ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Я. КУПАЛЫ

УДК 517.925.11

ИВАНОВА ЖАННА ВИКТОРОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ЧАСТНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

01.01.02 - дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Гродно - 1996

Работа выполнена в Белорусском государственном педагогическом университете им.М.Танка.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор А.И.Яблонский.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор Л.А.Черкас,

- кандидат физико-математических наук, доцент В.В.Амелькин.

Оппонирующая организация - Институт математики АН Республики Молдова.

Защита состоится 6 декабря 1996 года в 10 часов на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 в Гродненском государственном университете им.Янки Купалы (230023, г.Гродно, Ожешко, 22, Госуниверситет, главный корпус, ауд.220).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Гродненского госуниверситета.

Автореферат разослан "1" ноября 1996 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций А.П.Садовский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. В настоящей диссертационной работе исследуются системы дифференциальных уравнений второго порядка с квадратичными правыми частями.

К рассмотрению таких систем приводят многие вопросы естествознания. Они применяются в различных областях техники, физики, химии, биологии и т.д. Однако нахождение их решений в виде элементарных функций в большинстве случаев невозможно. Даже в квадратурах удается проинтегрировать лишь немногие классы таких систем. Поэтому важное значение приобрели методы, позволяющие изучать свойства решений дифференциальных уравнений по виду их правых частей без нахождения самих решений. Одной из теорий, занимающейся разработкой таких методов, является качественная теория дифференциальных уравнений. Качественное исследование позволяет изучать характер решений дифференциальных уравнений "в целом", т.е. для всех допустимых значений независимого переменного, что важно для многих областей естествознания, в которых изучается развитие того или иного процесса или явления в течение сколь угодно большого промежутка времени.

Качественное исследование систем указанного вида представляет собой довольно трудную задачу. Но эта задача облегчается, если наложить определенные условия на некоторые решения или особые точки. Так часто данные системы удается исследовать при условии существования у них частного интеграла в виде алгебраической кривой.

Впервые квадратичные системы, имеющие частные алгебраические интегралы четвертого порядка, были рассмотрены А.И. Яблонским. Им же было показано, что уравнение алгебраической кривой четвертого порядка некоторыми аффинными преобразованиями можно привести к одному из видов:

$$1)\ F(x,y) = x^4 + \sum_{k=0}^{3} F_k(x,y) = 0;$$

$$2)\ F(x;y) = x^2y^2 + \sum_{k=0}^{3} F_k(x;y) = 0;$$

$$3)\ F(x;y) = xy(x + y)^2 + \sum_{k=0}^{3} F_k(x;y) = 0;$$

$$4)\ F(x;y) = x^3y + \sum_{k=0}^{3} F_k(x;y) = 0,$$

где $F_k(x;y)$ - однородные полиномы степени k, и были рассмотрены системы с интегралами 1) и 2). Системы с этими интегралами рассматривались и в работах В.Ф. Филипцова. Квадратичные системы второго порядка, имеющие интегралы в виде функций 3) и 4), ранее не рассматривались.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

1) Получить коэффициентные условия существования у систем двух дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями алгебраического частного интеграла заданного кривой четвертого порядка 3).

2) Провести полное качественное исследование систем, имеющих частные интегралы 3).

3) Доказать наличие или отсутствие предельных циклов у систем с алгебраическими интегралами вида 3).

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. В диссертационной работе использованы методы А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова для выяснения поведения траекторий систем, а также метод, разработанный Н.П. Еругиным и развитый А.И Яблонским для выделения классов систем, имеющих заданный алгебраический интеграл.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ заключается в следующем:

1) построено все множество квадратичных систем дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих частный алгебраический интеграл вида 3);

2) доказано отсутствие предельных циклов у полученных систем;

3) проведено полное качественное исследование систем с интегралами 3);

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при проведении научно-исследовательских работ по качественной теории диффиренциальных уравнений, а также в некоторых областях техники, биологии, генетики.

Они могут служить материалом для выполнения дипломных и курсовых работ; чтения спецкурсов студентам математических специальностей вузов.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ.

1) Найдены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты квадратичной системы второго порядка для того, чтобы данная система имела частные интегралы вида 3).

2) Выделены все классы систем с алгебраическими интегралами вида 3) и доказано отсутствие у них предельных циклов.

3) Проведено полное качественное исследование систем, имеющих частные интегралы 3).

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались на десятой научно-практической конференции молодых ученых Минского педагогического университета, на республиканской научно-методической конференции "ФПМИ-25", на заседании кафедры дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета и кафедры математического анализа Белорусского педагогического университета.

ПУБЛИКАЦИИ. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в работах [1-5].

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертационная работа изложена на 116 страницах, состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, выводов, списка использованных источников, содержащего 85 наименований, приложения .

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении излагается краткая история вопроса, освещается современное состояние рассматриваемой проблемы.

В общей характеристике работы обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, показывается научная новизна и практическая значимость исследования, приводятся сведения об апробации его результатов, формулируются положения, выносимые на защиту, кратко излагаются основные результаты, полученные в диссертации.

Первая глава состоит из трех параграфов и посвящена выделению классов автономных систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + hy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 = Q(x,y), \\ \dot{y} &= ax + by + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 = P(x,y). \end{aligned} \tag{1}$$

имеющих алгебраический интеграл

$$\begin{aligned} F(x,y) = xy(x+y)^2 + \alpha_1y^3 + \beta_1xy^2 + \gamma_1x^2y + \delta_1x^3 + \\ + \beta_2y^2 + \gamma_2xy + \delta_2x^2 + \gamma_3y + \delta_3x + \delta_4 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагается, что коэффициенты системы (1) и интеграла (2) являются действительными числами. При этом рассматриваются только такие системы, в которых $Q(x,y)$ и $P(x,y)$ – взаимно простые многочлены.

В первом параграфе данной главы получены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты системы (1), для того, чтобы кривая (2) была ее частным интегралом, а также соотношения, выражающие коэффициенты интеграла через коэффициенты данной системы.

Доказано, что система (1) в этом случае может быть сведена к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + hy + a_2x^2 - xy, \\ \dot{y} &= ax + by - a_2y^2 + xy, \end{aligned} \tag{3}$$

при этом для коэффициента a_2 возможны следующие значения:

$$1)\ a_2 = 0; \qquad 2)\ a_2 = -1; \qquad 3)\ a_2 = -\frac{1}{2}; \qquad 4)\ a_2 = \frac{1}{3},$$
$$5)\ a_2(a + h) + (a + h + 2c + 2b) = 0.$$

В этом же параграфе найдено все множество систем вида (3), в случаях 1), 2), 3). Показано, что у полученных систем могут быть только распадающиеся частные интегралы. Коэффициенты этих систем выражаются через один, или два неизвестных параметра.

Во втором параграфе находятся системы (3), для которых $a_2 = \frac{1}{3}$. Коэффициенты этих систем также выражаются через один или два неизвестных параметра. Получена система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= hy + \tfrac{1}{3}x^2 - xy, \\ \dot{y} &= \alpha hx - \tfrac{1}{3}y^2 + xy, \end{aligned} \tag{4}$$

имеющая интеграл

$$\begin{aligned} F(x,y) = 4(x+y)^2xy - 4hy^3 - 36hxy^2 + 36h\alpha x^2y + 4\alpha hx^3 + \\ + 27h^2y^2 - 90\alpha h^2xy + 27\alpha^2h^2x^2 + 54\alpha h^3y - \\ - 54\alpha^2h^3x + 27\alpha^2h^4 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

который распадается лишь при $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$. Показано, что остальные системы, рассмотренные в этом параграфе, имеют распадающиеся частные интегралы (2).

В третьем параграфе найдено все множество систем вида (3) для которых выполняется соотношение $a_2(a + h) + (a + h + 2c + 2b) = 0$. Коэффициенты систем выражаются через один, два или три неизвестных параметра.

В этом случае система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\tfrac{2}{5}hx + hy - \tfrac{1}{5}x^2 - xy, \\ \dot{y} &= hx - \tfrac{2}{5}hy + \tfrac{1}{5}y^2 + xy \end{aligned} \tag{6}$$

имеет нераспадающийся интеграл:

$$F(x,y) = y^3(4x - 4h) + y^2(8x^2 - 4hx - h^2) +$$
$$+ y(4x^3 + 4hx^2 - 2h^2x + 2h^3) + (4hx^3 - h^2x^2 - 2h^3x + 7h^4) = 0;$$

система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2}{7}(211 - 150\sqrt{2})hx + hy - \frac{1}{5}x^2 - xy, \\ \dot{y} &= (99 - 70\sqrt{2})hx + \frac{2}{7}(111 - 80\sqrt{2})hy + \frac{1}{5}y^2 + xy \end{aligned} \tag{7}$$

имеет интеграл

$$F(x,y) = xy(x + y)^2 + (7 - 5\sqrt{2})(7 + 5\sqrt{2})hy^3 +$$
$$(7 - 5\sqrt{2})(19 + 5\sqrt{2})hy^2x + (7 - 5\sqrt{2})(19 - 5\sqrt{2})hyx^2$$
$$+ (7 - 5\sqrt{2})^2hx^3 + \frac{5}{4}(7 - 5\sqrt{2})^2(3 + 2\sqrt{2})h^2y^2 +$$
$$+ \frac{17}{2}(7 - 5\sqrt{2})^2h^2xy + \frac{5}{4}(7 - 5\sqrt{2})^2(3 - 2\sqrt{2})h^2x^2 -$$
$$- \frac{3}{2}(7 - 5\sqrt{2})^3(19 + 5\sqrt{2})h^3y -$$
$$- \frac{3}{2}(7 - 5\sqrt{2})^3(19 - 5\sqrt{2})h^3x - \frac{1179}{4}(7 - 5\sqrt{2})^4h^4 = 0.$$

который также не распадается; система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma hx + hy - \frac{1}{3}x^2 - xy, \\ \dot{y} &= \frac{1-3\gamma}{2}hx - \frac{\gamma+1}{2}hy + \frac{1}{3}y^2 + xy \end{aligned} \tag{8}$$

имеет первый интеграл

$$F(x,y) = (x + y)^2[2xy + (1 - 3\gamma)hx - 2hy] + \delta = 0,$$

нераспадающийся при $\delta \neq 0$.

Все остальные системы, полученные в случае 5), имеют распадающиеся интегралы вида (2).

Вторая глава состоит из трех параграфов. В этой главе проводится полное качественное исследование систем (4), (6), (7), и (8): находятся особые точки в конечной части плоскости и на бесконечности, определяется их характер, исследуется поведение сепаратрис седел и сложных состояний равновесия, доказывается отсутствие предельных циклов.

В первом параграфе рассматривается система (4).

При этом выясняется, что данная система в зависимости от значений параметра α может иметь две или четыре особые точки в конечной части плоскости, а именно:

1) если $\alpha > 0$, то система (4) имеет четыре особые точки: седло, лежащее в начале координат, и три узла;

2) если $\alpha = 0$, то система (4) имеет две особые точки: узел и состояние равновесия с одним эллиптическим, одним параболическим и одним гиперболическим секторами, расположенное в начале координат;

3) если $\alpha < 0$, $\alpha = -1$, то система (4) имеет фокус в начале координат и узел;

4) если $\alpha = -1$, то система (4) имеет центр в начале координат и состояние равновесия с одним эллиптическим и одним гиперболическим секторами.

Координаты особых точек отличных от точки $O(0;0)$ находятся из системы:

$$8x^3 - 9x^2 + 27\alpha x - 27\alpha = 0$$
$$y = \frac{x^2}{3(x - 1)},$$

для каждого конкретного значения α.

Очевидно, что значения $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$ являются бифуркационными для данной системы:

- при переходе через значение $\alpha = 0$ происходит слияние двух узлов в сложную особенность с эллиптической областью, а затем рождение фокуса,

- при переходе через значение $\alpha = -1$ характер устойчивости фокуса и узла (случай 3) меняется: из устойчивых они становятся неустойчивыми.

С помощью критерия Дюляка доказывается отсутствие предельных циклов у системы (4). В качестве функции Дюляка выбирается функция

$$B(x,y) = x^3y^{-3}F^{-\frac{5}{6}}(x,y),$$

где $F(x,y) = 0$ – частный алгебраический интеграл (5).

Бесконечно удаленные точки системы (4) не зависят от значений параметра α: данная система имеет два седла – на концах координатных осей и узел – на бесконечно удаленной части прямой $y = -x$.

Во втором параграфе рассматриваются системы (6), (7) и (8).

Система (6) имеет седла в конечной части плоскости и узлы на бесконечно удаленных концах координатных прямых и на концах прямой $y = -x$.

Система (7) имеет три седла и узел в конечной части плоскости и три узла на бесконечности.

Система (8) в зависимости от значений параметра γ может иметь две, три, или четыре особые точки в конечной части плоскости:

1) при $\gamma \in (-\infty;-11 - 8\sqrt{2})$ система (8) имеет четыре особые точки: три седла и центр;

2) при $\gamma = -11 - 8\sqrt{2}$ система имеет три особые точки: два седла и положение равновесия с двумя гиперболическими секторами;

3) при $\gamma \in (-11 - 8\sqrt{2};-11 + 8\sqrt{2})$ система имеет два седла;

4) при $\gamma = -11 + 8\sqrt{2}$ система имеет два седла и положение равновесия с двумя гиперболическими секторами;

5) при $\gamma \in (-11 + 8\sqrt{2};1)$ система имеет четыре состояния равновесия: три седла и центр;

6) при $\gamma = 1$ система имеет два седла;

7) при $\gamma \in (1;\infty)$ система имеет четыре особые точки: три седла и центр.

Для данной системы бифуркационными являются значения $-11 - 8\sqrt{2}$; $-11 - 8\sqrt{2}$; 1. Кроме того, анализируя поведение траекторий системы (8) при $\gamma \in (-11 + 8\sqrt{2};1)$, приходим к выводу, что бифуркационным является также значение $\gamma = \frac{1}{3}$.

На бесконечности система имеет узлы – на концах координатных прямых и на концах прямой $y = -x$. При этом характер и число бесконечно удаленных особых точек не зависит от значений γ.

Так как системы (6), (7), (8) не имеют особых точек типа "фокус", то они не имеют предельных циклов.

<u>Третья глава</u> состоит из двух параграфов и посвящена качественному исследованию систем вида (1), имеющих распадающиеся частные интегралы (2).

Эти системы можно разделить на следующие группы:

1) системы, у которых интеграл (2) распадается на две различные или две совпадающие прямые и кривую второго порядка;

2) системы, у которых интеграл (2) распадается на две кривые второго порядка;

3) системы, у которых интеграл (2) распадается на прямые;

4) системы, у которых интеграл (2) распадается на прямую и кривую третьего порядка.

В первом параграфе данной главы рассматривались системы первой и второй группы. Во втором параграфе были исследованы системы третьей группы. Для систем первой, второй и третьей группы проведено полное качественное исследование. Доказано, что данные системы не имеют состояний равновесия типа "фокус", следовательно, не имеют предельных циклов.

Системы (1), имеющие нераспадающиеся частные интегралы в виде алгебраической кривой третьего порядка, были рассмотрены Р.М. Евдокименко . Ею были выделены все классы таких систем, проведено их полное качественное исследование и доказано отсутствие у них предельных циклов. Поэтому системы четвертой группы не рассматривались.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе рассмотрены автономные системы дифференциальных уравнений второго порядка с квадратичными правыми частями, имеющие частный интеграл вида

$$F(x;y) = xy(x + y)^2 + \sum_{k=0}^{3} F_k(x;y) = 0;$$

где $F_k(x;y)$ – однородные полиномы степени k.

1. Найдены коэффициентные условия существования таких систем и выделено все их множество.

2. Проведено полное качественное исследование полученных систем.

3. Установлено, что состояния равновесия типа "фокус" имеет лишь система (4), для которой методом Дюляка доказано

отсутствие предельных циклов вокруг этой точки.

4. У остальных систем, рассмотренных в диссертационной работе, состояний равновесия типа "фокус" не обнаружено; следовательно, эти системы не имеют предельных циклов.

5. Построены качественные картины поведения траекторий систем в целом в круге Пуанкаре, которые топологически эквивалентны картинам, изображенным на рисунках 2 - 46 приложения.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Захаранка Ж.В. Якаснае даследаванне аўтаномных сістэм другога парадку з квадратычнымі правымі часткамі // Весці БДПУ. - 1994. - №1. - С. 99 - 103.

2. Захаренко Ж.В., Яблонский А.И. Качественное исследование системы дифференциальных уравнений при наличии алгебраического интеграла // Диф. уравнения. - 1995. - Т.31, №5. - С. 759 - 764.

3. Захаранка Ж.В. Якаснае даследаванне адной дынамічнай сістэмы другога парадку // Весці БДПУ. - 1995. -№1. - С.89 - 91.

4. Захаренко Ж.В. Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений второго порядка // Материалы республиканской научно-методической конференции, посвященной 25-летию факультета прикладной математики и информатики. - Минск, БГУ, 1995. - Ч.2. - С.95.

5. Захаренко Ж.В. Об отсутствии предельных циклов у одной автономной системы второго порядка // Тезисы докладов математической конференции "Еругинские чтения - III" - Брест, БрГУ, 1996. - С.55.

Р Е З Ю М Е

Иванова Ж. В. Исследование решений систем дифференциальных уравнений второго порядка при наличии алгебраического интеграла.

Ключевые слова: автономная система, дифференциальное уравнение, траектория, интеграл, состояние равновесия, седло, узел, центр, фокус, предельный цикл, сепаратрисса.

В диссертационном исследовании рассматривается автономная система второго порядка с квадратичными правыми частями.

Целью исследования является нахождение условий, которым должны удовлетворять коэффициенты данной системы, чтобы ее частным интегралом была функция

$$F(x;y) = xy(x + y)^2 + \sum_{k=0}^{3} F_k(x;y) = 0; \qquad (*)$$

где $F_k(x,y)$ - однородные полиномы степени k. Кроме этого ставилась задача качественного исследования систем, имеющих частные интегралы такого вида.

В диссертации используются методы и приемы качественной теории дифференциальных уравнений.

Получены следующие результаты:

1) найдены коэффициентные условия существования у квадратичных систем второго порядка алгебраических частных интегралов (*);

2) выделено все множество систем, имеющих своим частным интегралом функцию вида (*);

3) проведено полное качественное исследование полученных систем, доказано отсутствие у них предельных циклов.

4) построены качественные картины поведения траекторий систем в круге Пуанкаре.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы при проведении научно-исследовательских работ по качественной теории дифференциальных уравнений, а также в некоторых областях техники, биологии, генетики. Они могут служить материалом для выполнения дипломных и курсовых работ; чтения спецкурсов студентам математических специальностей вузов.

Р Э З Ю М Э

І в а н о в а Ж. В. Даследаванне рашэнняў сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў другога парадку пры наяўнасці прыватнага алгебраічнага інтэграла.

Ключавыя словы: аўтаномная сістэма, дыферэнцыяльнае раўнанне, траекторыя, інтэграл, стан раўнавагі, сядло, вузел, цэнтр, фокус, лімітавы цыкл, сепаратрыса.

У дысертацыйным даследаванні разглядаюцца аўтаномныя сістэмы другога парадку з квадратычнымі правымі часткамі.

Мэтай даследавання з'яўляецца знаходжанне ўмоў, якім павінны задавальняць каэфіцыенты дадзенай сістэмы, каб функцыя

$$F(x;y) = xy(x + y)^2 + \sum_{k=0}^{3} F_k(x;y) = 0; \qquad (*)$$

дзе $F_k(x,y)$ – аднародныя паліномы ступені k, была яе прыватным інтэгралам. Акрамя таго ставілася задача якаснага даследавання сістэм з прыватнымі інтэграламі (*).

У дысертацыі выкарыстоўваюцца метады і прыёмы якаснай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў.

Атрыманы наступныя вынікі:

1) знойдзены каэфіцыентныя ўмовы існавання ў квадратычных сістэм другога парадку алгебраічнага прыватнага інтэграла ў выглядзе функцыі (*);

2) атрымана ўсё мноства сістэм, якія маюць прыватны інтэграл (*);

3) праведзена поўнае якаснае даследаванне гэтых сістэм, даказана адсутнасць лімітавых цыклаў;

4) пабудаваны якасныя карціны паводзін траекторый сістэм у крузе Пуанкарэ.

Рэзультаты дысертацыйнай працы могуць быць выкарыстаны пры правядзенні навукова-даследчых работ, а таксама ў некаторых галінах тэхнікі, біялогіі, генетыкі. Яны могуць служыць матэрыялам для напісання курсавых і дыпломных работ; чытання спецкурсаў студэнтам матэматычных спецыяльнасцей вузаў.

S U M M A R Y

I v a n o v a Z. V. The research of decisions of systems of differential equations of the second order in the presence of algebraic integral.

<u>Key words</u>: autonomous system, differential equation, trajektory, integral, condition of equilibrium, saddle, knot, fokus, centre, limit cycle, separasector.

In the thesis research the autonomous system of the second order with the square-law right parts is considered.

The object of the research is to find the conditions which must satisfy the coefficients of the given system in order that the function:

$$F(x;y) = xy(x + y)^2 + \sum_{k=0}^{3} F_k(x;y) = 0; \qquad (*)$$

was its particular integral, where $F_k(x,y)$ are homogeneous polinoms of degree k. Moreover it has been set a task of qualitative research of the received systems.

In the dissertation methods of the qualitative theory of differential equations are used.

The following results were received:

1) the coefficiental conditions of existence of the algebraic particular integral in the form of function (*) in the square-law system of the second order were found;

2) all the great number of systems which have the particular integral in form (*) was found, it was hold their complete qualitative research and the absence of limit cycles in them was proved.

The results of the dissertational work can be used for holding of the scientific work on the qualitative theory of differential equations, and as well in some fields of engineering, biology, genetics. These results can be used for carrying-out of degree and course works; for lecturing of special couses to students of mathematical specialities of higher education esteblshments.

Ивиеева

Иванова Жанна Викторовна

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ЧАСТНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

Подписано к печати 28.10.96. Формат 60x84 1/16
Бумага книжно-журнальная. Объем 1 п.л. Заказ N 75. Тираж 60 экз.
Отпечатано на множительной технике издательского отдела Гродненского госуниверситета. 230023, г.Гродно, Ожешко, 22.