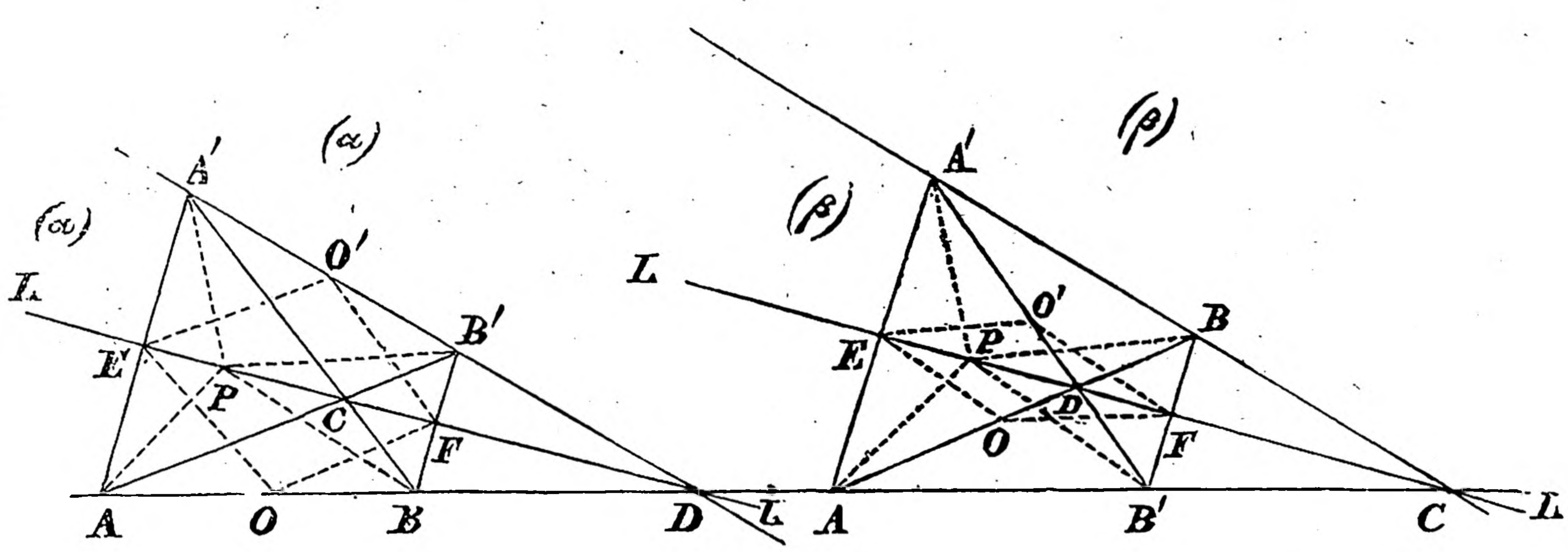
слѣдовательно прямоугольники $MP.PX$, и $QN.QY$ равны и извѣстны, но $MX = NY$ извѣстны потому что оба равны OC, слѣдовательно (кн. 2, пред. 6) $PM = QN$, $PX = QY$ и $\angle POM = \angle QON$, и какъ всѣ эти величины извѣстны, то извѣстны и точки E и F.

Примѣръ 14. Прямыя, соединяющія перемѣнную точку на данной прямой съ двумя данными точками, лежащими по одну сторону прямой, будутъ имѣть *наибольшую* разность, когда ихъ направленія совпадаютъ и *наименьшую* сумму, когда данная прямая дѣлитъ *внѣшній* уголъ между ними пополамъ (фиг. 597).

Если данныя точки лежатъ съ противоположныхъ сторонъ данной прямой, то вышеупомянутыя прямыя имѣютъ *наименьшую* сумму, когда ихъ направленія совпадаютъ и *наибольшую* разность, когда данная прямая дѣлитъ *внутренній* уголъ между ними пополамъ.

Доказат. LL будетъ данная прямая (фиг. α и фиг. β), а A и B данныя двѣ точки, AE и BF перпендикуляры изъ нихъ на LL, A' и B' двѣ точки на этихъ перпендикулярахъ такъ взяты, что $AE = EA'$, $BF = FB'$, слѣдовательно разстоянія, какой нибудь точки P на LL отъ A и A', отъ B и B' будутъ равны (кн. 1, пред. 4).

Фиг. 597.



Если D будетъ точка на LL въ которой AB или $A'B'$ пересѣкаютъ LL, т. е. точки для которой направленія PA и PB совпадаютъ, и если C есть точка на LL въ которой прямыя AB' или $A'B$ пересѣкаютъ LL, т. е. точки для которой уголъ APB дѣлится пополамъ прямою LL (внѣшне фиг. α или внутренне фиг. β), то легко видѣть, что въ (фиг. α):

$$DA - DB > PA - PB \quad \text{и} \quad CA + CB < PA + PB \tag{1}$$

и въ (фиг. β):

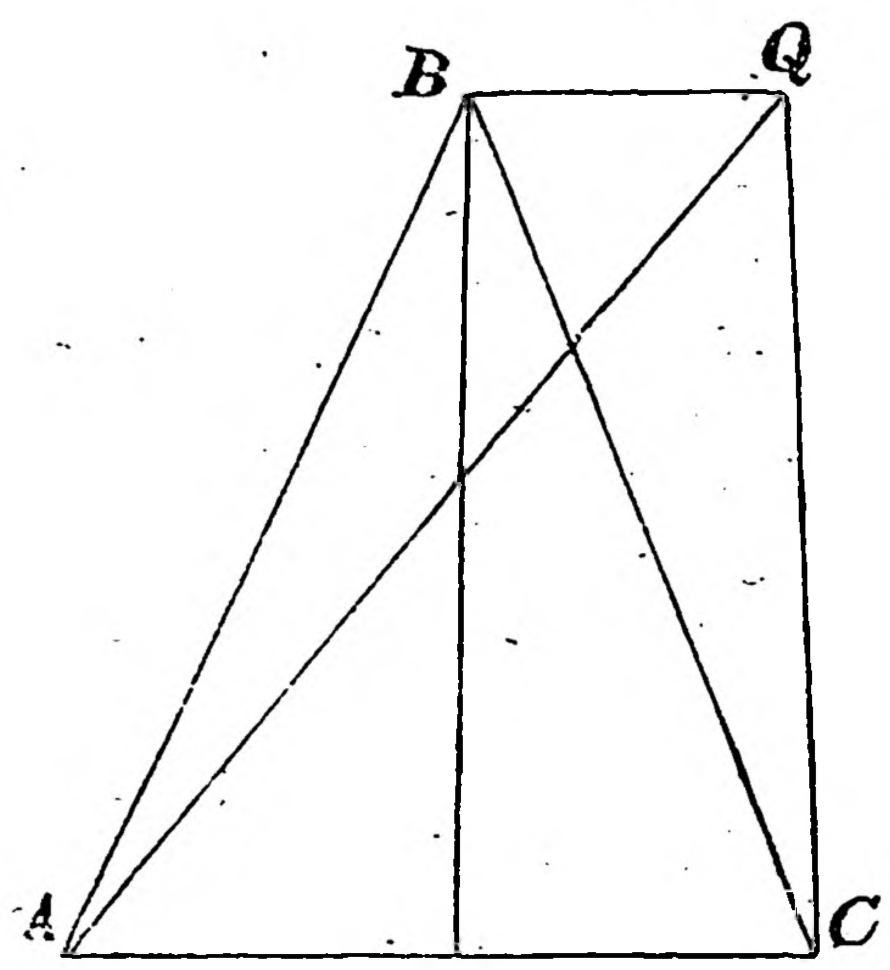
$$DA+DB<PA+PB \text{ и } CA-CB>PA-PB \quad (2)$$

первое неравенство видно изъ треугольника APB или $A'PB'$, а второе изъ треугольника APB' или $A'PB$ (кн. 1, пред. 20).

Примѣръ 15. Изъ всѣхъ треугольниковъ построенныхъ на одномъ основанiи и имѣющихъ равныя площади *наименьшiй* периметръ будетъ у равнобедреннаго треугольника (фиг. 598).

Доказат. Пусть ABC будетъ равнобедренный треугольникъ, AQC какой нибудь другой равной площади съ ABC и построенный на одномъ съ нимъ основанiи AC.

Фиг. 598.

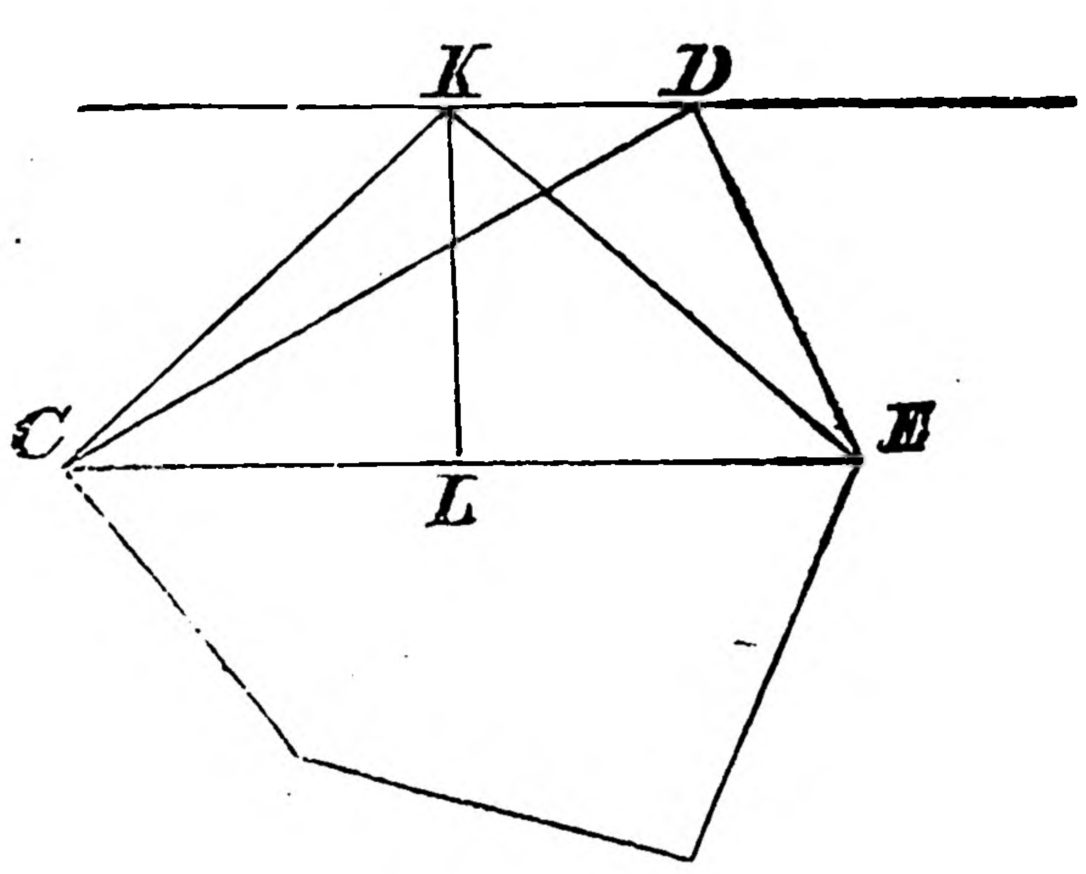


Соединимъ B съ Q, то $BQ \parallel AC$ (кн. 1, пред. 39). Изъ предъидущаго предложенiя слѣдуетъ, что $AQ+QC>AB+BC$.

Примѣръ 16. Если данъ разностороннiй многоугольникъ, то можно найти другой многоугольникъ съ тѣмъ же числомъ сторонъ, имѣющiй равную данному площадь, но коего периметръ будетъ меньше периметра даннаго (фиг. 599).

Доказат. Пусть CD и DE будутъ двѣ смежныя не равныя стороны многоугольника.

Фиг. 599.

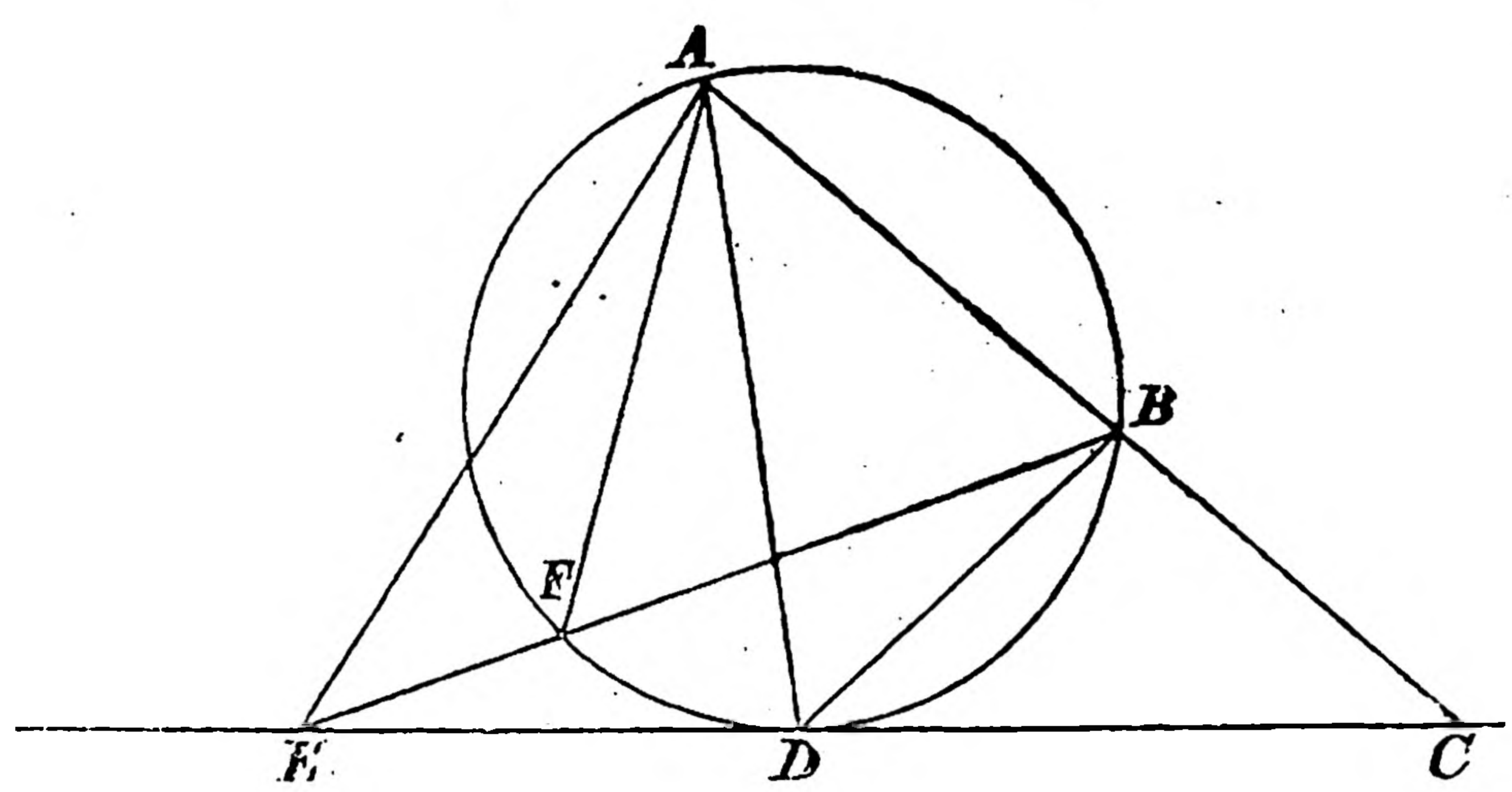


Соединимъ C съ E, чрезъ D проведемъ $KD \parallel CE$. Раздѣлимъ CE въ точкѣ L пополамъ, изъ точки L возставимъ къ CE перпендикуляръ до встрѣчи съ KD въ точкѣ K. Треугольникъ CDE можно замѣстить треугольникомъ CKE, такъ какъ ихъ площади равны (кн. 1, пред. 37), но по предъидущему предложенію периметръ треугольника CKE меньше периметра треугольника CDE, слѣдовательно и т. д.

Примѣръ 17. Дана прямая CE и двѣ точки A и B съ одной ея стороны, найти на прямой CE такую точку D, чтобы уголъ ADB былъ *наибольшій* (фиг. 600)?

Рѣшеніе. Опишемъ кругъ, который бы проходилъ чрезъ точки A и B и касался прямой CE. Пусть точка касанія построеннаго круга будетъ D.

Фиг. 600.



Я говорю что уголъ ADB будетъ *наибольшій*. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую нибудь точку E на прямой CE и соединимъ ее съ A и B, пусть EB пересѣкаетъ окружность въ точкѣ F, соединимъ F съ A, то мы имѣемъ $\angle AEB < \angle AFB = \angle ADB$, слѣдовательно и т. д.

Примѣръ 18. Даны двѣ точки A и B внѣ даннаго круга: найти такую точку D на кругѣ, чтобы уголъ ADB былъ *наибольшій*?

Рѣшеніе. Опишемъ кругъ, который бы проходилъ чрезъ точки A и B и касался даннаго круга, пусть точка касанія будетъ D, я говорю что уголъ ADB будетъ *наибольшій*, что легко показать, какъ въ предъидущей задачѣ.

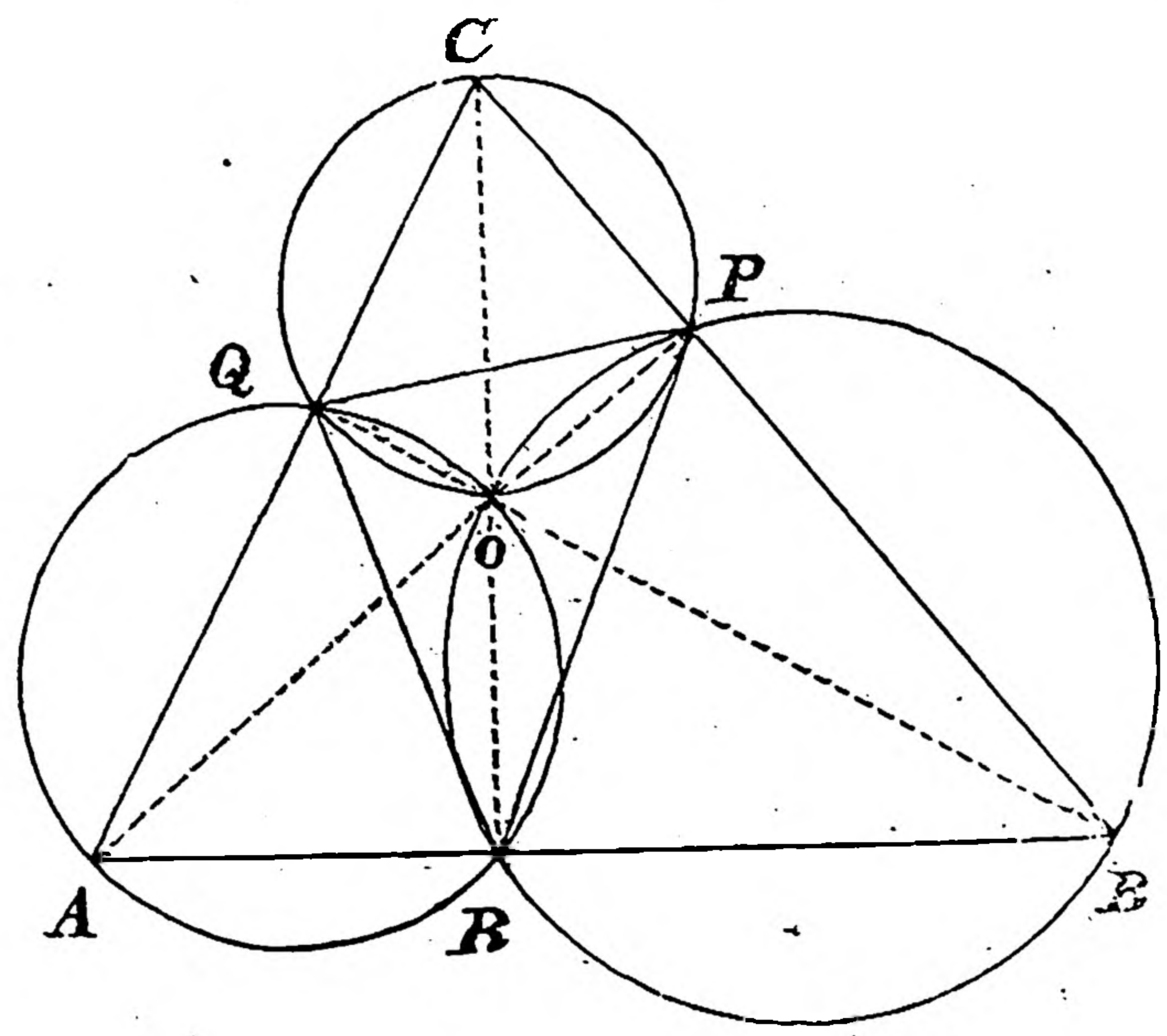
Примѣръ 19. Рѣшимъ еще слѣдующій вопросъ:

Изъ всѣхъ подобныхъ треугольниковъ, коихъ стороны проходятъ чрезъ три данныя точки, найбольшій будетъ тотъ, въ которомъ перпендикуляры, возставленные къ сторонамъ треугольника въ данныхъ точкахъ, пересѣкаются въ одной точкѣ (фиг. 601).

Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ P, Q, R, а ABC треугольникъ, коего стороны проходятъ чрезъ точки P, Q, R. Построимъ три круга QAB, RBP, PCQ, очевидно, что это три круга пересѣкаются въ одной точкѣ O (кн. 3, пред. 21, 22). Углы QOR, ROP, POQ равны или суть дополнительные угламъ BAC, CBA, ABC, а углы BOC, COA, AOB равны суммѣ или разности угловъ BAC и PQR, CBA и RQP, ACB и

PRQ, смотря по положенію точекъ *P*, *Q* и *R*. Если данъ родъ подобія треугольниковъ *ABC*, т. е. если даны углы *A*, *B*, *C*, то около точки *O* углы ***BOC***, *COA*, *AOB* будутъ величины постоянныя, слѣдовательно треуголь-

Фиг. 601.



ники ***BOC***, *COA*, ***AOB*** будутъ наибольшіе, когда стороны *AB*, ***BC***, *CA* будутъ наибольшіе, а эти послѣдніе будутъ наибольшіе тогда, когда ***OA***, ***OB***, *OC* будутъ діаметрами, и слѣдовательно ***OP***, *OR*, *OQ*, будутъ перпендикуляры къ *AC*, къ *AB* и къ *BC*.

Въ теоріи *наибольшихъ* и *наименьшихъ* величинъ случается весьма часто, что перемѣнная величина, въ извѣстномъ положеніи относительно элементовъ фигуры, съ которыми она связана, имѣетъ *наибольшую* или *наименьшую* величины, а въ другомъ положеніи относительно тѣхъ же элементовъ фигуры имѣетъ двѣ *наибольшихъ* или двѣ *наименьшихъ* величины, переходя всякій разъ, при двухъ *наибольшихъ*, чрезъ *наименьшую* 0, и при двухъ *наименьшихъ* чрезъ *наибольшую* ∞. Напримѣръ, разстояніе данной прямой отъ даннаго круга, если прямая не пересѣкаетъ кругъ, будетъ имѣть *наименьшую и наибольшую* величину: именно, разстоянія концевъ діаметра перпендикулярнаго къ данной прямой. Разстояніе это будетъ имѣть два *наибольшихъ* значенія, когда прямая пересѣкаетъ кругъ; отъ одного наибольшаго значенія къ другому перемѣнная величина (т. е. разстояніе) переходитъ всякій разъ чрезъ *наименьшую* 0, въ точкахъ пересѣченія прямой съ окружностью.

Наибольшая изъ *наибольшихъ* и *наименьшая* изъ *наименьшихъ* перемѣнной величины, очевидно даютъ, во всѣхъ случаяхъ, предѣлы *возможности* и *невозможности* задачъ, въ которыя входятъ такія перемѣнныя величины.

Очевидно, невозможно построить величину, какого бы рода она ни была, больше *наибольшей* изъ *наибольшихъ* и меньше *наименьшей* изъ *наи-*

меньшихъ величинъ, которыя эта перемѣнная величина можетъ получить, въ зависимости съ другими.

Наибольшую изъ *наибольшихъ* и *наименьшую* изъ *наименьшихъ* мы будемъ называть *предѣльными* величинами.

Часто случается, что предѣльныя величины перемѣнной въ извѣстномъ положеніи *равны*, въ этомъ случаѣ и всѣ среднія величины равны, а слѣдовательно перемѣнная величина будетъ *постоянна*. Въ каждомъ такомъ случаѣ, задача для построенія возможна только для этой постоянной величины, для всякой же другой построеніе невозможно. Въ случаѣ возможности задача имѣетъ *безчисленное множество* рѣшеній или, какъ говорятъ, задача *неопредѣленная*.

Въ общемъ случаѣ, когда предѣльныя величины *наибольшихъ* и *наименьшихъ* не равны, а требуется построить величину промежуточную, то задача для построенія допускаетъ всегда не менѣе *двухъ* опредѣленныхъ рѣшеній, раздѣленныхъ между собою извѣстнымъ промежуткомъ. Этотъ промежутокъ дѣлается все меньше и меньше по мѣрѣ того, какъ данная величина для построенія приближается къ предѣльнымъ, т. е. къ предѣламъ возможности или невозможности построенія. Когда наконецъ величина, данная для построенія, совпадетъ съ одною изъ предѣльныхъ, то *два* рѣшенія совпадутъ, т. е. получится *одно* рѣшеніе, за тѣмъ когда данная величина, для построенія, выйдетъ за предѣльныя величины, то задача дѣлается невозможною. Пояснимъ это примѣромъ: всѣ задачи, которыя рѣшаются съ помощью круга имѣютъ не менѣе двухъ различныхъ рѣшеній, которыя для предѣльныхъ величинъ совпадаютъ и переходятъ отъ возможныхъ къ невозможнымъ и обратно, пусть напримѣръ требуется:

Найти на окружности даннаго круга точку, которая бы находилась въ данномъ разстояніи отъ данной точки?

Если данная точка будетъ центръ даннаго круга, то, очевидно, задача возможна только въ томъ случаѣ, когда данное разстояніе будетъ равно радіусу даннаго круга, для какого нибудь другаго разстоянія, очевидно, задача невозможна.

Для точки данной внѣ центра задачи имѣетъ *два* и только *два* опредѣленныя рѣшенія: оба различныя, совпадающія или оба невозможныя, смотря потому будетъ-ли данное разстояніе лежать между предѣльными величинами, равно одной изъ предѣльныхъ или лежитъ внѣ ихъ.

Замѣтимъ наконецъ, что если задача допускаетъ *одно* только рѣшеніе, то она всегда возможна, если же задача допускаетъ *два* рѣшенія, то оба эти рѣшенія дѣлаются невозможными вмѣстѣ и притомъ всегда при переходѣ отъ возможности къ невозможности дѣлаются равными. Замѣтимъ еще, что нѣтъ задачи въ геометріи, которая бы, при извѣстныхъ условіяхъ, не сдѣлалась неопредѣленною.

Разберемъ еще одну, весьма простую, задачу:

На данной прямой найти точку въ данномъ разстояніи отъ данной точки?

Изъ данной точки, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ данному разстоянію опишемъ кругъ, этотъ кругъ пересѣчетъ прямую въ двухъ точкахъ. Построенныя, такимъ образомъ, точки и будутъ искомыя. Самое большее разстояніе точекъ на прямой есть ∞, а самое меньшее есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую, слѣдовательно предѣльныя величины для разстоянія суть ∞ и длина выше упомянутаго перпендикуляра. Если данное разстояніе лежитъ между этими двумя предѣлами, то задача имѣетъ всегда *два различныя* рѣшенія, если данная длина равна упомянутому перпендикуляру, то оба рѣшенія *совпадаютъ*, т. е. дѣлаются равными, если данная длина меньше перпендикуляра, то *оба* рѣшенія дѣлаются *невозможными*.

XI. Отрицательныя количества въ геометріи.

Отличительный характеръ *новой геометріи* передъ древнею состоитъ, въ ясности и отчетливости языка и доказательствъ. Общія предложенія съ одной стороны и общія доказательства съ другой, заключаютъ, въ новой геометріи, всѣ различныя случаи разнообразныхъ свойствъ, которыя происходятъ отъ измѣненія въ числѣ, положеніи и величинѣ элементовъ входящихъ въ фигуру. Эти разнообразныя измѣненія въ одной и той же фигурѣ, въ *древней геометріи*, разсматривались какъ различныя предложенія, требующія, каждое, отдѣльное доказательство. Всѣ такія предложенія и доказательства, въ новой геометріи, не загромождены случайными частностями, излишними подробностями, и въ слѣдствіе ихъ общности скорѣе понимаются и легко помнятся. Это важное преимущество новой геометріи передъ древнею обязанно употребленіемъ алгебраическихъ знаковъ + и —, означающихъ въ какомъ направленіи должно отсчитывать разсматриваемыя величины. Вотъ общее для этого правило:

Если, какія нибудь, геометрическія величины могутъ отсчитываться въ противоположныхъ направленіяхъ, то величинамъ, отсчитываемымъ въ одномъ направленіи даютъ знакъ +, а отсчитываемымъ въ противоположномъ направленіи даютъ знакъ —.

Въ какомъ направленіи отсчитываются величины сопровождаемыя знакомъ +, и въ какомъ знакомъ —, это предоставляется выбору изслѣдователя.

Отрѣзки откладываемыя на одной прямой линіи, дуги—на одномъ кругѣ, углы—около одной вершины, треугольники или параллелограмы, построенные на одномъ основаніи, перпендикуляры возставленные къ одной и той же прямой или прямыя одинаково наклоненныя къ ней, всѣ эти геометрическія величины, разныхъ родовъ, представляютъ примѣры, въ которыхъ, такія величины, могутъ быть откладываемы въ противоположныхъ направленіяхъ, а слѣдовательно, по принятому условію, должны однѣ изъ нихъ сопровождаться знакомъ +, а другія знакомъ —.

Мы уже выше замѣтили, что выборъ какому изъ двухъ противоположныхъ направленій дать знакъ +, а слѣдовательно другому знакъ —, остается совершенно произвольнымъ, но разъ выборъ сдѣланъ, это правило должно строго соблюдаться до конца изслѣдованія.

Если въ изслѣдованіи сравниваются геометрическія величины не одного направленія или непротивоположныя, какъ напримѣръ отрѣзки, откладываемыя на различныхъ прямыхъ, треугольники или параллелограмы, построенные на различныхъ основаніяхъ, перпендикуляры возставленные къ различнымъ прямымъ или прямыя не одинаково наклоненныя къ прямой, то для каждаго изъ такихъ случаевъ выбираются произвольно направленія, которымъ даютъ знакъ +, а противоположнымъ даютъ знакъ —, какъ только такой выборъ сдѣланъ, то его надобно строго соблюдать въ продолженіи всего изслѣдованія.

Геометрическія величины, сопровождаемыя знакомъ +, какъ и въ алгебрѣ, называются *положительными*, а сопровождаемыя знакомъ —, называются *отрицательными.*

Этотъ принципъ отличаетъ новую геометрію отъ древней. Онъ даетъ способъ видѣть въ геометрическихъ величинахъ не только абсолютное числовое значеніе, но и направленіе, дѣлаетъ языкъ, предложенія и доказательства независимыми отъ случайнаго расположенія элементовъ изслѣдуемой фигуры.

Согласно этому началу, выраженія: *сумма* и *разность* въ геометріи, получаютъ такія же значенія какъ и въ алгебрѣ.

Слово *сумма* въ ариѳметикѣ употребляется, какъ результатъ сложенія нѣсколькихъ величинъ безъ всякаго вниманія на знаки и есть всегда количество положительное. Въ алгебрѣ и въ геометріи слово *сумма* есть результатъ сложенія нѣсколькихъ величинъ обращая вниманіе и на знаки, такъ что алгебраическая или геометрическая сумма есть ариѳметическая сумма всѣхъ положительныхъ величинъ *безъ* ариѳметической суммы всѣхъ отрицательныхъ величинъ.

Изъ этого видно, что алгебраическая или геометрическая сумма будетъ величина *положительная*, *отрицательная* или *нуль*, смотря потому будетъ ли сумма *положительныхъ* величинъ больше, меньше или равна суммѣ *отрицательныхъ* величинъ.

Тоже относится и къ слову *разность*. Въ ариѳметикѣ оно означаетъ отнятіе одного количества отъ другаго, обращая вниманіе только на абсолютное ихъ числовое значеніе, а въ алгебрѣ и геометріи, разность получается, обращая вниманіе и на знакъ, поэтому часто въ алгебрѣ или въ геометріи разность можетъ быть ариѳметической суммой и обратно.

Подобныя замѣчанія относятся и къ словамъ *произведеніе* и *частное* или *отношеніе.* Въ новой геометріи онѣ употребляются обращая вниманіе и на знаки множителей или дѣлимаго и дѣлителя, и подобно какъ въ алгебрѣ; *произведеніе* двухъ геометрическихъ величинъ съ одинаковыми знаками даетъ произведеніе *положительное*, а съ разными знаками *отрицательное*, тоже относиться и къ частному двухъ геометрическихъ величинъ. И вообще произведеніе нѣсколькихъ геометрическихъ величинъ будетъ положительное или отрицательное, смотря потому будетъ-ли число отрицательныхъ величинъ четное или нечетное. Такъ напримѣръ, площадь прямоугольника или отношеніе двухъ величинъ будетъ положительное или отрицательное, смотря потому будутъ-ли линіи имѣть одинаковые знаки или разные знаки.

Легко видѣть, что означаютъ въ новой геометріи слова: *средне-ариеметическое* и *средне-геометрическое* число или величина.

Остается показать условіе относительно знаковъ въ геометріи и приложеніи его, для поясненія, къ нѣкоторымъ предложеніямъ.

Извѣстно, что *отрѣзокъ* на прямой читается двумя буквами поставленными на конечныхъ его точкахъ A и B, говорятъ отрѣзокъ AB. При этомъ условились принимать, что отрѣзокъ AB, откладывается или отсчитывается на прямой отъ точки A до точки B, обозначеніе же BA будетъ обозначать откладываніе того же отрѣзка только въ противоположномъ направленіи отъ B къ A. Слѣдовательно, относительно принятаго знака для отрѣзка AB, мы будемъ всегда имѣть $AB=-BA$ или что тоже $AB+BA=0$, какія бы нибыли точки A и B и какое бы нибыло разстояніе между ними.

То что мы сказали относительно отрѣзковъ прямой относится точно также и къ отрѣзкамъ дугъ на кругѣ, къ угламъ и т. д.

Примѣръ 1. Если A и B суть двѣ, какія нибудь точки на прямой линіи, и P какая нибудь третяя точка на той же прямой, между точками A и B или внѣ ихъ, то мы всегда будемъ имѣть:

$$AP+PB+BA=0$$

если будемъ принимать во вниманіе условіе знаковъ.

Въ самомъ дѣлѣ:

1-е. Если точка P лежитъ между A и B, то очевидно мы имѣемъ:

$$AP+PB=AB$$

но по условію $AB=-BA$; слѣдовательно:

$$AP+PB+BA=0.$$

2-е. Если точка P лежитъ внѣ точекъ A и B со стороны B, то по предъидущему мы имѣемъ:

$$AB+BP+PA=0$$

но $PA=-AP$, $BP=-PB$, $AB=-BA$, слѣдовательно:

$$AP+PB+BA=0$$

3-е. Если точка P лежитъ внѣ A и B со стороны A, то также легко показать, что:

$$AP+PB+BA=0$$

Если на одной прямой лежитъ нѣсколько точекъ A, B, C, D, E, то легко видѣть, что мы будемъ всегда имѣть:

$$AB+BC+CD+DE+EA=0$$

Примѣръ 2. Если отрѣзокъ AB раздѣленъ точкою P на два отрѣзка, внутренне или внѣшне, то легко видѣть, что:

$$AP^2+BP^2=AB^2+2AP.BP$$

какое бы нибыло положеніе точки P относительно точекъ A и B.

Примѣръ 3. Если изъ какой нибудь точки P, внѣ отрѣзка AB, опущенъ на него перпендикуляръ PQ, то какое бы нибыло положеніе точки P, относительно отрѣзка AB, мы всегда имѣемъ:

$$AP^2-BP^2=AB^2+2AB.BQ$$

Примѣръ 4. Даны величина и знакъ отношенія $m:n$ отрѣзковъ AP и BP, на которые данная прямая AB раздѣлена точкою P, опредѣлить величину и знакъ отрѣзковъ?

Рѣшеніе. Такъ какъ по положенію:

$$AP:BP=m:n$$

то:

$$AP:AP-BP=m:m-n$$

и

$$BP:BP-AP=n:n-m$$

и какъ мы имѣемъ всегда:

$$AP - BP = AB, \quad BP - AP = BA$$

то:

$$AP = \frac{m}{m-n} \cdot AB = \frac{m}{n-m} \cdot BA$$

$$BP = \frac{n}{m-n} \cdot AB = \frac{n}{n-m} \cdot BA$$

Это и суть общія формулы, по которымъ вычисляется длина искомыхъ отрѣзковъ.

XII. Удвоеніе куба и трисекція угла.

Въ предисловіи я упомянулъ о задачахъ, которыми много занимались древніе геометры и которыя были причиной многихъ важныхъ открытій въ геометріи. Задачи эти были: *удвоеніе куба* или *делійская задача* и *трисекція угла.*

Удвоеніе куба.

Эратосѳенъ, геометръ жившій не задолго послѣ Евклида, разсказываетъ слѣдующее: Критскій царь Миносъ желалъ воздвигнуть надгробный памятникъ своему сыну Главку въ видѣ куба, когда архитекторъ сказалъ, что сторона такого куба будетъ 100 футовъ, то Миносъ отвѣтилъ, что онъ желаетъ чтобы памятникъ, сохранивъ фигуру куба, былъ въ двое больше.

Если перевесть эту задачу на нашъ алгебраическій языкъ, то, означая вообще сторону первоначальнаго куба чрезъ a, и сторону искомаго чрезъ x, мы будемъ имѣть $x^3=2a^3$, откуда $x=a\sqrt[3]{2}$.

Хотя безъ сомнѣнія, какъ нѣкоторые историки замѣчаютъ, извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ было уже давно извѣстно, но здѣсь требовалось рѣшеніе не ариѳметическое, т. е. извлеченіе кубическаго корня изъ двухъ, а геометрическое построеніе съ помощью линейки и цыркуля, т. е. прямой и круга.

Первый изъ геометровъ, который преобразовалъ эту задачу былъ Гиппократъ Хіоскій, онъ показалъ, что если мы будемъ имѣть:

$$a:x=x:y,\quad x:y=y:2a$$

то оттуда слѣдуетъ $x^3=2a^3$. Слѣдовательно онъ делійскую задачу свелъ на розысканіе двухъ средне-геометрическихъ между двумя данными величинами. Но преобразованная задача представляетъ такія же трудности какъ и данная.

Много было придумано рѣшеній этихъ двухъ задачъ, но всѣ онѣ не были элементарныя, было придумано нѣсколько кривыхъ линій, которыя служили для рѣшенія этихъ задачъ. Самое простое рѣшеніе было то, въ которомъ употребляется кругъ и одно изъ коническихъ сѣченій. Всѣ остальныя рѣшенія принадлежатъ высшему разряду.

Названіе делійской задачи она получила потому, что во время моровой язвы Дельѳійскій оракулъ сказалъ, что умилостивить боговъ можно удвоивъ алтарь Аполлона, который былъ кубической формы весь изъ золота.

Трисекція угла.

Вторая, не менѣе знаменитая, задача въ древности есть трисекція угла, т. е. данный уголъ раздѣлить на три равныя части?

Пусть треть даннаго угла будетъ φ, то данный уголъ будетъ 3φ. Изъ тригонометріи извѣстно, что:

$$\cos 3\varphi = \cos(\varphi + 2\varphi) = \cos\varphi . \cos 2\varphi - \sin\varphi . \sin 2\varphi$$

Но:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1, \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

откуда, подставляя, найдемъ:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

Полагая $\cos 3\varphi = a$, $\cos\varphi = x$, мы будемъ имѣть слѣдующее уравненіе:

$$a = 4x^3 - 3x$$

или

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x = \tfrac{1}{4}a$$

Это уравненіе, которое очевидно древнимъ не было извѣстно и даетъ рѣшеніе предложенной задачи. Если бы корни этого уравненія можно было построить съ помощью прямой и круга, чего добивались и древніе, то задача была-бы рѣшена элементарно, но такое построеніе невозможно, корни уравненія 3-й степени могутъ быть построены только съ помощью коническихъ сѣченій и простѣйшимъ рѣшеніемъ считается то, въ которое входитъ только одно коническое сѣченіе и кругъ. Были придуманы и другія кривыя высшихъ порядковъ для рѣшенія этой задачи, изъ коихъ одна извѣстна подъ именемъ *квадратриксы* и была придумана Диностратомъ. Эта кривая повела-бы къ отысканію квадратуры круга, если бы было возможно опредѣлить мѣсто *нѣкоторой точки* на ней, но такое опредѣленіе ведетъ къ такимъ же трудностямъ, какъ и квадратура круга—это есть круговая зависимость.

Многіе и въ настоящее время занимаются удвоеніемъ куба и трисекціей угла, не зная что Ванцель (Wantzel) доказалъ, что съ помощью прямой и круга эти задачи рѣшены быть не могутъ*).

---

*) L. Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaitre si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.
Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. II. 1837.

Прибавленіе къ страницѣ 50-й.

Извѣстно, что:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

Если возьмемъ функціи:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

и означимъ первую изъ нихъ чрезъ $\sinh x$, а вторую $\cosh x$, то такія функціи будутъ аналогичны тригонометрическимъ и называются *гиперболическими.*

Въ выраженіяхъ:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

буква h послѣ sin и cos означаетъ гиперболическіе синусъ и косинусъ. Легко изъ выраженія этихъ функцій найти слѣдующія формулы сходныя съ тригонометрическими:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \,.\, \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \,.\, \cosh y \pm \sinh x \,.\, \cosh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh xi = \cos x, \quad \cosh x = \cos xi$$

$$\sinh xi = i \sin x, \quad \sinh x = \frac{1}{i} \sin xi$$

и наконецъ:

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

откуда:

$$(\cosh x + \sinh x)^m = \cosh mx + \sinh mx$$

Легко видѣть также, что эти функціи имѣютъ мнимый періодъ $2\pi i$:

$$\sinh(x \pm 2n\pi i) = \sinh x, \quad \cosh(x \pm 2n\pi i) = \cosh x$$

СПИСОКЪ „НАЧАЛЪ ЕВКЛИДА“ ВЫШЕДШИХЪ СЪ 1482 ПО 1880 ГОДЪ.

1482. Preclarissimus Liber Elementorum Euclidis, perspicacissimi in artem geometrie incipit quam felicissime. Venetiis. Erhardus Ratdolt, in—fol.

1491. Euclidis Megarensis Elementorum Geometriae Lib. XV e graeco in latinum translati, cum Commentationibus Ant. Campani. Vicentiae, per Leonardum de Basilea, in—fol.

1502. Eucl. Meg. Geometr. elementorum. LL. XV. Campani Galli ect. Venetiis, in—fol.

1505. Euclidis Elementa. Lat. per Campanus et Zambertum. Ven. in—fol.

1506. Element. Libri VI priores, lat. c. c. Campani. Ed. Amb. Lacher de Merspurgk. Franc.

1509. Euclidis Megarensis, philosophi acutissimi, mathematicorum omnium sine controversia principis Opera. Venetiis. Издано Lucas Paciolus, in—fol.

1509. Начала Евклида напечатаны въ Сборникѣ, содержащемъ кромѣ Началъ еще комментаріи Теона и соч. Гипсикла. Переводъ Замберти. Venetiis, in aedibus Joannis Tacuini, in—fol.

1510. Eucl. Elementa. Veneg. in—fol.

1511. Eucl. Elem. Librorum IV priores. Paris.

1513. Eucl. Meg. Phil. Plat. mathem. discipl. Janitoris: habent ect. Barth. Zamberto Venet. interprete. Venetiis in aedibus Joan. Tacuini.

1516. Les seis libros primoros de la geometrica de Eucl. trad. por Rodr. Zamorano. Sevilla, in—4.

1516. Eucl. Elem. Libri IV priores. Paris.

1516* Eucl. Meg. Geometr. element. LL. XV. Paris, in—fol.

1517. Elementa geometria ex traditione *Theonis Barthol. Zamberto.* Ven. interprete, ect. Venetiis. Joan. Tacuini, in—fol.

1521. Eucl. Meg. Geometr. element. LL. XV. Paris, in—fol.

1527. Eucl. Elem. Lat. Baetio Interp. Paris, in—fol.

1533. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ στοιχειων βιβλ. ιε. εκ των Θεωνος συνουσιων. Εὶς του αύτου το πρωτον, ἐξηγηματων Προκλου βιβλ. δ. in—fol.

1533. Euclidis Elementa. Graece c. schol. Theonis et Procli, Grynaeus. Basil, in—fol.

1536. Orontii Finei Delphinatis, regii mathem. profess., in sex priores libros Geometricorum Elementorum Euclidis Meg. ect. Parisiis, in—fol.

1537. Euclidis Megarensis Geometricorum elementorum libri. Parisiis in officina Henrici Stephani, in—4.

1537. Eucl. Elementa ect. Basil, in—fol.

1539. Eucl. Opera omnia, graece cum scholiis graecis. Basil, in—fol.
1541. Euclidis Elementorum libri. XV. Romae, in—8. Греческій текстъ.
1543 Euclide Meg. Philos.: solo introduttore delle Scientie Matematiche diligentemente reassetato et alla integrita ridotto per ect. Nic. Tartalea ect. et per commune commodo et utilita di latino in volgar tradotto. Vinegia, in—fol.
1544. Orontii Finei Delphinatis, regii mathem. profess., in sex priores libros Geometricorum Elementorum Euclidis Meg. ect. Parisiis, in—4.
1544. Euclide Meg. Philos. solo introduttore delle scientia matematiche ect. Vinegia, in—fol.
1544. Eucl. Meg. ect. Nic. Tartalea. Venezia, in—fol.
1545. Euclide Meg. Philos.: solo introduttore delle Scientie Matematiche ect. Nic. Tartalea ect. Vinegia, in—fol.
1545. Eucl. elementorum LL. XV. Graece ed. Aug. Caiahus. Roma, in—8. Итальянскій переводъ предъидущаго.
1545. Eucl. elementorum L. XV. Venegia, in—fol.
1546. Elementorum geometricorum libri XV, cum exposit. *Theonis* in priores XIII a *Barto-Veneto* latin. donata ect. Basileae, in—fol.
1549. Eucl. Elem. geometr. LL. VI, conversi in lat. serm. a Joach. Camerario. Edebat Lipsiae Geo. Joach. Rhetici, in—8.
1550. Eucl. Meg. Phil. et Math. excell. LL. VI priores de geometricis principiis gr. et lat. ect. Auth. Joach. Scheubelio. Bas. in—fol.
1551. Orontii Finei Delphinatis, regii mathem. profes., in sex priores libros ect. Parisiis, in—4.
1551. Elementorum liber X. Petro Montaureo interprete. Lutetiae, in—4.
1555. Das siebend, acht und neunt Buch des hochberühmten Math. Euclid Meg. ect.; durch Joh. Scheybl. Augsb. in—4.
1557. Eucl. Elem. LL. XV. Gr. et Lat. c. praef. Steph. Gracilis. Lut. ap. Gu. Cavellat, in—8.
1557. Eucl. Meg. math. claris. Elem. Geom. LL. XV. Basiliae ap. Joah. Hervag, in—fol.
1557. Eucl. Meg. ect. Jacobus Peletarius et Franciscus Flussates. Lugd., in—fol.
1557. Eucl. Meg. ect. Conradus Dasypodius. Argent.
1558. Eucl. Meg. math. claris. Element. Geom. LL. XV. Basil. ap. Joa. Hervag., in—fol.
1562. Die Sechs ersten Bücher des Eucl. vom anfang ect. Durch Wilh. Holzmann. Basel, in—fol.
1564. Les neuf livres des elemens d'Euclide, trad. par Forcadel. Paris, in—4.
1564. Quindecim Elementorum Geometriae primum: ex Theonis Comment. gr. et lat. Conr. Dasypodio. Argent. exc. Chr. Mylius.
Eucl. Elem. L. XV. Secundu. ect. ect.
1564. Eucl. Elem. L. XV. Gr. et Lat., quibus cum ad omnem Mathematicae scientiae partem, tum ad quamlibet Geometriae tractationem facilis comparatur aditus. Coloniae ap. Maternum Cholinum, in—8.
1564. Propositiones reliquorum ect. in—8.
1564* Euclidis elementorum libri XV. Graece et Latine. Coloniae, in—8.
1565. Euclidi deligentam. reassettato et in volgar trad. per Nic. Tartalea. Vinegia, in—fol.
1565. Eucl. Meg. Philos. solo introduttore delle Scientie ect. Curtio Trojano. Venegia, in—4.

1566. Les six premiers livres des elemens d'Euclide. Paris, in—8.
1566. Eucl. Meg. Philos. solo ect. Curtio Trojano. Venegia, in—4.
1566. Analysis Geometricae sex librorum Euclidis ect. Conrado Dasipodio, in—4.
1566* Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementa geometrica. libris XV. Authore Francisco Flussate Candalla. Parisiis, in—fol.
1566. Analyseos geometricae ect. Herlino et Dasypodio, in—fol.
1569. Eucl. Meg. Phil.: solo introduttore ect. Giov. Bariletto. Venegia, in—4.
1569. Euclidis opere, trad. per Nic. Tartalea. Venetiis, in—4.
1569. Les six premiers livres des Elements d'Euclide traduits et commentés par P. Forcadel. Paris, in—4.
1570. The Elements of Geometrie of the most auncient Philosopher Euclide of Megara. Lond. in—fol.
1570. Euclidis elementor. lib. I. Heronis Alexandrini vocabula geometrica ect. Per Conr. Dasypodium. Argen.
1571. Eucl. Elem. liber primus, ect. Gr. et Lat. M. C. Dasypodium. Argent, in—8.
1571. Eucl. omnium libr. prop. ect. gr. et lat. M. C. Dasypodium. Arg. in—8.
1572* Euclidis elementorum libri XV. A Federico Commandino Urbinate. Pisauri, in—fol.
1573. Elementorum libri XV, graece et latine. Parisiis. Sthephanus Gracilis, in—16.
1573. Eucl. Element. LL. XV. Gr. et Lat. Lut., in—8.
1574. Eucl. Element. LL. XV ect. auc. Chph. Clavio. Romae. 2 vol. in—8.
Первое изданіе знаменитаго перевода Clavius'a
1575. De gli elementi d'Euclide libri XV, trad. da Cammandino da Urbino. Frisolino, in—fol.
1576. Eucl. Elem. Et traduzidos en lengua Espanola por el S-r Rod. Zamorano. Sevilla, in—8.
1577* Euclidis elementorum geometricorum libri sex conversi in latinum sermonem a Joach. Camerario. Mauritio Steinmetz Gersb. Lipsiae, in—12. Съ греческимъ текстомъ.
1578. Eucl. Meg. math. clarissi. Elementa LL. XV. D. Fr. Flussate Candalla. Lugd. in—fol.
1578. Eucl. Meg. ect. Stephanus Gracilis. Paris, in—8.
1580. Eucl. Elem. Libri XV. Colon.
1585. Euclide Meg. Philos.: solo introduttore delle Scientie Matematiche diligentemente ect., per Nic. Tartalea ect. Vinegia, in—4.
1586. Eucl. elem. tradotto nella lingua ital. par Nic. Tartalea ect. Venet. in—4.
1587. Euclidis Elementorum libri XV. Coloniae, in—8.
1588. Нач. Евк. на араб. яз. напечатаны въ Константинополѣ, in—fol.
1589* Euclidis posteriores lib. IX. Auctore Christophoro Clavio Bambergensi è Societate Jesu. Romae, in—16.
1589* Elementorum libri XV, accessit XVI de solidorum, auctore C. Clavio. Romae, 2 vol. in—8.
1591. Element. libri XV ect., auct. C. Clavio. Col. 2 vol. in—fol.
1592. Eucl. Elem. Libri XV. Colon. in—8.
1594. Eucl. Elementorum L. XIII. studio Nassireddini Tusini pr. arab. impressi. Romae, in—fol.
1597. Euclidis elementorum libri XV. Coloniae, in—8.
1598. Les six premiers livres des elemens d' Euclide par Errard. Paris, in—8.

1598. Eucl. Elem. LL. XV. Gr. et. Lat. Lut. in—8.
1598. Eucl. Elem. ect. Stephanus Gracilis. Paris, in—8.
1598. Напечатанъ перев. Началъ Евк. на арабск. яз. во Флоренціи.
1600. Euclidis elementorum libri XV, cum libro XVI. Coloniae, in—8.
1603. Eucl. Element. LL. XV, auct. C. Clavio. Romae, 2—vol. in—8.
1605. In arithmet. ration. Euclidis VII, VIII, IX et X elementor. libris compreh. demons. Arnhemii.
1607* Euclidis posteriores libri IX. Auctore Christophoro Clavio. Francofurti.
1607. Euclidis elementorum libri XV, access. liber XVI de solidorum regularium ect. edidit Christ. Clavius. Francofurti.
1608. Начала Евклида переведены на Китайскій языкъ Matteo Ricci.
1609. Eucl. Elem. Ambr. Rhodii, in—8.
1610. Jacoli Peletarii cenom. in Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri sex. Apud Joannis Tornaesius. Lugdun. in—4. Съ греческ. текстомъ.
1610. Die ersten sechs Bücher ect. M. Guntzenhusanum. Onoltbach, in—fol.
1612. Eucl. Element. LL. XV. Gr. et Lat. Coloniae, in—8.
1612. Eucl. Element. eadem cum comment. Flor. Puteani Vatani. Paris, in—fol.
1612. Elem. lib. XV. Christ. Clavio. Franc. in—8. 2 vol.
1613. Les elements d'Euclide par. Donnot-de-Bar-le Duc. Paris, in—4.
1613. I primi sei Libri, tradotti in lingua Italiana da Pietr. Antonio Cataldi. Bologna, in—fol.
1615. Die sechs ersten Bücher ect, Peterson Dou ect. Amst. in—4.
1617. Euclidis elementorum libri XV, cum libro XVI. Coloniae, in—8.
1617. Eucl. Elem. Geometr. libri sex. Ed. Joan. Lanz. Ingolst.
1618. Die sechs ersten Bücher ect, übers. Seb. Curtio. Amst. in—8.
1619* Euclidis elementorum libri XV. Una cum scholiis antiquis a Federico Commandino Urbinate in latinum conversi. Pisauri, in—fol.
1619. De gli Elementi d'Euclide Libri XV con gli Scholii antichi. Fed. Commandino. Pesaro, in—fol.
1620. Eucl. Elem. LL. VI priores gr. et lat. ect., ex vers. lat. Commandini ect. Lond., in—fol.
1620. Aurum probatur igne et ingenium Mathematicis. I primi sei libri de gli elementi di Euclide ridotti alla Pratica da P. Ant. Cataldi. Bologna, in—fol.
1621. Tolle numerum in rebus omnibus et omnia pereunt. I tre Libri Settimo, Ottavo et Nono degli Elementi. Bologna, in—fol.
1621. Eucl. Elem. XV, l. p. Herigone. Paris.
1623. Les quinze livres des elements d'Euclide ect. Tr. par Henrion. Paris, in—8.
1625. Ad. Dominum cum tribularem clamavi et exaudivit me, Decimo libro degli Elementi ect. per Nic. Tebaldini, in—fol.
1625. Eucl. Data ect. Parisiis, in—4.
1625. Eucl. Elem. pratic. Nürnberg.
1626. De ses eerste boecken Eucl. vem de beginselen ende fondamenten der geometrie. Dor Jan Pieterszoon Dou. Vannieus. Amster. in—8.
1626. Eucl. Elem. libri XVI. Vol. I—II. Paris, in—24.
1627. Eucl. Element. LL. XV, auc. C. Clavio, 2 vol. Franc. in—8.
1630. Les six premiers livres des elements d'Euclide. Paris, in—8.

1632* Les quinze livres des elements geometriques d'Euclide **Megarien. Traduits de** Grec en Français par P. Le-Mardelé. Paris, in—8.

1632* Les quinze livres des elements geometriques d'Euclide. **Traduits en Français par** D. Henrion. Paris, in—8.

1634. Die sechs ersten Bücher ect., übers. v. **Seb. Curtio. Amst. in—8.**

1634. Element. Libri XIII, demonstr. Amb. Rhodii. Wittenb.

1636* Euclidis sex primi elementorum geometricorum libri cum parte **undecimi.** Per Christophorum Grienbergerum. Widmanstadii, in—12.

1637. Elementos geometricos de Eucl. trad. por Carduchi. **Madrid, in—4.**

1638. Zes eerste boekken, ect. Verrooten. Hamb. in—4.

1644. Les six premiers livres des Éléments d'Euclide demonstrés par **Notes d'une Méthode** très-briève et intelligible. Par Pr. Herigone. Paris, in—8.

1644 Cursus mathemat. Tomus primus continens Eucl. Elementorum **LL. XV. Parisiis,** in—8. Латинск. и французск. текстъ.

1644. Universae Geometriae ect. F. M. Mersenni. Paris, in—4.

1645. Eucl. Element. LL. XIII, ect. Cl. Richardus. Antv. in—fol.

1646. Elements d'Euclide, trad. par P. le Mardelé. Lyon, in—8.

1647. De ses eerste boecken Euclidis ect. door Dou. Utrecht, in—8.

1649. Les quinze livres des elements d'Euclide ect. Par Henrion 5 **ed. Rouen, in—8.**

1651. E primi tradotti dal. Gio. Ricci Carmelati ect. Bologna, in—8.

1653. Henr. Hofmanns, prof. math. ect., teutscher Euclides ect. **Jehna, in—4.**

1654. Eucl. Elem. LL. XV, auc. C. Clavio, 2 vol. Franc. in—8.

1654. Eucl. Elem. per P. Georg Fournier. Lond. in—12.

1654. Les quinze livres des elements d'Euclide, tr. par Henrion. **Lyon, in—24.**

1655. Eucl. Element. LL. XV, ect. Op. Th. Barrow. Cantabr. in—8.

1655. Euclidis libri sex priores, cum parte Undecimi, **ex majoribus. Clavii Comment.** ect. Romae, in—12.

1657. Eucl. Elementorum LL. XIII. Studio **Nassireddini Tusini pr. arab. impressi.** London, in—fol. На арабск. и латинск. яз.

1659. Eucl. Elem. LL. XV, ect. R. Daniell. Lond. in—8.

1659. Eucl. Elem. LL. XV, demonst. oper. Barrow. Lond. in—8.

1660. Euclid's Elements; the whole fifteen Books compendiously **demonstrated. Lond.** in—8.

1660. De ses eerste boecken Euclidis ect. door Dou. Utrecht, in—4.

1660. Euclides ses eerste boekken, van de beginselen der **Wiskousten. In Neerduyts** vertaald d. I. Willimsz Verrooten van Harlem. Amst. in—4.

1661. Euclid's Elements of Geometry, with a Supplement of **divers Propositions and** Corollaries. Lond. in—fol.

1663. Euclides XV Boecken, vergroot met het 16 boeck van **Chr. Clavio. Amst. in—12.**

1669* Elementa geometriae planae. Authore Aegidio Francisco de **Gottignies. Bruxellensi** Soc. Jesu. Romae, in—12.

1671. I primi sei Libri d'Euclide tratti in volgare (da **Piero Paolo Caravagi). Milano,** in—12.

1671. **Euclidis adauctus et method. auct. G. Guarino. Taurini.**

1672. Les elements d'Euclide ect. Milliet de Chales. Paris, in—12.
1672. Georg Mohr, Euclides Danicus bestaende in twee deelen ect. Amst. in—4.
1673* Euclidis elementorum sex priores libri ect. Lugd. Batav. et Amst.
1674. Quinto Libro degli Elementi d'Eucl. ect. per Vinc. Viviani. Firenze, in—4.
1674. Elementi Piani e Solidi d'Eucl. publ. Vinc. Viviani Firenze, in—4.
1675. Eucl. Elemen. Barrow. Cambr.
1675. Elementorum libri octo ad faciliorem captum accommodati a Claudio Fr. Mil. Dechales. Lugd. in—24.
1676. Les quinze livres des elements d'Euclide, traduits par Henrion. Rouen, in—8.
1676. Eucl. Element. LL. XV, ect. Osnabr. in—8.
1677. Les elements d'Euclide ect., tr. par Milliet de Chales. Paris, in—12.
1678. Euclidis elementa, ect., auct. Christ. Clavio. Londini.
1678. Euclidis elementa geometrica novo ordine ac methodo fere, demostr. una cum. N. Mercatoris ect. Lond.
1679. Eucl. Elem. LL. XV, ect. Lond. in—12.
1680. Euclide restituito avero gli antichi Elementi geometrici ristaurati e facilitate da Vitale Giordano da Bitonto. Roma, in—fol.
1683. Les elements d'Euclide ect., tr. par Milliet de Chales. Lausanne, in—12.
1683. Les elements d'Euclide ect. tr. par Milliet de Chales. Paris, in—12.
1685. Eucl. Elem. Angl. translated from the French of C. F. M. de Chales. Lond. in—8.
1689. Elementos geometr. de Euclides, los seis primeros libros de los Planos; los onzeno y dozeno de los Solidos. Bruchsellas, in—4.
1690. Elementi Piani e Solidi d'Eucl. Firenze, in—4.
1690 Tract. de progressu math. et de illustribus mathematicis. Eucl. LL. XIV. Lugd. in - fol.
1690. Les elements d'Euclide ect; tr. par Milliet de Chales. Paris, in—12.
1692. Euclidis Elementorum libri sex priores, op. et stud. Coetsii. Lugd. in—8.
1694. Teutsch Redender Euclides ect. Pirkenstein. Wiena, in—4.
1695. Eucl. Data ect. Gr. et Lat. Parisiis, in—4.
1697. In teutscher sprache vorgestellter Euklides ect. Kiel, in—4.
1699. Teutsch Redender Euclides ect. Pirkenstein. Lübeck. in—4.
1700. Eucl. Elem. LL. VI, et XI et XII, ex vers. lat. Fed. Commandini. Oxon. in—8.
1700. Les elements d'Euclide; tr. par Milliet de Chales. Amst. in—8.
1701. Andr. Tacq. S. J. Elementa ect. Amst. in—8.
1702. De ses eerstes boecken Eucl. van de beginselen ende fondamenten der geometrie. Dor Jan Pieterszoon Dou. Vannieus. Amst. in—8.
1703* ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ. Euclidis quae supersunt omnia. Ex Recensione Davidis Gregorii. Oxoniae, in—fol. Съ латинскимъ и греческимъ текстомъ.
1703. Andr. Tacquet S. J. Elementa ect. Cantabr. in—8.
1704. De zes eerste, elfde en twaalfde boeken Euclides ect. Pieter Warius. Amst. in—8.
1705* Euclidis elementorum sex libri priores. Henrici Coetsii. Amstelodami, in—12.
1707. Eucl. Elemen. Hunt. Oxf.
1708. Eucl. Elements cont. the ect. By J. Keill. Lond. in—8.
1709. Les elements d'Euclide ect; tr. par Dechasles et Ozanam. Paris, in—12.

1709. Les elements d'Euclide, tr. par Milliet. Paris, in—12.
1711. Euclidis element. sex priores libro, opera Chris. Melder. Lugd. in—12.
1714. The Elements of Euclid with select theorems out of Archimedes by the learned And. Tacquet. Lond. in—8.
1714. Eucl. Elem. ect. Schessler. Dresden.
1715. De zes eerste boeken der beginselen van Euklides. Henr. Coets. Leyden, in—8.
1715. Elementorum lib. VI priores, item XI et XII, ex vers. lat. Fed. Commandini. Oxonii, in—8.
1718. Quinto libro degli elementi d'Euclide ovvero scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina. Del Gallileo ect. Firenze.
1720. Les elements d'Euclide ect. tr. par Deschalles et Ozanam. Paris, in—12.
1720. Les éléments d'Euclide, tr. par Milliet. Paris in—12.
1720. Les éléments d'Euclide, tr. par Milliet. Paris, in—4.
1721. Euclides 15 Bücher Teutsch durch Christ. Schesslern. Leipz. in—8.
1722. Euclid's Elements ect. By Barrow. London, in—8.
1723. Geometria especulativa y practica de los planos y solidos por Jos. Deu y Abella. Zaragoza, in—4.
1723* Euclidis XV Büch. teutsch ect. Leipzig, in—8.
1723. Euclid's Elements cont. the first six, XI and XII books from. Latin Transl. of Commandine by J. Keill. Lond. in—8.
1723. Eucl. element. libro priores VI, item XI et XII; ex. vers. lat. Fed. Commandini. Oxoniae, in—8.
1723. Euklidis XV Bücher teutsch. ect. Dresden, in—8.
1724. Eucl. Elem. Geom. LL. VI Gr. et Lat. Joach. Camerario. Helmst. in—4.
1724. Eucl. Elem. gr. et lat. Camerer et Hauber. Berol. 1724—1726, 2 vol. in—8.
1725. Andr. Tacq. S. J. Elementa ect. Amst. in—8.
726. Euclidis the six first elements, together with the 11 a 12 books. Demonst. after a new method by H. Hill. Lond. in—4.
1728. Elementos geom. amplificados de nuevas demonstraciones por Seb. Fern. de Medrano. Amberes, in—8.
1729. Eucl. XV Bücher teutsch ect. Dresden, in—8.
1730. Elementi geom. piani e solidi di E. posti brevemente in volgare dal D. G. Grandi. Firenze, in—8.
1731. Elementi Geometrici piano e solidi di Euclide ect. per G. Grandi. Firenze, in—8.
1732. De zes eerste boeken ect. H. Coets. Leyden, in—8.
1732. Euclide's Elements the whole fifteen books compendiousby, demonstrated ect. By Barrow. London, in—8.
1733. Euclid's Elements of geometry from the latin translation of Commandine, ect. vol. I—II. London, in—8.
1733. Element. Libri VI priores, XI et XII. Ang. by Keil. London.
1734. Quinto Libro degli Elementi d' Eucl. ect. Firenze, 2 vol. in—12. Это изданіе заключаетъ первыя шесть книгъ Началъ и 11 и 12.
1734. De zes eerste boeken. H. Coets. Leyden, in—8.
1737* Elementa Euclidea geometriae planae ac solidae. Gulielmus Whiston. Venetiis, in—4.
1737* Elementa geometriae planae seu elementorum Euclidis priores sex libri opera, ac studio Nicolai de Martino. Neapoli, in—12.

1738. Les élements d'Euclide, expliqués d'une maniere très facile, par de-Chales, nouv. ed., revue par Ozanam. Paris, in—12.

1738. Euclidis Elementorum Libri VI Priores Planorum, ac XI et XII Solidorum, cum Explicationibus et Demonstrationibus. Chris. Clavii. Amst. in—8.

1739. Евклидовы элементы геометрiи, перев. съ латин. Ив. Астарова. СПБ., in—4.

1740. Elementi geometrici piani e solidi, posti brevemente in volgare dal Padre D. Guido Grandi. Firenze, in—8.

1741. Les elements d'Euclide ect.; tr. par Dechalles et Ozanam. Paris, in—12.

1742. Elementi geom. piani e solidi di E. ect. Ven. in—8.

1743* Element. Eucl. LL. XV, ad. graeci contextus ect. Lips. in—8.

1743. Elem. Libr. VI priores, XI et XII. Lat. Ups.

1744. Teutsch Redender Euclides ect. Pirkenstein. Wien. in—4.

1744. Elem. Libri VI priores, XI et XII. Lat. Upsal.

1744. Element. LL. XV, ad graeci contextus. Bärmann. Lpz.

1745. Euclidis Elements of geometry, with additions by J. Keil. Lond. in—8.

1745. Elementa Euclidea geometria planae ac solidae et ect. Tacquet. Romae. T. I—II, in—8.

1746. Les élements d'Eucl. par Ozanam. Paris, in—12.

1747. Elementorum. lib. VI, priores, item XI et XII, ex vers. lat. Fed. Commandini. Oxonii, in—8.

1749. Euclid's Elements of Geometry in XV Books with the Data. From the Latin Translation of Commandine and. Dr. Gregory. Lond. 2 vol. in—8.

1749. Element. Eucl. LL. XV ad. graeci contextus ect. Lips. in—8.

1749. Gli Elementi d'Euclide spiegati d'una maniera nuova, facile ect. dol V. Dechales. Tradotti dal Francese. Bergamo, in—8.

1749. Les elements d'Euclide ect.; trad. par Dechalles et Ozanam; tr. en italien par Jac. Calisto. Bergamo, in—12.

1751. Elementi della geom. piana ect. J. Pi. Martino. Napoli, in—8.

1752. Euclid's Elements of Geometry in XV Books. Lond. in—8.

1753. Gli Elementi di Euclide a migliore e più chiara maniera ridotti, arricchiti per la maggior parte di nuove dimostr. con tav. in Rame. dal P. Fr. G. Accetta. Torino, in—8.

1753. De sex första jämte Ellofte och tolete böckerna af Euclidis elementa eller grundeliga inledning til geometrien til riksens ungdoms tienst pa. Swenska Spraket utg. af M. Stromer. Upsala, in—8.

1753. Les Elements d'Euclide du R. P. Dechalles et de M. Ozanam. Démontrés par M. Audierne. Paris, Jombert.

1756* Euclidis elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Federici Commandini; A. Roberto Simson. Glasguae, in—4.

1756. The Elements of Euclid. The first six books, together with the eleventh and twelfth. By R. Simson. Glasgow. in—4.

1758. Elements de Géométrie, contenant les VI premiers livres d'Euclide, ect. Par Koenig, revus par Kuypers. La Haye. in—4.

1762* The Elements of Euclid. Notes critical and Geometrical. By R. Simson. Glasgow, in—8.

1762* Elemens de geometrie, contenant les six premiers livres d'Euclide. Par le profes. Koenig. Augmentés de l'Onzieme et Douzieme livre par J. J. Blassiere. A La-Haye, in—4.

1763. Euclid's Elements of Geometry in XV Books. Dr. Gregori. Lond. in—8.
1765. Euclid's Elements of Geometry in XV Books. Lond. in—8.
1767. Éléments de Géométrie ou les six premiers livres d'Euclide, avec le onzième et douzième p. J. de Castillon. Berlin, in - 8.
1767. Euclid's Elements. By R. Simson. Edinb. in—8.
1769. Elemente Geometr. planae libri XV. Baermann. Lip. in—8.
1769. Евклидовы элементы геометрiи, перев. съ франц. Ник. Кургановъ, СПБ., in—8.
1769. Element. Eucl. LL. XV, ad graeci contextus ect. Lips. in—8.
1771. Euklids Elemente. Aus dem Griechischen übersetzt von Lorenz. Halle.
1773. Eukl. Elemente. Segner. Halle.
1773. Die 6 ersten Bücher, v. griech. über. v. Lorenz. Halle.
1774. Los seis primeros libros y el undecimo y duodecimo de los elementos, trad. sobre la version. ital. de Fed. Commandino. Madrid, in—4.
1774. Elem. Libr. VI priorer, XI et XII. Lat. Ups.
1775. Éléments de Géométrie ou les six premiers livres d'Euclide, avec le onzième et douzième p. J. Castillon. Berlin, in—8.
1775. Elements of Euclid. R. Simson. Edinbourg, in—8.
1776. The Elements of Euclid; in which the propositions ect. By Douglas. Edinb. in—8.
1777. Les elements d'Eucl. par Himburg, in—8.
1778. Les elements d'Euclide du R. P. Dechalles et de M. Ozanam. Paris, in—8.
1780. Eucl. Data verb. u., verm. v. R. Simson, ubersetz von Ch. Schwal. Stutg. in—8.
1781. Euklids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Halle.
1781* The elements of Euclid. By R. Simson. Glasgow. Notes critical and geometrical. in—8.
1781. The Elements of Euclids with Diss. by J. Williamson. Oxford. 1781—91. 2 -vol. in—4.
1781. Euklid Elemente. Segner. Halle.
1781. Euclides Elemente 11 u. 12 Bücher, v. Lorenz. Halle, in—8.
1782. Elementi geom. piani e solidi di E. ect. Firenze, in—8.
1782. Expositio et dilucidatio libri V element. Euclidis. Seyffer et Mouchart.
1784. De sex första jamte Ellofte och tolete boikerna af Euclidis elementa eller grundeliga inbedning til geometrien til riksens uneddoms tienst pa Swenska Spraket utg. af. M. Stromer. Ups. in—8.
1785. Elementi di geometria ect. P. Dechales. Bergamo, in—8.
1788. The philosophical and mathematical Commentaries of Proclus, furnamed Plato's Successor, on the I Book of Euclids Elements and his life by Marinus ect. London.
1789. Die 6 erste B. d. Geometrie. Ebend. in—8.
1789. Elements of Geometry. Cont. the principal Propos. in the first six and the XI and XII Books of Euclid. Lond. in—8.
1789. Евклидовы Стихiи, перев. съ греч. Пр. Суворова и Вас. Никитина. СПБ. in—8.
1791. Eucl. Elemente. Michelsen. Berlin, in—8.
1792. Elementos de Euclides, com as annotacoes de R. Simson, trad. em Portuguez. Coimbra, in—8.
1793. Elem. Libri VI priores, XI et XII. By R. Simson. Edinb.
1796. Elements of Geometry; cont. the first VI Books of E. with two Books of the Geometry of Solids. By P. Playfair. Lond. in—8.
1797. Elements of Geometry ect. By Playfair London, in—8.

1797. Eucl. Elem. Hauff, Marburg.

1797. Scholia in librum II, Elementorum Euclidis, praef. F. Pfleiderer proposita a Candidatis Magisterii Philos. Tübingen.

1798* Euclids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Halle. Zweite Ausgabe, in—8.

1798. Euclids Elemente 8 Bücher, nebst dem eilften und zwölften; aus dem Griechischen übersetzt von Lorenz. Halle, in—8.

1799. The Elements of Euclid, viz. the first six Books of the Geom. with the XI and XII. Edinb. in—8.

1799* Elemente des Euclides. And. Matthias. Magdeburg, in—4.

1800. Scholia in lib. VI element. Euclidis, 4 partes, 1800—1806.

1800. Elemente ect. griech. und deutsch. Hoffmann. Weimar, in—8.

1801. Kitab Euclides.... (Комментарій, на араб. яз., Магомета, сына Магомета, на переводъ Nassireddin'a Началъ Евклида). Scutari 1216 in—4.

1802. Euclidis elementor. lib. priores XII ex. Commandini et Gregorii verss. latinis. Edid., aux. et emend. Samuel Horsley. Oxonii, in—8.

1803. Euclides Elementes I—VI Bog, overs. for de laerde Skoler ved H. C. Linderup. Kjobh. in—8.

1803. Euklids Elemente. Reder. Köln.

1803. Euclidis datorum liber, cum additamento aliisque ad geometriam pertinentibus; edidit S. Horsley. Oxonii. in—8.

1804* Les éléments de géométrie d'Euclide. Traduits littéralement par F. Peyrard. Paris, in—8.

1804. Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid, ect. By J. Playfair. Edinb. in—8.

1805. Euklidis Elemente, das erste bis vierte Buch von Fr. Hauf. Wien, in—8.

1806. Eukl. Elemente ect. Reder. Paderborn. 2 vol. in—8.

1807* Euclides'a Początków Geometryi Xiąg ośmioro to iest Sześć pieruszych ect, przez Jos. Czecha w Wilnie, in—8.

1807. Euclid's elemente, 1—6 и 11—12 Bucher. Uebers. v. Hauff. Marb.

1809. Euklids Elemente, übers. von Lorenz. 3 aufl. Halle.

1809. Eucl. Elemente. Weimar.

1814. Eucl. Element. J. Playfair. Edinb. in—8.

1814. Eucl. Element. Rob. Simson. Edinb. in—8.

1814. Oeuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'a nos jours, par F. Peyrard. Paris. T. I—II—III. 1814—1818, in—4.

1815. Eukl. Elemente ect. Reder. Paderborn. 2 vol. in—8.

1815. Eucl. Elementer ny Öfversättning, utg. af C. L. Lithhand. Stockh. in—8.

1816. Eucl. Elements. Rob. Simson. Edinb. in—8.

1817* Euclidesa Początków Geometryi Xiąg ośmioro to iest Sześć pierwszych ect., przez Jos. Czecha. w Wilnie. in—8.

1818. Eucl. Elemente 8 Bücher, a. d. gr. v. Lorenz. Halle, in—8.

1818. Euklid's Elemente 15 Bücher, übers. von. Lorenz. 4 auf. Halle, in—8.

1819* Эвклидовыхъ Началъ восемь книгъ, а именно: первыя шесть, одинадцатая и двѣнадцатая, содержащія въ себѣ основанія геометріи. Переводъ съ греческаго Θ. Петрушевскаго. СПБ.

1819. Elemente XV Bücher, aus dem griech. über. v. Lorenz. Halle, in—8.
1819. Eucl. Elemente. Mainz.
1820. Euclidis. The elements of plane geometry by T. Keith. 2 ed. London.
1820* ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ. ΕΚΤΕΘΕΝΤΑ ΠΑΡΑ ΒΕΝΙΑΜΙΝ ΛΕΣΒΙΟΥ. ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΟΥΣΤΡΙΑΣ.
1820. Chrestomathia geometrica, continens Euclidis ect. Hauber. Tübingen.
1824. Eucl. Elem. Geom. gr. et lat. Camerer et Hauber. Berol. 2 vol. 1824—1826, in—8.
1824. Euclids Elemente übers. v. J. F. Lorenz, in—8.
1824. Начала Евклида на араб. яз. Calcutta, in—8.
1825. Euklids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Halle.
1825. Eucl. Elem. LL. VI priores cum undecimo et duodecimo. Textum e Peyrardi rec. ect. Halis Sax. in—8.
1825. Eucl. Data n. d. Griech., herausg. v. J. F. Wurm. Berlin, in—8.
1826. Eucl. Elementa ex optimis libris in usum tiranum, gr. ed. ab. E. F. August. Berol. 2 vol. 1826—29, in—8.
1826. Euclid. Elemente lib. VI. Camerer et Hauber. Berol. 2 vol. in—8.
1827. Euclid Elem. by Walker. Lond. in—8.
1828. Die Geometrischen Bücher der Elemente ect. Hoffmann Mainz. in—8.
1829. Die Geometrischen Bücher der Elemente ect. Hoffmann. Mainz. in—8.
1831. Elements of geometry cont. the first six books of Euclid, ect. Eighst edit with addit by W. Wallace. Edinburgh. in—8.
1832. Die Planim. und Stereom. ect. Hoffman. Mainz. in—8.
1833. The first six Books of the Elements of Euclid, with Notes. Dublin. in—8.
1833. Geometry without Axiomy, or the first book of elements. 4 ed. London.
1833. Die Geometrie des Euklid. ect. Erfurt. in—8.
1835* Евклидовыхъ Началъ три книги, а именно: седьмая, осьмая и девятая, содержащія общую теорію чиселъ древнихъ геометровъ. Переводъ съ греческаго. Θ. Петрушевскаго. СПБ.
1837. Euclid's Elements. London.
1838. Euclid's Elements. Edwards. Lond.
1838. Euklid's Elemente erläutert. v. Unger.
1839. Euklid's Elemente, vom griech. über. v. Lorenz. Halle in—8.
1839. Euclid's Elements. Lond. Day.
1839. Euclid's Elements. Lond. Cooley.
1839. Euclid's Elements. Lond. Cooley.
1840. Euclid's Elements by Creswell. Lond. in—8
1840. Euclid's Elements. Lond. Walker.
1841. Euclides Elementa i Geometrien eller Grundelig Inledning till Geometrien. Uppl. VII. Oerebro. in—8.
1841. Euclid's Elements. Lond. Creswell.
1845. Euclid's Elements of Geometry, chiefly from text of Dr. Simson, with explanatory notes ect. by Robert Potts. London. in—8.
1845. Euclid's Elements. Lond. Thomson.
1845. Euclid's Elements. Lond. Kent.
1846. Euclid's Elements. Lond. Trotter.

1846. Euclid's Elements. Ingram. London.
1847. Euclid's Elements. Lond. Vey.
1847. The first six Books of the Elements of Euclid, with Notes by Bp. Elrington, 10 ed. Lond. in—12.
1847. Euclid's Elements. Lond. Colenso.
1847. Euclid's Elements. Lond. Trollope.
1847. Euclid's Elements. Lond. Mason.
1847. Euclid's. Elements. Lond. Rutherford.
1848. Euclid's Elements. Lond. Lardner.
1848. Euclid in Syllogisms with diagrams and symbols in colours. By O. Byrne. Lond. in—4.
1849. Euclid's Elements. Lond. Tate.
1850. Euclid's Elements. Lond. Potts.
1850. Euclid's Elements. Lond. Potts.
1850. Euclid's Elements. Lond. Whittaker.
1851. Euclid's Elements of Geometrie, by R. Potts. School edition. London.
1851. Euclid's Elements. Lond. Davidson.
1852. The first six and 11 and 12 books of Euclid's elements. Thomson. Belfast.
1852. Euclid's Elements. Lond. Pocoek.
1852. Euclid's Elements. Lond. Wallace.
1853. Euclid's Elements. Lond. Hose.
1853. Euclid's Elements. Lond. Good.
1853. Euclid's Elements. London. Elrington.
1854. Euclid's Elements. London. Mason.
1855. Euclid's Elements. Lond. Woodmass.
1855. Euclid's Elements. Lond. Law.
1855. The first six Books of Euclid's Elements with Commentary. By Lardner. 11 ed. Lond. in—8.
1855. VI—X. böckerna öfvers och bearbetn. af Rundbäck. Lund.
1856. Euclid's Elements. London. Wedgwood.
1856. Euclid's Elements. London. Galbraith.
1857. Переводъ Нач. Евкл. на китайск. яз. Translation of Euclid's Elements, Book VII to Book XV, into chinese by Wylie. Shanghae 3—vol. in—8.
1858. Euclid's Elements. Lond. Green.
1858. Euclid's Elements. Lond. Williams.
1859. Euclid's Elements. London. Maynard.
1859. Euclid's Elements. London. Ingram.
1860* Euklids acht geometrische Bücher aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. in—4. Aufs neue herausgegeben mit einem Anhange von Dr. E. W. Hartwig. Halle.
1860 Euclid's elements, the first 6 books and the 11—12 book, from the text of Simson edited by R. Blackelock. Lond.
1860. Euclid's Elements. London. Chambers.
1860. Euclid's Elements. London. Chambers.
1860. Euclid's Elements. London. Simson.
1861. Euclid's Elements. London. Green.
1861. Euclid's Elements. London. Playfair.

1862* The elements of Euclid. By Todhunter.
1862. Euclid's Elements. London. Brasse.
1862. Euclid's Elements. London. Isbister.
1863. Euclid's Elements. Lond. Isbister.
1864* The elements of Euclid for the use of schools and colleges. By J. Todhunter. New edition. London.
1864. Euclid's Elements. Simson. London.
1865. Euclid's Elements. London.
1866. Euclid's Elements. London.
1867. Elements of geometry, from the Latin Translation of Commandine by S. Cunn. 10 ed. London, in—8.
1868* Gli elementi d'Euclide con note. Per cura dei professori E. Betti e F. Brioschi. Libro I—II—III—IV—V—VI, XI—XII. Firenze.
1868* Elements of geometry by R. Potts. London, in—8.
1869. Euclid's Elements. London.
1870. Euclid's Elements. London. Green.
1870. Euclid's Elements. London. Joung.
1870. Euclid's Elements. London. Smith.
1871* Il primo libro, o Introduzione alla geometria, per L. Grandi. Bergamo, in—16.
1871. Euclid's Elements. London. Joung.
1872. Euclid's Elements. London. Mason.
1872. Euclid's Elements. London. Isbister.
1873. Euclid's Elements. London. Green.
1874. Euclid's Elements. London. Law.
1874. Euclid's Elements. Lond. Martin.
1874. Euclid's Elements. Lond. Hawtrey.
1874. Euclid's Elements. London. Dodgson.
1874. Elements of Geometry. Books I—VI, XI—XII of Euclid. By J. Smith. London.
1874. Elements of Euclid. By J. Bryce. London.
1874. Elements of Euclid. By Collenso. London.
1874. Euclidean Geometry. By Cuthbertson. London.
1875. Elements of Geometry. Books I—VI, XI—XII of Euclid. By H. Smith. London.
1875. Euclid modernised. Elements of plane Geometry. By R. Wright. London.
1875. Elements of Euclid. By Bryce. London.
1875. First Book of Euclid. By Browne. Belfast.
1875. The Elements of Euclid. London.
1875. The first six Books of Euclid. By Davis. London.
1875. Elements of Euclid. By J. Bryce. London.
1875. Elements of Euclid. Books I—VI, XI—XII. By Dr. Simson. London.
1876. Elements of Geometry based on Euclid. By Atkins. Lond.
1876. Euclid simplified. By Morell. London.
1876. Elements of Geometry based on Euclid. Book. I—III. Collin's School Series. London.
1876. Elements of Geometry. By Smith. Book. I—VI, XI—XII—of Euclid. London.
1876. Euclid Elements. Books I—VI, XI—XII. Edited by Seeley. London.
1876. The Elements of Euclid the first six books and the eleventh and twelfth from the text of Simson. Edited by Blakelock.

1877. Euclid for Colleges and Schools. New edition. By Todhunter. London.
1877. Primer of Geometry. An easy Introdution to the Propositions of Euclid. By Cuthbertson. London.
1877. Syllabus of plane Geometry. Corresponding to Euclid Books I—VI. Prepared by the Association for the Improvement of Geometrical Teaching. London.
1877. Euclid modernised. Elements of plane Geometry. By Wright. London.
1877. Euclid. Books I—V. By Hundson. London.
1878. The School Euclid. Books I—IV. By Isbister. London.
1878. Euclid's Elements. Books I—III. By Tatk. Lond.
1878. Syllabus of plane geometry. Corresponding to Euclid. Books I—VI. London.
1879. Colenso's Elements of Euclid. London. New edition.
1879. The Elements of Euclid (the parts usually studied in the Universities). From the Text of Dr. Simson. New edition. London.
1879. Il V libro di Euclide. Torino. Bertini.

Книги обозначенныя * находились въ распоряженіи автора настоящаго сочиненія.

УКАЗАТЕЛЬ СОЧИНЕНІЙ ПО „НЕЕВЛИДОВСКОЙ ГЕОМЕТРІИ“ ВЫШЕДШИХЪ ПО 1880 ГОДЪ.

Agolini, G. Il quinto postulato Euclidiano. Firenze. 1868.

Baltzer, R. Ueber die Hypothesen der Parallelentheorie.
Berichte der K. S. G. zu Leipzig. T. XX, 1868.

***Baltzer, R.** Die elemente der Mathematik. T. I—II. 4 ed., 5 ed. 1874—75.

***Baltzer, R.** Ueber die Hypothesen der Parallelentheorie.
Cr. Journal Bd. 83. 1876.

***Battaglini, G.** Sulla Geometria Immaginaria di Lobatchewsky.
Giornale di Mat., vol. V, 1867.
Nouv. Ann. Math. T. VII. 1868.
Napoli, Rendiconto. T. VI. 1867.

***Battaglini, G.** Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed independente dalla verita dalla falsita dell' assioma XI di Euclide: per. Giovanni Bolyai.
Giornale di Mat., vol. VI, 1868.

***Battaglini, G.** Sur la géométrie imaginaire de Lobatchevsky.
Nouv. Ann. Math. T. XXVII, 1869.

***Battaglini, G.** Nota sui circoli nella geometria non-Euclidea.
Giornale di Matematiche. Vol. XII. 1874.

***Battaglini, G.** Nota sul raporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche.
Giornal. di Matem. Vol. XII. 1874.

***Battaglini, G.** Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche.
Giornal. di Matem. Vol. XII, 1874.

***Battaglini, G.** Sull' Affinita circolare non-Euclidea.
Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze fisiche e Matematiche. № 11. 1876.

Becker, J. Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. Zürich. 1870.

***Becker, J.** Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume.
Schlömilch Zeitschrift, T. XVII, 1872.

***Becker, J.** Die Grundlagen der Geometrie.
Zeit. f. Mat. und Physik. T. XX. 1875.

Becker, J. Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. Berlin. 1877.

*Beez, R. Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.
Zeitsch. für Math. T. XX. 1874.

*Beez, R. Ueber Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.
Math. Ann. T. VII. 1875.

*Beez, R. Zur Theorie des Krummungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.
Zeits. für Math. T. XXI. 1876.

*Beez, R. Ueber das Riemann'sche Krümmungsmass höherer Mannigfaltigkeiten.
Zeits. für Mathem. und Physik. T. XXIV. Leip. 1879.

*Beltrami, E. Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.
Annali di Mat., T. VII. 1866.

*Beltrami, E. Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea. Napoli.
Giornale di Matematiche. Vol. VI. 1868.

*Beltrami, E. Teoria fondamentale degli Spazii di Curvatura costante.
Annali di Mat., ser. II., T. II. Milano. 1868.

*Beltrami, E. Theorie fondamentale des éspaces de courbature constante. Trad. de l'italien par J. Höuel.
Annales scient. de l'École Normale Super. T. VI. 1869, in—4.

*Beltrami, E. Essai d'interprétation de la géométrie non-Euclidienne. Trad. de l'italien par J. Höuel.
Annales scient. de l'École Normale Superieure. T. VI. 1869, in—4.

*Beltrami, E. Teorema di geometria pseudosferica.
Giornale di Mat. Vol. X. 1872.

*Beltrami, E. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche.
Giornale di Math. Vol. X. 1872.

*Betti, E. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.
Annali di Mat., 2 série. T. IV. 1871.

Bolyai, Wolfgang. Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducenti. Cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque publico ordinario. Tomus Primus, 1832, Secundus 1833. Maros-Vásárhelyini, in—8.

Bolyai, Johanne. Appendix, scientiam spatii *absolute veram* exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de Bolya, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo. Maros-Vásárhelyini. 1832.

Bolyai, Wolfgang. Kurzer Grundriss eines Versuches: I. die Arithmetik, durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen. II. In der Geometrie, die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. dgl. nicht nur scharf zu bestimmen, sondern auch ihr Sein im Raume zu beweisen: und da di Frage, *ob zwei von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summa der inneren Winkel nicht*$=2R$, *sich schneiden oder nicht?* niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie Euclid das XI) aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die Ja Antwort, andere auf das Nein so zu bauen, das die Formeln der letzten auf ein Wink auch in der ersten gültig seien. Nach einem lateinischen Werke von 1829, M. Vasorhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen. Maros-Vásárhely. 1851, in—8.

***Bolyai, Jean.** La Science Absolue de l'Espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir *a priori*); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'axiôme XI; précédé d'une Notice sur la Vie et les Travaux de W. et J. Bolyai, par M. Fr. Schmidt. Paris. 1868, in—8.

Bounel, F. Sur les définitions géométriques. Paris. 1871.

***Bouniakoffsky, V.** Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non-euclidienne.
Mém. de l'Acad. de Péterb., serie VII., T. XVIII. 1872.

***Cantor, G.** Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.
Borchardt's Jour. Bd. 84, Dec. 1877.

Cassani, P. Sul concetto degli spazi ad N dimensioni.
Atti dell' Ateneo Veneto. Vol. VI. 1869.

Cassani, P. Sulla geometria baricentrica. Atti dell' Ateneo Veneto. Vol. VII. 1870.

Cassani, P. Geometria rigorosa. Venezia. 1872.

***Cassani, P.** Intorno alle ipotesi fondamentali della geometria.
Giornale di Matematiche Vol. XI. 1873.

***Cassani.** Nuove proposte intorno ai fondamenti della geometria.
Giorn. di Matem. Vol. XV. 1877.

Catalan, E. Sur l'étendue à *n* dimensions.
Nouv. corresp. Math. T. III. 1877.

***Cayley, A.** Chapters in the Analytical Geometry of (n) Dimensions.
Cambr. Math. Journ. T. IV. 1845.

***Cayley, A.** Sixth Memoir upon Quantics.
Phil. Trans., vol. CXLIX. 1859.

Cayley, A. Note on Lobatchewsky's Imaginary Geometry.
Phil. Mag. XXIX. 1865.

Cayley, A. On Abstract Geometry.
Proceeding of the Royal Society of London. T. III. 1869.

Cayley, A. On the rational transformation between two spaces.
Math. Soc. Proc. T. III. 1869—71. Lond.

***Cayley, A.** A Memoir on Abstract Geometry.
Phil. Trans., vol. CLX. 1870.

***Cayley, A.** On the Non-Euclidean Geometry.
Mathemat. Annalen. Bd. V, 1872.

***Cayley, A.** On the Superlines of a Quadric Surface in Five Dimensional Space.
Quarterly Journ., vol. XII, 1872.

Clifford, W. On the free motion under no forces of a rigid system in an *n*-fold homaloid.
Proc. Lond. Math. Soc. T. VII.

Clifford, W. Lecture on „the Postulates of the Science of Space".
Macmillan's Magazine, Octob. 1872.

Clifford, W. On Probability. Educational Times.

Clifford, W. Preliminary sketch of Biquaternions.
Proceedings of L. Math. Soc., Vol. IV. 1873.

***Clifford, W.** Applications of Grassmann's Extensive Algebra.
Amer. Journ. of Mathem. Vol. I. 1878.

Christoffel, E. Allgem. Theorie d. geodät. Dreiecke. Berlin. 1868.
Math. Abhandl. d. königl. Akad. zu Berlin.

***Christoffel, E.** Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke 2-ten Grades.
Borchardt's Journal. T. LXX. 1870.

***Christoffel, E.** Ueber ein betreffendes Theorem.
Borchardt's Journal T. LXX. 1870.

Cipolla. Intorno al quinto Postulato di Euclide e alle basi della geometria. Verona. 1872.

***Darboux, G.** Sur une nouvelle serie de systemes ortogonaux algebriques.
Comptes Rendus de l'Acad. T. 69. 1869.

***Darboux, G.** Sur les equations aux dérivées partielles du second ordre.
Comptes Rendus T. LXX. 1870.
Annal. de l'École Normale Sup. T. VII. 1870.

Delboeuf, J. Les prolégoménes philosophiques de la Géométrie et solutions des postulats.
Liége. 1860.

Engel, G. Der Idee des Raumes und der Räume. Berlin. 1868.

***Erdmann, Benno.** Die Axiome der Geometrie. Untersuchung der Riemann—Helmholtz Raum theorie. Leipzig 1877.

Erdmann, Benno. Review by J. H. Witte. Philos. Monatshefte. T. XIII. Leipzig. 1877.

Erdmann, Benno. Mind, vol. II, 1877; vol. III, 1878.

Erdmann, Benno. Recension von A. Harnack. Vierterjah. für wiss. Philosophie. T. II. 1 Heft.
Leipzig. 1878.

***Escherich.** Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krummung.
Sitzungberichte der Math.-naturw. Kais. Akad. Bd. LXIX. Wien. 1875.

Fleury, H. La Géométrie affranchie du postulatum d'Euclide. Paris. 1869.

Flye-St.-Marie. Sur le postulatum d'Euclide.
Bulletin de la Sociéte Philomatique. T. VII. 1870.

***Flye-St.-Marie.** Études analytiques sur la théorie des paralleles. Paris. 1871, in—8.

Frahm, W. Habilitationsschrift. Tübingen. 1873.

***Frahm, W.** Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung.
Zeits. Math. Phys. T. XVIII. 1873.

Frank, A. Der Körperinhalt des senkrechten Cylinders und Kegels in der absoluten Geometrie.
Grunert Archiv. Vol. 60. 1876.

Frankland, W. On the simplest continuous manifoldness of two dimensions and of finite extent.
Nature, vol XV, № 389, April 12, 1877.

Frankland, W. First published in Proc. Lond. Math. Soc. vol. VIII.

***Frattini.** Un caso particolare del teorema dei nove punti di Feuerbach sua generalizzazione nella geometria non-Euclidea.
Giornale di Matematiche. Vol. XVI. 1878.

Freye, G. Ueber ein geometrische Darstellung der imaginairen Gebilde in der Ebene.
Jena. 1873.

***Frischauf, J.** Absolute Geometrie, nach J. Bolyai. Leipzig. 1872, in—8.

*Frischauf, J. Elemente der Absoluten Geometrie. Leipzig. 1876.

Frischauf, J. Erwiederung auf Hernn F. Pietzker Anzeige meiner „Elemente der absoluten Geometrie" in der Jenaer Literaturzeitung, mit Rücksicht auf die Bemerkungen in dieser Zeitchrift.
Hofmann's. Zeits. T. VII. 1879.

Fromm. Ueber d. Krümmungsverhältn. e. Kurve im n-fach ausgedehnten homog. Raume. Cöln. 1879.

Funcke. Grundlagen der Raumwissenschaft. Hannover. 1875.

*Gauss, C. F. Werke. Bd. IV. pp. 215. 1827.
Disquisitiones generales circa superficies curvas.

*Gauss, C. F. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher.
Письма отъ 17 мая и 12 іюля 1831 г. Bd. II. pp. 268—271. 1865.

Grassmann, H. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig. 1844.

Grassmann, H. Geometrische Analyse. Gekrönte Preischrift. Leipzig. 1847.

*Grassmann, H. Die Ausdehnungslehre. Berlin. 1862.

*Grassmann, H. Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre.
Mathem. Ann. Bd. VII. 1874.

*Grassmann, H. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig. 2 ed. 1878.

*Grassmann, H. Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre. 1878.

Geiser. Sopra una questione geometrica di massimo e sua estensione ad uno spazio di n dimensione.
Rendiconti del Reale istituto Lombardo. Vol. I, Fasc. XVI. 1868.

Geiser. Sopra una quistione geometrica di massimo e suo estensione ad uno spazio di n dimensioni.
Milano, Inst. Lomb. Rendic. T. I. 1868.

*Genocchi, A. Dei primi principii della mecanica et della geometria in relazione al postulato d'Euclide. Firenze. 1869.
Academia dei XL in Modena, serie III, T. II, parte I.

Genocchi, A. Sunto d'una memoria di A. Genocchi intorno ai principii della geometria.
Atti della Reale Academia delle Scienze di Torino. Vol. XII. 1877.

Genocchi, A. Sur un mémoire de David de Foncenex et sur les géométries non-Euclidiennes.
Mémoires de l'Academie Royale de Turin. T. XXIX. 1877.

*Günther, S. Ziele und Resultate der neuern Math. Histor. Forschung. Erlangen. 1876.
Grünert's Archiv P. 60.

*Günther, S. Sulla possibilita di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche complemento alla geometria assoluta di Bolyai. Traduz. di Sparagna.
Giornale di Matematiche. Vol. XIV. 1876.

Günther, S. Zwei neuere Werke über die Principien der Raum und Naturlehre.
Kosmos. T. I, 12 Heft. März. 1878.

*Halphen, G. Recherches de géométrie à n dimensions.
Bull. Soc. Math. T. II. 1873.

*Halsted, G. B. Bibliography of Hyper-Space and Non—Euclidean Geometry.
American Journal of Mathematics pure and applied.—Baltimore. Vol. I, № 3, № 4, 1873. Vol. II, № 1, 1879. in-4.

*Helmholtz, H. Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Heidelberg. Verhandl. Nat. Med. T. IV. 1868, T. V. 1871.

*Helmholtz, H. Ueber die Thatsachen die der Geometrie zum Grunde liegen. Nachrichen, Göttingen. 1868.

*Helmholtz, H. Sur les faits qui servent de base à la Geometrie. Memoires de la Socie. des Sciences de Bordeaux. T. V. 1868.

*Helmholtz, H. Les axiomes de la géométrie, leur origine et leur signification. Revue scientifique de la France et de l'Etranger. № 51. Paris. 1877. in-4.

*Helmholtz, H. Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Populäre wissenschaftliche Vorträge. 3-s Heft. Brauns. 1876. in-8.

*Helmholtz, H. The Origin and meaning of Geometrical Axioms. Part. I, Mind., № III. 1876; Academy Feb. 12, 1870, vol. I; Nature, vol. IV; Nature, vol. V; Academy, vol. III; Part II, Mind, April 1878.

*Гельмголцъ. О происхожденіи и значеніи геометрическихъ аксіомъ. Знаніе № VIII. 1876. Спб. in-8.

Hoffmann, J. Das elfte Axiom der Elemente des Euclides. Halle. 1859.

Hoffmann, J. Resultate der Nicht-Euklidischen oder Pangeometrie. Zeits. für Math. Unterricht. T. IV. 1873.

*Hoüel, J. Essai d'une Exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire. Grünert's Archiv. 1863.

*Hoüel, J. Essai critique sur les Principes fondamentaux de la Geometrie. Paris. 1867, in – 8.

*Hoüel, J. Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la theorie des paralleles dit Postulatum d'Euclide. Nouvelles annales de Mathématiques. T. IX. 1870. Giornale di Mat., T. VIII. 1870.

*Hoüel, J. Du rôle de l'experience dans les sciences exactes. Prague. 1875.

*Hoüel, J. Переведено на нѣмецкій яз. Müller. Grünert's Archiv, Vol. 59. 1876.

*Hoüel, J. Théorie élémentaire des Quantités complexes. 4-e Partie. 1876.

*Гуланъ. Опытъ геометріи о четырехъ измѣреніяхъ. Геометрія синтетическая. Тифлисъ. 1877. in-8.

Ingleby, C. M. Profes. Clifford on Curved Space. Nature, vol. VII. 1873.

*Jacobi, C. G. J. De binis quibuslibet functionibus homogeneis, ect. Crelle Journ. Bd. XII, 1834.

*Jordan, C. Essai sur la Geometrie à n dimensions. Comptes Rendus T. LXXV. 1872. Bulletin de la Soc. Math., T. III., T. IV.

*Jordan, C. Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces dans l'espace a $m+k$ dimensions. Comptes Rendus., T. LXXIX, 1874.

*Jordan, C. Sur la theorie des courbes dans l'espace à n dimensions. Comptes Rendus. T. LXXIX 1874.

*Killing, W. Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung. Borchard's Journal. Bd. 86. 1878.

*Killing, W.	Ueber einige Bedenken gegen die Nicht-Euklidische Geometrie. Hoffm. Zeits. T. VII. 1879.
*Klein, F.	Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Göttingen, Nachrichen. Aug. 1871.
*Klein, F.	Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Mathemat. Annal. T. IV. № 4, 1871.
*Klein, F.	Sur la géométrie dite non-euclidienne. Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronomiques. T. II. 1871.
*Klein, F.	Ueber neuere geometrische Forschungen. Erlangen. 1872.
*Klein, F.	Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen. Mat. Ann. T. V. 1872.
*Klein, F.	Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Mat. Ann. T. V. 1872.
*Klein, F.	Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Mathem. Ann. T. VI. 1873.
*Klein, F.	Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatze über Nicht-Eukl. Geometrie". Math. Annal. T. VII. 1874.
*Klein, F.	Ueber eine neue Art der Riemannschen Flächen. Math. Annal. T. VII. 1874.
Klein, F.	Jahrbuch über die Fortschritte der Math. Jahrgang 1873. Heft. 2. Berlin. 1875.
*Klein, F.	Ueber die Sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Ann. T. VII. 1874.
Kober, J.	Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe. Zeits. für Mathem. und Naturwis. Unter. T. I. 1870.
*Kober, J.	On infinity and the new geometry. Zeits. für Math. Unterricht. 1872.
*König, J.	Ueber eine reale Abbildung der Nicht-Euklidischen Geometrie. Göttingen, Nachrichten. März. 1872.
*Krause, A.	Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome. Schauenburg. 1878.
*Kronecker, L.	Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Monatsbericht der Kgl. Akademie zu Berlin. P. I, März, 1869. P. II, August, 1869.
Hugo, M. L.	Note sur la géométrie panimaginaire de $\frac{m}{n}$ dimensions. Bulletin de la Société Mathématique de France. T. IV. pag. 92.
Lamarle, E.	Sur la géométrie sans postulat et sur la théorie des parallèles. Bulletins de l'Academie Royale des Sciences de Belgique. T. XXXI. 1871.
*Land, J. P. N.	Kant's Space and Modern Mathematics. Mind. II, № 5, Jan., 1877.
*Land, J. P. N.	Critical Notice of Erdmann's „Die Axiome der Geometrie". Mind. III, 1878.
*Lewes, G.	Imaginary Geometry and the truth of Axioms. Problems of Life and Mind, 1 ser., vol. II. London. 1875.
Lewis.	Applications of geometry of four dimensions to determine momenty of inertia of bodies without integration. Quarterly Journal of pure et applied Matematics. 1879. № 62.

*Liard, L. Des Définitions géométriques et des définitions empiriques. Paris. 1872. in-8.

*Lie, S. Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen.
Göttingen, Nachrichten. Nov. 1871.

*Lie, S. Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungs-Theorie des gewöhnlichen Raumes entspricht.
Göttingen, Nachrichten, Mai, 1871.

*Liebmann, O. Zur Analysis der Wirklichkeit. Strassburg. 1876.

*Lindemann, F. Ueber unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. Erlang., Berl. 1873.
Mathemat. Ann. T. VII. 1874.

Lionnet. Sur le postulatum d'Euclide.
Comptes Rendus. T. 70. № 1. 1870.

Lipschitz, R. Mémoires de l'Academie de Berlin. Jan. 1869.

*Lipschitz, R. Untersuchungen in Betreff die ganzen homogenen Functionen von n Differentialen.
Borchadt's Journal, Bd. LXX, Bd. LXXII. 1869 и 1870.

*Lipschitz, R. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung.
Borchardt's Journal, Bd. LXXIV. 1872.
Bulletin des Sciences Mathematiques, T. IV. 1873.

*Lipschitz, R. Extension of the Planet-problem to a space of n dimensions and of constant integral curvature.
Quarterly Jour. Math. T. XII. 1871.

*Lipschitz, R. Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen.
Borchardt's Journal, T. LXXI. 1871.
Bulletin des Sciences Math. T. IV, T. V. Paris. 1873.

*Лобачевскій, Н. И. О началахъ геометріи.
Казанскій Вѣстникъ 1829 и 1830 гг. Казань.

*Лобачевскій, Н. И. Воображаемая геометрія.
Ученыя записки Импер. Казанскаго универ. кн. I. 1835 г.

*Лобачевскій, Н. И. Новыя начала Геометріи съ полной теоріей параллельныхъ.
Ученыя записки Импер. Казанскаго универ. 1835 г.—кн. III, 1836 г.—кн. II и кн. III, 1837 г.—кн. I, 1838 г.—кн. I и кн. II.

*Лобачевскій, Н. И. Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ.
Ученыя записки Казанскаго универ. 1836.

*Lobatschewsky. Géométrie imaginaire.
Crell's Journal Bd. XVII. 1837.

*Lobatschewsky. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin. 1840.

*Лобачевскій, Н. И. Пангеометрія.
Ученыя записки Импер. Казанскаго универ. 1855 г.—кн. I.

*Lobatschewsky. Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une theorie générale et rigoureuse des parallèles. Kazan. 1855.

*Lobatschewsky. Etudes géométriques sur la théorie des parallèles; suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Traduit de l'allemand par J. Hoüel. Paris. 1866.

*Lobatschewsky. Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una theoria generale e rigorosa delle parallele.
Versione dal Francese, sull' Edizione di Kazan del 1855. Seconda edizione. Napoli. 1874.
Giornale di Matematiche, vol. V.

*Lüroth, J. Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms.
Schlömilch. Zeitschrift. T. XXI. 1876.

Massimino. Sugli elementi di geometria di Euclide e gli studi geometrici sulla teoria delle parallele di N. I. Lobatschewsky ed il saggio critico sui principii fondamentali della geometria elementare di J. Hoüel. Firenze. 1870.

*Mehler. Ueber die Benutzung einer Vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flachensysteme.
Borchardt's Journ. Bd. 84. Dec. 1877.

Michelis. Ist die Annahma eines Raumes von mehr als drei Dimensionen wissenschaftlich berechtigt? Freiburg. 1879.

*Munro, C. Nature, vol. XV, № 391 April 26, 1877. p. 547.

*Munro, C. Flexure of Spaces.
Lond. Math. Soc. Vol. IX.

*Munro, C. „Inside Out."
Nature. Vol. XVIII. № 448, May 30, 1878.

*Netto. Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.
Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 86. 1878.

*Newcomb, S. Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension.
Borchardt's Jour., Bd. 83. 1877.

*Newcomb, S. Note on a class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more than three dimensions.
American Jour. of Math., T. I. 1878.

Newçomb, S. Astronomy, p. 513.

*Nöther, M. Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln.
Göttingen Nachrichten. 1869.

*Ovidio (d'), E. Studio sulla geometria projettiva.
Annali di Matematiche. T. VI. 1874.

*Ovidio (d'), E. Sopra alcuni luoghi ed invuloppi di 1⁰ e 2⁰ Grado in Geometria Projettiva.
Rendic. della Real. Accad. della Sc. Mat. di Napoli. 1875.

*Ovidio (d'), E. Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella Geometria Metrico-Projettiva.
Atti della Real. Accad. dei Lincei. Serie II, T. III. 1876.

*Ovidio (d'), E. Nota sui Determinanti di Determinanti.
Atti della Real. Accad. della Scienze di Torino. Vol. XI. 1876.

*Ovidio (d'), E. Sulle Reti di Complessi lineari nella Geometria Metrico-Proiettiva.
Atti della Real. Accad. dei Lincei. Serie II, T. III. 1876. Roma.

*Ovidio (d'), E. Alcune Proprietà Metriche dei Complessi e delle Congruenze lineari in Geometria Projettiva.
Atti della R. Acad. dei Lincei. Serie II, T. III. 1876. Roma.

*Ovidio (d'), E. Le proiezioni ortogonali nella Geometria Metrico-Proiettiva.
Atti della R. Accad. della Scienze di Torino. Vol. XI. 1876.

*Ovidio (d'), E. Le Funzioni metriche fondamentali negli Spazi di quante si vogliano Dimensioni e di curvatura costante.
Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie III, Vol. I. 1877. Roma.

*Ovidio (d'), E. Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbature constante.
Mathem. Annalen. Bd. XII. 1877.

*Ovidio (d'), E. Ricerche sui Sistemi indeterminati di Equazioni lineari.
Atti d. R. Accad. della Sc. di Torino. Vol. XII. 1877.

*Ovidio (d'), E. Addizione alla Nota sui Determinanti di Determinanti.
Atti d. R. Accad. d. Sc. di Torino. Vol. XII. 1877.

*Ovidio (d'), E. I Complessi e le Congruenze lineari nella Geometria Projettiva.
Ann. di Matem., Serie II, T. VII.

Pagni. Nuove considerazioni sui poligoni e sui poliedri di specie superiore. Firenze. 1872.

Pietzker. Replik genen die Bemerkungen des Dr. Killing und Profes. Frischauf.
Hofm. Zeits. T. VIII. 1879.

*Potocki, S. Notice historique sur la vie et les traveaux de N. I. Lobatchewsky.
Bulletino di Bibliographia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche du Prince B. Boncompagni T. II. 1869.
Переводъ рѣчи, произнесенной на торжественномъ собраніи Императорскаго Казанскаго университета 5 ноября 1868 года, профессоромъ Е. Янишевскимъ.

*Réthy. Die Fundamental Gleichungen der nicht-Euklidischen Trigonometrie auf elementarem Wege abgeleitet.
Grunert's Archiv. T. 58. 1876.

*Riemann, B. Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.
Habilitationsschrift von 10 Juni 1854. Abhand. der König. Gesellsch. zu Göttingen. Bd. XIII.

*Riemann, B. Sur les hypothèses qui servent de fondament à la Géométrie. Trad. par Hoüel.
Annali di Matematica, Serie II, T. III. 1870.

*Riemann, B. Translated into English by Prof. Clifford.
Nature, Vol. VIII. 1873.

*Riemann, B. Riemann's Werke, Leipzig. 1876.

*Rodwell, G. On Space of Four Dimensions.
Nature, Vol. VIII. 1873.

*Rosanes, J. Ueber die neuessten Untersuchungen in Betreff unser Auschauung vom Raume.
Breslau. 1871. in-8.

*Saleta, F. Exposé sommaire de l'idée d'espace au point de vue positif. Paris. 1872.

*Salmon, G. On the degree of the surface reciprocal to a given one.
Irish. Acad. Trans. T. XXIII. 1859.

*Salmon, G. Lessons on Modern Higher Algebra. 1866. p. 212 ect.

*Salmon, G. Extension of Chasles' Theory of Characteristics to Surfaces.

*Sartorius von Waltershausen, W. Gauss. Zum Gedächtniss. Leipzig. 1856. in-4.

*Schlaefli, L. Nota alla memoria del Sig. Beltrami sugli spazie de la curvatura costante.
Annali di Mat. Serie II, T. V. 1870.

*Schlaefli, L. Beltrami. Osservazione sulla precedente Memoria del Sig. Prof. Schläfli. Annali di Matematiche. Vol. V. 1873.

*Schering, E. Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume.
Göttingen, Nachrichten. 1873.

Schlegel, V. System der Raumlehre nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehunglehre und als Einleitung in dieselbe. Leipzig. 1875.

*Schlegel, V. Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre
Zeits. für Math. u. Phys. T. XXIV. Leipzig. 1879.

*Schmitz-Dumond. Zeit und Raum in ihren denknothwendigen Bestimmungen abgeleitet aus dem Satze des Widerspruchs. I. Leip. 1875.

*Schmitz-Dumond. Die Bedeutung der Pangeometrie. Leipzig. 1877.

*Schmitz-Dumond. Deduction des dreidimensionalen Raum.
Vierteljahrsschrift für wissenschaf. Philosophie.

Schweikart, F. K. Die Theorie der Parallellinien nebst Vorschlag zu ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leip. 1808.

Суворовъ. О характеристикахъ системъ трехъ измѣреній.
Извѣстія и Записки Казанскаго университета. Вып. I, 1871. Казань.

*Spitz, C. Die ersten Sätze vom Dreiecke und den Parallelen. Nach Bolyai's Grundsätzer. Leipzig.

*Spitz, C. Grünert's Archiv, T. LVII; Lit. Ber. CCXXVI, 10.

*Spottiswoode, W. Nouveaux exemples de la representation, par des figures de géométrie des conceptions analytiques de géométrie à *n* dimensions.
Comptes Rendus. T. LXXXI. 1875.

*Spottiswoode, W. Sur la representation des figures de géométrie à *n* dimensions par les figures correlatives de géométrie ordinaire.
Comptes Rendus. T. LXXI. 1876.

*Spottiswoode, W. Address to the British Association at Dublin. August 14, 1878.

*Stahl, H. Ueber die Massfunctionen der analytischen Geometrie. Berlin. 1873.

*Stumpf, C. Phil. Monatshefte, B. XIV, pag. 13—30.

*Sylvester, J. J. On certain general Properties of Homogeneous Functions.
Camb. and Dub. M. Journ., Feb. 1851.

*Sylvester, J. J. Partitions of Numbers. Lectures. London. 1859.

*Sylvester, J. J. Inaugural Address to Math. Section, British Association at Exeter.
Nature, vol. I, August, 1869. Republished with Notes in: „Laws of Verse".
Longmans. 1870.

*Sylvester, J. J. Barycentric Projections.
Phil. Mag., or Br. Assoc'n.

*Tait, P. G. Mentions Hyper-Space in his Address as Pres. of Math. Sect. of Brit. Assoc. at Edinburgh.
Brit. Assoc. Rep. 1871.

*Tait, P. G. Recend Advances in Physical Science. Introduc. Second edit. London. 1876.

*Tait, P. G. Review of Zöllner. Nature, March 28, 1878.

*Tannery, P. La Géometrie Imaginaire et la Notion d'Espace.
Revue philosophique. Nov. 1876; Juin, 1877.

***Tognoli.** Sulla corrispondenza multipla fra due Spazi a tre dimensioni. Giornale di Matematiche. Vol. X. 1872.

***Torelli.** Il teorema di Viviani sulla pseudosfera. Giornale di Matematiche. Vol. X. 1872.

***Tilly (de), M.** Études de mechanique abstraite. Memoires couronnés de l'Academie Royale de Belgique. T. XXI. 1868.

***Tilly (de), M.** Lettre de M. A. Genocchi à M. A. Quetelet sur diverses questions mathématiques. Bul. de l'Acad. Royale de Belgique. T. XXXVI. 1873.

Transon. De l'infini ou Métaphysique et Géométrie à l'occasion d'une Pseudo-géométrie. Evreux. 1871.

Ващенко-Захарченко, М. Е. Введеніе къ Началамъ Евклида. Кіевъ. 1880 г. in-8.

***Weissenborn, H.** Ueber die neueren Ansichten vom Raum und von den geometrischen Axiomen. Vierteljahrschrift für Wissenschaftliche Philosophie, II, zweites Heft, Erstes Artikel. pp. 222—239. 1878.

***Witte, H.** Parallelentheorie. Wolfenbüttel. 1867.

***Young, G. P.** The relation which can be proved to subsist between the Area of a Plane Triangle and the Sum of the Angles on the Hypothesis that Euclid's twelfth Axiom is False. Read before the Canadian Institute, 25 Feb., 1860. Canadian Journal of Industry, Science and Art. New Series, vol. V, 1860.

***Zöllner.** On Space of Four Dimensions. Quarterly Journal of Science. Vol. VIII. 1878. Giornale di Matematiche. Vol. XV. 1877.

***Zöllner, J.** Zur Metaphysik des Raumes. Wissenschaftliche Abhandlungen. T. II, 2 Theil. Leipzig. 1878.

***Zöllner, J.** Principien einer Elektrodynamischen Theorie der Materie. Leipzig. 1876.

***Zolt.** Saggio di Pangeometria.

***————** О теоріи параллельныхъ линій Н. И. Лобачевскаго. Математич. Сборникъ. Т. III. 1868.

Книги обозначенныя * находились въ распоряженіи автора настоящаго сочиненія.

СПИСОКЪ СОЧИНЕНІЙ, КОТОРЫМИ АВТОРЪ ПОЛЬЗОВАЛСЯ ПРИ СОСТАВЛЕНІИ НАСТОЯЩАГО СОЧИНЕНІЯ.

Ampère, A. M. Essai sur la philosophie des sciences. T. I—II. Paris. 1833—43.

Archimedes. Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica ect. ex traditione doctissimi viri D. Francissi Maurolici. Panormi. 1685. in-fol.

Archimedes. Archimedis Syracusani philosophi ac geometrae excellentissimi opera, quae extant omnia, latinitateiam olim donata, nuncae primum in lucem edita. Basileae. 1544. in-4.

Archimedes. Archimedis Opera quae extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata. Per Davidem Rivaltum a Flurantia Coenomanum, ect. Parisiis. Apud Claudium Morellum.

Argant. Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. 2 ed. précédée d'une préface par J. Hoüel. Paris. 1874. in-8.

Apollonius. Apollonii Pergaei conicorum libri octo, et sereni antissensis de sectione cylindri et coni libri duo. Oxoniae. 1710. in-fol.

Abreu (d'). Supplément à la traduction de la géométrie d'Euclide de M-r Peyrard, publiée en 1804, et à la géométrie de M. Legendre suivi d'un essai sur la vrai théorie des parallèles. Agen. 1809. in-8.

Adhémar. Traité de géométrie. Paris. 1843. in-8.

Bretschneider. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig. 1870. in-8.

Barrow. Archimedis Opera. Apollonii Pergaei conicorum libri IV. Londoni. 1675. in-4.

Буняковскій. Параллельныя линіи. Ученыя Записки Императорской Академіи наукъ. T. II, выпускъ 3. Спб. 1853. in-8.

Bossut. Histoire générales des mathématiques, depuis leur origine jusqu'a l'année 1808. T. I—II. Paris. 1810.

Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Journal de l'Ecole Polytechnique, 32 Cahier. T. XIX. Paris. 1848.

Bertrand, L. Éléments de Géométrie. Génève. 1812. in-4.

Bertrand, L. Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son etendue. T. I—II. 1778. Génève. in-4.

Bertrand, J. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. T. I—II. 1864—70. Paris. in-4.

Bertrand, J. Programme des leçons de géométrie rationnelle et appliquée, professées en la mairie de Gien. Gien. 1853. in-8.

Comte, Aug. Cours de philosophie positive. T. I—II. 1830—35. Paris.

Comberousse et Rouché. Traité de géométrie élémentaire. Paris. 1866. in-8.

Catalan. Théorémes et problémes de géométrie élémentaire. 5 ed., revue. Paris. 1872. in-8.

Cauchy. Recherches sur les polyèdres. 1-e mémoire. Journal de l'Ecole Polytechnique, 16 Cahier. T. IX. Paris. 1813. in-4.

Cauchy. Recherches sur les polygones et les polyédres. 2-e mémoire. Journal de l'Ecole Polytechnique, 16 Cahier. T. IX. 1813. Paris. in-4.

Chasles. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. 2-e ed. Paris. 1875. in-4.

Chasles. Traité de géométrie supérieure. Paris. 1852. in-8.

Cantor. Euclid und sein Jahrhundert. Zeitschrift fur Mathematik und Physik. XII Jahrgang. Supplement. Leipzig. 1867. in-8.

Cirodde. Leçons de géométrie théorique et pratique. Dijon. 1836. in-8.

Clairaut. Éléments de géométrie. Paris. 1765. in-8.

Caille (La). Leçons élémentaires de mathématique ou elements d'algebre et de géométrie. Paris. 1764. in-8.

Cunha (Da). Principes de mathématiques. Traduit du portugais par d'Abreu. Paris. in-8. 1816.

Duhamel. Éléments de calcul infinitésimal. T. I—II. Paris. 1856. Paris.

Duhamel. Des méthodes dans les sciences de raisonnement. T. I—II—III—IV—V. 1865, 66, 68, 70, 73. Paris. in-8.

Dienger. Abbildung krummer oberflächen auf einander und anwendung derselben auf höhere Geodësie. Braunschweig. 1858. in-8.

Deidier. La science des géométres, ou la théorie et la pratique de la géométrie. Paris. 1739. in-4.

Escoubès. Compositions mathématiques, ou problèmes géométriques et trigonométriques. Paris. 1854. in-8.

Eutocius. Eutocii Ascalonitae in Archimedis libros de sphaera et cylindro, atque quosdam, Commentaria, nunc primum et Graece et Latine in lucem edita. Basileae. Joannes Hernagius excudi fecit. 1544.

Frischauf. Elemente der Geometrie. Leipzig. 1877.

Fuss. Leçons de géométrie a l'usage du corps imperial des cadets nobles de terre. St. Petersbourg. 1798. in-8.

Gauss. Recherches générales sur les surfaces courbes. Paris. 1852. in-8.

Garnier. Éléments de géométrie. Paris. 1812. in-8.

Garnier. Les réciproques de la géométrie. Paris. 1807. in-8.

Gartz. De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis Schediasma historicum. Halle. 1823. in-4.

Gottignies. (Aegidio Francisco). Elementa geometriae planae. Romae. 1669. in-12.

Günther. Développement historique de la theorie des polygones étoilés. Bulletino di Bibliographia e storia delle scienze matematiche. T. VI. 1873. Roma. in-4.

Günther. Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1876. in-8.

Hankel. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8.

Harnisch. Die Raumlehre oder die Messkunst, gewöhnlich Geometrie genant. Breslau. 1837. in-8.

Hesse. Die vier Species. Leipzig. 1872. in-8.

Hoefer. Histoire de l'astronomie. Paris. 1873. Hachette. in-18.

Hoefer. Histoire des mathématiques. Paris. 1874. Hachette. in-18.

Humboldt. Cosmos, essai d'une description physique du monde. T. I—IV. Paris. 1855—59. in-8.

Klügel. Mathematisches Wörterbuch. T. I—V. Leipzig. 1803—1836. in-8. T. VI—VII. Supplement. Grünert.

Knorr. Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie bis zum 29-sten Satze des 1-sten Buches der Elemente Euclids. Kiew. 1849. in-16.

Лавровъ. Очерки исторіи физико-математическихъ наукъ. Спб. 1865. in-8.

Legendre. Elements de géométrie, avec notes. 15 edit. Paris. 1862. in-8.

Lambert. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Histoire de l'Academie Royale des Sciences et belles lettres, année MDCCLXI. Berlin. 1768. in-4.

Libri. Histoire des sciences mathématique en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'a la fin du XVII siècle. T. I—IV. Paris. 1838—40—41. in-8.

Lacroix. Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. Paris. 1816. in-8.

Lacroix. Éléments de géométrie. 10 ed. Paris. 1814. in-8.

Minding. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichen Krümmungsmaasse. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. XIX. 1839. Berlin. in-4.

Mansion. Sur la simplification de l'enseignement de la géométrie, par l'emploi de la méthode des limites. Gand. 1872. in-8.

Mansion. Sur le premier livre de la géométrie de Legendre a propos de quelques traités récents. Gand. 1871. in-8.

Montucla. Histoire des mathematiques. T. I—IV. 1758—1802. Paris. in-fol.

Montucla. Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Paris. 1831. in-8.

Matthiessen, L. Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der Litteralen Gleichungen. Leip. 1878. in-8.

Mauduit. Leçons de géométrie théorique et pratique. T. I—II. Paris. 1809. in-8.

Nesselmann. Die Algebra der Griechen. Berlin. 1842. in-8.

Остроградскій. Руководство начальной геометріи. T. I—II. 1855—57—60. Спб. in-8.

Ozanam. Récreations mathématiques et physiques. T. I—IV. Paris. 1749—1750. in-8.

Ozanam. La géométrie pratique ect. Paris. 1693. in-12.

Poinsot. Sur la théorie des polyedres. Paris. 1858. in-4.

Peyrard. Oeuvres d'Archiméde, traduites littéralément, avec un commentaire. T. I—II. Paris. 1808. in-8.

Potts. Samlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze für den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht. Hannover. 1860.

Pascal. Réflexions sur la géométrie en général. Pensées de Pascal. Paris. 1842. in-12.

Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii ex recognitione Godofredi Friedlein. Lipsiae. 1873. in-12.

Ramsauer. Die Formen, Maass-und Körperlehre, oder die Elemente der Geometrie. Stutgart. 1826. in-8.

Rudel. Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Versuch einer Erweiterung der Lehre von den Formen unserer Raumanschauung. Bamberg. 1877. in-8.

Simplicius. Simplicii commentarii in quatuor aristotelis libros de coelo, cum textu euisdem. Venetiis. 1526. in-fol.

Sédillot, L. Am. Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. T. I—II. 1845—49. Paris. in-8.

Спенсеръ, В. Г. Геометрія путемъ изобрѣтенія. Переводъ съ англ. Ф. Резенера. Спб. 1878. in-8.

Spottiswoode, W. Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Leipzig. 1879. in-8.

Suter. Geschichte der mathematischen Wissenschaften. T. I—II. Zürich. 1873—75. in-8.

Schmitz-Dumant. Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. Berlin. 1878. in-8.

Scheffler. Der Situationskalkul. Versuch einer arithmetischen Darstellung der niederen und höheren Geometrie auf Grund einer abstrakten auffassung der räumlichen Grössen, Formen und Bewegungen. Braunschweig. 1851. in-8.

Tannery. La theorie de la connaissance mathématique. Revue philosophique de la France et de l'Étranger. № 2. Fev. 1879. Paris. in-8.

Todhunter. The conflict of Studies and other essays on subjects connected with education. London. 1873. in-8.

Wiegand. Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. Halle. 1877. in-8.

Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaitre si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la régle et le compas. Journal de Mathématiques pures et appliquées. Tome II. Année 1837. Paris. 1837. in-4.

Wilson. Euclide come testo di geometrie elementare. Giornale di Matematiche. Vol. VI. 1868. In-4.

Цвѣтковъ. О поверхностяхъ могущихъ быть преобразованными однѣ въ другія безъ разрыва и безъ сгиба своихъ частей. Спб. 1864. in-8.

Добавленіе къ списку „Началъ Евклида“, вышедшихъ съ 1482 по 1880 годъ.

1557. In Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri VI. Lyon. in-fol.

1685. Euclides teutsch redender, oder 8 Bücher v. d. Messkunst ect. von A. Pirckenstein. Wien. in-4.

1693. Euclidis. Planorum ac Solidorum Elementa, ed. H. Rondelli. Bonon. in-8.

1730. Les elements d' Euclide, expliq. par Dechalles. Nouv. ed. Paris.

1748. The Elements of Euclid. By C. F. Milliet de Chales. Done out of French by R. Williams. Fifth ed. London. in-12.

1766. Euclide, Elementi, tradotti. Verona. in-8.

1809. The elements of Euclid, viz. the first six books, with the eleventh and twelfth, by R. Simson. London. in-8.

1818. I primi sei libri e l'undecimo e duodecimo degli Elementi di Euclide. Emend. ecc. da V. Flauti. Napoli. in-4.

1847. Neljä ensimäistä Kirjaa ynnä viidennen määritykset Euklideen Alkeista Mittaustieteesä W. Kilpinen suomentaja. Helsingissä. in-8.

1860. Euclid's Elements of Geometry ect. by R. Potts. London. in-8.

Опечатки.

Страница.	Строка.		Напечатано:	Слѣдуетъ читать:
4	16	снизу	пепримѣнимъ	непримѣнимъ
5	3	—	положеній	предложеній
10	11	—	треугольнпка	треугольника
60	4	—	периметръ	площадь
71	3	—	0.003	0.0003
186	9	—	*A*	***B***
431	10	—	*SOTMPL*	***SQTMPL***
477	8	—	Дюгимель	Дюгамель
624	14	сверху	цилидра	цилиндра
731	1	—	Неевлидовской	Неевклидовской