МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542.6

О НАИМЕНЬШЕМ ЗАДАНИИ БЭРОВСКОЙ ФОРМАЦИИ

Н.Н. Воробьев, А.В. Чечуев
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы конечны. Класс групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Напомним, что $c^{\sigma}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *обозначает пересечение всех бэровских σ-локальных формаций, содержащих совокупность групп* $\mathfrak{X}$.

Цель работы – нахождение описания наименьшего обобщенного σ-локального задания бэровской σ-локальной формации.

Материал и методы. *Использованы методы теории классов конечных групп. В частности, методы теории формаций и методы теории решеток классов конечных групп.*

Результаты и их обсуждение. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– некоторая непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = c^{\sigma}\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = BLF_{\sigma}(f)$, *где* f *– наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации* $\mathfrak{F}$ *и пусть* $\Pi = \sigma^{+}(\mathfrak{X})$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Pi = \sigma^{+}(\mathfrak{F})$;
2) $f(\emptyset) = \mathrm{form}(G/R_{\sigma}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
3) $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $f(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$;
4) *если* h *– произвольное обобщенное σ-локальное задание формации* $\mathfrak{F}$, *то для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *имеет место*
$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}, O_{\sigma_i}(G) = 1)$ *и*
$f(\emptyset) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_{\sigma}(G) = 1)$.

Заключение. *Найдено описание наименьшего обобщенного σ-локального задания бэровской σ-локальной формации. В качестве следствия основного результата вытекает результат о минимальном композиционном экране композиционной формации, полученный ранее А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым (1992).*

Ключевые слова: *формация, обобщенная формационная σ-функция, бэровская σ-локальная формация, обобщенное σ-локальное задание бэровской σ-локальной формации, порожденная бэровская σ-локальная формация.*

ON THE SMALLEST DEFINITION OF A BAER FORMATION

N.N. Vorobyev, A.V. Chechuyev
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

All groups considered are finite. A class of groups is called a formation if it is closed with respect to homomorphic images and finite subdirect products. Mind that $c^{\sigma}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *denotes the intersection of all Baer-σ-local formations containing a collection of groups* $\mathfrak{X}$.

The purpose of the research is the proof of the theorem about the smallest generalized σ-local definition of a Baer-σ-local formation.

Material and methods. *Methods of the study of the theory of classes of finite groups are used as well as methods of the lattice theory of classes of finite groups.*

Findings and their discussion. *Let* $\mathfrak{X}$ *be a non-empty collection of groups,* $\mathfrak{F} = c^{\sigma}\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = BLF_{\sigma}(f)$, *where* f *is the smallest generalized σ-local definition of* $\mathfrak{F}$, *and let* $\Pi = \sigma^{+}(\mathfrak{X})$. *Then the following is true:*

1) $\Pi = \sigma^{+}(\mathfrak{F})$.
2) $f(\emptyset) = \mathrm{form}(G/R_{\sigma}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$.
3) $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ *for all* $\sigma_i \in \Pi$ *and* $f(\sigma_i) = \varnothing$ *for all* $\sigma_i \in \Pi'$.

4) *if h is a generalized σ-local definition of* $\mathfrak{F}$, *then for all* $\sigma_i \in \Pi$ *we have*

$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F},\ O_{\sigma_i}(G) = 1)$ *and*

$f(\emptyset) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F},\ R_\sigma(G) = 1)$.

Conclusion. *The description of the smallest generalized σ-local definition of a Baer-σ-local formation was found. The result of A.N. Skiba and L.A. Shemetkov (1992) about a minimal composition screen of a composition formation is a corollary of the main result of the paper.*

Key words: *formation, generalized formation σ-function, Baer-σ-local formation, generalized σ-local definition of a Baer-σ-local formation, generated Baer-σ-local formation.*

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются стандартная терминология и определения и обозначения, введенные в [1–6].

Следуя Л.А. Шеметкову [1], символом σ будем обозначать некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Если n – натуральное число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех его простых делителей; $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$; $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G$ обладает главным фактором H/K таким, что $\sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$, $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma^+(G)$.

Группа G называется: *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i; *σ-разрешимой*, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор группы G является σ-примарным. Главный фактор H/K группы G называется: *σ-центральным* в группе G, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; *σ_i-фактором*, если H/K является σ_i-группой. Группа G называется *обобщенной $\{\sigma_i\}$-нильпотентной*, если каждый главный σ_i-фактор группы G является σ-центральным. Символ $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ обозначает произведение всех нормальных обобщенных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы G, символ $O_{\sigma_i}(G)$ обозначает произведение всех нормальных σ_i-подгрупп группы G и символ $R_\sigma(G)$ – произведение всех нормальных σ-разрешимых подгрупп группы G.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Напомним определение бэровской σ-локальной формации, введенное в [7] в ходе разработки методов изучения σ-свойств групп [8–11].

Всякая функция f вида

$$f : \sigma \cup \{\emptyset\} \to \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\emptyset) \neq \varnothing$, называется *обобщенной формационной σ-функцией* (см. [6]) и полагают

$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset)$ и $G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(G))$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$ для некоторой обобщенной формационной σ-функции f, то $\mathfrak{F}$ называют *бэровской σ-локальной* формацией с *обобщенным σ-локальным заданием* f (см. [6]).

Исследование локальных и бэровских локальных формаций часто сводится к рассмотрению связанных с ними наименьших и канонических локальных заданий (см., например, [12]). В частности, посредством использования строения наименьших локальных заданий и решеточных свойств индуктивности и отделимости А.Н. Скибой доказана дистрибутивность решетки всех разрешимых тотально локальных формаций (см. [2]). В настоящей работе найдено наименьшее обобщенное σ-локальное задание произвольной бэровской σ-локальной формации. Отметим, что каноническое обобщенное σ-локальное задание такой формации получено ранее в работе [6].

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, а через $c^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ – пересечение всех бэровских σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Следующее утверждение дает способ построения наименьшего обобщенного σ-локального задания формации $\mathfrak{F} = c^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– некоторая непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = c^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = BLF_\sigma(f)$, *где* f *– наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации* $\mathfrak{F}$ *и пусть* $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{X})$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$;

2) $f(\emptyset) = \mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

3) $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $f(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$;

4) *если* h *– произвольное обобщенное σ-локальное задание формации* $\mathfrak{F}$, *то для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *имеет место*

$f(\sigma_i)$ = form(G | $G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$, $O_{\sigma_i}(G) = 1$) *и*

$f(\emptyset)$ = form(G | $G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}$, $R_\sigma(G) = 1$).

Схема доказательства теоремы представлена следующими леммами.

Лемма 1 [6, предложение 1.2]. *Пусть* $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$ *и* Π = Supp(f). *Тогда*:

1) $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$;

2) $G \in \mathfrak{F}$ *тогда и только тогда*, *когда* $G \in \mathfrak{S}_\sigma f(\emptyset)$ *и* $G \in \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} f(\sigma_i)$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma^+(G)$;

3) $\mathfrak{F} = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{S}_\sigma f(\emptyset), & \textit{если } \Pi \neq \varnothing; \\ \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_\sigma f(\emptyset), & \textit{если } \Pi = \varnothing. \end{cases}$

4) $\mathfrak{F}$ – *непустая формация.*

Мы используем $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ для обозначения класса всех групп G таких, что $\sigma^+(G) \subseteq \Pi \subseteq \sigma$. Класс всех обобщенных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных групп обозначают через $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$, а класс всех σ-разрешимых групп – через $\mathfrak{S}_\sigma$. Если f – обобщенная формационная σ-функция, то символ Supp(f) обозначает суппорт функции f, т.е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{X}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. Класс Фиттинга, который также является формацией, называется фиттинговой формацией.

Лемма 2 [6, предложение 2.2]. *Класс всех σ_i-нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и класс всех обобщенных $\{\sigma_i\}$ —нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$ являются фиттинговыми формациями.*

З а м е ч а н и е. Класс $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ – бэровская σ-локальная формация.

Действительно, пусть f – обобщенная формационная σ-функция такая, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } a = \sigma_i \in \Pi; \\ \varnothing, & \text{если } a = \sigma_i \in \Pi'; \\ \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } a = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда по лемме 1 3)

$$BLF_\sigma(f) = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \right) \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } \mathrm{Supp}(f) \neq \varnothing; \\ \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{G}_{\Pi^+}, & \text{если } \mathrm{Supp}(f) = \varnothing. \end{cases}$$

Так как согласно лемме 2 $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$, $\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ – формации, то $\mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \right) \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{G}_{\Pi^+} =$ $= \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} \right) \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{G}_{\Pi^+} = \mathfrak{G}_{\Pi^+}$ при Supp(f) ≠ ∅ и

$$\mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_\sigma \mathfrak{G}_{\Pi^+} = \mathfrak{G}_{\Pi^+} \text{ при Supp}(f) = \varnothing.$$

Таким образом, $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ является бэровской σ-локальной формацией.

Обобщенная формационная σ-функция f называется *внутренней*, если $f(a) \subseteq BLF_\sigma(f)$ для всех $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$.

Лемма 3. *Если* $\mathfrak{F} = \cap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ *и* $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$ *для всех* $j \in J$, *то* $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, *где* $f(\emptyset) = \cap_{j \in J} f_j(\emptyset)$ *и* $f(\sigma_i) =$ $= \cap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F}) = \cap_{j \in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j)$ *и* $f(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$. *Кроме того*, *если* f_j – *внутреннее обобщенное σ-локальное задание формации* $\mathfrak{F}_j$ *для всех* $j \in J$, *то* f *также является внутренним обобщенным σ-локальным заданием формации* $\mathfrak{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{M} = BLF_\sigma(f)$. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F})$. Докажем сначала включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $A \in \mathfrak{M}$. Тогда $A/R_\sigma(A) \in f(\emptyset)$ и $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(A)$. Следовательно, для любого $j \in J$ имеет место $A/R_\sigma(A) \in f_j(\emptyset)$ и $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(A)$. Значит, $A \in \mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$. Следовательно, $A \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда $A \in \mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$ для всех $j \in J$. Значит, для любого $j \in J$ имеет место $A/R_\sigma(A) \in f_j(\emptyset)$ и $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(A)$. Следовательно, $A/R_\sigma(A) \in f(\emptyset)$ и $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(A)$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$. Докажем сначала включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$, то $f(\sigma_i) = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{M} = (1)$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Докажем теперь обратное включение. Так как $f(\sigma_i) = \cap_{j \in J} f_j(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$, то существуют хотя бы два обобщенных σ-локальных задания f_1 и f_2, причем $\mathfrak{F}_1 = BLF_\sigma(f_1)$ и $\mathfrak{F}_2 = BLF_\sigma(f_2)$ такие, что $f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i) = \varnothing$.

Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Предположим, что это неверно и найдется неединичная группа G такая, что $G \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. Следовательно, $G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f_1(\sigma_i)$ и $G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f_2(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(G)$. Поэтому $G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(G)$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = (1)$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$.

Если f_j – внутреннее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$, то $f_j(a) \subseteq \mathfrak{F}_j$ для всех $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$, для всех $j \in J$. Тогда $f(a) = \cap_{j \in J} f_j(a) \subseteq \cap_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$ для всех $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$. Значит, f – внутреннее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – набор всех обобщенных σ-локальных заданий формации $\mathfrak{F}$. В силу леммы 3 $f = \cap_{j \in J} f_j$ – обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$, называемое *наименьшим*, такое, что $f(a) = \cap_{j \in J} f_j(a)$ для всех $a \in \sigma_i \cup \{\emptyset\}$ по всем i.

Лемма 4 [6, предложение 2.7]. *Пусть f и h – обобщенные формационные σ-функции такие, что $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f) = BLF_\sigma(h)$ и пусть $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$. Тогда*:

1) *если $\sigma_i \in \Pi$, то*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F};$$

2) *$\mathfrak{F} = BLF_\sigma(F)$, где F – обобщенная формационная σ-функция такая, что $F(\emptyset) = \mathfrak{F}$ и $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$.*

Лемма 5. *Если $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$ и $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma^+(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$, то $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Следовательно, по лемме 1 1) $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F})$. Вместе с тем условие $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ влечет $G^{f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}} \leq O_{\sigma_i}(G) \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, причем $G^{f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}} \lhd O_{\sigma_i}(G)$. Значит, по лемме 2 имеем $G^{f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$.

Таким образом, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$. Значит, по лемме 4 1) имеем $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 6 [6, лемма 2.6; 13, лемма 3.1]. *Пусть P – неединичная σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, A – группа с $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и G – регулярное сплетение $P \wr A = K \rtimes A$, где K – база сплетения группы G. Тогда*

$$F_{\{g\sigma_i\}}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K.$$

Доказательство теоремы. Докажем первое утверждение теоремы.

Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то справедливо включение $\sigma^+(\mathfrak{X}) \subseteq \sigma^+(\mathfrak{F})$.

Докажем обратное включение.

Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда $\sigma^+(G) \subseteq \sigma^+(\mathfrak{X}) = \Pi \subseteq \sigma$, т.е. $G \in \mathfrak{G}_{\Pi^+}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi^+}$.

Согласно замечанию, $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ – бэровская σ-локальная формация и, вместе с тем, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi^+}$. Поэтому $\mathfrak{F} = c^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi^+}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда, учитывая включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi^+}$, имеем $\sigma^+(G) \subseteq \Pi = \sigma^+(\mathfrak{X})$. Следовательно, $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma^+(G) \subseteq \Pi$. Таким образом, $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \Pi$.

Докажем второе и третье утверждения теоремы.

Пусть m – обобщенная формационная σ-функция такая, что

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = \emptyset; \\ \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = \sigma_i \in \Pi; \\ \varnothing, & \text{если } a = \sigma_i \in \Pi'. \end{cases}$$

Покажем, что $m = f$. Пусть $\mathfrak{M} = BLF_\sigma(m)$. Докажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Прежде установим справедливость включения $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Если $A \in \mathfrak{X}$, то

$$A/R_\sigma(A) \in (G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = m(\emptyset)$$

и $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in (G/F_{\{g\sigma_i\}}G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}G) \mid G \in \mathfrak{X}) = m(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Из последнего вытекает, что $\mathfrak{F} = c^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть f_1 – произвольное обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$. Покажем прежде, что $m \leq f_1$. Пусть $A \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} = BLF_\sigma(f_1)$. Тогда $A/R_\sigma(A) \in f_1(\emptyset)$ и $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in f_1(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, $m(\emptyset) = \mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}(f_1(\emptyset)) = f_1(\emptyset)$ и $m(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}(f_1(\sigma_i)) = f_1(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Таким образом, $m(\emptyset) \subseteq f_1(\emptyset)$ и $m(\sigma_i) \subseteq f_1(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{X})$. Значит, $m \leq f_1$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и $m = f$.

Докажем четвертое утверждение теоремы. Пусть t – обобщенная формационная σ-функция такая, что

$$t(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_\sigma(G) = 1), & \text{если } a = \emptyset; \\ \mathrm{form}(G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}, O_{\sigma_i}(G) = 1), & \text{если } a = \sigma_i \in \Pi. \end{cases}$$

Покажем, что $t = f$. Пусть $A \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} = BLF_\sigma(h)$. Тогда $A/R_\sigma(A) \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}$. Так как $R_\sigma(A/R_\sigma(A)) = 1$, то

$$A/R_\sigma(A) \in (G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_\sigma(G) = 1) \subseteq \mathrm{form}(G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_\sigma(G) = 1) = t(\emptyset).$$

Следовательно, $f(\emptyset) \subseteq t(\emptyset)$.

Ввиду того, что $A \in \mathfrak{X}$, имеем $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(A)$.

Так как $O_{\sigma_i}(A/F_{\{g\sigma_i\}}(A)) = 1$, то $A/F_{\{g\sigma_i\}}(A) \in (G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}, O_{\sigma_i}(G) = 1) \subseteq \mathrm{form}(G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}, O_{\sigma_i}(G) = 1) = t(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Следовательно, $f(\sigma_i) \subseteq t(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Итак, $f \leq t$.

Покажем теперь, что $t \leq f$. Пусть $A \in (G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_\sigma(G) = 1)$. Тогда $A \in f(\emptyset)$. Значит, $(G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_\sigma(G) = 1) \subseteq f(\emptyset)$. Следовательно,

$$t(\emptyset) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\emptyset) \cap \mathfrak{F}, R_\sigma(G) = 1) \subseteq \mathrm{form}(f(\emptyset)) = f(\emptyset).$$

Пусть $A \in (G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}, O_{\sigma_i}(G) = 1)$, где $\sigma_i \in \Pi$. Пусть $T = P \wr A = K \rtimes A$, где K – база сплетения T, а P – неединичная σ_i-группа. Тогда по лемме 6 имеет место $F_{\{g\sigma_i\}}(T) = O_{\sigma_i}(T) = K$. Следовательно,

$$A \cong T/O_{\sigma_i}(T) = T/K = T/F_{\{g\sigma_i\}}(T) \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}.$$

Значит, по лемме 5 получаем $T \in \mathfrak{F}$. Поэтому $A \cong T/O_{\sigma_i}(T) \in f(\sigma_i)$. Следовательно,

$$t(\sigma_i) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}, O_{\sigma_i}(G) = 1) \subseteq \mathrm{form}(f(\sigma_i)) = f(\sigma_i).$$

Таким образом, $t(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Так как $t(\emptyset) \subseteq f(\emptyset)$ и $t(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, то $t \leq f$. Итак, $m = f$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть f_i – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_i$,* $i = 1, 2$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$, из теоремы получаем следующие известные результаты:

Следствие 2 [14, теорема]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая непустая совокупность групп такая, что* $\mathfrak{F} = c\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = BLF(f)$, $\pi = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, *и пусть f – наименьшее обобщенное локальное задание формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})) = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$;

2) $f(p) = \mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \mathbb{P} \setminus \pi$;

4) *если h – произвольное обобщенное локальное задание формации $\mathfrak{F}$, то для всех $p \in \pi$ имеет место* $f(p) = \mathrm{form}(G \mid G \in \mathfrak{F} \cap h(p), O_p(G) = 1)$.

Следствие 3 [14, следствие 1]. *Пусть f_i – наименьшее обобщенное локальное задание формации $\mathfrak{F}_i$,* $i = 1, 2$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

Заключение. Найдено описание наименьшего обобщенного σ-локального задания бэровской σ-локальной формации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Скиба, А.Н. Кратно L-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
4. Чи, Чжан. О $\sum_t^\sigma$-замкнутых классах конечных групп / Чжан Чи, А.Н. Скиба // Украинский матем. журн. – 2018. – Т. 70, № 2. – С. 1707–1715.
5. Chi, Zhang. On *n*-multiply *σ*-local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
6. Safonov, V.G. On Baer-*σ*-local formations of finite groups / V.G. Safonov, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2020. – Vol. 48, № 9. – P. 4002–4012.
7. Safonov, V.G. On one generalization of *σ*-local and Baer-local formations / V.G. Safonov, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4(41). – С. 65–69.
8. Skiba, A.N. On *σ*-subnormal and *σ*-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
9. Skiba, A.N. Some characterizations of finite *σ*-soluble *PσT*-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
10. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
11. Safonova, I.N. On some properties of the lattice of totally *σ*-local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 3. – С. 6–16.
12. Tsarev, A.A. On a question of the theory of partially composition formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob’ev // Algebra Colloquium. – 2014. – Vol. 21, № 3. – P. 437–447.
13. Safonova, I.N. A criterion for *σ*-locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Comm. Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.
14. Скиба, А.Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомел. гос. ун-та, 1992. – Вып. 7. – С. 39–43.

REFERENCES

1. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow: Nauka, 1978, 272 p. – (Sovremennaya algebra).
2. Skiba A.N. *Algebra formatsii* [Algebra of Formations], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
3. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Ukr. Mat. Zhurn*. [Ukrainian Mathematical Journal], 2000, 52(6), p. 898–913.
4. Chi Z., Skiba A.N. *Ukr. Mat. Zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal], 2019, 70(12), p. 1966–1977.
5. Chi Zhang, Safonov V.G., Skiba A.N. Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
6. Safonov, V.G. On Baer-*σ*-local formations of finite groups / V.G. Safonov, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2020. – Vol. 48, № 9. – P. 4002–4012.
7. Safonov V.G. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2019, 4(41), p. 65–69.
8. Skiba, A.N. On *σ*-subnormal and *σ*-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
9. Skiba, A.N. Some characterizations of finite *σ*-soluble *PσT*-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
10. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
11. Safonova I.N., Safonov V.G. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics], 2020, 3, p. 6–16.
12. Tsarev, A.A. On a question of the theory of partially composition formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob’ev // Algebra Colloquium. – 2014. – Vol. 21, № 3. – P. 437–447.
13. Safonova, I.N. A criterion for *σ*-locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Comm. Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.
14. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Voprosy Algebry* [Problems of Algebra], 1992, 7, p. 39–43.

Поступила в редакцию 09.06.2022
Адрес для корреспонденции: e-mail: vornik2001@mail.ru – Воробьев Н.Н.