Математические структуры и моделирование
2022. № 2(62). С. 154–162

УДК 512.81+514.12
DOI 10.24147/2222-8772.2022.2.154-162

МАКСИМАЛЬНАЯ ГРУППА ИЗОМЕТРИЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ ГРУППЫ ЛИ $A^+(1) \times A^+(1)$

М.Н. Подоксенов[1]
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ГиМА, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Я.В. Горовая[1]
студентка, e-mail: gorovaya_yana@bk.ru

[1]Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается связная односвязная четырёхмерная группа Ли G_{IV}, алгебра Ли которой относится к IV типу Бианки. Доказывается, что существует только один способ задания на ней левоинвариантной лоренцевой метрики, при которой полная группа изометрий получившегося однородного многообразия, является пятимерной. В координатах, связанных с матричным представлением группы Ли, найдена матрица метрического тензора и выписаны формулы, по которым действует однопараметрическая группа изометрий, оставляющая неподвижным единичный элемент группы Ли G_{IV}. Так же выписаны формулы, по которым действует полная группа изометрий.

Ключевые слова: группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, однопараметрическая группа изометрий, самоподобное многообразие.

1. Постановка задачи

М.Н. Подоксёнов

Пусть (M, g) – риманово или лоренцево многообразие, а $f : G \to G$ – преобразование подобия. Это преобразование называется *несущественным*, если существует метрика $\bar{g}$ на многообразии M конформно эквивалентная g, такая что f является изометрией для $(M, \bar{g})$. Многообразие называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу преобразований подобия.

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ введено евклидово или лоренцево скалярное произведение. Линейное преобразование $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ назовём автоизометрией, если оно является одновременно изометрией относительно скалярного произведения и автоморфизмом алгебры Ли. Преобразование F назовём автоподобием, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом. Как показано в работе [1], решение задачи нахождения однопараметрических групп автоподобий данной алгебры Ли $\mathcal{G}$ позволяет построить самоподобные однородные многообразия соответствующей связной односвязной группы Ли G, снабженной левоинвариантной метрикой. В этой же работе найдено единственный (с точностью до изометрии) класс лоренцевых метрик на трехмерной группе Гейзенберга Hs, при котором она является самоподобным многообразием, и выписаны формулы, по которым действует существенная однопараметрическая группа автоподобий.

В работах [2] и [3] такая же задача решена для двумерной и трёхмерной групп Ли $A^+(1)$ и $A^+(1) \times \mathbf{R}$, где $A^+(1)$ – группа аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию прямой. Обозначим алгебру Ли этой группы $\mathcal{A}(1)$.

Я.В. Горовая

В работе [4] было рассмотрено четырёхмерное лоренцево многообразие группы Ли $Hs \times \mathbf{R}^+$. Оказалось, что, в отличие от трёхмерного случая (группы Ли Hs), существуют три класса левоинвариантных лоренцевых метрик (с точностью до изометрии), при которых эта группа Ли является самоподобным многообразием.

Как было доказано в работе [5], четырёхмерная алгебра Ли IV типа Бианки $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}} = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$ не допускает автоподобий при каком любом способе задания на ней лоренцева скалярного произведения, и существует единственный способ задания лоренцевого скалярного произведения в этой алгебре Ли, при котором она допускает однопараметрическую группу автоизометрий. Это доказывает, что не существует левоинвариантной лоренцевой метрики на связной односвязной группе Ли $G_{\mathrm{IV}} = A^+(1) \times A^+(1)$, вместе с которой она образует самоподобное мноогобразие, и существует единственный класс левоинвариантных лоренцевых метрик, при котором полная группа изометрий получившегося многообразия является пятимерной. И этим группа Ли G_{IV} сильно отличается от двумерной и трехмерной групп $A^+(1)$ и $A^+(1) \times \mathbf{R}$, которые могут быть самоподобными многообразиями.

Цель данной работы: указать метрический тензор на группе Ли G_{IV}, при котором она допускает однопараметрическую группу движений, оставляющих неподвижной единицу группы Ли и выписать действие этой однопараметрической группы в координатах, связанных с матричным представлением этой группы Ли. При всех остальных левоинвариантных лоренцевых метриках связная компонента группы движений получившегося многообразия изоморфна самой группе Ли G_{IV}.

2. Матричное представление.

В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ задаются двумя равенствами: $[E_1, E_2] = E_2, [E_3, E_4] = E_4$, а остальные скобки равны нулевому вектору. Будем называть такой базис каническим. Линейная оболочка векторов E_2 и E_4 является производной алгеброй Ли $[G_{\mathrm{IV}}, G_{\mathrm{IV}}]$. Она представляет собой двумерный коммутативный идеал, который обозначим $\mathcal{H}$. Линейные оболочки векторов E_1, E_2 и E_3, E_4 обозначим соответственно $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Эти подпространства являются двумерными некоммутативными идеалами. Кроме того, алгебра Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ содержит бесконечное количество коммутативных двумерных подалгебр: $\forall X \in \mathcal{L}_1, Y \in \mathcal{L}_2$ линейная оболочка этих векторов является коммутативной подалгеброй.

Алгебру Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ можно представить, как состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и при этом канонический базис образуют матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(он не единственный). Соответствующая ей связная односвязная группа Ли G_{IV} может быть представлена, как группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ x_1 > 0, \ x_3 > 0.$$

Введём на $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ и G_{IV} координаты, сопоставив приведённым выше матрицам координаты (u_1, u_2, u_3, u_4) и (x_1, x_2, x_3, x_4) соответственно. Единичному элементу группы соответствуют координаты $(1, 0, 1, 0)$. Тогда групповая операция задаётся формулами

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2, x_3 y_3, x_3 y_4 + x_4),$$

а обратный элемент находится так:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{-1} = (x_1^{-1}, -x_2 x_1^{-1}, x_3^{-1}, -x_4 x_3^{-1}).$$

Непосредственным вычислением находим, что экспоненциальное отображение $\exp : \mathcal{G}_{\mathrm{IV}} \to G_{\mathrm{IV}}$ задается формулами

$$x_1 = e^{u_1}, x_2 = \frac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1), x_3 = e^{u_3}, x_2 = \frac{u_4}{u_3}(e^{u_3} - 1). \tag{1}$$

Для исключения неопределённости необходимо уточнить, что

$$\exp(0, u_2, 0, u_4) = (1, u_2, 1, u_4).$$

Отсюда получаем формулы обратного отображения $\exp^{-1} : G_{\mathrm{IV}} \to \mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$:

$$u_1 = \ln x_1, u_2 = \frac{x_2}{x_1 - 1} \ln x_1, u_3 = \ln x_3, u_4 = \frac{x_4}{x_3 - 1} \ln x_3. \tag{2}$$

3. Основной результат.

Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}}$ введено лоренцево скалярное произведение. Основным результатом, доказанным в работе [5] является следующая теорема (мы поменяли порядок базисных векторов).

Теорема 1. 1) *Существует только один способ задания лоренцевого скалярного произведения в алгебре Ли* $\mathcal{G}_{\mathrm{IV}} = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$, *при котором она допускает нетривиальную однопараметрическую группу автоизометрий* F_t. *Действие этой группы в каноническом базисе задаётся матрицей*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\nu t} \end{pmatrix}, \nu > 0, t \in \mathbf{R} \tag{3}$$

при этом, матрица Грама базиса имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

2) *Рассматриваемая алгебра Ли не допускает автоподобий при любом способе задания в ней лоренцевого скалярного произведения.*

Расположение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов, в случае, когда матрица Грама имеет вид (4), показано на рисунке 1. На идеале $\mathcal{H}$ индуцируется лоренцево скалярное произведение, векторы E_2 и E_4 изотропны, а идеалы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ являются ортогональными дополнениями векторов E_2 и E_4 соответственно.

Теорема 1 позволяет доказать следующий основной результат данной работы.

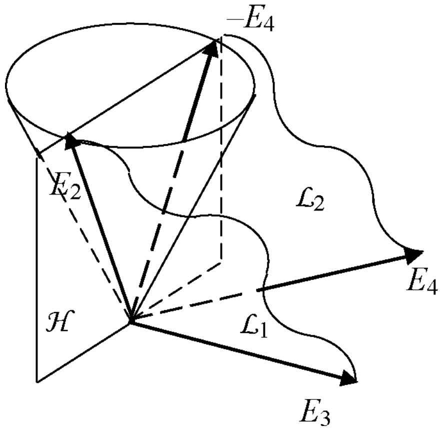

Рис. 1. Расположение базисных векторов

Теорема 2. 1) *Существует только одна с точностью до изометрии левоинвариантная лоренцева метрика g на группе Ли $G_{\mathrm{IV}} = A^+(1) \times A^+(1)$, при которой однородное многообразие (G_{IV}, g) допускает однопараметрическую группу изометрий $f_t : G_{\mathrm{IV}} \to G_{\mathrm{IV}}$, оставляющую инвариантной единичный элемент группы Ли. В описанных выше координатах метрический тензор задаётся матрицей*

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} x_1^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1^{-1}x_3^{-1} \\ 0 & 0 & x_3^{-2} & 0 \\ 0 & x_1^{-1}x_3^{-1} & 0 & x_3^{-2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а действие группы f_t задаётся формулами

$$x_1' = x_1, x_2' = e^{\nu t}x_2, x_3' = x_3, x_4' = e^{-\nu t}x_4, \ \nu > 0, t \in \mathbf{R} \tag{6}$$

2) *В описанных выше координатах действие полной группы изометрий построенного однородного многообразия описывается формулами*

$$x_1' = g_1x_1, x_2' = \pm e^t g_1x_2 + g_2, x_3' = g_3x_3, x_4' = \pm e^{-t}g_3x_4 + g_4, \ g_1 > 0, g_3 > 0, \tag{7}$$

причём знаки «+» или «–» можно в двух случаях выбирать независимо. Связная компонента полной группы изометрий, содержащая тождественное преобразование задаётся формулами (7) при выборе знака «+» в обоих случаях.

Доказательство. Левый сдвиг L_x на элемент $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$ действует по формуле

$$L_x(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, x_3y_3, x_3y_4 + x_4).$$

Матрица его дифференциала $(L_x)_*$ в любой точке $y(y_1, y_2, y_3, y_4)$ и обратная ней матрица имеют вид:

$$U(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} x_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица Грама лоренцевого скалярного произведения имеет вид (4) в каноническом базисе. В соответствии с методикой, описанной в работе []Gavrilov, матрицу метрического тензора (g_{ij}) в точке $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ищем по формуле

$$(g_{ij})(x) = V^T(x)\Gamma V(x),$$

и получаем матрицу (5).

Однопараметрическую группу изометрий $f_t : G_{\mathrm{IV}} \to G_{\mathrm{IV}}$, оставляющую неподвижной единицу группы Ли, строим по правилу

$$f_t = \exp \circ F_t \circ \exp^{-1}.$$

Обозначим $(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = F_t(u_1, u_2, u_3, u_4)$, $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = f_t(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Применяем сначала формулы (2), а затем формулы $(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = (u_1, e^{\nu t}u_2, u_3, e^{\nu t}u_4)$. Получаем, что

$$(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = (\ln x_1, e^{\nu t}\frac{x_2}{x_1 - 1}\ln x_1, \ln x_3, e^{-\nu t}\frac{x_4}{x_3 - 1}\ln x_3).$$

В завершение, применяем формулы экспоненты:

$$x'_1 = e^{u'_1}, x'_2 = \frac{u'_2}{u'_1}(e^{u'_1} - 1), x'_3 = e^{u'_3}, x'_4 = \frac{u'_4}{u'_3}(e^{u'_3} - 1).$$

Получаем в итоге

$$x'_1 = e^{\ln x_1} = x_1, x'_2 = \frac{e^{\nu t}\frac{x_2}{x_1 - 1}\ln x_1(e^{\ln x_1} - 1)}{\ln x_1} = e^{\nu t}x_2.$$

И аналогично получаем

$$x'_3 = x_3, x'_4 = e^{-\nu t}x_4.$$

Тем самым, построенная однопараметрическая группа $f_t : G_{\mathrm{IV}} \to G_{\mathrm{IV}}$ действует по формулам (6).

Проверим, что найденная группа преобразований, действительно является группой изометрий. Дифференциал преобразования $(f_t)_*(x)$ относительно координатных базисов $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3, \partial/\partial x_4)$ в касательных пространствах T_xG_{IV} и $T_{x'}G_{\mathrm{IV}}$ задаётся в точности матрицей (3). Обратная к ней матрица:

$$I(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu t} \end{pmatrix}.$$

Матрицу тензора $((f_t)^*g(x))$ находим из равенства

$$((f_t)^*g(x))_{ij} = I^T(x)(g_{ij}(x))I(x).$$

Непосредственное вычисление показывает, что эта матрица в точке (x_1, x_2, x_3, x_4) полностью совпадает с матрицей $(g_{ij}(x'))$ (в точке (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)).

Произвольная однопараметрическая группа $\bar{h}_t$ изометрий рассматриваемого многообразия, имеющая стационарный элемент $h \in G_{\rm IV}$ может быть представлена в виде $(L_h) \circ f_t \circ (L_h)^{-1}$. Пусть h имеет координаты (h_1, h_2, h_3, h_4), тогда

$$L_h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (h_1x_1, h_1x_2 + h_2, h_3x_3, h_3x_4 + h_4),$$

$$(L_h)^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{}{x_1}h_1, \frac{x_2 - h_2}{h_1}, \frac{}{x_3}h_3, \frac{x_4 - h_4}{h_3}\right).$$

Отсюда выводим формулы, по которым действует группа $\bar{h}_t$:

$$x'_1 = x_1, x'_2 = e^{\nu t}x_2 - h_2(e^{\nu t} - 1), x'_3 = x_3, x'_4 = e^{-\nu t}x_4 - h_4(e^{-\nu t} - 1). \qquad (8)$$

Преобразования алгебры Ли $\mathcal{G}_{\rm IV}$, которые действуют в каноническом базисе по правилам

$$E'_2 = -E_2, E'_i = E_i, i = 1, 3, 4,$$

$$E'_4 = -E_4, E'_i = E_i, i = 1, 2, 3,$$

а также их композиция, являются автоизометриями. Они порождают изометрии группы Ли $G_{\rm IV}$, действующие по формулам

$$x'_1 = x_1, x'_2 = \pm x_2, x'_3 = x_3, x'_4 = \pm x_4,$$

где знаки «+» или «−» могут выбираться независимо в двух случаях. Составляя композицию этого преобразования с f_t, мы получим изометрические автоморфизмы рассматриваемой лоренцевой группы Ли:

$$x'_1 = x_1, x'_2 = \pm e^{\nu t}x_2, x'_3 = x_3, x'_4 = \pm e^{-\nu t}x_4.$$

Произвольное изометрическое преобразование полученного однородного многообразия является композицией одного из таких преобразований при фиксированном значении t и левого сдвига L_g . Следовательно, оно действует по формулам (7) (при фиксированном значении t мы можем заменить νt на t). Другими словами, формулы (7) описывают действие полной группы H изометрий построенного многообразия. Связная компонента H_0 этой группы, содержащая тождественное преобразование, действует по формулам (7) при выборе знака «+» в обоих случаях. Если левоинвариантная метрика на группе Ли $G_{\rm IV}$ не изометрична построенной, то H_0 изоморфна с самой группе $G_{\rm IV}$. ■

4. Заключение.

В данной работе мы доказали, что существует единственная с точностью до изометрии левоинвариантная лоренцева метрика на четырёхмерной группе Ли $A^+(1) \times A^+(1)$, при которой получившееся многообразие допускает однопараметрическую группу изометрий, оставляющую неподвижной единицу группы Ли. Только в этом единственном случае полная группа изометрий лоренцевого многообразия рассматриваемой группы является пятимерной.

В работе [7] были найдены все автоподобия алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$. Это позволит построить самопоподобные многообразия группы Ли $A^+(1) \times (\mathbf{R}^+)^2$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой, и это является ближайшей целью дальнейших исследований.

Литература

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова. 2011. № 5. С. 10-15.
2. Подоксёнов М.Н. Самоподобные однородные двумерное и трёхмерное лоренцевы многообразия // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, 2018. №. 2(99). С. 14-19.
3. Подоксёнов М.Н., Кабанов А.Н. Самоподобное однородное лоренцево многообразие трехмерной группы Ли // Наука – образованию, производству, экономике: Материалы XXIV(71) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск,14 февраля 2019 г. Витеб. гос. ун-т . Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. Т. 1. С. 18-20.
4. Гуц А.К., Подоксёнов М.Н., Четырёхмерные самоподобные однородные многообразия группы Ли $Hs \times \mathbf{R}^+$ // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, 2022. № 1. С. 5-10.
5. Подоксёнов М.Н., Иванова И.А. Автоизометрии четырехмерной алгебры Ли IV типа Бианки // Математические структуры и моделирование. 2021. № 2(58) С. 28-36.
6. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трёхмерной группе Ли II типа Бианки // Гравитация и теория относительности (Казань), 1982. Вып. 19. С. 37- 47.
7. Подоксёнов М.Н., Черных В.В. Автоизометрии и автоподобия алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{R}^2$ // Математические структуры и моделирование, 2020. № 1(53). С. 25-30.

MAXIMAL GROUP OF ISOMETRIES OF THE LORENTZIAN LIE GROUP $A^{+}(1) \times A^{+}(1)$

M.N. Podoksenov[1]
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department "Geometry & Analysis", e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Y.V. Gorovaya[1]
Student, e-mail: gorovaya_yana@bk.ru

[1]Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus'

Abstract. We consider a connected simply connected four-dimensional Lie group G_{IV}, whose Lie algebra belongs to the IV Bianchi type. It is proved that there is only one way of defining a left-invariant Lorentzian metric on it, for which the full isometry group of the resulting homogeneous manifold is five-dimensional. In the coordinates associated with the matrix representation of the Lie group, the matrix of the metric tensor is found and formulas are written according to which the one-parameter group of isometries acts, which leaves the unit element of the Lie group G_{IV} fixed. Also, formulas are written out according to which the full group of isometries acts.

Keywords: Lie group, left-invariant Lorentzian metric, one-parameter isometry group, self-similar manifold.

Дата поступления в редакцию: 06.04.2022