АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт математики

На правах рукописи

ПОДОКСЕНОВ Михаил Николаевич

УДК 512.816 + 514.765

ГРУППЫ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНЫМИ СВЯЗНОСТЯМИ И ГРУППЫ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 1989

Работа выполнена на кафедре геометрии и топологии Новосибирского государственного университета им. Ленинского комсомола

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Борисов Ю.Ф.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Гуц А.К., кандидат физико-математических наук Улановский М.А.

Ведущая организация – Ленинградское отделение Математического института им. В.А.Стеклова

Защита состоится "____"_______________ 19 года в _____ часов на заседании специализированного совета 002.23.02 в Институте математики СО АН СССР по адресу: 630090, г. Новосибирск, 90, Университетский проспект, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО АН СССР.

Автореферат разослан "____"_______________ 1989 г.

Ученый секретарь специализированного совета В.В.Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Десятки работ в 1955 – 1971 годах были посвящены решению с различными дополнительными предположениями известной гипотезы А.Лихнеровича о том, что связное риманово многообразие, допускающее связную существенную группу конформных преобразований, конформно диффеоморфно либо евклидову пространству, либо сфере. С наименьшими предположениями эта гипотеза была доказана Д.В.Алексеевским [1] в 1972 г. В настоящее время предпринимаются попытки изучения псевдоримановых многообразий, допускающих связную существенную группу конформных преобразований. Некоторые результаты в этом направлении получены и в диссертации. Кроме того, в диссертации дополнен один из результатов Д.В.Алексеевского [5], касающийся самоподобных лоренцевых многообразий.

В работах С.П.Гаврилова, А.В.Левичева и других авторов широко изучаются группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой в качестве однородных космологических моделей. При этом физически значимыми являются лишь такие метрики, для которых выполнено так называемое "энергетическое условие". В диссертации доказывается, что на любой группе Ли можно ввести левоинвариантную лоренцеву метрику так, чтобы энергетическое условие выполнялось; найдены все конформно плоские левоинвариантные метрики на трехмерных группах Ли и среди них выделены метрики постоянной кривизны.

Хорошо известен классический результат о том, что любое аффинное преобразование евклидова пространства раскладывается в композицию параллельного переноса, вращения, растяжения по координатным осям и, возможно, отражения. Естественным обобщением этой задачи является вопрос, поставленный А.В.Левичевым: что можно сказать про преобразования групп Ли, переводящие одномерные смежные классы в одномерные смежные классы. Решению этой задачи посвящена одна из глав диссертации.

Цель работы. Диссертация посвящена:

– изучению гладких преобразований вещественных конечномерных групп Ли, переводящих дномерные смежные классы в одномерные смежные классы;

– изучению псевдоримановых многообразий, допускающих существенную группу конформных преобразований;

– изучению свойств левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли.

Методика исследования. Работа основана на применении дифференциально-геометрических и алгебраических методов, традиционно используемых в теории групп Ли и групп гладких преобразований; по мере необходимости привлекаются методы линейной алгебры и дифференциальных уравнений.

Новизна и практическая ценность работы. В диссертации получены следующие основные результаты:

а) описаны гладкие преобразования вещественных конечномерных групп Ли, переводящие одномерные смежные классы в одномерные смежные классы; дан ответ на вопрос: в каком случае такие преобразования разлагаются в композицию левого сдвига, автоморфизма и инверсии;

б) найдены все конформно плоские левоинвариантные метрики на трехмерных группах Ли и среди них выделены метрики постоянной кривизны; тем самым доказано, что левоинвариантные лоренцевы метрики постоянной кривизны на трехмерных группах Ли исчерпываются метриками, найденными С.П.Гавриловым [2] и К.Номидзу [7].

в) доказано, что на любой группе Ли можно ввести левоинвариантную лоренцеву метрику так, чтобы энергетическое условие выполнялось; более подробно исследована выполнимость энергетических условий для групп Ли, содержащих коммутативную подгруппу коразмерности один;

г) описаны лоренцевы многообразия с однопараметрической группой гомотетий, обладающей замкнутой изотропной орбитой; тем самым дополнен результат Д.В.Алексеевского [5], касающийся лоренцевых многообразий с однопараметрической группой гомотетий, действующей без неподвижных точек;

д) доказано, что лоренцевы многообразия, допускающие существенную транзитивную группу конформных преобразований, являются конформно плоскими, кроме многообразий из одного весьма узкого класса; найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы такие многообразия допускали существенную однопараметрическую группу конформных преобразований.

Все основные результаты диссертации являются новыми и могут быть использованы для дальнейшего изучения псевдоримановых многообразий с существенной группой конформных преобразований и групп Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками в качестве однородных космологических моделей.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Всесоюзной конференции по геометрии "в целом" (Новосибирск, 1987) , на IX Всесоюзной геометрической конференции (Кишинев, 1988) , Международной конференции по алгебре (Новосибирск, 1989) и на семинарах кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [8] – [14] .

Объем работы. Диссертация изложена на 136 страницах машинописного текста и состоит из введения, пяти глав, списка литературы, включающего 55 наименований, предметного указателя и указателя обозначений.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

Назовем группопрямыми или G-прямыми одномерные смежные классы группы Ли G , а преобразования $f: G \longrightarrow G$, переводящие G-прямые в G-прямые, мы назовем группоаффинными или G-аффинными. Группы Ли всюду подразумеваются конечномерными и вещественными.

В диссертации приводится пример, показывающий, что группоаффинное преобразование может не быть непрерывным. Далее рассматриваются только гладкие преобразования и под гладкостью подразумевается гладкость класса C^∞.

Известно, что на группе Ли существует [3] единственная левоинвариантная связность без кручения, для которой G-прямые, и только они, являются геодезическими. Назовем ее естественной. Проективные преобразования группы Ли с естественной связностью, и только они, будут ... гладкими группоаффинными преобразованиями. Обозначим через $P_G(\nabla)$ и $A_G(\nabla)$ соответственно группы проективных и аффинных преобразований группы Ли G с естественной связностью ∇. Без ограничения общности можно считать, что G связна.

Говорим, что линейное преобразование A алгебры Ли $\mathcal{G}$ сохраняет скобку $[[X,Y],Z]$, если выполнено

$$[[AX,AY],AZ]=A[[X,Y],Z] \qquad .(1)$$

для всех $X, Y, Z \in \mathcal{G}$.

Теорема 1. Пусть G – связная группа Ли с естественной связностью ∇. Тогда

1) любое группоаффинное преобразование $f: G \longrightarrow G$ является аффинным преобразованием естественной связности;

2) если $\mathcal{U}$ – нормальная окрестность точки $p \in G$ и $f \in A_G(\nabla)$, то

$$f|_{\mathcal{U}} = L(f(p)) \circ f_1 \circ L^{-1}(p) \qquad (2)$$

где $L(a)$ – левый сдвиг на элемент $a \in G$, $f_1(e)=e$,

$$f_1 = \exp \circ A \circ \exp^{-1} \qquad 3$$

и A – линейное преобразование алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы Ли G, сохраняющее скобку $[[X,Y],Z]$.

3) Обратно, если f – аналитическое преобразование группы Ли G, и в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки $p \in G$ f определяется формулами (1) – (3), то $f \in P_G(\nabla)$.

Будем говорить, что группа Ли G является аффинно простой, если любое ее G-аффинное преобразование разлагается в композицию левого сдвига, автоморфизма и, возможно инверсии. Назовем алгебру Ли $\mathcal{G}$ аффинно простой, если для любого ее линейного преобразования A, удовлетворяющего (1), выполнено одно из следующих условий: $[AX,AY]= =A[X,Y]$ для всех $X,Y \in \mathcal{G}$ или $[AX,AY]=-A[X,Y]$ для всех $X, Y \in \mathcal{G}$.

Теорема 2. Если алгебра Ли связной группы Ли G

аффинно проста, то группа Ли G аффинно проста. Односвязная группа Ли является аффинно простой тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли является аффинно простой.

Классификацию трехмерных алгебр Ли можно найти в [4].

Теорема 3. Все трехмерные алгебры Ли, кроме алгебр II и $VIII$ типов и подтипов VI_0, VII_c классификации Бианки, являются аффинно простыми. Связная трехмерная группа Ли является аффинно простой тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли является аффинно простой.

В главе 2 работы Д.В.Алексеевского [5] изучаются лоренцевы многообразия (M,g), допускающие однопараметрическую группу гомотетий $\Phi=\{\varphi_t\}$, действующую без неподвижных точек. При этом предполагается, что (M,g) – причинное лоренцево многообразие. На самом деле используется лишь то, что Φ не имеет замкнутых изотропных орбит.

Теорема 4. Пусть (M,g) – гладкое лоренцево многообразие, обладающее однопараметрической группой гомотетий $\Phi=\{\varphi_t\}$. Если Φ не имеет неподвижных точек и обладает нетривиальной замкнутой изотропной орбитой $\gamma(t)$, то

1) орбита $\gamma(t)$ является геодезической в M;

2) существует такое гладкое расслоение $\pi: M \longrightarrow S^1$, что каждый слой $P_t=\pi^{-1}\circ(\pi\circ\gamma(t))$ диффеоморфен $\mathbb{R}^{n-1}$ и является вполне геодезическим подмногообразием в M, индуцированная метрика на котором вырождена и является полуевклидовой; при этом π отображает диффеоморфно $Im\,\gamma$ на базу расслоения S^1, а φ_u отображает диффеоморфно и гомотетично P_t на P_{u+t};

3) если M ориентируемо, то расслоение π тривиально; в этом случае существует такая глобально определенная система координат $(x, y^2, \dots, y^{n-1}, z)$ на M, где координата z – циклическая с периодом $t_0>0$, что

а) действие группы Φ определяется по формуле

$$\varphi_t(x,y,z)=(e^{2\mu t}x, e^{\mu t}S(t)y, (z+t)(mod\, t_0)),$$

где $S(t)$ – однопараметрическая подгруппа матриц из $O(n-2)$, и $\varphi_t^* g=e^{2\mu t}g$, $\mu\neq 0$;

б) метрика g определяется формулой

$$g = 2dxdz + \delta_{ij}\, dy^i dy^j + P_{ij}(z) y^i dy^j dz + \\ + (Q_{ij}(z) y^i y^j + bx)\, dz^2 \,, \tag{4}$$

где $b = const$, а $P_{ij}(z)$ и $Q_{ij}(z) = Q_{ji}(z)$, $i, j = 2, \dots, n-1$ – произвольные гладкие функции, периодичные с периодом $t_0 > 0$, удовлетворяющие условию $P(z+t) = S(t) P(z) S^t(t)$, $Q(z+t) = S(t) Q(z) S^t(t)$;

4) если M неориентируемо, то существует такое гладкое двулистное изометрическое накрытие $\alpha : \tilde{M} \longrightarrow M$, что $\tilde{M}$ ориентируемо, удовлетворяет всем условиям теоремы, и соответствующее расслоение $\tilde{\pi} = \pi \circ \alpha$ тривиально.

Обозначим через $\mathcal{N}$ класс многообразий с глобально определенной системой координат $(x = x^1, y^i = x^i, x^n = z)$, $i = 2, \dots, n-1$, метрика в которой определяется формулой (4). К этому классу принадлежат также многообразия, рассмотренные в § 7 из [5]. В диссертации изучается геодезическая полнота многообразий из класса $\mathcal{N}$, вычислены тензоры кривизны, Риччи и Вейля и найдено условие необходимое и достаточное для того, чтобы такие многообразия являлись конформно плоскими.

Группа G конформных преобразований псевдориманова многообразия (M, g) называется несущественной, если существует такая метрика $\bar{g}$ на M, конформно эквивалентная g, что G будет группой изометрий многообразия $(M, \bar{g})$, и существенной – в противном случае. Можно считать, что многообразие M связно. Будем обозначать через G_p и G_e соответственно стационарную подгруппу группы G в точке $p \in M$ и компоненту связности единичного элемента группы G. Назовем элемент $\varphi \in G$ существенным, если $\varphi \in G_p$ для некоторого $p \in M$ и $(\varphi_*)_p$ не изометрично. Группу конформных преобразований будем называть сильно существенной, если она содержит существенный элемент. Обозначим через $\mathcal{L}(G)$ класс псевдоримановых многообразий со связной транзитивной группой G конформных преобразований.

Лемма 1. Если $(M,g) \in \mathcal{L}(G)$, то группа Ли G конформных преобразований является существенной тогда и только тогда, когда она является сильно существенной.

Д.В.Алексеевским [1] было доказано, что, если связная группа G конформных преобразований риманова многообразия (M,g) существенна, то G допускает существенную однопараметрическую группу конформных преобразований, имеющую неподвижную точку и являющуюся подгруппой в G. Примеры, приведенные в диссертации, показывают, что в случае лоренцевых многообразий с нарушением условия причинности такое утверждение неверно даже, если G транзитивна на M. Эти же примеры показывают, что на случай таких многообразий не переносится и лемма 4 из (1), утверждающая, что, если $(M,g) \in \mathcal{L}(G)$ – риманово многообразие и $(G_p)_0$ несущественна для некоторого $p \in M$, то и группа G несущественна. Будем называть псевдориманово многообразие причинным, если оно не содержит замкнутых изотропных кривых.

Лемма 2. Пусть G – сильно существенная группа конформных преобразований многообразия (M,g) и $\varphi \in H = G_p$ – существенный элемент.

а) Если $\varphi \in H_0$, то в G найдется сильно существенная однопараметрическая подгруппа конформных преобразований.

б) Если (M,g) – причинное псевдориманово многообразие, то любая сильно существенная однопараметрическая подгруппа Φ из G имеет неподвижную точку $p \in M$, т.е. (M,g) допускает сильно существенную однопараметрическую подгруппу $\Phi \subset G$ конформных преобразований тогда и только тогда, когда найдется существенный элемент, принадлежащий H_0.

Теорема 5. Пусть (M,g) – однородное псевдориманово многообразие, обладающее группой S конформных преобразований. Тогда

а) (M,g) допускает существенную транзитивную группу конформных преобразований;

б) если группа S связна, то (M,g) допускает связную существенную транзитивную группу G конформных преобразований, которая содержит сильно существенную однопараметрическую подгруппу, обладающую неподвижной точкой.

Теорема 6. Пусть $(M,g)\in\mathcal{L}(G)$ и $H=G_p$ для некоторого $p\in M$. Если групп. H/H_e конечна (в частности, если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечна), то (M,g) допускает сильно существенную однопараметрическую группу преобразований.

Пусть F – гомотетичное преобразование пространства Минковского L размерности n с естественным скалярным произведением $\langle,\rangle$. Если F не является ни сжимающим, ни растягивающим, то в подходящем базисе B из L преобразование определяется матрицей

$$e^{\mu}\,diag(se^{\nu}, S, se^{-\nu}),\ \nu>0\ , \tag{5}$$

где $S\in O(n-2)$ и $s=\pm 1$. Будем говорить, что гомотетия $F: L\longrightarrow L$ имеет характеристику $h(F)=\alpha\in[-\infty,+\infty]$, если в некотором базисе B преобразование F определяется матрицей (5) с $2\mu/\nu=\alpha$ при $n>3$, и матрицей (5) с $3\mu/\nu=\alpha$ при $n=3$. Если $\mu=\nu=0$, то считаем, что $h(F)=0$. Заметим, что $h(F^{-1})=-h(F)$. Если $h(F)=0$, то F является изометрией.

Теорема 7. Если псевдориманово многообразие (M,g) обладает существенной транзитивной группой G конформных преобразований, то скалярный квадрат тензора Вейля многообразия (M,g) равен нулю. Если при этом g – лоренцева метрика, то (M,g) является конформно плоским, кроме, может быть, случая, когда для всех $p\in M$ выполнено условие

(A) $|h((\varphi_*)_p)\in\{0,1,2\}$ для всех $p\in M$ и $\varphi\in G_p$.

Предложение 1. Пусть $(M,g)\in\mathcal{L}(G)$, где группа Ли G существенна и $\dim M=n>3$. Пусть p – произвольная точка из M и $H=G_p$. Тогда компонента связности H_e является сильно существенной, кроме, может быть, случая, когда для всех $p\in M$ выполнено условие (A).

Пусть (M,g) – риманово или псевдориманово многообразие, а $\{X_1,\dots,X_n\}$ – некоторый базис векторных полей в окрестности $\mathcal{U}\subset M$. Известно, что, если $\dim M=n=3$, то тензор Вейля многообразия (M,g) тождественно равен нулю. В этом случае его роль выполняет тензор W типа

(0.3), определяемый равенством .

$$W_{ijk} = S_{ij;k} - S_{ik;j} + \frac{1}{2(n-1)}(g_{ik}\rho_{,j} - g_{ij}\rho_{,k}),$$

где $S_{ij;k} = X_k(S(X_i, X_j) - S(\nabla_{X_k} X_i, X_j) - S(X_i, \nabla_{X_k} X_j)$ – компоненты ковариантного дифференциала ∇S тензора Риччи S и $\rho_{,j} = X_j \rho$. Многообразие (M, g) размерности 3 является конформно плоским тогда и только тогда, когда тензор W является нулевым. Если в качестве (M, g) рассмотреть группу Ли G с левоинвариантной метрикой g, то относительно базиса $\{X_1, X_2, X_3\}$ левоинвариантных векторных полей на G выполнено

$$W_{ijk} = S_{ij,k} - S_{ik,j} \quad ,$$

$$S_{ij,k} = -S(\nabla_{X_k} X_i, X_j) - S(\nabla_{X_k} X_j, X_i) .$$

Будем говорить, что в базисе $\{X_1, X_2, X_3\}$ коммутационные соотношения трехмерной разрешимой алгебры Ли определяются матрицей

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

если выполнено

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \alpha X_2 + \beta X_3 \quad , \\ [X_1, X_3] &= \gamma X_2 + \delta X_3 \quad , \\ [X_2, X_3] &= 0 . \end{aligned} \tag{6}$$

Кроме того, нам понадобятся следующие виды коммутационных соотношений:

$$[X_2, X_3] = \lambda_1 X_1 , \quad [X_3, X_1] = \lambda_2 X_2 , \quad [X_1, X_2] = \lambda_3 X_3 ; \tag{7}$$

$$[X_1, X_2] = [X_2, X_3] = \beta X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 \,, \qquad (8)$$
$$[X_1, X_2] = -\delta X_1 - \gamma X_3 - \delta X_3 \,.$$

Теорема 8. Все конформно плоские левоинвариантные метрики на трехмерных некоммутативных группах Ли определяются следующими таблицами.

1. Римановы метрики.

тип Бианки	коммутационные соотношения в ортонормированном базисе	примечания
III	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
V	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$	эйнштейнова
VII_0	$\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$	плоская
VII	$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$	эйнштейнова
IX	(7) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	биинвариантная эйнштейнова

2. Лоренцевы метрики

тип Бианки	коммутационные соотношения в ортонормированном базисе	временно-подобный вектор	примечания
II	(8) при $\alpha = \gamma = \delta = 0$	X_1	плоская
III	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	X_1 или X_2 или X_3	

III	$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$	X_3	эйнштейнова
	$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$	X_3	
	(8) при $\alpha=\gamma, \delta\neq 0$	X_1	плоская
	(8) при $\delta=\gamma=0, \alpha\neq 0$	X_1	
IV	(8) при $\alpha=\delta=c, \beta=0$	X_1	плоская
V	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$	X_1 или X_3	эйнштейнова
	(8) при $\alpha=\delta\neq 0, \beta=\gamma=0$	X_1	плоска
VI	$a\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix}$ $\lambda\in(-1,1)$	X_3	эйнштейнова
	$\begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha \\ 0 & 3\alpha \end{bmatrix}$	X_3	
	(8) ри $\alpha\cdot\delta>0, \alpha\neq\delta$	X_1	
VI_0	$\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$	X_3	плоская
	(8) при $\alpha=-\delta,\ \gamma=0$	X_1	
VII	$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$	X_1	эйнштейнова
VII_0	$\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$	X_1	плоская
		X_3	

$VIII$	(7) при $-\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$	X_1	биинвариантная эйнштейнова

Любая метрика постоянной кривизны является конформно плоской. Поэтому из теоремы 8 вытекает, что все левоинвариантные лоренцевы метрики постоянной кривизны на трехмерных группах Ли исчерпываются примерами, приведенными в работах [2] и [7]. В диссертации доказывается, что трехмерные группы Ли II, IX типов Бианки и VII типа с инвариантом Милнора [6] $\mathcal{D} \geqslant 4$ являются единственными некоммутативными группами Ли, для которых существуют ограничения на возможные значения скалярной кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик.

Пусть (M, g) – пространство-время, т.е. лоренцево многообразие, допускающее ориентацию во времени. Пусть S – тензор Риччи метрики g, а ρ – скалярная кривизна. Тогда тензор Эйнштейна определяется по формуле $T(X,Y)=S(X,Y)-\frac{\rho}{2}g(X,Y)$. Физически значимыми являются лишь такие лоренцевы метрики, для которых выполняется "энергетическое условие": $T_p(X,X)\geqslant 0$ для любого $p\in M$ и любого времениподобного вектора $X\in T_pM$.

Теорема 9. На любой некоммутативной группе Ли G можно задать левоинвариантную лоренцеву метрику так, что энергетическое условие будет выполняться; при этом, если $\dim G>2$, то для любого времениподобного векторного поля X тензор Эйнштейна будет строго положителен: $T(X,X)>lc\cdot g(X,X)$, $c=const$.

В диссертации более подробно рассматривается случай групп Ли, содержащих коммутативную подгруппу коразмерности один. Кроме того, получен ряд утверждений о кривизнах левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли и произведено сравнение с аналогичными результатами из обзора [6] для случая римановых метрик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеевский Д.В. Группы конформных преобразований римановых пространств // Мат.сб.- 1972.- Т.89, №2.- С.280 - 296.

2. Гаврилов С.П. Левоинвариантные метрики на односвязных трехмерных разрешимых группах Ли // Гравит. и теор. относит. Казань .- 1985.- Вып.22.- С.31 - 64 .

3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии.- М.: Наука, 1983.- Т.2.

4. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности.- М.: Наука, 1966 .

5. Alekseevskii D. Selfsimilar Lorentzian manifolds // Ann. Global Anal. Geom. -1985.-V.3, №1. -P.59-84.

6. Milnor J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. -1979,-V.21.-P. 293-329.

7. Nomizu K. Left-invariant Lorents metrics on Lie groups // Osaka J. Math. -1979.-V.16.-P.143-150.

Работы автора по теме диссертации

8. Подоксенов М.Н. Кривизны левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли // Всес. конф. по геометрии "в целом", Новосибирск, 28 - 30 сент. 1987. Тезисы докладов.- Новосибирск, 1987.- С.97.

9. Подоксенов М.Н. О выполнимости энергетических условий при левоинвариантных лоренцевых метриках на группах Ли // Матем.анализ и дискр.математика.- Новосибирск, 1988.- С.53 - 58.

10. Подоксенов М.Н. Об одном классе преобразований групп Ли // IX Всес.геом.конф., Кишинев, 20 - 22 сент. 1988. Тезисы сообщений.- Кишинев, 1988.- С.249 - 250.

11. Подоксенов М.Н. Об одном классе преобразований групп Ли // Сиб.мат.ж.- 1989.- Т.30, №3.- С.97 - 102.

12. Подоксенов М.Н. Лоренцево многообразие с однопараметрической группой гомотетий,обладающей замкнутой изот-

ронной орбитой // Сиб. мат. ж.– 1989.– Т. 30, № 5.– С. 135–137.

13. Подоксенов М.Н. Псевдоримановы многообразия с существенной группой конформных преобразований; Ред. "Сиб. мат. ж."– Новосибирск, 1988.– 26 с.– Деп. в ВИНИТИ 26.06.89, № 4201–В89.

14. *Podoksyonov M.N. Transformations of Lie groups, that map one-dimensional cosets into one-dimensional cosets // Междунар. конф. по алгебре. Новосибирск, 21-25 августа 1989. Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей.– Новосибирск, 1989. – с. 205.*