ВОРОБЬЁВ Николай Николаевич

КЛАССЫ ФИТТИНГА И ФОРМАЦИИ С ЗАДАННОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДКЛАССОВ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Гомель 1999

Работа выполнена в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор СКИБА Александр Николаевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
ТАВГЕНЬ Олег Игнатьевич
кандидат физико-математических наук, доцент
СЕМЕНТОВСКИЙ Александр Владиславович

Оппонирующая организация — Московский городской педагогический университет

Защита состоится "23" декабря 1999 года в 14⁰⁰ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины по адресу: 246699 г. Гомель, ул. Советская, 104, телефон ученого секретаря (0232)57-37-91.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины.

Автореферат разослан "11" ноября 1999 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций,
доктор физико-математических наук,
профессор В.С. МОНАХОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Как известно, результаты и методы общей теории решеток с успехом используются в различных областях современной математики. Особенно широк диапазон применений этой теории в общей алгебре. Применение решеточных подходов в теории классов групп было впервые осуществлено в рамках теории многообразий групп. Позднее А.Н. Скибой было показано (1986), что привлечение решеточных конструкций весьма полезно и при изучении формаций групп. При этом существенную роль играет тот установленный им факт, что решетка всех локальных формаций модулярна. В дальнейшем рассматривался вопрос о модулярности и дистрибутивности решеток формаций других типов. Так в монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы "Формации алгебраических систем"(М.: Наука, 1989) была доказана модулярность решетки всех n-кратно локальных формаций; Баллестером-Боллиншес и Л.А. Шеметковым было показано, что модулярна решетка всех ω-локальных формаций (1997); А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым была установлена модулярность решеток n-кратно ω-локальных формаций (1997) и n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций (1999); А.Н. Скибой доказана дистрибутивность решетки всех разрешимых тотально локальных формаций (1997). Эти результаты позволили активно использовать элементы общей теории решеток в вопросах изучения и классификации формаций таких типов. Широкий спектр применений решеточных конструкций при исследовании формаций представлен в монографии А.Н. Скибы "Алгебра формаций"(Минск: Беларуская навука, 1997), где, в частности, показано, что привлечение общей теории решеток при исследовании классов групп позволяет не только значительно упростить доказательства многих уже известных теорем, но и решить ряд открытых вопросов, связанных с изучением внутреннего строения таких классов. Таким образом, дальнейшее развитие решеточных методов в теории классов групп является актуальной задачей. В данной диссертации такая задача реализуется при исследовании кратно локальных классов Фиттинга и формаций.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины:

"Структурная теория формаций и других классов алгебр", входящей в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь. План утвержден решением Президиума НАН Беларуси № 88 от 23 ноября 1995 г. (номер госрегистрации в БелИСА — 19963987). Выполнение темы запланировано на 1996–2000 г.г.;

"Развитие методов общей теории решеток при исследовании классов конечных групп"(номер госрегистрации в БелИСА — 19981116 (1998–99 г.г.)).

Цель и задачи исследования. Целью данной диссертации является дальнейшее развитие решеточных методов исследования классов конечных групп. В ходе достижения этой цели в диссертации:

– описаны n-кратно ω-локальные классы Фиттинга с булевой подрешеткой n-кратно ω-локальных подклассов Фиттинга, а также разрешимые тотально ω-локальные классы Фиттинга с булевой подрешеткой разрешимых тотально ω-локальных подклассов Фиттинга;

– установлена алгебраичность решетки n-кратно локальных классов Фиттинга;

– доказано, что решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга дистрибутивна. Тем самым дан положительный ответ на вопрос 21 работы [1];

– доказана индуктивность решетки всех τ-замкнутых тотально локальных формаций, что дает ответ на вопрос 4.1.8 монографии [2];

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются кратно локальные классы конечных групп, а предметом исследования — решетки таких классов.

Методология и методы проведенного исследования. Использовались методы исследования теории классов конечных групп, а также методы общей теории решеток.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все полученные результаты являются новыми и могут использоваться в теоретических исследованиях. Впервые методы общей теории решеток применены к решению открытых вопросов теории классов Фиттинга конечных групп (вопроса о дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, вопроса описания кратно ω-локальных классов Фиттинга с булевой решеткой кратно ω-локальных подклассов Фиттинга, вопроса описания разрешимых тотально ω-локальных классов Фиттинга с булевой решеткой тотально ω-локальных подклассов Фиттинга).

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении локальных формаций и локальных классов Фиттинга конечных групп, а также при чтении спецкурсов, преподаваемых в госуниверситетах и techинститутах.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

3.3.10. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых классов Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *n-кратно локален в том и только том случае, когда n-кратно локален каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$.

3.5.1. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка $L^n_\omega(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L^n_\omega(\mathfrak{F})$;

3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга, являющийся атомом решетки $L^n_\omega(\mathfrak{F})$.

4.1.3. Теорема. *Всякая частичная алгебра формаций и всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, являются индуктивными решетками.*

4.3.1. Теорема. *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична, дистрибутивна и каждый ее элемент, отличный от (1) и $\mathfrak{S}$, не дополняем в ней.*

Личный вклад соискателя. В совместно опубликованных работах постановка задачи и общие идеи доказательств принадлежат научному руководителю, а сами доказательства получены соискателем.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти Л.М. Глускина (г. Славянск, 1997), на Международной конференции по теории групп, посвященной памяти С.Н. Черникова (г. Пермь, 1997), на I Международной научной конференции "Вычислительные методы и производство: реальность, проблемы, перспективы"(г. Гомель, 1998), на Второй Международной алгебраической конференции на Украине, посвященной памяти Л.А. Калужнина (Киев – Винница, 1999).

Опубликованность результатов. Основные результаты опубликованы в пяти статьях [50, 51, 52, 53, 54], шести препринтах [55, 56, 57, 58, 59, 60] и в тезисах [61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69]. Общее количество страниц опубликованных материалов — 130.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и списка использованных источников в алфавитном порядке в количестве наименований. Объем диссертации — страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Вначале приведем краткий обзор наиболее важных результатов о решетках классов конечных групп. Относительно включения $\subseteq$ множество всех классов групп образует полную решетку, подрешетками которой являются множества формаций, классов Шунка и классов Фиттинга. В ряде ранних работ по теории классов групп рассматривался еще один способ упорядочения классов групп.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Напомним, что $\mathfrak{F}$-проектором группы G называется такая ее подгруппа H, для которой выполняются следующие условия:

1) $H \in \mathfrak{F}$;

2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U/U_0 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $HU_0 = U$.

Если теперь $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ — локальные формации конечных разрешимых групп, и в любой разрешимой группе G каждый ее $\mathfrak{M}$-проектор содержится в качестве подгруппы в некотором $\mathfrak{H}$-проекторе группы G, то говорят, что класс $\mathfrak{M}$ сильно вложен в класс $\mathfrak{H}$ и пишут $\mathfrak{M} \ll \mathfrak{H}$. Понятно, что $\ll$ — частичный порядок на множестве всех разрешимых локальных формаций. Более того, $\ll$ определяет решетку на таком множестве, и некоторые сведения об этой решетке содержатся в ряде работ по теории локальных формаций (см., например, [5-8]). В работах [9-11] изучалась решетка разрешимых классов Шунка (с отношением $\ll$). Было установлено, что такая решетка является атомарной, с дополнениями, но не дистрибутивной. Изучению решеток с отношением $\ll$ в теории классов Фиттинга были посвящены работы Брайса, Косси [12], Макана [13], Дерка и Порты [14]. Максимальные элементы таких решеток исследовались Брайсом и Косси [15].

Следует отметить, что результаты, связанные с исследованием $\ll$-решеток не получили последующих приложений и развития, и в настоящее время термин "решетка"в теории классов групп ассоциируется с отношением $\subseteq$.

Хотя отношение $\subseteq$ более естественно, универсально и на первый взляд значительно более обозримо, чем отношение $\ll$, исследование решеток классов групп (с соотношением $\subseteq$) является трудной задачей. Так, например, относительно решетки всех (и даже относительно решетки всех разрешимых) классов Фиттинга неизвестно в настоящее время является ли она алгебраической, коалгебраической или модулярной и поэтому ряд исследований был связан с поиском модулярных и дистрибутивных решеток классов Фиттинга. Так Лаушем в работе [16] была доказана модулярность решетки нормальных классов Фиттинга. Позднее этот результат был расширен Брайсом и Косси [17], которые доказали модулярность и атомарность решетки классов Фиттинга из так называемой секции Локетта. Некоторые другие свойства решеток классов Фиттинга найдены Н.Т. Воробьевым [18, 19]. В частности, им установлено, что решетка нормальных подклассов у любого однопорожденного нормального класса Фиттинга конечна [19]. Отметим также работу Кусака [20], где были найдены серии модулярных решеток классов Фиттинга.

Долгое время решетка классов Шунка оставалась мало изученной. Существенным достижением в этом направлении стала монография М.В. Селькина [21], где была доказана дистрибутивность решетки всех классов Шунка.

Если $\mathfrak{M}$ — локально конечное многообразие групп, то, как было показано в работе А.Н. Скибы [22], отображение fin, сопоставляющее каждому подмногообразию $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{M}$ класс всех конечных $\mathfrak{F}$-групп fin$\mathfrak{F}$, является изоморфизмом решетки подмногообразий из $\mathfrak{M}$ на решетку всех наследственных подформаций из $\mathfrak{M}$. Это обстоятельство позволяет интерпретировать многие результаты о решетках локально конечных многообразий как результаты о решетках наследственных формаций (см. подробнее работы А.Н. Скибы [23, 24]).

Еще один общий подход к исследованию решеток формаций восходит к фундаментальной работе О.В. Мельникова [25], из результатов которой, в частности, вытекает, что решетка всех формаций антиизоморфна решетке всех характеристических подгрупп подходящей свободной проконечной группы счетного ранга.

Как следует из результатов работы А.Н. Скибы [24], решетка всех формаций не является дистрибутивной. Поэтому ряд исследований был связан с поиском дистрибутивных решеток формаций. Так в работе Блессеноля и Брюстера [26] (в классе конечных разрешимых групп) была установлена дистрибутивность решетки всех формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $N\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формация, а $N\mathfrak{F}$ — класс всех тех групп, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал не содержит фраттиниевых главных факторов. Позднее этот результат был доказан и в классе всех групп [27]. Серия наследственных формаций с дистрибутивной решеткой наследственных подформаций найдена в работе А.Н. Скибы [23].

В работе А.Н. Скибы [28] впервые было замечено, что привлечение решеточных конструкций весьма полезно при изучении самих формаций. При этом существенную роль играет тот установленный им факт, что решетка всех (локальных) формаций модулярна. Этот результат получил развитие в различных направлениях. В частности, в монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы "Формации алгебраических систем"[4] была доказана модулярность решетки всех n-кратно локальных формаций; Баллестером-Боллинше и Л.А. Шеметковым [29] было показано, что модулярной является решетка всех ω-локальных формаций; А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [1, 30] была установлена модулярность решеток n-кратно ω-локальных формаций и n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций соответственно.

В работе А.Н. Скибы и Е.А. Таргонского [31] были описаны локальные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка локальных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$, конечна и ее длина не превосходит 2. Позднее этот результат был развит многими авторами (см. подробнее главу 5 книги А.Н. Скибы

[2]).

В работе А.Н. Скибы [28] были описаны элементы высоты ≤ 4 решетки всех разрешимых локальных формаций. Отметим, что при решении такой задачи А.Н. Скибой была дана (в неявном виде) классификация элементов высоты ≤ 2 решетки всех формаций (последний результат был передоказан другими методами В.А. Ведерниковым [32], и частично доказан М.И. Эйдиновым [33]).

Большое число работ связано с исследованиями дополняемых подформаций. Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ называется дополняемой [34] в $\mathfrak{F}$, если для нее существует дополнение в решетке всех подформаций формации $\mathfrak{F}$. В работе А.Н. Скибы [34] были описаны разрешимые формации, у которых все их подформации дополняемы. Позднее этот результат был распространен на произвольный случай [32, 35]. Изучение локальных формаций, у которых все их локальные подформации дополняемы, начато в работе В.А. Ведерникова [32]. В работе А.Н. Скибы [36] описаны n-кратно локальные формации, у которых решетка n-кратно локальных подформаций булева. В работе Го Вень Биня [37] были описаны локальные формации с булевой решеткой локальных подформаций. В дальнейшем [38, 39] были описаны ω-локальные формации, у которых решетка ω-локальных подформаций булева. Отметим также, что в работе А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [40] исследовались формации универсальных алгебр с системами дополняемых подформаций.

Изучение тождеств решетки n-кратно локальных формаций восходит к работе А.Н. Скибы [41], где было отмечено, что при любых целых неотрицательных m и n системы тождеств решеток l_n и l_m совпадают (см. подробнее главу II книги [4]).

Существенным вкладом в теорию решеток классов групп явилась монография А.Н. Скибы "Алгебра формаций"[2]. Многие идеи и конструкции этой монографии носят универсальный характер и могут быть полезными при дальнейшей разработке теорий не только локальных, но и композиционных и p-локальных формаций, а также в теории классов Шунка и в теории классов Фиттинга. Иллюстрацией к этому служит данная диссертация, развивающая ряд идей указанной монографии.

Охарактеризуем содержание диссертации по главам. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются определения и обозначения, принятые в книгах [2, 3, 4], а также терминология работы [1].

Глава 1 содержит обзор основных результатов диссертации.

В главе 2 собраны некоторые известные результаты, используемые в основном тексте диссертации.

Глава 3 "Булевы решетки кратно ω-локальных классов Фиттинга"включает в себя шесть разделов.

Напомним, что функции вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{$формации групп$\}$ называются ω-локальными спутниками [1]. Для произвольного ω-локального спутника f полагают

$$LF_\omega(f) = \{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p),$$

для всех $p \in \omega \bigcap \pi(G)\}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, то говорят [1], что она ω-локальна, а f — ω-локальный спутник этой формации.

Всякая функция вида $f : \omega \bigcup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называется [1] ω-локальной функцией Хартли или, более кратко, ω-локальной H-функцией. Для произвольной ω-локальной H-функции f полагают [1]

$$LR_\omega(f) = \{G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \omega \bigcap \pi(G)\}.$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, то говорят [1], что он ω-локален, а f — его ω-локальная H-функция.

Согласно [1], всякая формация считается 0-кратно ω-локальной. При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется [1] n-кратно ω-локальной, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными формациями. Формацию $\mathfrak{F}$ называется тотально ω-локальной, если она n-кратно ω-локальна для всех n. Аналогично определяются n-кратно ω-локальные и тотально ω-локальные классы Фиттинга.

Для произвольной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ такой, что $\mathfrak{F}_i \bigcap \mathfrak{F}_j = (1)$ для всех различных $i, j \in I$ через $\oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ обозначается совокупность всех групп вида $A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$. Всякое представление класса групп $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ называется прямым разложением [42] этого класса. В неявном виде такая конструкция использовались в [42, 44] (см. также [15], с. 670). В работе А.Н. Скибы [42] было начато изучение прямых разложений n-кратно локальных формаций. В частности, там было доказано, что всякая формация, представимая в виде прямого разложения некоторых формаций, n-кратно локальна тогда и только тогда, когда n-кратно локальна каждая из компонент этого прямого разложения. В разделе 3.1 доказан следующий аналог этого результата для n-кратно ω-локальных формаций.

3.1.1. Теорема ([51]). *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $(n \geq 1)$ ω-локальна в том и только в том случае, когда n-кратно ω-локальна каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

3.1.2. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ тотально ω-локальна в том и только в том случае, когда тотально ω-локальна каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

При $n = 1$ из теоремы 3.1.1 непосредственно вытекает

3.1.3. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — формация. Тогда формация $\mathfrak{F}$ ω-локальна в том и только в том случае, когда ω-локальна каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

3.1.4. Следствие (А.Н. Скиба [2, с.173]). *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно локальна в том и только в том случае, когда n-кратно локальна каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

В теории формаций особую роль играют введенные Л.А. Шеметковым [3] композиционные формации, которые можно определить (пользуясь теоремой Бэра (см. [15, с.370])) как такие непустые формации $\mathfrak{F}$, что $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(R(G)) \in \mathfrak{F}$ (здесь $R(G)$ — разрешимый радикал группы G, т.е. наибольшая разрешимая нормальная в G подгруппа). Поэтому в связи с результатом раздела 3.1 возникает вопрос о справедливости результата аналогичного теореме 3.1.1 для композиционных формаций. В разделе 3.2 получен отрицательный ответ на этот вопрос и найдено дополнительное ограничение, при котором указанная аналогия имеет место.

Заметим, что доказанные в разделах 3.1 и 3.2 теоремы о прямых разложениях формаций существенно используют теорию прямых разложений, разработанную А.Н. Скибой (см. [42] и раздел 4.3 книги [2]). В разделе 3.3 развивается аналогичная теория для классов Фиттинга. В частности, здесь доказана

3.3.7. Теорема ([56]). *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω -локален в том и только в том случае, когда n-кратно ω -локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

3.3.8. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально ω-локален в том и только том случае, когда тотально ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

3.3.9. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-локален в том и только том случае, когда ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

3.3.10. Теорема ([54]). *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно локален в том и только том случае, когда n-кратно локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Следующая теорема раздела 3.1 является аналогом теоремы Ремака-Шмидта для классов Фиттинга.

3.3.11. Теорема ([54]). *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i = \oplus_{j \in J}\mathfrak{M}_j$, где для любых*

$i \in I$, $j \in J$ классы Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ прямо неразложимы. Тогда $|I| = |J|$ и для некоторой биекции $\varphi : I \mapsto J$ равенство $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ имеет место при всех $i \in I$.

В разделе 3.4 описываются разрешимые тотально ω-локальные классы Фиттинга с булевой решеткой тотально ω-локальных подклассов Фиттинга.

Все рассматриваемые в разделе 3.4 классы Фиттинга предполагаются состоящими из конечных разрешимых групп. Символом $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ обозначается [1] решетка всех тотально ω-локальных классов Фиттинга, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_\omega^\infty$.

Напомним, что в препринте А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [45] под номером 24 была поставлена задача описания булевых подрешеток решетки всех разрешимых тотально ω-локальных классов Фиттинга. На основе результатов раздела 3.3 в разделе 3.4 доказана следующая теорема в этом направлении.

3.4.1. Теорема ([65]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – неединичный тотально ω-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$;

3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга, являющийся атомом решетки $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$.

Символом $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ обозначается [1] решетка всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_\omega^n$.

В разделе 3.5 доказана

3.5.1. Теорема ([65]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$;

3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга, являющийся атомом решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$.

При $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 3.5.1 непосредственно вытекает

3.5.5. Теорема ([54]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – неединичный n-кратно локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка $L^n(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — набор всех атомов решетки $L^n(\mathfrak{F})$;

3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга, являющийся атомом решетки $L^n(\mathfrak{F})$.

3.5.6. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно локальный класс Фиттинга, где $n \geq 1$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка $L^n(\mathfrak{F})$ булева;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$;

3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга вида $\mathfrak{N}_p$.

3.5.7. Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — n-кратно локальные классы Фиттинга с $L^n(\mathfrak{M}) \simeq L^n(\mathfrak{H})$, где $n \geq 1$. Тогда если класс Фиттинга $\mathfrak{M}$ нильпотентен, то нильпотентен и класс Фиттинга $\mathfrak{H}$.*

3.5.8. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = l^n\mathrm{fit}G$. Тогда в том и только в том случае группа G нильпотентна, когда решетка $L^n(\mathfrak{F})$ булева.*

Глава 4 "О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга"состоит из четырех разделов.

Пусть θ — полная решетка формаций. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ элементов из θ^l обозначается [2] через $\vee_{\theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Решетка θ называется [2] *индуктивной*, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i = LF(f_i) \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^l$ и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ θ-значных спутников f_i, что f_i — некоторый внутренний спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF\left(\vee_\theta(f_i \mid i \in I)\right),$$

где символ $\vee_\theta(f_i \mid i \in I)$ обозначает такой спутник f, что$f(p)$ является верхней гранью для $\{f_i(p) \mid i \in I\}$ в θ, если $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(p) \neq \varnothing$, и $f(p) = \varnothing$ в противном случае . Аналогично определяются индуктивные решетки классов Фиттинга.

Заметим, что индуктивность решетки Θ по существу означает, что исследование операции $\vee_{\Theta^l}$ на множестве Θ можно редуцировать к исследованию более простой операции $\vee_\Theta$ на множестве Θ. Раздел 4.1 посвящен изучению индуктивных решеток формаций и классов Фиттинга.

Полная решетка формаций (классов Фиттинга) θ называется *частичной алгеброй формаций (классов Фиттинга)* [46], если для любого простого числа p и для любой формации (любого класса Фиттинга) $\mathfrak{F} \in \theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \theta$ (соответственно, имеет место $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \in \theta$).

Основным результатом раздела 4.1 является

4.1.1. Теорема ([66]). *Всякая частичная алгебра формаций и всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, являются индуктивными решетками.*

Теорема 4.1.1, в частности, дает положительный ответ на вопрос 4.1.8 монографии А.Н. Скибы [2].

4.1.4. Следствие (А.Н. Скиба [2, с.152]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций индуктивна.*

4.1.5. Следствие (А.Н. Скиба [2, с.156]). *Решетка разрешимых тотально локальных формаций индуктивна.*

4.1.6. Следствие. *Решетка l^n индуктивна.*

4.1.7. Следствие. *Решетка l^∞ индуктивна.*

4.1.8. Следствие. *Решетка всех τ-замкнутых тотально локальных формаций индуктивна.*

Множество всех локальных спутников (H-функций) частично упорядочено отношением $\leq$, где $f \leq h$ тогда и только тогда, когда $f(p) \subseteq h(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

4.1.9. Следствие. *Пусть θ — частичная алгебра формаций, $\mathfrak{F} \in \theta^l$. Тогда частично упорядоченное множество всех внутренних θ-значных спутников формации $\mathfrak{F}$ является полной решеткой.*

4.1.10. Следствие. *Пусть θ — такая же частичная алгебра классов Фиттинга, как и в теореме 4.1.3, $\mathfrak{F} \in \theta^l$. Тогда частично упорядоченное множество всех внутренних θ-значных H-функций класса $\mathfrak{F}$ является полной решеткой.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка классов Фиттинга Θ называется [2] *$\mathfrak{X}$-отделимой*, если для любого терма $\omega(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \omega(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1, \ldots, A_m$, где $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, что $A \in \omega(\Theta\mathrm{fit} A_1, \ldots, \Theta\mathrm{fit} A_m)$.

Значение этого понятия в теории классов Фиттинга связано со следующей теоремой, доказываемой в разделе 4.2.

4.2.1. Теорема ([60]). *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{S}$-отделима.*

В разделе 4.3 на основе многих результатов предыдущих разделов доказана следующая основная теорема диссертации.

4.3.1. Теорема ([60]). *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична, дистрибутивна и каждый ее элемент, отличный от (1) и $\mathfrak{S}$, не дополняем в ней.*

Из теоремы 4.3.1 вытекает

4.3.6. Следствие. *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является решеткой с псевдодополнениями.*

4.3.7. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимый однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным представлением в виде несократимого объединения $\mathfrak{F}_1 \vee^\infty \ldots \vee^\infty \mathfrak{F}_t$ некоторых своих тотально локальных l^∞-неприводимых подклассов Фиттинга $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t$.*

Для любых двух тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, через $\mathfrak{H}/^\infty\mathfrak{M}$ обозначается [1] решетка тотально локальных классов Фиттинга, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$.

4.3.8. Следствие. *Для любых двух разрешимых тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ справедлив решеточный изоморфизм*

$$\mathfrak{M} \vee^\infty \mathfrak{H}/^\infty\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{H}/^\infty\mathfrak{H} \bigcap \mathfrak{M}.$$

4.3.9. Следствие (А.Н.Скиба [2, с.156]). *Решетка всех разрешимых тотально локальных формаций дистрибутивна.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие результаты:

– описаны n-кратно локальные классы Фиттинга с булевой решеткой n-кратно локальных подклассов Фиттинга [54, 55, 63];

– установлена алгебраичность решетки n-кратно локальных классов Фиттинга [60];

– доказано, что решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга дистрибутивна [60, 59; 68]. Тем самым дан положительный ответ на вопрос 21 работы [1];

– доказана индуктивность решетки l_∞^τ [53, 58, 67], что дает ответ на вопрос 4.1.8 монографии [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. — 1999. — Т.2, № 1. — С.1–34.

[2] Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

[3] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

[4] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989. — 256 с.

[5] Cline E. On an embedding property of generalized Carter subgroups // Pacific. J. Math. — 1969. — Vol. 29, № 3. — P. 491–519.

[6] Doerk K. Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen // J. Algebra. — 1969. — Vol. 13, № 3. — P. 345–373.

[7] Doerk K. Zwei Klassen von Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, deren Halbverband genau ein maximales Element besitzt // Arch. Math. — 1970. — Bd. 21, № 3. — S. 240–244.

[8] DOERK K. Zur Sattigung einer Formation endlicher auflösbarer Gruppen // Arch. Math. — 1977. — Bd. 28, № 5. — S. 561–571.

[9] WOOD G.J. A note on strong containment in the theory of Schunck classes of finite soluble groups. — J. London Math. Soc., 1976. — Vol. 13, № 2. — P. 235–238.

[10] WOOD G.J. A lattice of homomorphs // Math. Z. — 1973. — Vol. 130, № 1. — P. 31–37.

[11] HAWKES T.O. The family of Schunk classes as a lattice // J. Algebra, 1976. — Vol. 39, № 2. — P. 527–550.

[12] BRYCE R.A., COSSEY J. Strong containment in Fitting classes // Proc. Miniconf. Theory of Groups. — Canberra. — 1975. — P. 6–16.

[13] MAKAN A.R. Normal Fitting Classes and the Lockett Ordering // Math. Z. — 1975. — Bd. 142, № 3. — S. 221–228.

[14] DOERK K., PORTA M. Uber Vertauschbarkeit, normale Einbettung und Dominanz bei Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen // Arch. Math. — 1980. — Bd. 35, № 4. — S. 319–327.

[15] DOERK K., HAWKES T. Finite soluble groups. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

[16] LAUSCH H. On normal Fitting classes // Math. Z. — 1973. — Bd. 130, № 1. — S. 67–72.

[17] BRYCE R.A., COSSEY J. A problem in the theory of normal Fitting classes // Math. Z. — 1975. — Bd. 141, № 2. — S. 99–110.

[18] ВОРОБЬЕВ Н.Т. О гипотезе Локетта в теории радикальных классов // Материалы Междунар. конф., посвящ. памяти акад. С.А. Чунихина, Ч. 1. — Гомель, 1995. — С. 42–43.

[19] ВОРОБЬЕВ Н.Т. Об аналоге проблемы Гашюца // VII Белорусская матем. конф.: Тез. докл., Ч. 1. — Минск, 1996. — С. 97–98.

[20] CUSACK E. The join of two Fitting classes // Math. Z. — 1979. — Bd. 167, № 1. — S. 37–47.

[21] СЕЛЬКИН М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 144 с.

[22] Скиба А.Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности. — Новосибирск, 1984. — Т. 4. — С. 101–118.

[23] Скиба А.Н. О конечных подформациях многообразий алгебраических систем // Вопросы алгебры. — Мн., 1986. — Вып. 2. — С. 7–20.

[24] Скиба А.Н. О подформациях многообразий алгебраических систем // Докл. АН БССР. — 1986. — Т. 30, № 1. — С. 9–12.

[25] Мельников О.В. Нормальные делители свободных проконечных групп // Изв. АН СССР. Математика. — 1978. — Т. 42. — С. 3–25.

[26] Blessenohl D., Brewster B. Über Formationen und komplementierbare Hauptfaktoren // Arch. Math. — 1976. — Vol. 27, № 4. — P. 347–351.

[27] Скиба А.Н. О формациях, порожденных классами групп // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. — 1981. — № 3. — С. 33–39.

[28] Скиба А.Н. О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. — Мн., 1986. — С. 149–156.

[29] Ballester-Bolinches A., Shemetkov L.A. On lattices of p-local formations of finite groups. — Gomel, 1996. — 10 p. — (Preprint / Gomel State University; № 37).

[30] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. — 1999. — Т. 43, № 4. — С. 5–8.

[31] Скиба А.Н., Таргонский Е.А. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 // Мат. заметки. — 1987. — Т. 41, вып. 4. — С. 490–499.

[32] Ведерников В.А. Вполне факторизуемые формации конечных групп // Вопросы алгебры. — Минск: Изд-во "Университетское", 1990. — Вып. 5. — С. 28–34.

[33] Эйдинов М.И. Элементы высоты два решетки формаций конечных групп // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1990. — № 6. — С. 77–80.

[34] Скиба А.Н. О формациях с заданными системами подформаций // Подгрупповое строение конечных групп.— Мн., 1981. — С. 155–180.

[35] Эйдинов М.И. О формациях с дополняемыми подформациями // Тез. докл. IX Всесоюзн. симпозиума по теории групп. — М., 1984. — С. 101.

[36] Скиба А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1994. — № 10. — С. 75–80.

[37] Guo Wenbin Local formations in which every subformation of type $\mathfrak{N}_p$ has a complement // Chinese Science Bulletin. — 1997. — Vol. 42, № 5. — P. 364–368.

[38] Жевнова Н.Г., Скиба А.Н. p-Насыщенные формации с дополняемыми p-насыщенными подформациями // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1997, № 5. — С. 1–7.

[39] Жевнова Н.Г. ω-Локальные формации с булевой решеткой ω-локальных подформаций // Докл. АН Беларуси. — 1997. — Т. 41, № 5. — С. 15–19.

[40] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Формации алгебр с дополняемыми подформациями// Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 7, 8. — С. 1008–1012.

[41] Скиба А.Н. Решетки кратно локальных формаций // XIX Всесоюзн. алг. конф.: тезисы сообщений, Ч. 2, Львов, 9–11 сент. 1987 г. — Львов. 1987. — С. 261.

[42] Скиба А.Н. О дополняемых подформациях // Вопросы алгебры. — Гомель, 1996. — Вып. 9. — С. 114–118.

[43] Скиба А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. — Мн., 1987. — Вып. 3. — С. 21–31.

[44] Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры. - Киев, 1993. - С. 27-54.

[45] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. - Гомель, 1997. - 42 с. — (Препринт/Гомельский госуниверситет: № 63.)

[46] Скиба А.Н. Алгебры классов групп. — Гомель, 1998. — 12 с. — (Препринт/Гомельский госуниверситет: № 78.)

[47] Сафонов В.Г. О кратно локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1996. — Вып. 9. — С. 112–127.

[48] Ведерников В.А. О локальных формациях конечных групп // Мат. заметки. — 1989. — Т. 46. — Вып. 6. — С. 32–37.

[49] Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982. — 456 с.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[50] Воробьев Н.Н., Сементовский В.Г. Формации, определяемые подгруппами Холла // Вестн. Витебск. ун-та. — 1996. — № 1. — С. 101–107.

[51] Воробьев Н.Н. О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга // Вестн. Витебск. ун-та. — 1997. — № 3. — С. 55–58.

[52] Близнец И.В., Воробьев Н.Н. О прямых разложениях композиционных формаций // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1998. — Вып. 12. — С. 106–112.

[53] Воробьев Н.Н. Об одном вопросе теории локальных классов конечных групп // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1999. — Вып. 14. — С. 132–140.

[54] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40, № 3. — С. 523–530.

[55] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга. — Гомель, 1997. — 16 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 62).

[56] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. Булевы решетки n-кратно ω-локальных классов Фиттинга. — Гомель, 1997. — 10 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 71).

[57] Близнец И.В., Воробьев Н.Н. Прямые разложения кратно композиционных формаций. — Гомель, 1998. — 10 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 75).

[58] Воробьев Н.Н. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга — Гомель, 1998. — 11 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 77).

[59] Skiba A.N. and Vorob'ev N.N. On the lattice of totally local Fitting classes — Гомель, 1999. — 23 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 80).

[60] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. Дистрибутивность решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. — Гомель, 1999. — 22 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 82).

[61] Воробьев Н.Н., Воробьев Н.Т. Об обобщении теоремы Блессеноля-Гашюца // Материалы Третьей Междунар. конф. по алгебре памяти М.И. Каргаполова: Тез. докл. конф. — Красноярск, 1993. — С. 75–76.

[62] Воробьев Н.Н. Об обобщении формации π-замкнутых групп // Материалы Междунар. конф., посвящ. памяти акад. С.А. Чунихина: Тез. докл. конф., Ч. 1. — Гомель, 1995. — С. 41.

[63] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. О прямых разложениях классов Фиттинга // Материалы Междунар. алгебр. конф., посвящ. памяти Л.М. Глускина: Тез. докл. конф. — Славянск, 1997. — С. 48–49.

[64] Воробьев Н.Н. О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга // Материалы Междунар. конф. по теории групп, посвящ. памяти С.Н. Черникова: Тез. докл. конф. — Пермь, 1997. — С. 18.

[65] Skiba A.N. and Vorobyov N.N. On Boolean lattices of n-multilocal Fitting classes // Материалы междунар. алгебр. конф., посвящ. памяти Л.М. Глускина: Тез. докл. конф. — Славянск, 1997. — С. 124–125.

[66] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. Булевы решетки кратно ω-локальных формаций и классов Фиттинга // Материалы I Междунар. научн. конф. "Выч. методы и пр-во: реальность, проблемы, перспективы: Тез. докл. конф. — Гомель, 1998. — С. 164–165.

[67] Воробьев Н.Н. Об индуктивности решетки τ-замкнутых тотально локальных формаций // Материалы I Междунар. научн. конф. "Выч. методы и пр-во: реальность, проблемы, перспективы: Тез. докл. конф. — Гомель, 1998. — С. 166.

[68] Воробьев Н.Н., Скиба А.Н. О решетке разрешимых тотально локальных классов Фиттинга // Материалы Второй междунар. алгебр. конф. на Украине, посвящ. памяти Л.А. Калужнина: Тез. докл. конф. — Киев – Винница, 1999. — С. 67–68.

[69] Воробьев Н.Н. О классах Фиттинга с максимальным нильпотентным тотально локальным подклассом Фиттинга // Материалы Второй междунар. алгебр. конф. на Украине, посвящ. памяти Л.А. Калужнина: Тез. докл. конф. — Киев – Винница, 1999. — С. 66.

Рэзюмэ

Вараб'еў Мікалай Мікалаевіч
Класы Фітынга і фармацыі з заданай
рашоткай падкласаў

Ключавыя словы: КАНЕЧНАЯ ГРУПА, КЛАС ГРУП, КРАТНА ЛАКАЛЬНЫ КЛАС ГРУП, ТАТАЛЬНА ЛАКАЛЬНЫ КЛАС ГРУП, ФАРМАЦЫЯ, КЛАС ФІТЫНГА, РАШОТКА ФАРМАЦЫЙ, РАШОТКА КЛАСАЎ ФІТЫНГА, ДЫСТРЫБУТЫЎНАЯ РАШОТКА, МАДУЛЯРНАЯ РАШОТКА.

У дысертацыі з дапамогай метадаў тэорыі фармацый, тэорыі класаў Фітынга і метадаў агульнай тэорыі рашотак апісаны n-кратна лакальныя класы Фітынга з булевай рашоткай падкласаў Фітынга; атрымлена алгебраічнасць рашоткі n-кратна лакальных класаў Фітынга; даказана, што рашотка ўсіх вырашальных татальна лакальных класаў Фітынга дыстрыбутыўна. Тым самым дан станоўчы адказ на пытанне А.М. Скібы і Л.А. Шамяткова; даказана індуктыўнасць рашоткі τ-замкненых татальна лакальных фармацый, што дае адказ на пытанне А.М. Скібы.

Усе атрыманыя вынікі работы з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры вывучэнні лакальных фармацый канечных груп, а таксама пры чытанні спецкурсаў, выкладаемых у дзяржуніверсітэтах і педінстытутах.

Резюме

Воробьев Николай Николаевич

Классы Фиттинга и формации с заданной решеткой подклассов

Ключевые слова: КОНЕЧНАЯ ГРУППА, КЛАСС ГРУПП, КРАТНО ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ГРУПП, ТОТАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫЙ КЛАСС ГРУПП, ФОРМАЦИЯ, КЛАСС ФИТТИНГА, РЕШЕТКА ФОРМАЦИЙ, РЕШЕТКА КЛАССОВ ФИТТИНГА, ДИСТРИБУТИВНАЯ РЕШЕТКА, МОДУЛЯРНАЯ РЕШЕТКА.

В диссертации с помощью методов теории формаций, теории классов Фиттинга и методов общей теории решеток описаны n-кратно локальные классы Фиттинга с булевой решеткой подклассов Фиттинга; установлена алгебраичность решетки n-кратно локальных классов Фиттинга; доказано, что решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга дистрибутивна. Тем самым дан положительный ответ на вопрос А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова; доказана индуктивность решетки τ-замкнутых тотально локальных формаций, что дает ответ на вопрос А.Н. Скибы.

Все полученные результаты работы являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы при изучении локальных формаций конечных групп, а также при чтении спецкурсов, преподаваемых в госуниверситетах и désinstitutах.

Summary

Vorob'ev Nikolay Nikolayevich
Fitting classes and formations
with the given lattice of subclasses

Key words: FINITE GROUP, CLASS OF GROUPS, MULTIPLY LOCAL CLASS OF GROUPS, TOTALLY LOCAL CLASS OF GROUPS, FORMATION, FITTING CLASS, LATTICE OF FORMATIONS, LATTICE OF FITTING CLASSES, DISTRIBUTIVE LATTICE, MODULAR LATTICE.

In the dissertation n-multiply local Fitting classes with a Boolean lattice of Fitting subclasses are described with the help of the methods of Formation theory, Theory of Fitting classes and General Lattice Theory; it is established that the lattice of n-multiply local Fitting classes is algebraic; it is proved that the lattice of all soluble totally local Fitting classes is distributive. Thus we are given a positive answer to the question of A.N. Skiba and L.A. Shemetkov; it is proved the inductance of the lattice of τ-closed totally local formations. Thus we are given the answer to the question of A.N. Skiba.

All obtained results of the work are new. They have a theoretical character and are able to use in studying of local formations of finite groups and in teaching of special courses in the universities and pedagogical institutes.