УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

МАРЦИНКЕВИЧ
Анна Веславовна

НОРМАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2020

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Научный руководитель: **Воробьёв Николай Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Официальные оппоненты: **Гальмак Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Могилевский государственный университет продовольствия»;

Васильева Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Оппонирующая организация — Белорусский государственный университет.

Защита состоится — 14 февраля 2020 года в 15^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: (+375 232) 51-03-01. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан — 10 января 2020 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации рассматриваются только конечные группы. Множество групп $\mathfrak{X}$ называют классом групп[1], если из условия $G \in \mathfrak{X}$ и $H \cong G$ следует $H \in \mathfrak{X}$. Важное прикладное значение теории классов групп в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп было найдено в 60-е годы прошлого столетия в работах В. Гашюца[2] и В. Гашюца, Б. Фишера, Б. Хартли[3], где в терминах формаций и классов Фиттинга были получены обобщения фундаментальных теорем Силова[4] и Холла[5].

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется: (1) формацией, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений; (2) классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Первоначально классы Фиттинга рассматривались как объекты, дуальные формациям (исходя из определений классов Фиттинга и формаций, считалось существенным для изучения классов Фиттинга применение соответствия: нормальные подгруппы $\leftrightarrow$ факторгруппы). Однако уже в 1970 году Д. Блессенолем и В. Гашюцом[6] были определены в универсуме $\mathfrak{S}$ нормальные классы Фиттинга и построена серия нетривиальных примеров таких классов Фиттинга, каждый из которых нормален и не является формацией. Более того, оказалось, что из результатов Ф. П. Локетта[7] следует, что любой неединичный нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, отличный от $\mathfrak{S}$, не является формацией. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным[6], если для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G. При этом $\mathfrak{F}$-инъектор G — ее подгруппа V такая, что $V \bigcap N$ — подгруппа $\mathfrak{F}$-максимальная в N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Актуальность развития и становления целого содержательного направления исследований в теории классов групп — теории нормальных классов Фиттинга обусловлена, прежде всего, следующими обстоятельствами. Во-первых, В. Гашюцом[8] (см. также теоремы X.3.14 и X.3.16[1]) были выявлены два важных приложения нормальных классов Фиттинга для описания в терминах

[1]Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

[2]Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. — 1963. — Bd. 80, № 4. — S. 300—305.

[3]Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. — 1967. — Bd. 102, № 5. — S. 337—339.

[4]Sylow, M. L. Théorèmes sur les groupes de substitutions / M. L. Sylow // Math. Ann. — 1872. — Vol. 5. — P. 584—594.

[5]Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. — 1928. — Vol. 3. — P. 98—105.

[6]Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. — 1970. — Bd. 118, № 1. — S. 1—8.

[7]Lockett, F. P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F. P. Lockett // Math. Z. — 1974. — Bd. 137, № 2. — S. 131—136.

[8]Gaschütz, W. Zwei Bemerkungen über normale Fittingklassen / W. Gaschütz // J. Algebra. — 1974. — Vol. 30. — P. 277—278.

факторов радикалов структуры произвольной конечной группы. Во-вторых, Х. Лаушем[9] было установлено, что решетка всех нормальных классов Фиттинга изоморфна решетке всех подгрупп некоторой бесконечной абелевой группы (группы Лауша) и, следовательно, является модулярной и атомарной. Наконец, Ф. П. Локеттом[7] была выдвинута следующая гипотеза об описании структуры класса Фиттинга в терминах радикалов: каждый разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является пересечением $\mathfrak{F}^*$ и некоторого нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ (см. проблема[7], с. 135). При этом $\mathfrak{F}^*$ — наименьший из классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$, такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*}{=}G_{\mathfrak{F}^*}{\times}H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H. Заметим, что если $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа $G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{X}$-радикал G.

В последующем алгебра нормальных классов Фиттинга разрешимых групп формировалась как самостоятельный раздел теории классов благодаря результатам Дж. Косси, Дж. Бейдлемана, Е. Кусака, П. Хаука, О. Бризона, К. Дёрка, М. Порты и др. (см. литературу[1]). В частности, основополагающими результатами для исследований свойства нормальности классов стали результаты Дж. Косси[10] и Е. Кусака[11], где установлено, что для любых нормальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и решеточное объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ являются нормальными классами Фиттинга. Значительный прогресс в изучении свойств произведений классов Фиттинга был достигнут П. Хауком[12], который доказал критерий их нормальности.

Вместе с тем все исследования нормальных классов Фиттинга ограничивались лишь рамками универсума $\mathfrak{S}$, хотя ввиду получения новых результатов в теории классов Фиттинга появились следующие предпосылки для развития теории нормальных классов Фиттинга в общем случае неразрешимых групп. Во-первых, в работах Л. А. Шеметкова, В. Г. Сементовского, В. Го, Н. Т. Воробьёва, В. Го и Н. Янга, А. Баллестера-Болинше было доказано существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-инъекторов в частично разрешимых группах. Во-вторых, впервые Х. Лауэ[13] и в последующем К. Дёрком и Т. Хоуксом[1] предложена следующая локализация понятия нормальности класса Фиттинга. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп и $\mathfrak{F}$ — инъективный[14] (см. с. 115) подкласс $\mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{X}$-нормальным (локаль-

[9] Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. — 1973. — Bd. 130, № 1. — S. 67—72.

[10] Cossey, J. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. — 1975. — Bd. 141, № 3. — S. 289—295.

[11] Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. — 1979. — Bd. 167, № 1. — S. 37—47.

[12] Hauck, P. On products of Fitting classes / P. Hauck // J. London Math. Soc. — 1979. — Vol. 20, № 2. — P. 423—434.

[13] Laue, H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. — 1977. — Vol. 45. — P. 274—283.

[14] Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. — Dordrecht : Springer, 2006. — 385 p.

но нормальным по предложению П. Хаука[15]) в случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторы — нормальные подгруппы G. Если $\mathfrak{X}$ — класс всех π-групп, в частности, всех разрешимых π-групп, то $\mathfrak{F}$ называют π-нормальным. Очевидно, для $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ класс $\mathfrak{F}$ нормальный. Поэтому основополагающей является *задача нахождения критериев локальной нормальности произведений и решеточных объединений классов Фиттинга.*

В теории классов известны задачи о существовании произведений локальных формаций (локальных классов Фиттинга), каждый из множителей которых не является локальной формацией (локальным классом Фиттинга) (см. вопросы 9.58 и 11.25(а) из «Коуровской тетради»[16]). Положительное решение этих задач было получено в работах Н. Т. Воробьёва, В. А. Ведерникова, Н. Т. Воробьёва и А. Н. Скибы (см. литературу[17]). В связи с этим представляет интерес *задача о существовании произведений локально нормальных классов Фиттинга, каждый из множителей которых не является локально нормальным.*

П. Хауком[15] (в универсуме $\mathfrak{S}$) была предложена следующая локализация понятия нормальности класса Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в непустом классе групп $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{X}$-квазинормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для каждого $p \in \mathbb{P}$ из $G \in \mathfrak{F}$, $G \wr Z_p \in \mathfrak{X}$ следует $G^m \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, класс $\mathfrak{F}$ является нормальным.

В теории классов известен результат Блессеноля—Гашюца[6] о том, что пересечение неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга, т.е. в универсуме $\mathfrak{S}$ существует наименьший неединичный нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$. Можно показать, что для $\mathfrak{X}$-квазинормальных классов Фиттинга справедлив аналог теоремы Блессеноля—Гашюца, т.е. существует наименьший неединичный $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга, который обозначим символом $\mathfrak{X}_{\circledast}$. В работе[1] (см. предложение X.6.1) Р. А. Брайсом и Дж. Косси было установлено, что для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедлива гипотеза Локетта в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$ в точности тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{H}_*$. Напомним, что для класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ символом $\mathfrak{X}_*$ обозначают пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{Y}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{Y}^*$. Хотя в общем случае гипотеза Локет-

[15]Hauck, P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen : Diss. ... Doctor der Naturwissenschaften / P. Hauck. — Mainz, 1977. — 153 S.

[16]Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО АН СССР ; сост.: В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. — 11-е изд. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1990. — 126 с.

[17]Воробьёв, Н. Т. Локальные произведения нелокальных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, А. Н. Скиба // Вопросы алгебры : сб. / Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: Л. А. Шеметков [и др.]. — Гомель : Изд-во Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины, 1995. — Вып. 8. — С. 55—58.

та была опровергнута Т. Р. Бергером и Дж. Косси[18], до настоящего времени задача описания семейств классов Фиттинга, для которых она и ее обобщенный вариант верны, актуальна. В этом направлении известны результаты Дж. Бейдлемана и П. Хаука, Н. Т. Воробьёва, М. П. Галлего, Н. Т. Воробьёва, В. Го и К. П. Шама и др. (см. литературу[19]). Так как существуют примеры (см. пример 5.3[15]), которые показывают, что для класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в общем случае $\mathfrak{X}_* \neq \mathfrak{X}_{\circledast}$, то возникает следующая *задача: определить те условия, при которых* $\mathfrak{X}_* = \mathfrak{X}_{\circledast}$ *и для* $\mathfrak{X}$*-квазинормального класса* $\mathfrak{F}$ *справедливы гипотеза Локетта и обобщенная гипотеза Локетта, т.е. справедливы равенства* $\mathfrak{F}_{\circledast} = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{X}_{\circledast}$ *и* $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{X}_*$.

Ввиду результатов Х. Лауша[9], Д. Блессеноля и В. Гашюца[6] решетка всех нормальных классов Фиттинга обладает свойствами модулярности и полноты. Вместе с тем, во-первых, в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп до сих пор является открытым вопрос Дёрка—Хоукса[1] (см. с. 716) о полноте решетки неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга при условии $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. Во-вторых, ориентиром для исследований решеток классов Фиттинга служит также нерешенный вопрос о модулярности решетки всех классов Фиттинга разрешимых групп (см. вопрос 14.47 из «Коуровской тетради»[20]). Кроме того, до сих пор неисследованной является подрешеточная структура решетки нормальных классов Фиттинга. В связи с этим актуальна *задача определения условий полноты и модулярности решетки локально нормальных классов Фиттинга, а также описания подрешеточного строения этой решетки.*

Таким образом, исследование алгебр локально нормальных и квазинормальных классов Фиттинга, определяемое указанными выше задачами, является актуальным. Реализации его и посвящена настоящая диссертация.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» с 2013 по 2019 год в соответствии со следующими научными темами: «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп», входящей

[18]Berger, T. R. An example in the theory of normal Fitting classes / T. R. Berger, J. Cossey // Math. Z. — 1977. — Bd. 154, № 3. — S. 287—293.

[19]Guo, W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. — Dordrecht : Springer-Verlag, 2015. — 359 p.

[20]Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН ; сост.: В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. — 14-е изд. — Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 1999. — 135 с.

в государственную программу научных исследований на 2011—2015 годы «Конвергенция», подпрограмма «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития», регистрационный номер в БелИСА — 20111880; «Классы Фиттинга, определяемые заданными свойствами радикалов и инъекторов», грант Министерства образования Республики Беларусь на 2012 год, регистрационный номер в БелИСА — 20121176; «Нормальные классы Фиттинга конечных групп», грант Министерства образования Республики Беларусь на 2015 год, регистрационный номер в БелИСА — 20150547; «Методы локализации и теории решеток в исследовании строения конечных групп и их классов», входящей в государственную программу научных исследований на 2016—2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», регистрационный номер в БелИСА — 20160350; «Конечные группы с заданными свойствами инъекторов», грант БРФФИ на 2017—2019 годы, регистрационный номер в БелИСА — 20170835.

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является развитие локальных методов и их применение при исследовании алгебр нормальных классов Фиттинга.

Для достижения этой цели в диссертации необходимо было решить следующие взаимосвязанные задачи:

— изучить свойства произведений и решеточных объединений локально нормальных классов Фиттинга, доказать критерии их локальной нормальности;

— исследовать вопрос существования локально нормальных классов Фиттинга, факторизуемых нелокально нормальными сомножителями;

— установить признаки квазинормальности классов Фиттинга, исследовать свойства пересечений этих классов и их применение для описания строения классов Фиттинга;

— определить условия полноты и модулярности решетки локально нормальных классов Фиттинга и описать подрешеточное строение этой решетки.

Объектом исследования являются локально нормальные и квазинормальные классы Фиттинга конечных групп. Предмет исследования — структурные свойства алгебр этих классов.

Научная новизна

Все результаты являются новыми, впервые получены автором.

Описана подгрупповая структура конечных групп и их классов при помощи свойства нормальности канонических подгрупп. Впервые установлены критерии локальной нормальности произведений и решеточных объединений классов Фиттинга. Доказано существование локально нормальных классов Фиттинга, факторизуемых нелокально нормальными сомножителями. Установлена справедливость обобщенной гипотезы Локетта для квазинормальных классов Фиттинга. Решена проблема Дёрка—Хоукса о полноте решетки локально нормальных классов Фиттинга для случая классов Фишера частично разрешимых групп. Доказано, что решетки всех нормальных классов Фиттинга произвольных конечных групп обладают свойством модулярности. Описаны методы построения подрешеток решетки локально нормальных классов Фиттинга.

Полученные результаты могут быть использованы для решения задач описания подгрупповой структуры конечных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов по теории классов групп для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказательство критериев локальной нормальности произведений и решеточных объединений классов Фиттинга, теоремы 3.2.2 [2, 3] и 3.2.7 [5].

2. Доказательство существования локально нормальных произведений классов Фиттинга, факторизуемых нелокально нормальными сомножителями, теорема 3.3.2 [5].

3. Описание структурных свойств квазинормальных классов Фиттинга (доказательство аналога теоремы Блессеноля—Гашюца и подтверждение обобщенной гипотезы Локетта для квазинормальных классов Фиттинга), теоремы 4.2.6 [6] и 4.3.3 [6].

4. Признаки полноты и модулярности решетки локально нормальных классов Фиттинга и ее подрешеточное строение (положительное решение проблемы К. Дёрка и Т. Хоукса[1] для случая классов Фишера частично разрешимых групп), теоремы 5.1.4 [4], 5.2.3 [3] и 5.3.4 [7, 8].

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Николая Тимофеевича Воробьёва. Научным руководителем поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах [1, 2, 3, 5, 14, 15, 16, 17] идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация — соискателю. В работе [7], опубликованной совместно с научным руководителем, Н. Янгом и Ш. Жао, идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем и китайскими математиками, которые обеспечивали качественный перевод статьи на английский язык. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации апробированы на научных семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» и кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», а также на следующих международных и региональных научных конференциях: Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Н. Черникова (20—26 августа 2012 г., Киев); международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (5—9 ноября 2012 г., Минск); 9-й Международной алгебраической конференции в Украине (8—13 июля 2013 г., Львов); Международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения А. Ю. Ольшанского (27 июля — 2 августа 2016 г., Красноярск); международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (5—10 сентября 2016 г., Минск); 11-й Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 75-летию со дня рождения В. В. Кириченко (3—7 июля 2017 г., Киев); международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XI Машеровские чтения» (18 октября 2017 г., Витебск); XXIII (70) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука — образованию, производству, экономике» (15 февраля 2018 г., Витебск); V Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations» (12 декабря 2018 г., Витебск); международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XIII Машеровские чтения» (18 октября 2019 г., Витебск).

Отдельные результаты диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» при чтении спецкурса «Основы теории групп и их классов» для студентов математических специальностей (акты внедрения от 25.10.2010, 25.10.2011, 14.05.2012, 04.04.2013, 04.03.2019) и Школы науки Цзяннаньского университета (КНР), что подтверждает совместная публикация [7] с учеными Н. Янгом и Ш. Жао, выполненная по гранту NNSF (КНР) № 11301277 по теме «Классы Фиттинга и множества Фиттинга».

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 статьях в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоения ученых званий в Республике Беларусь, и в 10 материалах и тезисах докладов конференций. Общий объем опубликованных материалов — 4,22 авторского листа, в том числе статьи в научных журналах — 3,5 авторского листа, тезисы и материалы докладов конференций — 0,72 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 81 наименования использованных источников и 18 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 86 страниц, из них 8 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьёву за помощь и внимание, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В определениях и обозначениях мы следуем[1].

Глава 1 содержит аналитический обзор основных литературных источников по теме диссертации. В этой главе дается описание объектов исследования диссертационной работы, формулируются нерешенные вопросы и задачи.

Глава 2 содержит ряд вспомогательных утверждений, наиболее часто используемых в доказательствах на протяжении последующих глав диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3—5.

Глава 3 посвящена исследованию локально нормальных классов Фиттинга. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп, $\mathfrak{F}$ — инъективный[14] класс Фиттинга в универсуме $\mathfrak{X}$, то есть для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G, то $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{X}$-нормальным или локально нормальным классом Фиттинга.

В разделе 3.1 получены признаки локальной нормальности классов Фиттинга. В частности, доказано

3.1.3 Предложение [4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга $\sigma(\mathfrak{F})$-разрешимых групп. Справедливы следующие утверждения:*

(a) *если $\sigma(\mathfrak{F}) \bigcap \sigma(\mathfrak{M}) = \varnothing$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. В частности, $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{F}\mathfrak{M}$;*

(b) *если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{M}$.*

Предложение позволяет строить серию примеров локально нормальных классов Фиттинга. В частности, если $p, q \in \mathbb{P}$ таковы, что $q \neq p$, то по утверждению (a) предложения 3.1.3 получаем $\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_q \trianglelefteq \mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_q\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{\{p,q\}'}$ и $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \trianglelefteq (\mathfrak{N}_{\{p,q\}})^2\mathfrak{S}_{\{p,q\}'}$. Если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, то по утверждению (b) предложения 3.1.3 $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_\pi \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$.

В разделах 3.2 и 3.3 все рассматриваемые группы предполагаются разрешимыми. В разделе 3.2 решена задача изучения свойств произведений и решеточных объединений локально нормальных классов Фиттинга.

Напомним, что произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$. Решеточное объединение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$.

Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ назовем π-нормальным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга (будем обозначать $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$). Критерий π-нормальности произведений классов Фиттинга представляет

3.2.2 Теорема [2, 3]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* (a) $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$; (b) $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$; (c) $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$; (d) $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$; (e) *существует множество простых чисел $\sigma \subseteq \pi$ такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$.*

Решеточное объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ назовем π-нормальным, если $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга. Как установлено Е. Кусаком[11], объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ — нормальный класс Фиттинга в случае, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ нормален. Критерий π-нормальности решеточных объединений классов Фиттинга — следующая

3.2.7 Теорема [5]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп. Решеточное объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является π-нормальным классом Фиттинга тогда и только тогда, когда хотя бы один из классов $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ π-нормален.*

Следствиями теорем 3.2.2 и 3.2.7 являются результаты работ П. Хаука[12] и Е. Кусака[11] о характеризации нормальных произведений и решеточных объединений классов Фиттинга разрешимых групп соответственно.

Следующая теорема решает вопрос о существовании нетривиальных локально нормальных произведений классов Фиттинга, каждый из сомножителей которых нелокально нормальный класс Фиттинга.

3.3.2 Теорема [5]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга π-групп* *такой, что* $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \neq \mathfrak{S}_\pi$, *и класс* $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{S}_\pi : \mathrm{Soc}_\omega(G) \leq Z(G))$, *где* $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$. *Тогда:*

(a) $\mathfrak{H}$ *является классом Локетта;*

(b) *произведение* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — π*-нормальный класс Фиттинга и каждый из сомножителей* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *не* π*-нормален.*

В главе 4 изучаются квазинормальные классы Фиттинга в универсуме всех конечных групп и частично разрешимых групп.

В работе[15] П. Хаук, обобщая результаты А. Р. Макана[21], ввел следующее определение.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в непустом классе групп $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{X}$-квазинормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для каждого $p \in \mathbb{P}$ из $G \in \mathfrak{F}$, $G \wr Z_p \in \mathfrak{X}$ следует $G^m \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

В разделе 4.1 установлена взаимосвязь локально нормальных ($\mathfrak{X}$-нормальных) и квазинормальных классов Фиттинга. Доказано, что существуют $\mathfrak{X}$-квазинормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-нормальны, и $\mathfrak{X}$-нормальные классы Фиттинга, которые не $\mathfrak{X}$-квазинормальны, теорема 4.1.1 [6].

Раздел 4.2 посвящен описанию общих свойств квазинормальных классов Фиттинга, которые используются при доказательстве последующих результатов главы 4. В частности, доказана

4.2.6 Теорема [6]. *Пересечение любого множества неединичных* $\mathfrak{X}$*-квазинормальных классов Фиттинга является неединичным* $\mathfrak{X}$*-квазинормальным классом Фиттинга. В частности, существует наименьший неединичный* $\mathfrak{X}$*-квазинормальный класс Фиттинга* $\mathfrak{X}_{\circledast}$.

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, следствием теоремы 4.2.6 является известный результат Д. Блессеноля и В. Гашюца[6] о пересечении неединичных нормальных классов Фиттинга.

Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем классом с ограниченным π-свойством сплетения, если для каждого $p \in \pi$ из условия $1 \neq G \in \mathfrak{F}$ и $O^{p'}(G) = G$ следует $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга с ограниченным свойством сплетения[15].

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ удовлетворяет гипотезе Локетта (см. предложение X.6.1[1]) в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$, то есть является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом, в точности тогда, когда $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \bigcap \mathfrak{X}_*$.

Основным результатом раздела 4.3 является теорема 4.3.3, где определены условия, при которых $\mathfrak{X}_* = \mathfrak{X}_{\circledast}$, и доказан аналог гипотезы Локетта для квазинормальных классов Фиттинга.

4.3.3 Теорема [6]. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ *и классы Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{X}$ *таковы, что* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$ *и* $\mathfrak{F}$ *квазинормален в* $\mathfrak{X}$. *Тогда справедливы следующие*

[21]Makan, A. R. Fitting classes with the wreath product property are normal / A. R. Makan // J. London Math. Soc. — 1974. — Vol. 8, № 2. — P. 245—246.

утверждения:

(a) *если* $\mathfrak{X}^*$ *является классом с ограниченным* π*-свойством сплетения, то* $\mathfrak{X}_{\circledast} = \mathfrak{X}_*$*;*

(b) *если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{X}$ *— локальные классы Фиттинга, то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$*-классом.*

В случае, когда класс Фиттинга $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$ и $\pi \neq \mathbb{P}$, $\mathfrak{X}$-квазинормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть π-квазинормальным.

4.3.4 Следствие. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ *и* $\mathfrak{F}$ *является* π*-квазинормальным классом Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) $(\mathfrak{S}_\pi)_{\circledast} = (\mathfrak{S}_\pi)_*$*;*

(b) *если* $\mathfrak{F}$ *— локальный класс Фиттинга, то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{L}_{\mathfrak{S}_\pi}$*-классом.*

4.3.5 Следствие [6]. *Если классы Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{X}$ *таковы, что* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ *и* $\mathfrak{F}$ *квазинормален в* $\mathfrak{X}$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *если* $\mathfrak{X}^*$ *является классом с ограниченным свойством сплетения, то* $\mathfrak{X}_{\circledast} = \mathfrak{X}_*$*;*

(b) *если* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{X}$ *— локальные классы Фиттинга, то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$*-классом.*

В главе 5 исследуются решетки локально нормальных классов Фиттинга произвольных конечных и частично разрешимых групп. В разделе 5.1 найдены признаки полноты решетки локально нормальных классов Фиттинга.

В работах [1, 4] нами установлено, что если $\mathfrak{X}$ — класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ — семейство $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то решетка $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга полная. Следствием данной теоремы является основной результат работы Н. Т. Воробьёва, В. В. Шпакова и Н. Н. Воробьёва[22], а также теорема Блессеноля—Гашюца[6] о полноте решетки всех неединичных нормальных классов Фиттинга. Однако, как показывает следующий пример, не всегда пересечение неединичных локально нормальных классов Фиттинга является неединичным классом Фиттинга.

5.1.1 Пример [4]. Пусть $\{p_1, p_2, \ldots\}$ — множество всех простых чисел и $\mathfrak{X} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{N}_{p_i} \cdots \mathfrak{N}_{p_1}$. Как установлено в работе[23], $\mathfrak{F}_k = \bigcup_{i\in\mathbb{N}, i\geq k} \mathfrak{N}_{p_i} \cdots \mathfrak{N}_{p_k}$ — $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_k = (1)$.

В связи с этим К. Дёрком и Т. Хоуксом[1] (см. с. 716) была сформулирована следующая

5.1.2 Проблема (К. Дёрк, Т. Хоукс[1]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— класс Фиттинга и*

---

[22] Shpakov, V. V. On intersection of normal Fitting classes of finite groups / V. V. Shpakov, N. N. Vorob'ev, N. T. Vorob'ev // Acta Acad. Paedagogicae Agriensis, Sect. Math. — 2003. — Vol. 30. — P. 167—171.

[23] Reifferscheid, S. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups : Diss. ... Doctor der Naturwissenschaften / S. Reifferscheid. — Tübingen, 2001. — 131 p.

$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. *Является ли пересечение двух неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга неединичным $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга? В частности, верно ли это для случая $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$?*

Пример 5.1.1 показывает, что, если $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$, проблема Дёрка—Хоукса в общем случае решается отрицательно. Поэтому представляет интерес задача нахождения семейств классов Фиттинга, для которых проблема 5.1.2 решается положительно без ограничения $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$.

Основным результатом раздела 5.1 является следующая теорема, которая дает положительный ответ на проблему 5.1.2 в случае, когда $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$ в универсуме обобщенно разрешимых групп для классов Фишера.

5.1.4 Теорема [4]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ — семейство неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фишера, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого числа p. Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то решетка неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фишера полная.*

Следствием теоремы 5.1.4 является теорема Блессеноля—Гашюца[6].

В разделе 5.2 исследуется модулярность решетки нормальных классов Фиттинга в универсуме $\mathfrak{E}$.

5.2.2 Определение [3]. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем $\mathfrak{E}_\pi$-нормальным или нормальным в классе $\mathfrak{E}_\pi$, если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}_\pi$. В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, $\mathfrak{E}_\pi$-нормальный класс Фиттинга будем называть нормальным.

5.2.3 Теорема [3]. *Решетка всех $\mathfrak{E}_\pi$-нормальных классов Фиттинга модулярна.*

5.2.4 Следствие [3]. *Решетка всех нормальных классов Фиттинга модулярна.*

5.2.5 Следствие (Х. Лауш[9]). *Решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга модулярна.*

В разделе 5.3 все рассматриваемые группы предполагаются разрешимыми. Следующая теорема описывает метод построения подрешетки решетки всех π-нормальных классов Фиттинга.

5.3.4 Теорема [7, 8]. *Пусть π — некоторое бесконечное множество простых чисел. Множество всех π-нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден не π-нормальным классом Фиттинга π-групп, является подрешеткой решетки всех π-нормальных классов Фиттинга.*

5.3.5 Следствие [7, 8]. *Множество всех нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден ненормальным классом Фиттинга, является подрешеткой решетки всех нормальных классов Фиттинга.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе решена задача развития локальных методов и их применения при исследовании алгебр нормальных классов Фиттинга. Основные результаты диссертации следующие:

1. Описаны свойства произведений и решеточных объединений локально нормальных классов Фиттинга. Доказан критерий π-нормальности произведений для классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, теорема 3.2.2 [2, 3]. В частности, доказано, что произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга в точности тогда, когда существует множество простых чисел $\sigma \subseteq \pi$ такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$. В теореме 3.2.7 [5] доказан критерий π-нормальности решеточных объединений классов Фиттинга.

Как следствия из теорем 3.2.2 и 3.2.7 получены известные результаты П. Хаука[12] и Е. Кусака[11] соответственно.

2. Доказано существование π-нормальных произведений классов Фиттинга, факторизуемых не π-нормальными сомножителями, теорема 3.3.2 [5].

3. Описаны структурные свойства квазинормальных классов Фиттинга. Доказан аналог теоремы Блессеноля—Гашюца и подтвержден обобщенный вариант гипотезы Локетта для квазинормальных классов Фиттинга, теоремы 4.2.6 [6] и 4.3.3 [6].

4. Определены условия полноты решетки локально нормальных классов Фиттинга, т.е. получено положительное решение проблемы К. Дёрка и Т. Хоукса[1] без требования $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ для произвольного семейства неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фишера частично разрешимых групп в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс Фишера такой, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого p, теорема 5.1.4 [4].

В главе 5 введено понятие нормального класса Фиттинга произвольных групп. Кроме того, доказано, что решетка таких классов модулярна, теорема 5.2.3 [3]. Из теоремы 5.2.3 следует известный результат Х. Лауша[9] в универсуме всех разрешимых групп.

Описано подрешеточное строение решетки π-нормальных классов Фиттинга. В частности, в теореме 5.3.4 [7, 8] установлено, что множество всех π-нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден не π-нормальным классом Фиттинга π-групп, является подрешеткой решетки всех π-нормальных классов Фиттинга (π — некоторое бесконечное множество простых чисел).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут найти применение для решения задач описания подгрупповой структуры конечных групп и их классов и при исследованиях нормальных классов Фиттинга, проводимых в Витебском государственном университете имени П. М. Машерова, Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, Белорусском государственном университете, а также в Институте математики НАН Беларуси.

Тот факт, что полученные результаты исследований позволяют развить результаты известных отечественных и зарубежных математиков (П. Хаука, Х. Лауша, Д. Блессеноля, В. Гашюца (Германия), Е. Кусака (Великобритания), Н. Т. Воробьёва, Н. Н. Воробьёва (Беларусь) и др.), а также то, что основные результаты диссертации опубликованы в российских переводных журналах [3, 5] и в зарубежном англоязычном журнале [7], дает возможность их использования не только в научных центрах Беларуси, но и за ее пределами (в Институте математики Сибирского отделения РАН, Московском городском университете, Сюйчжоуском нормальном университете (КНР), Университете науки и технологий Китая, Наваррском университете (Испания), Тюбингенском университете (Германия) и в Школе науки Цзяннаньского университета (КНР)).

Практическая значимость результатов диссертации подтверждена их применением в учебном процессе Витебского государственного университета имени П. М. Машерова (акты внедрения от 25.10.2010, 25.10.2011, 14.05.2012, 04.04.2013, 04.03.2019) при чтении спецкурсов по теории классов групп для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций, а также для научных исследований, проводимых в рамках задания «Методы локализации и теории решеток в исследовании строения конечных групп и их классов», входящего в государственную программу научных исследований на 2016—2020 годы «Конвергенция-2020».

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Воробьёв, Н. Т. О пересечении локально нормальных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, Е. Н. Залесская, А. В. Турковская (Марцинкевич) // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. — 2010. — № 3 (57). — С. 7—12.

2. Турковская (Марцинкевич), А. В. Об операторах Локетта и произведениях π-нормальных классов Фиттинга / А. В. Турковская (Марцинкевич), Н. Т. Воробьёв // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. — 2011. — № 4 (64). — С. 10—14.

3. Воробьёв, Н. Т. Конечные π-группы с нормальными инъекторами / Н. Т. Воробьёв, А. В. Марцинкевич // Сиб. мат. журн. — 2015. — Т. 56, № 4. — С. 790—797. Английская версия: Vorob'ev, N. T. Finite π-groups with normal injectors / N. T. Vorob'ev, A. V. Martsinkevich // Siberian Math. J. — 2015. — Vol. 56, № 4. — P. 624—630.

4. Марцинкевич, А. В. О проблеме Дёрка—Хоукса для локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // Проблемы физики, математики и техники. — 2018. — № 4 (37). — С. 90—97.

5. Марцинкевич, А. В. Произведения и объединения локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич, Н. Т. Воробьёв // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 2. — С. 152—157.

6. Марцинкевич, А. В. Квазинормальные классы Фиттинга конечных групп / А. В. Марцинкевич // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2019. — № 2. — С. 18—26.

7. Yang, N. On the sublattice of the lattice of π-normal Fitting classes / N. Yang, Sh. Zhao, A. V. Martsinkevich, N. T. Vorob'ev // J. of Algebra and it's Application. — 2019. — DOI: 10.1142/S0219498820501054.

8. Марцинкевич, А. В. О решетке локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2019. — № 6 (117). — С. 144—149.

Материалы конференций

9. Марцинкевич, А. В. О свойствах решеточных объединений классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // XII Белорусская математическая конференция : материалы междунар. науч. конф., Минск, 5—10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред. С. Г. Красовский. — Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. — Ч. 5. — С. 39—40.

10. Марцинкевич, А. В. О свойствах π-квазинормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // XI Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 окт. 2017 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2017. — С. 27—28.

11. Марцинкевич, А. В. О характеризации локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // Наука — образованию, производству, экономике : материалы XXIII (70) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 15 февр. 2018 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2018. — Т. 1. — С. 15.

12. Marcinkevich, A. On properties of quasinormal Fitting classes / A. Marcinkevich // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, Dec. 12, 2018 / Vitebsk State University ; Editorial board: I. M. Prischepa (Editor in Chief) [and others]. — Vitebsk, 2018. — P. 16—17.

13. Марцинкевич, А. В. О гипотезе Локетта для квазинормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // XIII Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 окт. 2019 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2019. — С. 29.

Тезисы докладов

14. Vorob'ev, N. T. On π-normal lattice join of Fitting classes / N. T. Vorob'ev, A. V. Turkovskaya (Martsynkevich) // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov : Book of absracts, Kyiv, Aug. 20—26, 2012 / Dragomanov National Pedagogical University. — Kyiv, 2012. — P. 172.

15. Воробьёв, Н. Т. О признаке π-нормальности классов Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, А. В. Турковская (Марцинкевич) // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 5—9 нояб. 2012 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т ; редкол.: С. Г. Красовский, В. В. Лепин. — Минск, 2012. — Ч. 5. — С. 18—19.

16. Martsynkevich, A. V. On modular lattices of π-normal Fitting classes / A. V. Martsynkevich, N. T. Vorob'ev // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine : Abstracts of Reports, L'viv, July 8—13, 2013. — L'viv : Ivan Franko National University of L'viv, 2013. — P. 126.

17. Марцинкевич, А. В. О гипотезе Локетта в теории π-нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич, Н. Т. Воробьёв // XI Школа-конференция по теории групп : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А. Ю. Ольшанского, Красноярск, 27 июля — 2 авг. 2016 г. / Сиб. федер. ун-т ; отв. за вып.: С. И. Башмаков [и др.]. — Красноярск, 2016. — С. 41—42.

18. Martsinkevich, A. V. π-Normal products of Fitting classes with given properties / A. V. Martsinkevich // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko : abstracts, Kyiv, July 3—7, 2017 / Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — Kyiv, 2017. — P. 84.

РЭЗЮМЭ

Марцынкевіч Ганна Веславаўна

Нармальныя класы Фітынга канечных груп

Ключавыя словы: канечная група, клас Фітынга, нармальны клас Фітынга, здабытак класаў Фітынга, рашотка класаў Фітынга.

Мэта працы: развіццё лакальных метадаў і іх прымяненне пры даследаванні алгебр нармальных класаў Фітынга.

Метады даследавання: метады абстрактнай тэорыі груп, метады тэорыі класаў груп і агульнай тэорыі рашотак, у прыватнасці, метады тэорыі класаў Фітынга.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Даказаны крытэрыі лакальнай нармальнасці здабыткаў і рашотачных аб'яднанняў класаў Фітынга. Устаноўлена, што існуюць лакальна нармальныя здабыткі класаў Фітынга, фактарызуемыя нелакальна нармальнымі сумножнікамі. Апісаны структурныя ўласцівасці квазінармальных класаў Фітынга (даказаны аналаг тэарэмы Блесеноля—Гашуца і пацверджана абагульненая гіпотэза Локета для квазінармальных класаў Фітынга). Вызначаны прыкметы паўнаты і мадулярнасці рашоткі лакальна нармальных класаў Фітынга і апісана яе падрашотачная будова (станоўчае рашэнне праблемы К. Дзёрка і Т. Хоўкса для выпадку класаў Фішара часткова вырашальных груп).

Усе атрыманыя вынікі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі даследаванняў маюць тэарэтычны характар. Яны могуць знайсці прымяненне для вырашэння задач апісання падгрупавой структуры канечных груп і іх класаў і пры даследаванні нармальных класаў Фітынга. Матэрыялы даследаванняў могуць быць выкарыстаны пры чытанні спецкурсаў па тэорыі класаў груп для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцей, напісанні курсавых і дыпломных праектаў, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Галіна прымянення: сучасная тэорыя груп і іх класаў.

РЕЗЮМЕ

Марцинкевич Анна Веславовна

Нормальные классы Фиттинга конечных групп

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, нормальный класс Фиттинга, произведение классов Фиттинга, решетка классов Фиттинга.

Цель работы: развитие локальных методов и их применение при исследовании алгебр нормальных классов Фиттинга.

Методы исследования: методы абстрактной теории групп, методы теории классов групп и общей теории решеток, в частности, методы теории классов Фиттинга.

Полученные результаты и их новизна. Доказаны критерии локальной нормальности произведений и решеточных объединений классов Фиттинга. Установлено, что существуют локально нормальные произведения классов Фиттинга, факторизуемые нелокально нормальными сомножителями. Описаны структурные свойства квазинормальных классов Фиттинга (доказан аналог теоремы Блессеноля—Гашюца и подтверждена обобщенная гипотеза Локетта для квазинормальных классов Фиттинга). Определены признаки полноты и модулярности решетки локально нормальных классов Фиттинга и описано ее подрешеточное строение (положительное решение проблемы К. Дёрка и Т. Хоукса для случая классов Фишера частично разрешимых групп).

Все полученные результаты являются новыми.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты исследований имеют теоретический характер. Они могут найти применение для решения задач описания подгрупповой структуры конечных групп и их классов и при исследовании нормальных классов Фиттинга. Материалы исследований могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории классов групп для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область применения: современная теория групп и их классов.

SUMMARY

Martsynkevich Anna Veslavovna

Normal Fitting classes of finite groups

Keywords: finite group, Fitting class, normal Fitting class, product of Fitting classes, lattice of Fitting classes.

Research aim: the development of local methods and their application in the research of normal Fitting classes algebras.

Research methods: methods of the abstract group theory, methods of the theory of classes of groups and the theory of general lattices, in particular, methods of Fitting classes theory.

Obtained results and their novelty. The criteria of local normality of products and lattice joins of Fitting classes are proved. The existence of locally normal products of Fitting classes, which are factorized by nonlocal factors, is established. The structural properties of quasinormal Fitting classes are described (the analogue of the Blessenohl—Gaschütz theorem is proved and the generalized Lockett conjecture for quasinormal Fitting classes is confirmed). The sufficient conditions of fullness and modularity of the lattice of locally normal Fitting classes are determined and its sublattice structure is described (a positive answer to the problem of K. Doerk and T. Hawkes for the case of Fischer classes of partially soluble groups).

All the obtained results are new.

Recommendation for use. The obtained results are of theoretical nature. They can be used for solving the problems of describing the subgroup structure of finite groups and their classes and in the research of normal Fitting classes. The research materials can be used while delivering special courses on the theory of groups for students of mathematical specialities, while writing terms papers and graduation projects, master of philosophy and doctor of philosophy theses.

Application field: the modern theory of groups and their classes.

Научное издание

МАРЦИНКЕВИЧ Анна Веславовна

НОРМАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 08.01.2020. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,53. Тираж 60 экз. Заказ № 2.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель