БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 512.552.7:512.547.23

КУХАРЕВ
Андрей Валерьевич

ПОЛУЦЕПНЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Минск, 2015

Работа выполнена в учреждении образования «Белорусский государственный университет».

Научный руководитель: **Пунинский Геннадий Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Монахов Виктор Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.

Ядченко Алексей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией теории и приложений конечных групп отдела алгебры Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Оппонирующая организация: Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится «29» января 2016 г. в 17.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.01 при государственном научном учреждении «Институт математики НАН Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11, конференц-зал, тел. ученого секретаря: (017) 284-19-61, e-mail: kalosha@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики НАН Беларуси.

Автореферат разослан «25» декабря 2015 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физико-математических наук Н. И. Калоша

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Свойства группового кольца (групповой алгебры) FG конечной группы G над полем F зависят как от свойств группы, так и от свойств поля. Согласно теореме Машке, кольцо FG является классически полупростым тогда и только тогда, когда характеристика p поля F не делит порядок группы G. Более того, в случае, когда характеристика поля не делит порядок группы, теорема Веддербёрна – Артина дает исчерпывающее описание строения группового кольца — оно является прямой суммой полных матричных колец над телами. При обобщении теории на p-модулярный случай (когда характеристика p поля делит порядок группы) возникает необходимость введения более широкого класса колец по сравнению с полупростыми кольцами.

Достаточно близким по своим свойствам к классу классически полупростых колец является класс артиновых полуцепных колец, введенных Т. Накаямой[1]. Кольцо R называется *полуцепным* (англ. — *serial*), если R как левый и как правый модуль над собой является прямой суммой цепных (однорядных) модулей.

Вопросу об описании конечных групп, чьи модулярные групповые кольца являются полуцепными, посвящено достаточно много работ, но окончательного ответа до сих пор не получено. Например, неизвестно, сохраняется ли это свойство при переходе к нормальной подгруппе. Полного ответа не получено даже для конечных простых групп, в частности для спорадических групп. Для симметрических и знакопеременных групп вопрос о полуцепности также оставался открытым.

Из результата Д. Г. Хигмана[2] вытекает, что необходимым условием полуцепности группового кольца FG конечной группы G над полем F характеристики p является цикличность силовской p-подгруппы группы G. Однако оно не является достаточным (контрпримеры известны уже для проективных специальных линейных групп).

Достаточных условий полуцепности известно немного. Например, И. Мурасэ[3] доказал полуцепность группового кольца конечной группы с циклической нормальной силовской p-подгруппой (для любого поля характеристики p) и группового кольца p-нильпотентной группы с циклической силовской p-подгруппой

[1] Nakayama, T. On Frobeniusean Algebras. I / T. Nakayama // Ann. Math. — 1939. — Vol. 40, № 3. — P. 611–633.

[2] Higman, D. G. Indecomposable representations at characteristic p / D.G. Higman // Duke J. Math. — 1954. — Vol. 21. — P. 377–381.

[3] Murase, I. Generalized uniserial group rings. I / I. Murase // Sci. Papers College Gener. Educ. Univ. Tokyo. — 1965. — Vol. 15. — P. 15–28; Murase, I. Generalized uniserial group rings. II / I. Murase // Sci. Papers College Gener. Educ. Univ. Tokyo. — 1965. — Vol. 15. — P. 111–128.

(над конечным полем характеристики p). Полуцепность группового кольца p-разрешимой группы с циклической силовской p-подгруппой над алгебраически замкнутым полем характеристики p установил К. Морита[4].

На самом деле полуцепность группового кольца зависит только от характеристики поля. Этот факт был установлен Д. Эйзенбадом и Ф. Гриффитом[5], которые изучали полуцепные алгебры над полем. Однако авторы опирались на работу[6], которая не содержит доказательства. В диссертационной работе нами дано прямое доказательство этого факта.

Г. Дж. Януш[7] предложил критерий полуцепности группового кольца конечной группы в терминах подъема неприводимых модулярных характеров этой группы. Но нетрудно показать, что уже для знакопеременной группы A_5 над полем характеристики 5 его критерий не выполняется: все модулярные характеры поднимаются, но групповое кольцо не является полуцепным.

У. Фейт[8] сформулировал критерий полуцепности группового кольца конечной группы с циклической силовской p-подгруппой в терминах деревьев Брауэра: такое кольцо является полуцепным тогда и только тогда, когда дерево Брауэра каждого p-блока является "звездой", причем исключительная вершина (если такая существует) находится в центре звезды (см. рисунок).

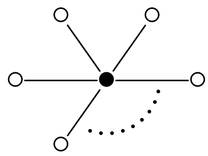

Рисунок. — Дерево Брауэра в форме звезды с исключительной вершиной в центре

К сожалению, вычисление деревьев Брауэра является очень сложной задачей и полностью не завершено даже для класса конечных простых групп.

Задачей, близкой к вопросу о полуцепности, занимался Х. Блау[9], а именно он изучал конечные группы, у которых дерево Брауэра главного блока являются звездой.

---

[4]Morita, K. On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals / K. Morita // Sci. Repts. Tokyo Daigaku. — 1951. — Vol. 4. — P. 177–194.

[5]Eisenbud, D. Serial rings / D. Eisenbud, P. Griffith // J. Algebra. — 1971. — Vol. 17, № 3. — P. 389–400.

[6]Amdal, I. K. Catégories uniseriélles / I. K. Amdal, F. Ringdal // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A — 1968. — Vol. 267. — P. 85–87.

[7]Janusz G. J. Indecomposable modules for finite groups / G.J. Janusz // Ann. Math. — 1969. — Vol. 89. — P. 209–241.

[8]Фейт, У. Теория представлений конечных групп / У. Фейт. — М. : Наука, 1990. — 464 с.

[9]Blau, H. I. On Brauer stars / H. I. Blau // J. Algebra. — 1984. — Vol. 90, № 1. — P. 169–188.

Ещё один схожий вопрос изучал Г. Хисс[10]. Он занимался классификацией конечных групп, чьи p-модулярные характеры индуцируются обыкновенными характерами. Для групп с циклической силовской p-подгруппой эта задача отличается от вопроса о полуцепности только игнорированием кратности исключительной вершины дерева Брауэра.

Отметим, что обе эти задачи пока также не решены.

Таким образом, описание полуцепных групповых колец конечных групп является важным открытым вопросом, которой представляет интерес как в общей теории колец, так и в теории модулярных представлений групп.

В диссертационной работе изучается вопрос о полуцепности группового кольца конечной группы над полем. Получен полный ответ для широкого класса групп, включая некоторые серии классических групп и все спорадические простые группы.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Диссертационная работа выполнена на кафедре высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета в рамках следующих научно-исследовательских программ:

— задание 1.1.03.2 «Классификация тотально частично насыщенных формаций конечных групп по свойствам решеток и полугрупп их подформаций» подпрограммы «Математические методы» ГПНИ «Конвергенция» (2015 г., № госрегистрации 20113522).

— проект БРФФИ Ф15РМ-025 «Групповые кольца, классы групп и инварианты» (2015–2016 гг., № госрегистрации 20151037).

Тема диссертационной работы соответствует пункту 12.1 «физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук» перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утвержденного постановлением Совета Министров Республики Беларусь 19 апреля 2010 г. № 585.

[10] Hiss, G. Groups whose Brauer-characters are liftable / G. Hiss // J. Algebra. — 1985. — Vol. 94, № 2. — P. 388–405.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является характеризация конечных групп, чьи групповые кольца над полем являются полуцепными.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1) изучить строение и доказать полуцепность групповых колец p-нильпотентных групп (над произвольным полем);

2) изучить строение и доказать полуцепность групповых колец p-разрешимых групп (над произвольным полем);

3) изучить поведение полуцепности группового кольца конечной группы над полем при расширении поля;

4) охарактеризовать симметрические и знакопеременные группы, чьи групповые кольца над заданным полем являются полуцепными;

5) охарактеризовать полные линейные, специальные линейные и проективные специальные линейные конечные группы, чьи групповые кольца над заданным полем являются полуцепными;

6) привести полный список простых спорадических групп с полуцепным групповым кольцом.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Показано, что групповое кольцо FG конечной p-нильпотентной группы с циклической силовской p-подгруппой над произвольным полем F характеристики p является кольцом главных идеалов и, в частности, полуцепное. В частности, полностью охарактеризованы конечные группы, чьи групповые кольца над полем характеристики 2 являются полуцепными.

2. Показано, что групповое кольцо FG конечной p-разрешимой группы с циклической силовской p-подгруппой над произвольным полем F характеристики p является полуцепным, причем для любого блока кольца FG кратности вхождения неразложимых проективных модулей в этот блок одинаковы.

3. Составлен список симметрических и знакопеременных групп, чьи групповые кольца является полуцепными (и не классически полупростыми). Это дает ответ на вопрос из монографии Ё. Баба и К. Оширо[11].

[11]Baba, Y. Classical Artinian rings and related topics / Y. Baba, K. Oshiro. — New Jersey [etc.] : World Scient. Publ., 2009. — 291 p.

4. Получен ответ на вопрос, для каких простых чисел p и каких конечных линейных групп серий $\mathrm{GL}(n,q)$, $\mathrm{SL}(n,q)$ и $\mathrm{PSL}(n,q)$ их p-модулярные групповые кольца являются полуцепными.

5. Указан полный список спорадических простых групп, чьи модулярные групповые кольца полуцепные.

Положения, выносимые на защиту

1. Если G — p-нильпотентная группа с циклической силовской p-подгруппой и F — поле характеристики p, то групповое кольцо FG является кольцом главных идеалов и, в частности, полуцепное.

Если G — p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой, то кольцо FG полуцепное, причем для любого его блока кратности вхождения неразложимых проективных модулей в этот блок одинаковые.

2. Групповое кольцо симметрической группы S_n над полем характеристики p полуцепное и не классически полупростое, если и только если либо $p = 2$ и $n \in \{2, 3\}$, либо $p = 3$ и $n \in \{3, 4, 5\}$.

Групповое кольцо знакопеременной группы A_n над полем характеристики p полуцепное и не классически полупростое, если и только если $p = 3$ и $n \in \{3, 4, 5\}$.

3. Если $G = \mathrm{GL}(n,q)$, $n \geq 2$ и F — поле характеристики p, делящей порядок G, то групповое кольцо FG полуцепное тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) $n = 2$ и $p = q \in \{2,\ 3\}$;

б) $n \in \{2,\ 3\}$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

Если G — любая из групп $\mathrm{SL}(n,q)$ или $\mathrm{PSL}(n,q)$, $n \geq 2$ и F — поле характеристики p, делящей порядок G, то групповое кольцо FG полуцепное тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) $n = 2$, $p \neq 2$ и p делит $q - 1$;

б) $n = 2$ и $p = q \in \{2, 3\}$;

в) $n \in \{2, 3\}$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

5. Пусть G — спорадическая простая группа и F — поле характеристики p, делящей порядок G. Групповое кольцо FG полуцепное, если и только если либо $G = M_{11}$, $p = 5$, либо $G = J_1$, $p = 3$.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора Г. Е. Пунинского. Научным руководителем были поставлены задачи и цель исследования. В совместных работах основные идеи и выбор методов доказательства принадлежат научному руководителю, а их реализация, включая расчеты строения групповых колец с помощью систем компьютерной алгебры, проводилась соискателем. Соавтором работы [3] является кандидат физ.-мат. наук Ю. В. Волков, вклад которого заключается в устранении неточности в доказательстве теоремы о сохранении полуцепности группового кольца при расширении поля.

Апробация результатов диссертации

Материалы, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения С. М. Черникова (Киев, 2012 г.); 71-й Научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 2014 г.); 52-ой и 53-ей Международной научной студенческой конференции «Математика» (Новосибирск, 2014 г., 2015 г.); Международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 2015 г.).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационной работы опубликовано 10 печатных работ общим объемом 4,0 авторского листа, из них 5 статей в рецензируемых научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (объемом 3,6 авторского листа); 3 статьи в сборниках научных конференций (0,3 авторского листа); 2 тезиса докладов на научных конференциях (0,1 авторского листа).

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка и приложений. Общий объем диссертации составляет 102 страницы, из них 80 страниц основного текста, 14 рисунков на 4 страницах, 2 таблицы на 4 страницах, библиографический список на 8 страницах, включающий 107 наименований использованных источников и 10 наименований публикаций соискателя, 3 приложения на 6 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** дается обзор литературы по теме диссертации. Приведены известные результаты о полуцепных групповых кольцах. Обсуждается связь деревьев Брауэра p-блоков конечных групп с полуцепностью групповых колец. Перечислены открытые проблемы и нерешенные задачи. На основе проведенного анализа литературных источников сформулированы задачи диссертационного исследования.

Во **второй главе** приведены основные определения и вспомогательные результаты о полуцепных артиновых кольцах и конечных группах с циклической силовской подгруппой, которые использованы в последующих главах.

Пусть R — артиново кольцо, причем его разложение в прямую сумму главных (неразложимых) проективных правых модулей имеет вид

$$R_R = (e_1R)^{k_1} \oplus ... \oplus (e_nR)^{k_n}. \tag{1}$$

Следующий результат обобщает известный факт из монографии М. Хазевинкеля, Н. Губарени и В. В. Кириченко[12] (лемма 12.4.4):

Предложение 1. *Пусть R — артиново кольцо, радикал Джекобсона которого является главным правым и главным левым идеалом. Тогда R — полуцепное кольцо, причем кратности k_i вхождения проективных модулей e_iR в разложение* (1) *для модулей одного блока совпадают.*

В **третьей главе** изучена структура групповых колец p-нильпотентных и p-разрешимых групп с циклической силовской p-подгруппой.

Доказана следующая лемма, который представляет собой расширенный вариант классической теоремы Нётер – Сколема.

Лемма 2. *Пусть $R = M_n(D)$, где D — тело, конечномерное над своим центром. Тогда любой автоморфизм f кольца R является композицией сопряжения φ_A обратимой матрицей $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ и отображения α_n, индуцированного некоторым автоморфизмом α тела D.*

[12] Hazewinkel, M. Algebras, Rings and Modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko. — Vol. 1. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2004. — 380 p.

С помощью леммы 2 доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — конечная p-нильпотентная группа с циклической силовской p-подгруппой P и нормальным дополнением H. Если F — произвольное поле характеристики p, то групповое кольцо FG является кольцом главных идеалов, в частности полуцепно.*

В частности, теорема 3 полностью описывает конечные группы, чьи групповые кольца над произвольным полем характеристики 2 являются полуцепными, а именно:

Следствие 4. *Пусть F — произвольное поле характеристики 2 и G — конечная группа четного порядка. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если силовская 2-подгруппа группы G циклическая.*

Используя теорему 3 и предложение 1, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть F — произвольное поле характеристики p и пусть G — конечная p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой. Тогда групповое кольцо FG полуцепное. Более того, для любого блока B кольца FG кратности вхождения неразложимых проективных модулей в этот блок одинаковы.*

Поскольку любая разрешимая группа p-разрешима, то мы получаем полный ответ на вопрос о полуцепности групповых колец разрешимых групп (в частности, для всех групп нечетного порядка):

Следствие 6. *Если G — конечная разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой, то групповое кольцо FG полуцепное для любого поля F характеристики p.*

Таким образом, групповое кольцо FG всякой конечной p-разрешимой группы G с циклической силовской p-подгруппой является полуцепным, а если к тому же G p-нильпотентна, то FG — кольцо главных идеалов.

В качестве примера найдено строение групповых колец 3-разрешимых групп $\mathrm{SL}(2,3)$ и $2 \cdot S_4^-$ над полем характеристики 3. Здесь $2 \cdot S_4^-$ — группа порядка 48, которая является двойным накрытием симметрической группы S_4.

Предложение 7. *Пусть $G = \mathrm{SL}(2,3)$ и F — поле характеристики 3. Тогда*

$$FG = V \oplus M_3(F) \oplus M_2(V), \tag{2}$$

где $V = F[x]/(x^3)$ — цепное кольцо длины 3.

Предложение 8. *Пусть $G = 2 \cdot S_4^-$ и F — поле характеристики 3. Тогда*

а) Если F содержит квадратный корень из 2, то

$$FG = B \oplus M_3(F) \oplus M_3(F) \oplus B \oplus B, \tag{3}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} F[x]/x^2 & F[x]/x \\ xF[x]/x^2 & F[x]/x^2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

б) Если F не содержит квадратных корней из 2, то

$$FG = B \oplus M_3(F) \oplus M_3(F) \oplus M_2(W), \tag{5}$$

где W является некоммутативным цепным кольцом.

Также изучен вопрос о сохранении полуцепности группового кольца при расширении поля скаляров. Независимо от работы Д. Эйзенбада и Ф. Гриффита[13] мы дали доказательство того, что полуцепность группового кольца конечной группы над полем зависит только от характеристики поля:

Теорема 9. *Пусть G — конечная группа и $F' \supseteq F$ — расширение полей. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если кольцо $F'G$ полуцепное.*

Теорема 9 позволяет многие известные результаты, установленные для алгебраически замкнутых полей, перенести на случай произвольного поля. В частности, получаем обобщение результата из монографии У. Фейта[14] (теорема VI.2.7):

Следствие 10. *Пусть F — поле характеристики p и пусть H — нормальная подгруппа конечной группы G такая, что порядок фактор-группы G/H взаимно прост с p. Тогда кольцо FH полуцепное, если и только если кольцо FG полуцепное.*

Предположим, что группа G не является p-разрешимой и имеет циклическую силовскую p-подгруппу P. Тогда существует наименьшая нормальная подгруппа K группы G, собственно содержащая $O_{p'}$. Более того, K содержит силовскую p-подгруппу P, а фактор-группа $H = K/O_{p'}$ является простой неабелевой. Мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 11. *Кольцо FG полуцепное, если и только если кольцо FH полуцепное.*

[13] Eisenbud, D. Serial rings / D. Eisenbud, P. Griffith // J. Algebra. — 1971. — Vol. 17, № 3. — P. 389–400.

[14] Фейт, У. Теория представлений конечных групп / У. Фейт. — М. : Наука, 1990. — 464 с.

В случае верности этой гипотезы она позволяет сводить вопрос о полуцепности группового кольца произвольной конечной группы к аналогичному вопросу для ее простого подфактора.

В **четвертой главе** представлены результаты исследования условий полуцепности групповых колец конечных групп, которые не являются p-разрешимыми. Для установления полуцепности групповых колец не-p-разрешимых групп мы использовали результаты о деревьях Брауэра p-блоков с циклической дефектной группой.

Составлен список симметрических и знакопеременных групп, чьи групповые кольца является полуцепными (и не классически полупростыми). В частности, таких групп конечное число, что дает ответ на один из вопросов, поставленных в конце монографии Ё. Баба и К. Оширо[15].

Теорема 12. *Пусть F — произвольное поле характеристики p и $n \geq 2$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1) Групповое кольцо FS_n полуцепное и не классически полупростое, если и только если либо $p = 2$ и $n \in \{2, 3\}$, либо $p = 3$ и $n \in \{3, 4, 5\}$.

2) Групповое кольцо FA_n полуцепное и не классически полупростое, если и только если $p = 3$ и $n \in \{3, 4, 5\}$.

Охарактеризованы все полные линейные, специальные линейные и проективные специальные линейные конечные группы, чьи групповые кольца являются полуцепными, а именно:

Теорема 13. *Пусть $G = \mathrm{GL}(n, q)$, $n \geq 2$ и F — поле характеристики p, делящей порядок группы G. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

1) $n = 2$ и $p = q \in \{2,\ 3\}$;

2) $n \in \{2,\ 3\}$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

Теорема 14. *Пусть G — любая из групп $\mathrm{SL}(n, q)$ или $\mathrm{PSL}(n, q)$, $n \geq 2$. Пусть F — поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

1) $n = 2$, $p \neq 2$ и $p \mid q - 1$;

2) $n = 2$ и $p = q \in \{2, 3\}$;

3) $n \in \{2, 3\}$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

[15] Baba, Y. Classical Artinian rings and related topics / Y. Baba, K. Oshiro. — New Jersey [etc.] : World Scient. Publ., 2009. — 291 p.

Найден полный список спорадических простых групп, чьи групповые кольца являются полуцепными:

Теорема 15. *Пусть G — простая спорадическая группа и F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если либо $G = M_{11}$, $p = 5$, либо $G = J_1$, $p = 3$.*

Получен полный ответ о полуцепности групповых колец следующих простых конечных групп лиевского типа: $Sz(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q^2)$ и ${}^2F_4(q^2)$.

Теорема 16. *Пусть $G = Sz(q)$, $q = 2^{2n+1}$, $n > 0$, $r = 2^{n+1}$ и F — поле характеристики p, делящей порядок группы G. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

1) p делит $q - 1$;

2) $p = 5$ делит $q + r + 1$, но 25 не делит $q + r + 1$.

Теорема 17. *Пусть $G = G_2(q)$ и F — поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

Теорема 18. *Пусть $G = {}^2G_2(q^2)$, $q^2 = 3^{2n+1}$, $n > 0$ и F — поле характеристики p, делящей порядок G. Групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполнено любое из следующих условий:*

1) p делит $q^2 - 1$;

2) $p = 7$ делит $q^2 + \sqrt{3}q + 1$, но 49 не делит это число.

Теорема 19. *Пусть $G = {}^2F_4(q^2)$, $q^2 = 2^{2n+1}$, $n > 0$ и F — поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Доказано, что групповое кольцо FG конечной p-нильпотентной группы с циклической силовской p-подгруппой над произвольным полем F характеристики p является кольцом главных идеалов и, в частности, полуцепное. В частности, полностью охарактеризованы конечные группы, чьи групповые кольца над полем характеристики 2 являются полуцепными [1].

2. Доказано, что групповое кольцо FG конечной p-разрешимой группы с циклической силовской p-подгруппой над произвольным полем F характеристики p является полуцепным, причем для любого его блока кратности вхождения неразложимых проективных модулей в этот блок одинаковы [2, 3].

3. Составлен список симметрических и знакопеременных групп, чьи групповые кольца являются полуцепными и не классически полупростыми, а именно доказаны следующие утверждения [4, 9]:

Групповое кольцо симметрической группы S_n над полем характеристики p полуцепное и не классически полупростое, если и только если либо $p = 2$ и $n \in \{2, 3\}$, либо $p = 3$ и $n \in \{3, 4, 5\}$.

Групповое кольцо знакопеременной группы A_n над полем характеристики p полуцепное и не классически полупростое, если и только если $p = 3$ и $n \in \{3, 4, 5\}$.

4. Получен ответ на вопрос, для каких простых чисел p и каких конечных линейных групп серий $\mathrm{GL}(n, q)$, $\mathrm{SL}(n, q)$ и $\mathrm{PSL}(n, q)$ их p-модулярные групповые кольца являются полуцепными, а именно [6, 7, 8]:

Групповое кольцо FG полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, q)$ $(n \geq 2)$ является полуцепным и не классически полупростым, если и только если выполнено одно из следующих условий:

а) $n = 2$ и $p = q \in \{2,\ 3\}$;

б) $n \in \{2,\ 3\}$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

Если G — любая из групп $\mathrm{SL}(n, q)$ или $\mathrm{PSL}(n, q)$ $(n \geq 2)$, то групповое кольцо FG полуцепное и не классически полупростое тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) $n = 2$, $p \neq 2$ и p делит $q - 1$;

б) $n = 2$ и $p = q \in \{2, 3\}$;

в) $n \in \{2, 3\}$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.

5. Указан полный список спорадических простых групп, чьи групповые кольца являются полуцепными. А именно показано, что если G — спорадическая простая группа и F — поле характеристики p, делящей порядок G, то групповое кольцо FG полуцепное тогда и только тогда, когда либо $G = M_{11}$, $p = 5$, либо $G = J_1$, $p = 3$. Также получен полный ответ на вопрос о полуцепности модулярных групповых колец следующих серий простых конечных групп лиевского типа: $Sz(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q^2)$ и ${}^2F_4(q^2)$ [5, 10].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты имеют теоретический характер и могут использоваться специалистами по теории колец и теории представлений конечных групп, в частности для описания строения полуцепных групповых колец конечных групп. Материалы диссертации могут также использоваться в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей по указанным разделам алгебры.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в рецензируемых научных журналах

1. Кухарев, А. В. Полуцепные групповые кольца конечных групп. p-нильпотентность / А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2013. – Т. 413. — С. 134–152.
2. Kukharev, A. Serial group rings of finite groups. p-solvability / A. Kukharev, G. Puninski // Algebra and Discrete Mathematics. — 2013. — Vol. 16, № 2. — P. 201–216.
3. Волков Ю. В. Полуцепность группового кольца конечной группы зависит только от характеристики поля / Ю. В. Волков, А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2014. — Т. 423. — С. 57–66.
4. Кухарев, А. В. Полуцепность групповых колец знакопеременных и симметрических групп / А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский // Вестник БГУ. — 2014. — № 2. — С. 61–64.
5. Кухарев, А. В. Полуцепные групповые кольца конечных групп. Спорадические простые группы и группы Судзуки / А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2015. – Т. 435. — С. 73–94.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

6. Кухарев, А. В. Полуцепность групповых колец унимодулярных проективных групп / А. В. Кухарев // Сборник работ 71-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета, Минск, 18–21 мая 2014 г. : в 3 ч. / Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2014. — Ч. 1. — С. 11–14.
7. Кухарев, А. В. Полуцепность групповых колец групп $\mathrm{PSL}(2, q^n)$ / А. В. Кухарев // МНСК-2014: Математика : материалы 52-й Междунар. науч. студенческой конф., Новосибирск, Россия, 11–18 апр. 2014 г. / Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск, 2014. — С. 10.

8. Кухарев, А. В. Полуцепность групповых колец конечной полной линейной группы / А. В. Кухарев // МНСК-2015: Математика : материалы 53-й Междунар. науч. студенческой конф., Новосибирск, Россия, 11–17 апр. 2015 г. / Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск, 2015. — С. 12.

Тезисы докладов на научных конференциях

9. Kukharev, A. Serial group rings of A_n and S_n over fields / A. Kukharev, G. Puninski / International Conference on Algebra dedicated to the 100th anniversary of S.M. Chernikov : book of abstracts, Kiev, Ukraine, August 20–26, 2012 // Institute of Mathematics of Ukrainian National, Academy of Sciences, Kyiv Taras Shevchenko National University, Dragomanov National Pedagogical University ; chairman : Yu. A. Drozd. — Kyiv, 2012. — P. 72.
10. Кухарев, А. В. Полуцепные групповые кольца конечных линейных групп и простых групп Ри / А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский // Дискретная математика, алгебра и их приложения : тезисы докладов междунар. науч. конф., Минск, 14–18 сент. 2015 г. / Институт математики НАН Беларуси. — Минск, 2015. — С. 31–32.

РЭЗЮМЭ

Кухараў Андрэй Валер'евіч

Паўланцуговыя групавыя кольцы канечных груп

Ключавыя словы: паўланцуговае кальцо, групавое кальцо, канечная група, мадулярнае прадстаўленне.

Мэта працы: апісанне канечных груп, групавыя кольцы якіх над полем дадатнай характарыстыкі з'яўляюцца паўланцуговымі.

Метады даследавання: метады тэорыі кольцаў і тэорыі мадулярных прадстаўленняў канечных груп.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У працы атрыманы наступныя новыя вынікі.

Устаноўлена, што групавое кальцо FG канечнай p-нільпатэнтнай групы з цыклічнай сілаўскай p-падгрупай над полем F характарыстыкі p з'яўляецца кальцом галоўных ідэалаў і, у прыватнасці, з'яўляецца паўланцуговым кальцом.

Устаноўлена, што групавое кальцо FG канечнай p-вырашальнай групы з цыклічнай сілаўскай p-падгрупай над полем F характарыстыкі p з'яўляецца паўланцуговым, прычым для любога блока B кальца FG кратнасці ўваходжання нераскладальных праектыўных модуляў ў гэты блок супадаюць.

Атрыманы поўны адказ на пытанне аб паўланцуговасці групавых кольцаў над адвольным полем дадатнай характарыстыкі наступных класаў канечных груп: знаказменныя групы A_n і сіметрычныя групы S_n; простыя канечныя групы лііеўскага тыпу $Sz(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q^2)$, ${}^2F_4(q^2)$ і ўсе спарадычныя простыя групы; канечныя поўныя лінейныя групы $\mathrm{GL}(n,q)$, спецыяльныя лінейныя групы $\mathrm{SL}(n,q)$ і праектыўныя спецыяльныя лінейныя групы $\mathrm{PSL}(n,q)$.

Рэкамендацыі па выкарыстанню. Атрыманыя вынікі маюць тэарэтычны характар. Яны могуць выкарыстоўвацца ў навуковых даследаваннях у галіне тэорыі кольцаў і тэорыі прадстаўленняў канечных груп. Акрамя таго, матэрыялы дысертацыі могуць выкарыстоўвацца ў навучальным працэсе пры чытанні лекцый і напісанні навучальных дапаможнікаў па адпаведных раздзелах алгебры для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцяў.

Галіна прымянення: тэорыя кольцаў, тэорыя мадулярных прадстаўленняў канечных груп.

РЕЗЮМЕ

Кухарев Андрей Валерьевич

Полуцепные групповые кольца конечных групп

Ключевые слова: полуцепное кольцо, групповое кольцо, конечная группа, модулярное представление.

Цель работы: описание конечных групп, чьи групповые кольца над полем положительной характеристики являются полуцепными.

Методы исследования: методы теории колец и теории модулярных представлений конечных групп.

Полученные результаты и их новизна. В работе получены следующие новые результаты.

Установлено, что групповое кольцо FG конечной p-нильпотентной группы G с циклической силовской p-подгруппой над полем F характеристики p является кольцом главных идеалов и, в частности, является полуцепным кольцом.

Установлено, что групповое кольцо FG конечной p-разрешимой группы с циклической силовской p-подгруппой над полем F характеристики p является полуцепным, причем для любого блока B кольца FG кратности вхождения неразложимых проективных модулей в этот блок совпадают.

Получен полный ответ на вопрос о полуцепности групповых колец над произвольным полем положительной характеристики следующих классов конечных групп: знакопеременные группы A_n и симметрические группы S_n; простые конечные группы лиевского типа $Sz(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q^2)$, ${}^2F_4(q^2)$ и все спорадические простые группы; конечные полные линейные группы $\mathrm{GL}(n,q)$, специальные линейные группы $\mathrm{SL}(n,q)$ и проективные специальные линейные группы $\mathrm{PSL}(n,q)$.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут использоваться в научных исследованиях в области теории колец и теории представлений конечных групп. Кроме того, материалы диссертации могут использоваться в учебном процессе при чтении лекций и написании учебных пособий по соответствующим разделам алгебры для студентов математических специальностей.

Область использования: теория колец, теория модулярных представлений конечных групп.

SUMMARY

Kukharev Andrei Valer'evich

Serial group rings of finite groups

Keywords: serial ring, group ring, finite group, modular representation.

Aim of research: a description of finite groups, whose group rings over a field of a positive characteristic are serial.

Methods of research: methods of ring theory and modular representation theory of finite groups.

Obtained results and their novelty. The following new results have been obtained.

We have proved that the group ring FG of a finite p-nilpotent group G with a cyclic Sylow p-subgroup over a field F of characteristic p is a principal ideal ring, hence a serial ring.

We have shown that the group ring FG of a finite p-solvable group G with a cyclic Sylow p-subgroup over a field F of characteristic p is serial. Furthermore for each block B of this ring the multiplicities of indecomposable projective modules in this block coincide.

We have obtained a complete answer to the question about seriality of group rings over an arbitrary field of a positive characteristic for the following classes of finite groups: alternating groups A_n, symmetric groups S_n, finite simple groups of Lie type $Sz(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q^2)$, ${}^2F_4(q^2)$, all sporadic simple groups, finite general linear groups $\mathrm{GL}(n,q)$, special linear groups $\mathrm{SL}(n,q)$, projective special linear groups $\mathrm{PSL}(n,q)$.

Recommendations for use. The obtained results are theoretical. They can be used by researchers in ring theory and representation theory of finite groups. Furthermore, the results of the thesis can be used in lecture courses in algebra for students in mathematics.

Areas of applications: ring theory, modular representation theory of finite groups.

Кухарев Андрей Валерьевич

ПОЛУЦЕПНЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Подписано в печать 15 декабря 2015 г.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 1,16. Уч.-изд. л. 1,05.
Тираж 60 экз. Заказ № 8.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
220072, Минск, Сурганова, 11.