УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

КАРАУЛОВА
Татьяна Борисовна

ФИТТИНГОВЫ МНОЖЕСТВА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2020

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Научный руководитель: **Воробьёв Николай Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Официальные оппоненты: **Гальмак Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Могилевский государственный университет продовольствия»;

Княгина Виктория Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Оппонирующая организация — Белорусский государственный университет.

Защита состоится — 30 октября 2020 года в 14^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: (+375 232) 51-03-01. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан — 28 сентября 2020 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации рассматриваются только конечные группы. Одно из актуальных направлений исследований в современной теории групп состоит в описании строения групп в зависимости от свойств заданной системы их подгрупп. Основополагающей в решении такого рода задач во многих случаях является долгосрочная программа структурного анализа конечных групп, предложенная в 1938 году Х. Фиттингом[1]. В ней впервые было предложено изучение конечных групп при помощи систем нильпотентных подгрупп и определен нильпотентный радикал группы — произведение всех её нильпотентных подгрупп, который широко известен в настоящее время как подгруппа Фиттинга. Со второй половины 60-х годов прошлого столетия идеи Фиттинга реализовались в том, что важное место в теории групп стали занимать исследования, связанные с радикальными классами (классами Фиттинга), т. е. классами групп $\mathfrak{F}$, замкнутыми относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Яркий результат в этом направлении исследований был получен в 1967 году В. Гашюцом, Б. Фишером и Б. Хартли[2], где в терминах радикальных классов найдено обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла. В работе[2] было установлено, что для любого радикального класса $\mathfrak{F}$ в любой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. При этом $\mathfrak{F}$-инъектором G называется такая подгруппа V группы G, что $V \bigcap N$ является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Локализуя понятие радикального класса Л. А. Шеметков[3] и в разрешимом случае В. Андерсон[4], определили понятие радикального множества группы. Множество подгрупп $\mathcal{F}$ группы G называется радикальным множеством или фиттинговым множеством G, если $\mathcal{F}$ замкнуто относительно нормальных подгрупп, нормальных произведений подгрупп и сопряжений. Эффективность такого понятия была подтверждена в работе[3] и в разрешимом случае[4] развитием и обобщением указанной выше теоремы Гашюца–Фишера–Хартли[2]. В частности, Л. А. Шеметковым[3] было доказано, что в π-разрешимой группе для любого радикального множества $\mathcal{F}$ группы G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G в случае, если

---

[1]Fitting, H. Beitrage zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung / H. Fitting // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. — 1938. — Bd. 48. — S. 77—141.

[2]Gaschütz, W. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. — 1967. — Vol. 102, № 5. — S. 337—339.

[3]Шеметков, Л. А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л. А. Шеметков // В кн. : Конечные группы. — Минск : Наука и техника, 1975. — С. 207—212.

[4]Anderson, W. Injectors in finite solvable groups / W. Anderson // J. Algebra. — 1975. — Vol. 36, № 3. — P. 333—338.

π — множество всех простых делителей всех подгрупп G.

Решение задачи существования и сопряженности инъекторов приводит к задаче описания их строения в радикальных классах и множествах, а также их характеризации. Оригинальный локальный метод для решения такой задачи был предложен Б. Хартли[5] и П. Дарси[6]. Идея локализации Хартли—Дарси состоит в изучении радикальных классов в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями (функциями Хартли) множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множество радикальных классов. Однако Б. Хартли[5] и П. Дарси[6] было получено описание $\mathfrak{F}$-инъекторов лишь для двух типов локальных радикальных классов: $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$. Прогресс в решении такой задачи был достигнут в работах Н. Т. Воробьёва, В. Го и Ю. Ли[7], а также Н. Янга, В. Го и Н. Т. Воробьёва[8], где описаны $\mathfrak{F}$-инъекторы разрешимых групп в терминах радикалов и холловых подгрупп для локальных радикальных классов в общем случае. В связи с этим актуальной является *задача развития локальных методов построения фиттинговых множеств группы и их применения для описания инъекторов группы, в общем случае неразрешимой.*

В теории радикальных классов Б. Хартли[5] установлено, что $\mathfrak{F}$-инъектор V разрешимой группы G либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор G, т. е. $\mathfrak{F}$-инъекторы G обладают свойством покрытия-изолирования. Напомним, что секцией группы G называется факторгруппа её некоторой подгруппы. Подгруппа V покрывает[9] (изолирует) секцию H/K группы G, если $H \subseteq VK (V \bigcap H \subseteq K)$. В работе[5] Б. Хартли была сформулирована проблема описания главных факторов разрешимой группы, покрываемых её $\mathfrak{F}$-инъекторами. Решение её было получено для локальных радикальных классов[5] (классов Хартли) вида $\bigcap_p h(p)\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$, где h — некоторое отображение множества всех простых чисел во множество радикальных классов. Данный результат приводит к *задаче исследования наличия свойства покрытия-изолирования $\mathcal{F}$-инъекторов группы, в общем случае неразрешимой, и описания её главных факторов, покрываемых $\mathcal{F}$-инъекторами для фиттингова множества $\mathcal{F}$ группы.*

[5]Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. — 1969. — Vol. 3(19), № 2. — P. 193—207.

[6]D'arcy, P. Locally defined Fitting classes / P. D'arcy // J. Austral. Math. Soc. (Series A). — 1975. — Vol. 20. — P. 25—32.

[7]Vorob'ev, N. T. Description of $\mathfrak{F}$-injectors of Finite Soluble Groups / N. T. Vorob'ev, Y. F Liu, W. Guo // Math. Sci. Res. J. — 2008. — Vol. 12, № 1. — P. 17—22.

[8]Yang, N. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. Algebra. — 2018. — Vol. 46, № 1. — P. 217—229.

[9]Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

Если $\mathfrak{F}$ — формация групп, то В. Гашюц[10] подгруппу $E \in \mathfrak{F}$ группы G называет $\mathfrak{F}$-покрывающей, если E покрывает каждый фактор из $\mathfrak{F}$ всякой промежуточной группы между E и G, т. е. из условия $E \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{F}$ следует $H = EK$. Используя это понятие, В. Гашюцом[10] было получено обобщение и развитие классических теорем Силова, Холла и Картера: доказано, что для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп.

Дуализируя понятие $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы, Б. Фишер[11] для радикального класса $\mathfrak{F}$ определяет подгруппу $F \in \mathfrak{F}$ группы G, которая содержит все нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы каждой промежуточной группы между F и G. Такую подгруппу, по предложению Б. Хартли[5], стали называть $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера G. Кроме того, Б. Фишером[11] было установлено, что если радикальный класс $\mathfrak{F}$ (в дальнейшем класс Фишера) замкнут относительно подгрупп вида PN, где P — силовская p-подгруппа и N — нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$ и G — разрешимая группа, то в G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-подгрупп Фишера. В последующем Б. Хартли[5] доказал, что для класса Фишера $\mathfrak{F}$ в разрешимой группе G каждый её $\mathfrak{F}$-инъектор — это в точности $\mathfrak{F}$-подгруппа Фишера. Вместе с тем Р. Дарк[12] показал, что существуют разрешимые радикальные классы и разрешимые группы для которых теоремы Фишера и Хартли неверны.

Это обусловливает *задачу описания групп G, в общем случае неразрешимых, и фиттинговых множеств группы G, для которых справедливы аналоги указанных теорем Фишера и Хартли.*

Многие исследования теории групп связаны с построением формаций и радикальных классов разрешимых групп, определяемых при помощи заданных свойств вложения холловых подгрупп в их канонические подгруппы. Такое направление исследований нашло отражение в монографиях Л. А. Шеметкова[13], К. Дёрка и Т. Хоукса[9], В. Го[14]. Среди исследований, относящихся к данной тематике в теории разрешимых групп известны работы К. Дёрка и

[10]Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. — 1963. — Bd. 80. — S. 300—305.

[11]Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer // B. Habilitationsschrift, Universität Frankfurt. — 1966.

[12]Dark, R. Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups / R. Dark // Math. Z. — 1972. — Vol. 127. — P. 145—156.

[13]Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М. : Наука, 1978. — 272 с.

[14]Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo // Beijing ; New York ; Dordrecht ; Boston ; London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. — 258 p.

Т. Хоукса[15] О. Бризона[16], П. Хаука[17], П. Локетта[18], В. Го и Б. Ли[19], Н. Т. Воробьёва и В. Н. Загурского[20], Е. Н. Залесской и С. Н. Воробьёва[21], Е. А. Витько[22], А. Ф. Васильева и Л. А. Шеметкова[23] и др. Это и хорошо известная теорема С. А. Чунихина[24] о том, что в любой конечной π-разрешимой группе существуют холловы π-подгруппы и любые две из них сопряжены определяет *задачу описания общих методов построения фиттинговых множеств и множеств Фишера π-разрешимой группы, определяемых вложением холловых π-подгрупп в радикалы и инъекторы.*

Таким образом, задача развития локальных методов исследования в теории фиттинговых множеств групп и их применение для решения указанных выше задач актуальна. Её реализации и посвящена настоящая диссертация.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертационная работа выполнена на кафедре алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» с 2016 по 2019 год в соответствии со следующими научными темами: «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп», входящей в государственную программу научных исследований на 2011—2015 годы «Конвергенция», подпрограмма «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития», регистрационный номер в БелИСА — 20111880; «Методы локализации и теории решеток в исследовании строения конечных групп и их классов», входящей в государственную программу научных иссле-

[15]Doerk, K. Ein Beispiel aus der Theorie der Schunckklassen / K. Doerk, T. Hawkes // Arch. Math. (Basel). — 1978. — Bd. 31. — S. 539—544.

[16]Brison, O. J. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. J. Brison // Bull. Austral. Math. Soc. — 1981. — Vol. 23. — P. 361—365.

[17]Hauck, P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck // J. Algebra. — 1978. — Bd. 53. — S. 395—401.

[18]Lockett, F. P. On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups / F. P. Lockett // Math. Z. — 1973. — Vol. 131, № 2 — P. 103—115.

[19]Guo, W. On the Shemetkov problem for Fitting classes / W. Guo, B. Li // Beiträge zur Algebra und Geom. — 2007. — Vol. 48, № 1. — P. 281—289.

[20]Воробьёв, Н. Т. Классы Фиттинга с заданными свойствами подгрупп Холла / Н. Т. Воробьёв, В. Н. Загурский // Матем. заметки. — 2005. — Т. 78, № 2. — С. 234—240.

[21]Залесская, Е. Н. Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп / Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьёв // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 5. — С. 989—999.

[22]Витько, Е. А. О классах Фиттинга и холловых подгруппах конечных π-разрешимых групп / Е. А. Витько, Н. Т. Воробьёв // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 2011. — № 1. — P. 37—42.

[23]Васильев, А. Ф. Нелокальные формации конечных групп / А. Ф. Васильев, Л. А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. — 1995. — Т. 39, № 4. — С. 5—8.

[24]Чунихин, С. А. О силовских свойствах конечных групп / С. А. Чунихин // ДАН СССР. — 1950. — Т. 73, № 1. — С. 29—32.

дований на 2016—2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», регистрационный номер в БелИСА — 20160350; «Конечные группы с заданными свойствами инъекторов», грант БРФФИ на 2017—2019 годы, регистрационный номер в БелИСА — 20170835.

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертационной работы является развитие локальных методов исследования в теории фиттинговых множеств конечных групп и их применение для описания свойств канонических систем подгрупп.

Для достижения поставленной цели в диссертации необходимо было решить следующие взаимосвязанные задачи:

— выявить и разработать общие закономерности построения фиттинговых множеств при помощи описания их канонических локальных заданий;

— решить задачу описания строения инъекторов группы и её главных факторов, покрываемых инъекторами (проблема Хартли[5]) для случая локальных фиттинговых множеств;

— установить критерии подгрупп Фишера и найти новые канонические классы сопряженных подгрупп Фишера в фиттинговых множествах частично разрешимой группы;

— разработать методы построения фиттинговых множеств группы со свойством вложения её холловых подгрупп в радикалы.

Объектом исследования являются фиттинговы множества конечной группы и её канонические подгруппы — инъекторы, подгруппы Фишера и радикалы.

Предмет исследования — свойства инъекторов, подгрупп Фишера и их характеризации.

Научная новизна

Все результаты являются новыми, впервые получены автором.

Разработаны новые локальные методы исследования подгруппового строения группы посредством описания фиттинговых свойств систем её канонических подгрупп и описаны общие закономерности построения локальных фиттинговых множеств групп при помощи заданных свойств радикалов, что позволило найти новые канонические классы сопряженных инъекторов и подгрупп Фишера в группе (в общем случае неразрешимой), а также описать их строение. Решена проблема Хартли об описании главных факторов, покрываемых инъекторами, для случая локальных фиттинговых множеств частично разрешимой группы. Впервые описаны фиттинговы множества и неразрешимые группы, для которых в группе её инъекторы и подгруппы Фишера образуют один и тот же класс сопряженных подгрупп. Найдены характеризации подгрупп Фишера конечной группы в её фиттинговом множестве при помощи свойства дуальной пронормальности подгрупп. Описаны методы построения фиттинговых множеств π-разрешимой группы, определяемых вложением холловых π-подгрупп в радикалы этой группы.

Полученные результаты исследования могут быть использованы в решении задач описания подгрупповой структуры групп и их классов, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов по современной алгебре для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание общих методов построения локальных фиттинговых множеств, классификация их локальных заданий, теоремы 3.1.5 [3, 4] и 3.2.7 [3].

2. Описание строения инъекторов и решение проблемы Хартли[5] о характеризации главных факторов, покрываемых инъекторами для локальных фиттинговых множеств группы, теоремы: 4.2.1 [4], 4.2.2 [2] и 4.3.4 [3].

3. Характеризации подгрупп Фишера и их сопряженность, теоремы: 5.1.3 [5], 5.2.6 [6] и 5.2.7 [6].

4. Описание методов построения фиттинговых множеств группы, посредством холловых подгрупп, теорема 5.3.2 [1].

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством профессора, доктора физико-математических наук Воробьёва Николая Тимофеевича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах [1, 4, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация — соискателю. В работе [2], опубликованной совместно с научным руководителем и профессором Н. Янгом, основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а их реализация на паритетных началах — соискателю и Н. Янгу, который обеспечил качественный перевод статьи на английский язык. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертационной работы были апробированы на научных семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени

П. М. Машерова» и кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», а также на следующих международных и региональных научных конференциях: 3-ей Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива» (23—24 апреля 2015 г., Витебск); Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «IX Машеровские чтения» (25 сентября 2015 г., Витебск); Международной конференции, посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского «XI школа-конференция по теории групп» (27 июля—2 августа 2016 г., Красноярск); Международной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (5—10 сентября 2016 г., Минск); 11-ой Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 75-летию В. В. Кириченко (3—7 июля 2017 г., Киев); Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XI Машеровские чтения» (18 октября 2017 г., Витебск); Международной конференции «Мальцевские чтения» (20—24 ноября 2017 г., Новосибирск); Международной научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь XXI века: образование, наука, инновации» (6 декабря 2017 г., Витебск); XXIII(70) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука — образованию, производству, экономике» (15 февраля 2018 г., Витебск); Международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (1908—1971) (23—25 мая 2018 г., Москва); XXIV(71) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука — образованию, производству, экономике» (14 февраля 2019 г., Витебск); Международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (28—31 мая 2019 г., Москва); 12-ой Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 215-летию В. Буняковского (2—6 июля 2019 г., Винница).

Отдельные результаты диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» при чтении спецкурса «Основы теории групп и их классов» для студентов математических специальностей (акты внедрения от 06.09.2015, 04.03.2019) и Школы Науки Цзяннаньского университета (КНР), что подтверждает совместная публикация [2] с профессором Н. Янгом.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоения ученых званий в Республике Беларусь, и в 13 материалах и тезисах докладов конференций. Общий объем опубликованных материалов — 4,14 авторского листа, в том числе статьи в научных журналах — 3,22 авторского листа, тезисы и материалы докладов конференций — 0,92 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 78 наименований использованных источников и 19 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 90 страниц, из них 8 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьёву за консультации, помощь и внимание, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В определениях и обозначениях мы следуем[9, 13].

Глава 1 содержит аналитический обзор основных литературных источников по теме диссертации. В этой главе описаны основные объекты исследования — фиттинговы множества конечной группы и её канонические подгруппы. Определяется их роль в развитии структурного анализа классов конечных групп, формулируются нерешенные вопросы и задачи.

Глава 2 содержит ряд вспомогательных утверждений, наиболее часто используемых в доказательствах на протяжении последующих глав диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3—5.

Глава 3 посвящена описанию общих методов построения локальных фиттинговых множеств.

Множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют фиттинговым множеством G, когда выполняются следующие условия: (1) если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$; (2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$; (3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Напомним, что произведением[8] фиттингова множества $\mathcal{F}$ группы G и радикального класса $\mathfrak{X}$ называется множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$, которое обозначим $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X}$. Если $\mathcal{H}$ — фиттингово множество группы G и $\mathfrak{F}$ —

радикальный класс, то, очевидно, $\mathcal{H}\odot\mathfrak{F}\subseteq\mathcal{H}\mathfrak{F}$. Предположим, что радикальный класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом. Тогда если $H\leq G$ и $H\in\mathcal{H}\mathfrak{F}$, то $H/L\in\mathfrak{F}$ для некоторой нормальной $\mathcal{H}$-подгруппы L группы H. Так как $L\leq H_{\mathcal{H}}$ и

$$H/L/H_{\mathcal{H}}/L\cong H/H_{\mathcal{H}},$$

то $H\in\mathcal{H}\odot\mathfrak{F}$. Поэтому в данном случае $\mathcal{H}\odot\mathfrak{F}=\mathcal{H}\mathfrak{F}$ и мы будем обозначать $\mathcal{H}\odot\mathfrak{F}$ как $\mathcal{H}\mathfrak{F}$ [4].

3.1.1 Определение [3, 4]. *Пусть $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$, h — функция Хартли группы G и $HS(h)=\bigcap_{p\in\pi}h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Фиттингово множество $\mathcal{H}$ группы G назовём множеством Хартли группы G, если $\mathcal{H}=HS(h)$ для некоторой H-функции h.*

3.1.2 Определение [3, 4]. Пусть $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$ и h — H-функция множества Хартли $\mathcal{H}$ группы G. Тогда h назовем:

(1) *приведенной*, если $h(p)\subseteq\mathcal{H}$ для всех $p\in\pi$;

(2) *устойчивой*, если $h(p)\subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных $p,q\in\pi$;

(3) *устойчивой приведенной*, если h является одновременно устойчивой и приведенной;

(4) *постоянной*, если $h(p)=h(q)$ для всех различных $p,q\in\pi$.

В разделах 3.1 и 3.2 описываются общие методы построения локальных фиттинговых множеств, а также классифицируются их локальные задания. Эти результаты представлены теоремами 3.1.5 и 3.2.7.

3.1.5 Теорема [3, 4]. *Каждое множество Хартли определяется устойчивой приведенной H-функцией.*

3.2.7 Теорема [3]. *Каждое множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G можно определить полной приведенной H-функцией F такой, что*

$$F(p)=h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\bigcap(\bigcap_{q\neq p}h(q)\mathfrak{S}_{q'})$$

для всех $q\neq p\in\pi$.

Глава 4 посвящена построению локальных фиттинговых множеств группы при помощи радикалов и холловых подгрупп и их применению для описания инъекторов группы, в общем случае неразрешимой.

В разделе 4.1 описана характеризация $\mathcal{F}$-инъекторов посредством радикалов группы G.

Произведением радикальных классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}=\{G:G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H}\}$. Хорошо известно, что произведение любых двух радикальных классов является также радикальным классом и операция умножения радикальных классов ассоциативна[9]. Заметим, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — радикальные классы, то $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, где класс групп

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\{G:\exists K\trianglelefteq G, K\in\mathfrak{F}\text{ и }G/K\in\mathfrak{H}\}.$$

Если $\mathfrak{H}$ — гомоморф[9], т. е. замкнут относительно гомоморфных образов, то $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. В этом случае произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ радикальных классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то характеристика $\mathfrak{X}$ — множество $\{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{X}\}$, где Z_p — циклическая группа порядка p.

4.1.1 Лемма [4]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой радикальный класс характеристики π и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi'} \diamond \mathfrak{X}$. Тогда любая π-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов и каждый $\mathfrak{F}$-инъектор G является произведением π'-радикала G и $\mathfrak{X}$-инъектора некоторой холловой π-подгруппы G.*

4.1.2 Следствие [4]. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-нильпотентных инъекторов.*

4.1.3 Следствие [4]. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-замкнутых инъекторов.*

4.1.4 Следствие [4]. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-специальных инъекторов.*

Заметим, что следствия 4.1.3 и 4.1.4 были получены другими методами в работе[25].

Раздел 4.2 посвящен описанию строения инъекторов в терминах радикалов и холловых подгрупп.

4.2.1 Теорема [4]. *Пусть $\mathcal{X}$ — непустое фиттингово множество группы G, и пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathcal{H} = HS(h)$ — множество Хартли G, определяемое H-функцией h такой, что $h(p) = \mathcal{X}$ для любого $p \in \pi$. Если $G \in \mathcal{X}\mathfrak{S}^{\pi}$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *G имеет $\mathcal{H}$-инъектор и любые два $\mathcal{H}$-инъектора сопряжены;*

(2) *каждый $\mathcal{H}$-инъектор V группы G — подгруппа вида $G_{\mathcal{X}\mathfrak{E}_{\pi'}}L$, где L — подгруппа G такая, что $L/G_{\mathcal{X}}$ является $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектором некоторой холловой π-подгруппы $G/G_{\mathcal{X}}$.*

Если $\mathcal{H} = HS(h)$, то подгруппу $G_h = \prod_{p \in \pi} G_{h(p)}$ назовем h-радикалом группы G. Пусть $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, группа G называется $\mathfrak{N}$-скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{N}}) \leq G_{\mathfrak{N}}$.

Следующая теорема доказывает существование и сопряженность $\mathcal{H}$-инъекторов группы G и описывает $\mathcal{H}$-инъекторы с помощью радикалов, в случае, когда $\pi = \mathbb{P}$.

4.2.2 Теорема [2]. *Пусть $\mathcal{H}$ — множество Хартли группы G, определенное устойчивой приведенной H-функцией h и G_h — h-радикал группы G. Если группа G/G_h — $\mathfrak{N}$-скована, то справедливы следующие утверждения:*

---

[25] Воробьёв, Н. Т. Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы / Н. Т. Воробьёв, М. Г. Семёнов // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 4. — С. 516—528.

(1) *подгруппа V группы G — $\mathcal{H}$-инъектор G тогда и только тогда, когда V/G_h — нильпотентный инъектор G/G_h;*

(2) *группа G обладает $\mathcal{H}$-инъектором и любые два $\mathcal{H}$-инъектора сопряжены в G;*

(3) *подгруппа V группы G — $\mathcal{H}$-инъектор G тогда и только тогда, когда V является $\mathcal{H}$-максимальной подгруппой G и $G_{\mathcal{H}} \leq V$.*

Приведем некоторые следствия теоремы 4.2.2:

4.2.3 Следствие (Б. Фишер[11]). *Подгруппа V разрешимой группы G является нильпотентным инъектором группы G тогда и только тогда, когда $F(G) \leq V$ и V — $\mathfrak{N}$-максимальна в G.*

4.2.4 Следствие (Б. Хартли[5]) *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой разрешимый радикальный класс и $\mathfrak{H} = \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{N}$. Подгруппа V разрешимой группы G является $\mathfrak{H}$-инъектором тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ — нильпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

Теорема 4.2.2 позволяет описать инъекторы ограниченной нильпотентной длины фиттингова множества разрешимой группы, что отражено в следствии 4.2.6.

Следствиями теоремы 4.2.2 являются также результаты Н. Т. Воробьёва и В. Го[14] о характеризации инъекторов для разрешимого класса Хартли.

В. Го и Н. Т. Воробьёвым[8] было получено обобщение известных теорем Гашюца—Фишера—Хартли[2] и Шеметкова–Андерсона[3,4] о существовании и сопряженности инъекторов конечной группы.

Если π — некоторое множество простых чисел, то фиттингово множество $\mathcal{F}$ группы G называется π-насыщенным в случае, когда $\mathcal{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$.

В работе[8] доказано, что если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathcal{F}$ — фиттингово множество группы G, то G обладает единственным классом сопряженных $\mathcal{F}$-инъекторов в каждом из следующих случаев:

(а) $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и $\mathcal{F}$ — π-насыщено;

(б) $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ и $G \in \mathcal{F}\mathfrak{S}^{\pi}$.

В теории радикальных классов Б. Хартли[5] установлено, что $\mathfrak{F}$-инъекторы разрешимой группы обладают свойством покрытия-изолирования и сформулирована проблема описания главных факторов этой группы, покрываемых ее $\mathfrak{F}$-инъекторами.

Используя указанный результат[8], мы определяем условия, при которых $\mathcal{F}$-инъекторы группы обладают свойством покрытия-изолирования и описываем главные факторы, покрываемые инъекторами для фиттинговых множеств группы, в общем случае неразрешимой.

4.3.2 Теорема [3]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathcal{F}$ — фиттингово множество группы G. Тогда $\mathcal{F}$-инъекторы группы G обладают свойством покрытия-*

изолирования в каждом из следующих случаев:

(1) $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и $\mathcal{F}$ — π-насыщено;

(2) $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ и $G \in \mathcal{F}\mathfrak{S}^\pi$.

4.3.4 Теорема [3]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathcal{F}$ — π-локальное фиттингово множество группы G, определяемое H-функцией f. Тогда $\mathcal{F}$-инъектор G покрывает все такие главные p-факторы ($p \in \pi$), которые покрывает её $f(p)$-радикал в каждом из следующих случаев:*

(1) $G \in \mathcal{F}\mathfrak{S}$ и $\mathcal{F}$ — множество Хартли G;

(2) $G \in \mathfrak{S}^\pi$, $\mathcal{F}$ π-насыщено и f — приведенная H-функция.

4.3.5 Следствие (Б. Хартли[5]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальный класс и G — разрешимая группа. Тогда $\mathfrak{F}$-инъектор либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G.*

Глава 5 посвящена характеризации подгрупп Фишера и нахождению новых канонических классов сопряженных подгрупп Фишера в фиттинговых множествах частично разрешимой группы.

В теории классов известна теорема Фишера[11] (см. также[9]) о том, что для класса Фишера $\mathfrak{F}$ разрешимой группы G, $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера G совпадают с $\mathfrak{F}$-инъекторами G и образуют единственный класс сопряженных подгрупп.

Нами было получено обобщение теоремы Фишера для случая π-насыщенного множества Фишера π-разрешимой группы G.

5.1.3 Теорема [5]. *Пусть $\mathcal{F}$ — π-насыщенное множество Фишера π-разрешимой группы G. Тогда подгруппа V группы G является $\mathcal{F}$-инъектором G тогда и только тогда, когда V является $\mathcal{F}$-подгруппой Фишера G, содержащей холлову π'-подгруппу G.*

5.1.4 Следствие (Б. Хартли[5], Б. Фишер[11]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимый класс Фишера. Тогда каждая разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-подгрупп Фишера.*

Заметим, что если $\mathcal{F}$ — π-насыщенное фиттингово множество π-разрешимой группы G, то $\mathcal{F}$-инъекторы сопряжены в G (см.[8]). Поэтому непосредственно из теоремы 5.1.3 вытекает

5.1.5 Следствие. *Пусть $\mathcal{F}$ — π-насыщенное множество Фишера π-разрешимой группы G. Тогда $\mathcal{F}$-подгруппы Фишера, содержащие холлову π'-подгруппу G, сопряжены в G.*

В разделе 5.2 мы развиваем результаты А. Д'Аниелло[26] и М. Д. Перез-Рамос[27] о характеризации $\mathfrak{F}$-подгрупп Фишера, в общем случае неразрешимых, посредством свойства дуальной пронормальности подгрупп.

[26] D'Aniello, A. Dualpronormality and Fitting classes / A. D'Aniello // Comm. Algebra. — 1998. — Vol. 26, № 2. — P. 425—433.

[27] Pérez-Ramos, M. D. On A-normality, strong normality and $\mathfrak{F}$-dual pronormal subgroups in Fitting classes / M. D. Pérez-Ramos // Journal of Group Theory. — 2000. — № 3. — P. 127—145.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой радикальный класс, то подгруппа U группы G называется $\mathfrak{F}$-дуально пронормальной в G, если $\langle U, U^g\rangle_{\mathfrak{F}}$ содержится в U для каждого $g \in G$.

5.2.6 Теорема [6]. *Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и $\mathcal{F}$ — наследственное π-насыщенное фиттингово множество G. Если $F \leq G$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *F — $\mathcal{F}$-подгруппа Фишера G, содержащая холлову π'-подгруппу G;*

(2) *F — $\mathcal{F}$-инъектор G;*

(3) *F — $\mathcal{F}$-максимальна и $\mathcal{F}$-дуально пронормальна в G.*

5.2.7 Теорема [6]. *Пусть $\mathcal{F}$ — фиттингово множество π-разрешимой группы G. Если $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ и F — подгруппа группы G, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *F — $\mathcal{F}$-подгруппа Фишера группы G;*

(2) *F — $\mathcal{F}$-максимальная и $\mathcal{F}$-дуально пронормальная подгруппа G.*

Заключительный раздел пятой главы посвящен построению новых семейств фиттинговых множеств π-разрешимых групп, определяемых вложением холловых подгрупп в радикалы групп.

5.3.1 Определение. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\mathcal{F}$ — фиттингово множество π-разрешимой группы G. Обозначим через $\mathcal{R}_\pi(\mathcal{F})$ множество всех подгрупп группы G, которое определяется следующим образом: $\mathcal{R}_\pi(\mathcal{F}) = \{H \leq G : H_\pi \leq H_{\mathcal{F}}\}$.*

5.3.2 Теорема. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $G \in \mathfrak{S}^\pi$. Тогда:*

(1) *$\mathcal{R}_\pi(\mathcal{F})$ — фиттингово множество G;*

(2) *множество $\mathcal{R}_\pi(\mathcal{F})$ π-насыщено;*

(3) *если $\mathcal{F}$ — множество Фишера G, то $\mathcal{R}_\pi(\mathcal{F})$ — множество Фишера G.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе решена задача развития локальных методов исследования в теории фиттинговых множеств конечных групп и их применения для изучения структурных свойств инъекторов, подгрупп Фишера и радикалов.

Основные результаты диссертации следующие:

1. Описаны общие способы построения локальных фиттинговых множеств с помощью функций Хартли. Доказано, что любое множество Хартли может быть определено с помощью устойчивой приведенной и полной приведенной функции Хартли, теоремы 3.1.5 [3, 4] и 3.2.7 [3].

2. Найдены новые классы сопряженных $\mathcal{F}$-инъекторов в конечных группах (в общем случае неразрешимых) и описано их строение для частично π-разрешимой группы G и множества Хартли, определяемого постоянной H-функцией, теоремы 4.2.1 [4] и 4.2.2 [2]. Решена проблема Хартли об описании главных факторов, покрываемых инъекторами, для случая π-локальных фиттинговых множеств частично разрешимых групп, теорема 4.3.4 [3].

3. Доказан аналог теорем Фишера и Хартли о характеризации и сопряженности $\mathcal{F}$-подгрупп Фишера разрешимой группы для π-насыщенного множества Фишера π-разрешимой группы G, теорема 5.1.3 [5]. Описаны подгруппы Фишера конечной группы и инъекторы посредством свойства дуальной пронормальности подгрупп в фиттинговых множествах группы, теоремы 5.2.6 [6] и 5.2.7 [6]. В частности, установлено, что $\mathcal{F}$-подгруппа Фишера — это в точности $\mathcal{F}$-максимальная и $\mathcal{F}$-дуально пронормальная подгруппа в фиттинговом множестве π-разрешимой группы для множества π простых делителей всех её $\mathcal{F}$-подгрупп.

4. Описаны общие закономерности построения фиттинговых множеств π-разрешимой группы, определяемых вложением холловых π-подгрупп в их радикалы, теорема 5.3.2 [1].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные научные результаты могут быть использованы при исследовании классов групп и канонических подгрупп, которые проводятся в Витебском государственном университете имени П.М. Машерова, Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины, Белорусском государственном университете, а также в Институте математики НАН Беларуси.

Полученные результаты исследований позволяют развить результаты известных отечественных и зарубежных математиков (В. Гашюца, Б. Фишера (Германия), Б. Хартли (Великобритания), А. Д'Аниелло (Италия), В Го (Китай), Л. А. Шеметкова, Н. Т. Воробьёва (Беларусь) и др.). Основные результаты диссертации опубликованы в российском переводном журнале [4], а также в зарубежном англоязычном переводном журнале [2], что дает возможность их использования не только в научных центрах Беларуси, но и за её пределами (в Сюйчжоуском нормальном университете (КНР), Университете Науки и Технологий Китая, Наваррском университете (Испания), Тюбингенском университете (Германия) и Школе Науки Цзяннаньского университета (КНР)).

Практическая значимость результатов диссертации подтверждена их применением в учебном процессе Витебского государственного университета имени П. М. Машерова (акты внедрения от 06.09.2015, 04.03.2019), при чтении спецкурсов по теории классов групп для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций, а также для научных исследований, проводимых в рамках задания «Методы локализации и теории решеток в исследовании строения конечных групп и их классов», входящего в Государственную программу научных исследований на 2016 — 2020 годы «Конвергенция—2020».

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Воробьёв, Н. Т. Классы Фиттинга и формации с заданными свойствами холловых подгрупп / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Василевич (Караулова) // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. — 2015. — № 4 (88). — С. 12—18.

2. Yang, N. On Injectors of a Hartley Set of a Finite Group / N. Yang, N. T. Vorob'ev, T. B. Vasilevich (Karaulova) // Algebra Colloquium. — 2018. — Vol. 25, № 4. — P. 671—680.

3. Караулова, Т. Б. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы / Т. Б. Караулова // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2018. — № 3. — С. 29—38.

4. Воробьёв, Н.Т. Множества Хартли и инъекторы конечной группы / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Караулова // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 2. — С. 214—227. Английская версия: Vorob'ev, N. T. Hartley Sets and Injectors of a Finite Group / N. T. Vorob'ev, T. B. Karaulova // Math. Notes. — 2019. — Vol. 105, № 2. — P. 204—215.

5. Караулова, Т. Б. Инъекторы и подгруппы Фишера конечных π-разрешимых групп / Т. Б. Караулова // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 2 (39). — С. 70—75.

6. Караулова, Т. Б. Дуально пронормальные подгруппы и подгруппы Фишера конечных групп / Т. Б. Караулова // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2019. — № 3 (114). — С. 153—157.

Материалы конференций

7. Василевич (Караулова), Т. Б. Формации, определяемые подгруппами Холла / Т. Б. Василевич (Караулова) // Молодость. Интеллект. Инициатива : материалы III Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов, Витебск, 23—24 апр. 2015 г./ Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2015. — С. 5—6.

8. Василевич (Караулова), Т. Б. Формации со свойством вложения холловых подгрупп в нормализаторы / Т. Б. Василевич (Караулова) // IX Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 25 сент. 2015 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2015. — С. 6—7.

9. Василевич (Караулова), Т. Б. О локальных заданиях множеств Хартли / Т. Б. Василевич (Караулова) // XI Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых

ученых, Витебск, 18 окт. 2017 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2017. — С. 10—11.

10. Воробьёв, Н. Т. Инъекторы π-разрешимых групп / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Василевич (Караулова) // Мальцевские чтения : материалы междунар. конф., Новосибирск, 20—24 нояб. 2017 г. / Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирский национальный исследовательский гос. ун-т. — Новосибирск, 2017. — С. 66.

11. Vasilevich (Karaulova), T. On the cover-avoid property of injectors of finite group / T. Vasilevich (Karaulova) // The Youth of the 21th Century : Education, Science, Innovations : materials of the International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 6, 2017 / Vitebsk State University ; Editorial board : I. M. Prishepa (editor in chief.) [and others.]. — Vitebsk, 2017. — P. 18—19.

Тезисы докладов

12. Воробьёв, Н. Т. Инъекторы частично разрешимых конечных групп / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Василевич (Караулова) // XI школа-конференция по теории групп : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А. Ю. Ольшанского. Красноярск, 27 июля—2 августа 2016 г. / отв. за вып. : С. И. Башмаков, И. Н. Зотов, Я. Н. Нужин [и др.]. — Красноярск, 2016. — С. 10—11.

13. Воробьёв, Н. Т. О характеризации инъекторов конечных групп / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Василевич (Караулова) // XII Белорусская математическая конференция : материалы междунар. науч. конф., Минск, 5—10 сент. 2016 г.: в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред. С. Г. Красовский. — Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. — Ч. 5. — С. 19—20.

14. Vorob'ev, N. T. On Hartley sets and injectors of a finite group / N. T. Vorob'ev, T. B. Vasilevich (Karaulova) // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko : abstracts, Kyiv, July 3—7, 2017 / Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — Kyiv, 2017. — P. 141.

15. Воробьёв, Н. Т. Локальные задания множеств Хартли конечной группы / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Василевич (Караулова) // Наука — образованию, производству, экономике : материалы XXIII(70) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 15 февр. 2018 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2018. — Т. 1. — С. 7—8.

16. Воробьёв, Н. Т. О главных факторах, покрываемых инъекторами частично π-разрешимой группы / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Василевич (Карауло-

ва) // Междунар. алгебр. конф., посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (1908—1971), Москва, 23—25 мая 2018 г. / МГУ — Москва, 2018. — С. 63—65.

17. Караулова, Т.Б. О характеризации инъекторов для множеств Фишера / Т. Б. Караулова // Наука — образованию, производству, экономике: материалы XXIV(71) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14 февр. 2019 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2019. — Т. 1. — С. 13—14.

18. Воробьёв, Н. Т. О характеризации подгрупп Фишера конечных π-разрешимых групп / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Караулова // Междунар. конф., посвящённая 90-летию каф. высшей алгебр. мех.-мат. факультета МГУ, Москва, 28—31 мая 2019 г. / Московский гос. ун-т имени М. В. Ломоносова ; оргкомитет: В. Н. Чубариков, В. А. Артамонов [и др.]. — Москва, 2019. — С. 24—25.

19. Karaulova, T. On injectors and Fischer subgroups of a finite π-soluble group / T. Karaulova // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary V. Bunyakovsky : abstracts, Vinnytsia, July 2—6, 2019 / Vasyl' Stus Donetsk National University. — Vinnytsia, 2019. — P. 49.

РЭЗЮМЭ

Караулава Таццяна Барысаўна

Фітынгавы мноства канечных груп

Ключавыя словы: канечная група, фітынгава мноства групы G, $\mathcal{F}$-ин'ектар, мноства Фішэра, $\mathcal{F}$-падгрупа Фішэра групы G.

Мэта працы: развіццё лакальных метадаў даследавання у тэорыі фітынгавых мностваў канечных груп і іх прымяненне для апісання уласцівасцяў кананічных сістэм падгруп.

Метады даследавання: метады абстрактнай тэорыі груп, метады тэорыі класаў груп і тэорыі фітынгавых мностваў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Распрацаваны новыя лакальныя метады даследавання падгрупавой будовы групы з дапамогай апісання фітынгавых уласцівасцяў сістэм яе кананічных падгруп. Апісаны агульныя заканамернасці пабудовы лакальных фітынгавых мностваў канечных груп пры дапамозе зададзеных уласцівасцяў радыкалаў, што дазволіла знайсці новыя кананічныя класы звязаных ін'ектараў і падгруп Фішэра ў канечнай групе (у агульным выпадку невырашальнай), а таксама апісаць іх будову. Вырашана праблема Хартлі аб апісанні галоўных фактараў, якія пакрыты ін'ектарамі, для выпадку лакальных фітынгавых мностваў часткова вырашальнай групы. Апісаны фітынгавы мноства групы, для якіх у групе яе ін'ектары і падгрупы Фішэра ўтвараюць адзін і той жа клас звязаных падгруп. Знойдзены характэрызацыі падгруп Фішэра групы пры дапамозе ўласцівасцяў дуальнай пранармальнасці падгруп у фітынгавым мностве часткова вырашальнай групы. Апісаны метады пабудовы фітынгавых мностваў π-вырашальнай групы, якія вызначаюцца укладаннем яе холавых π-падгруп у радыкалы гэтай групы.

Усе атрыманыя вынікі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі даследаванняў маюць тэарэтычны характар. Яны могуць знайсці прымяненне для вырашэння задач апісання падгрупавой структуры канечных груп фітынгавых мностваў і класаў груп. Матэрыялы даследаванняў могуць быць выкарыстаны пры чытанні спецкурсаў па тэорыі класаў груп для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцей, напісанні курсавых і дыпломных праектаў, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Галіна прымянення: сучасная тэорыя груп і іх класаў.

РЕЗЮМЕ

Караулова Татьяна Борисовна

Фиттинговы множества конечных групп

Ключевые слова: конечная группа, фиттингово множество группы G, $\mathcal{F}$-инъектор, множество Фишера, $\mathcal{F}$-подгруппа Фишера группы G.

Цель работы: развитие локальных методов исследования в теории фиттинговых множеств конечных групп и их применение для описания свойств канонических систем подгрупп.

Методы исследования: методы абстрактной теории групп, методы теории классов групп и теории фиттинговых множеств.

Полученные результаты и их новизна. Разработаны новые локальные методы исследования подгруппового строения группы посредством описания фиттинговых свойств систем её канонических подгрупп. Описаны общие закономерности построения локальных фиттинговых множеств конечных групп при помощи заданных свойств радикалов, что позволило найти новые канонические классы сопряженных инъекторов и подгрупп Фишера в конечной группе (в общем случае неразрешимой), а также описать их строение. Решена проблема Хартли об описании главных факторов, покрываемых инъекторами, для случая локальных фиттинговых множеств частично разрешимой группы. Описаны фиттинговы множества группы, для которых в группе её инъекторы и подгруппы Фишера образуют один и тот же класс сопряженных подгрупп. Найдены характеризации подгрупп Фишера группы при помощи свойства дуальной пронормальности подгрупп в фиттинговом множестве частично разрешимой группы. Описаны методы построения фиттинговых множеств π-разрешимой группы, определяемых её вложением холловых π-подгрупп в радикалы этой группы.

Все полученные результаты являются новыми.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты исследований имеют теоретический характер. Они могут найти применение для решения задач описания подгрупповой структуры конечных групп фиттинговых множеств и классов групп. Материалы исследований могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область применения: современная теория групп и их классов.

SUMMARY

Karaulova Tatyana Borisovna

Fitting sets of finite groups

Keywords: finite group, Fitting set of a group G, $\mathcal{F}$-injector, Fischer set, Fischer $\mathcal{F}$-subgroup of a group G.

Research aim: the development of local methods research in the theory of Fitting sets of finite groups and their application to describe the properties of canonical systems of subgroups.

Research methods: the methods of the abstract group theory, the methods of the theory of classes of groups and the theory of Fitting sets theory.

The obtained results and their novelty. New local methods for studying the subgroup structure of the group using the Fitting properties of systems of its canonical subgroups were developed. The general laws of constructing local Fitting sets of finite groups using the given properties of radicals are described which made it possible to find new canonical classes of conjugate injectors and Fischer subgroups in finite group (in the general case non-soluble), and also describe their structure. Hartley's problem of describing the main factors covered by injectors for the case of the local Fitting sets of the partially soluble group. The Fitting sets of the group are described, for which in a group its injectors and Fischer subgroups form the same class of conjugate subgroups. The characterizations of the Fischer subgroups of the group using the dual pronormality property of subgroups in Fitting set of a partially soluble group are found. Methods are described for constructing Fitting sets of a π-soluble group defined by the embedding its of Hall π-subgroups into radicals of this group.

All the obtained results are new.

Recommendation for use. The obtained results are of theoretical nature. They can be used for solving the problems of describing the subgroup structure of finite groups of Fitting sets and classes of group. The research materials can be used while delivering special courses on the theory of groups for students of mathematical specialities, while writing terms papers and graduation projects, master of philosophy and doctor of philosophy theses.

Application field: the modern theory of groups and their classes.

Научное издание

КАРАУЛОВА Татьяна Борисовна

ФИТТИНГОВЫ МНОЖЕСТВА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 23.09.2020. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,53. Тираж 60 экз. Заказ № 429.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель