Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова

СИТУАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методические рекомендации и задания к лабораторным работам

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2022

УДК 005.5:519.852(076)
ББК 65.291.21я73+22.18я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 03.03.2022.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук, доценты **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент *Т.В. Никонова*

Сурин, Т.Л.

С90 Ситуационный анализ и моделирование управленческих решений : методические рекомендации и задания к лабораторным работам / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – 48 с.

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы студентов второго курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальностям «Управление информационными ресурсами».

УДК 005.5:519.852(076)
ББК 65.291.21я73+22.18я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы по предмету «Ситуационный анализ и моделирование управленческих решений» студентов второго курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Управление информационными ресурсами». Методические указания будут также полезны студентам специальностей «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)», «Прикладная математика» и «Прикладная информатика» при изучении дисциплины «Методы оптимизации», а также студентам специальности «Программное обеспечение информационных технологий» при изучении дисциплины «Методы оптимизации и алгоритмы принятия решений».

Основное назначение издания – помочь студентам при подготовке к лабораторным работам и дать рекомендации по выполнению самих лабораторных работ.

Издание охватывает следующие вопросы дисциплины «Ситуационный анализ и моделирование управленческих решений»: математические модели в экономике; методы решения экономических задач: геометрический и симплекс-метод; основные вопросы теории двойственности. В нем содержатся методические рекомендации и задания к 9 лабораторным работам. В каждом параграфе приведен необходимый теоретический материал, дан алгоритм выполнения работы, разобраны примеры, иллюстрирующие применение алгоритма и приведены задания для лабораторной работы.

Материал, приведенный в издании, является основополагающим для этой дисциплины и применяется при изучении других разделов.

Лабораторная работа № 1
ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

I. Основные теоретические сведения и решение типовых задач

Рассмотрим точки на плоскости или в пространстве. Каждой точке M (x, y) плоскости (точке M (x, y, z) пространства) поставим в соответствие радиус-вектор $\overrightarrow{OM}(x, y)$ $(\overrightarrow{OM}(x, y, z))$, выходящий из начала координат.

Линейной комбинацией точек M_1, M_2, …, M_m называется выражение: $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots + \lambda_m M_m$, где λ_k, $k=\overline{1,m}$ – некоторые действительные коэффициенты. Под линейной комбинацией точек будем понимать линейную комбинацию радиус-векторов этих точек (точка $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ имеет координаты $M\,(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$, если $M_1\,(x_1, y_1)$, $M_2\,(x_2, y_2)$).

Выпуклой комбинацией точек M_k, $k=\overline{1,m}$, называют линейную комбинацию этих точек, коэффициенты λ_k которой удовлетворяют условиям: 1) $\lambda_k \geq 0$, 2) $\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k = 1$.

Множество точек называется ***выпуклым***, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки. По- другому, это можно сформулировать так: *множество G называется выпуклым, если для любых двух точек M_1 и M_2, принадлежащих этому множеству, и произвольного числа λ, такого что $0 \leq \lambda \leq 1$, следует, что точка $M = \lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2$ также принадлежит множеству G.*

Точка M множества G называется ***угловой*** **(*крайней*)** ***точкой*** этого множества, если не существует представления M в виде $M = \lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2$, где $M_1, M_2 \in G$, $0 < \lambda < 1$.

Множество точек называется ***ограниченным***, если существует круг (шар) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество. В противном случае множество называется ***неограниченным***.

Выпуклое замкнутое множество точек плоскости (пространства), имеющее конечное число угловых точек, называется **выпуклым многоугольником (многогранником),** если оно ограниченное, и **выпуклой многоугольной (многогранной) областью**, если оно неограниченное.

Для выпуклого ограниченного множества угловые точки всегда совпадают с вершинами многоугольника (многогранника).

Введенные понятия можно обобщить также на n-мерное точечное пространство.

Основные свойства выпуклого множества точек

Теорема 1. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество*.

Рассмотрим множество решений совместной системы линейных неравенств с двумя переменными.

***Теорема* 2.** *Множество решений совместной системы m линейных неравенств с двумя переменными*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \le b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x + a_{m2}y \le b_m \end{cases}$$

является выпуклым многоугольником (*или выпуклой многоугольной областью*).

Знаки некоторых или всех неравенств могут быть $\ge$.

Эту теорему для n переменных можно сформулировать следующим образом.

***Теорема* 3.** *Множество решений совместной системы m линейных неравенств с n переменными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} \le b_m \end{cases}$$

является выпуклым многогранником (*или выпуклой многогранной области*) *в n-мерном пространстве*.

Пересечение полуплоскостей, каждая из которых определяется соответствующим неравенством системы, называется **областью решения системы.**

Замечание. Множество решений системы m линейных неравенств с n переменными называется **полиэдром.**

***Теорема* 3.** Любой замкнутый многоугольник является выпуклой линейной комбинацией его угловых точек.

Геометрический смысл решений неравенств. Рассмотрим неравенства с двумя переменными вида $a_1x + a_2y \le b$.

Множеством решений этого неравенства является одна из двух полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой $a_1x + a_2y = b$, включая и эту прямую, а другая полуплоскость является множеством решений неравенства $a_1x + a_2y > b$.

***Пример* 1.** Построить множество решений следующих неравенств: 1) $2x + 3y - 6 \le 0$; 2) $2x + 3y - 6 \ge 0$.

Решение. Построим прямую $2x+3y - 6 = 0$. Данная прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых вместе с этой прямой является решением неравенства 1), а вторая – неравенства 2).

Определим, какая из полуплоскостей является решением неравенства 1). Для этого зададим произвольную контрольную точку, не лежащую на построенной прямой. Проще всего взять точку с координатами (0; 0). Подставим координаты в неравенство 1):

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \le 0.$$

Видим, что оно выполняется, так как −6 < 0. Поэтому решением неравенства 1) является нижняя полуплоскость вместе с прямой $2x+3y-6=0$ (рисунок 1.1). Решением неравенства 2) является верхняя полуплоскость вместе с прямой $2x+3y-6=0$ (рисунок 1.2).

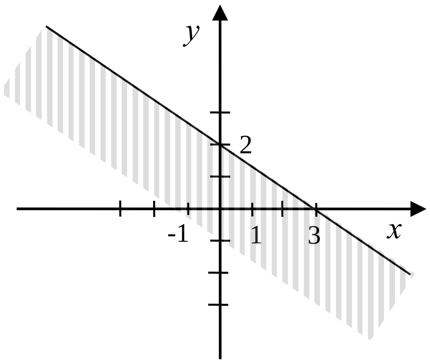

Рис. 1.1.

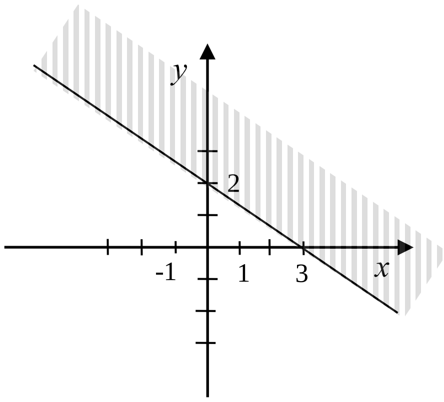

Рис. 1.2.

***Пример* 2.** 1) Построить область решений системы неравенств

$$\begin{cases} -x+y\le 5, \\ 2x+3y\le 24, \\ x-3y\le 3. \end{cases}$$

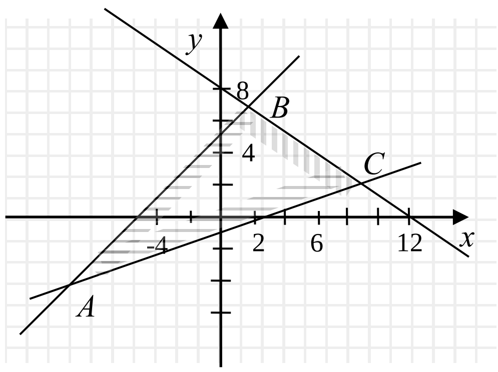

Рис. 1.3.

2) Определить координаты угловых точек области допустимых решений. 3) Представить точку M (1;4) в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек.

Решение. 1) Областью решений является треугольник ABC, представленный на рисунке 1.3.

Уравнение $y = x + 5$ задает прямую AB – границу полуплоскости, являющейся решением первого неравенства системы.

Для нахождения искомой полуплоскости зададим контрольную точку с координатами (0; 0). Подставив данные координаты в неравенство $-x + y \le 5$ видим, что оно выполняется, так как 0 < 5. Поэтому искомой является нижняя полуплоскость.

Сторона BC треугольника, образованная границей второго неравенства системы, определяется уравнением прямой $2x+3y=24$. Для контрольной точки с координатами (0; 0) неравенство выполняется, так как 0 < 24, поэтому искомой также является нижняя полуплоскость.

Сторона AC треугольника, образованная границей третьего неравенства системы, определяется уравнением прямой $x-3y=3$. Для контрольной точки с координатами (0; 0) неравенство выполняется, так как 0 < 3. Поэтому искомой является верхняя полуплоскость.

Координаты угловых точек (вершин) этого треугольника находятся как координаты точек пересечения соответствующих прямых. Например, точка B – точка пересечения первой и второй прямых, т.е. ее координаты являются решением системы двух уравнений:

$$\begin{cases} -x + y = 5, \\ 2x + 3y = 24. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим координаты точки B: $x_B = \frac{9}{5} = 1{,}8$; $y_B = \frac{34}{5} = 6{,}8$. Аналогично находим координаты точки A: $x_A = -9$; $y_A = -4$; координаты точки C: .$x_C = 9$; $y_C = 2$.

Итак, A (−9; −4), B (1,8; 6,8), C (9; 2).

2) Представим точку M (1; 4) в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек. Запишем уравнение прямой AM:

$$\frac{x+9}{1+9} = \frac{y+4}{4+4} \text{ или } y = \frac{4}{5}x + \frac{16}{5}.$$

Запишем уравнение прямой BC:

$$\frac{x-9}{1{,}8-9} = \frac{y-2}{6{,}8-2} \text{ или } y = -\frac{2}{3}x + 8.$$

Найдем точку пересечения этих прямых: D (36/11; 64/11). Так как точка D лежит на отрезке BC, то ее можно записать в виде выпуклой комбинации точек B и C: $D = \lambda B + (1-\lambda)C$. Тогда, приравняв абсциссы или ординаты точек, входящих в это уравнение, получим

$$\frac{36}{11} = \lambda\frac{9}{5} + 9(1-\lambda), \text{ или } \frac{64}{11} = \lambda\frac{34}{5} + 2(1-\lambda).$$

Решая одно из уравнений, находим λ: $\lambda = 35/44$.

Точка M лежит на отрезке AD. Значит, ее можно записать в следующем виде: $M = \lambda_1 A + (1-\lambda_1)D$. Аналогично λ, находим λ_1: $\lambda_1 = 5/27$. Теперь подставим в представление точки M в виде выпуклой линейной комбинации точек представление точки D

$$M = \lambda_1 A + (1-\lambda_1)(\lambda B + (1-\lambda)C) =$$
$$\lambda_1 A + (1-\lambda_1)\lambda B + (1-\lambda_1)(1-\lambda)C = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C,$$

где $\lambda_2 = (1-\lambda_1)\lambda = 35/54$; $\lambda_3 = (1-\lambda_1)(1-\lambda) = 1/6$. Так как $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5/27 + 35/54 + 1/6 = 1$, то мы нашли представление точки M в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек.

II. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Изобразить на плоскости полиэдр, задаваемый системой неравенств

$$\begin{cases} 6x + dy \le 18, \\ 4x - ay \ge -24, \\ bx - 12y \le 36, \\ cx + 3y \ge -27. \end{cases}$$

Вариант	*a*	*b*	*c*	*d*	$M(x;y)$
1	24	1	9	1	(2;1)
2	12	5	2	2	(−1;−2)
3	8	7	4	3	(1;1)
4	6	10	5	4	(−1,2)
5	4	11	7	5	(2;2)
6	3	15	8	6	(−1;−1)
7	2	14	10	7	(-3;1)
8	1	2	4	8	(−2;2)
9	1,5	3	3	9	(1;−2)
10	2,5	4	5	10	(2;−1)
11	3,5	9	2	12	(−3;−3)
12	5	6	3	14	(−5;−1)
13	7	12	6	15	(0;0)
14	9	18	1	16	(−1;0)
15	10	36	3	18	(1;0)

Найти все вершины данного полиэдра и представить точку M в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек.

Задание 2. Найти минимальное значение параметра c, при котором множество $X=\{x: (ax_1^2 + 1)x_2 \le b,\ x_2 \ge c\}$ выпукло.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	2	1	4	5	3	1	5	3	4	2	2	1	3	5	4
b	1/2	5	1/4	2/3	1/5	6	4	8	3	1	5/2	9	10	11	4

Лабораторная работа № 2
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

I. Примеры экономических задач линейного программирования

Задача* 1. *Производственная задача (задача наилучшего использования ресурсов).

Предприятие выпускает два вида продукции A_1 и A_2. Для их изготовления необходимо затратить такие производственные факторы, как сырье, физический труд и управленческий труд. Затраты ресурсов на единицу продукции каждого вида, ежедневный объем имеющихся ресурсов, а также прибыль на единицу продукции (в условных денежных единицах – сокращенно д.е.) приведены в таблице 1. Требуется составить план ежедневного выпуска продукции, при котором получаемая прибыль будет максимальной.

Таблица 1

Тип ресурсов	Затраты ресурсов на единицу продукции вида		Объемы ресурсов
	A_1	A_2	
Сырье (кг)	10	40	800
Физический труд (чел.-ч)	12	20	640
Управленческий труд (чел.-ч)	3	5	145
Прибыль на ед. продукции (д.е)	60	50	

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество единиц продукции вида A_j, (j=1,2), которое предприятие планирует выпустить за сутки. Тогда $60x_1$ – прибыль от реализации продукции вида A_1 и $50x_2$ – вида A_2, $z(x) = 60x_1 + 50x_2$ – прибыль от реализации всей продукции. Рассмотрим ограничения на ресурсы. Для изготовления x_1 единиц продукции первого вида потребуется $10x_1$ кг сырья; $12x_1$ чел.-ч. физического труда; $3x_1$ чел.-ч. управленческого труда. Для изготовления x_2 единиц продукции второго вида потребуется $40x_2$ кг сырья; $20x_2$ чел.-ч. физического труда; $5x_2$ чел.-ч. управленческого труда. Затраты сырья на производство всей продукции всей продукции первого и второго вида будут равны $10x_1 +40x_2$. Поскольку в наличии имеется 800 кг сырья, то получаем $10x_1+40x_2 \leq 800$. Затраты физического труда на производство всей продукции равны $12x_1 +20x_2$. Поскольку в течение суток можно использовать 640 чел.-ч физического труда, то получим $10x_1 +40x_2 \leq 640$. Для затрат управленческого труда имеем $3x_1 +5x_2 \leq 145$. Из физического смысла переменных следует, что они неотрицательны: продукция либо выпускается ($x_j > 0$), либо нет ($x_j = 0$).

Получаем следующую математическую задачу:

$$z(x) = 60x_1+50x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 40x_2 \leq 800, \\ 12x_1 + 20x_2 \leq 640, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 145, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Задача (1) называется математической моделью производственной задачи, сформулированной в задаче 1.

Задача 2. Задача о рационе.

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен потреблять в сутки белков не менее 120 усл. ед., жиров не менее 70 и витаминов не менее 10 усл. ед. Содержание их в единице пищи A_j, (j=1,2,3) указаны в таблице 2. Там же приведена стоимость единицы пищи. Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получал необходимое количество питательных веществ.

Таблица 2

Тип питательного существа	Содержание питательного вещества в единице пищи			Нижние пределы полезного вещества
	A_1	A_2	A_3	
Белки	1	3	2	120
Жиры	2	1	5	70
Витамины	1	0,2	0,5	10
Стоим. ед. пищи (д.е)	5	1	3	

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество единиц пищи вида A_j, $j=\overline{1,3}$, которое необходимо приготовить.

Тогда стоимость рациона будет равна $z(x) = 5x_1+x_2+3x_3$.

Поскольку белков содержится в единице пищи вида A_j, $j=\overline{1,3}$, по 1, 3 и 2 усл.ед., то в рационе будет $x_1 + 3x_2 + 2x_3$ усл. ед. белков. По условию задачи в рационе должно быть не менее 120 усл. ед. белков, следовательно, получим ограничение $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 120$.

Аналогично будем иметь для жиров: $2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 70$, для витаминов: $x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}5x_3 \geq 10$. Из физического смысла переменных следует их неотрицательность: $x_j \geq 0$, $j=\overline{1,3}$.

Итак, задача о рационе свелась к решению следующей задачи:

$$z(x) = 5x_1+x_2+3x_3 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 120, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 70, \\ x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}5x_3 \geq 10. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Задача (2) является математической моделью задачи о рационе.

II. Задания для лабораторной работы

При различных сочетаниях вариантов таблиц построить математические модели следующих задач.

Задание 1. [2, стр. 10, задание 1.2]. На изготовлений изделий типа A_1 и A_2 расходуются 3 вида материалов B_1, B_2 и B_3. Количество материала каждого вида (в кг), необходимое для изготовления одного изделия любого вида, а также имеющиеся на складе ресурсы материалов заданы в таблице 3.

Цена одного изделия каждого типа дана в таблице 4. Требуется спланировать выпуск изделий таким образом, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 3

Варианты	Вид материала	Затраты материала на 1 изделие (кг)		Ресурсы (кг)
		A_1	A_2	
1	B_1	3	-	60
	B_2	-	1	50
	B_3	2	1	80
2	B_1	2	1	100
	B_2	1	-	40
	B_3	1	1	80
3	B_1	4	5	160
	B_2	2	1	62
	B_3	-	4	96
4	B_1	1	3	180
	B_2	2	1	180
	B_3	1	1	100
5	B_1	1	1	80
	B_2	3	10	590
	B_3	3	1	210

Таблица 4

Варианты	Цена 1 изделия (д.е.)	
	A_1	A_2
1	10	30
2	15	25
3	25	10
4	40	60
5	70	80
6	100	20
7	50	40
8	10	40
9	30	25
10	40	30
11	50	20
12	10	60
13	70	90
14	60	70
15	20	50

***Задание* 2.** [2**,** стр. 13, задание 1.8]. На звероферме могут выращиваться два вида ценных пушных зверей. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используют 3 типа кормов. Количество корма каждого типа, которое должны ежедневно получать звери, приведено в табл. 5. В ней же указано общее количество корма каждого типа, которое может быть использовано зверофермой. Доход от реализации одной шкурки каждого зверя задан в табл. 6. Определить, сколько зверей каждого вида следует выращивать на звероферме, чтобы доход от реализации их шкурок был максимальным.

Таблица 5

Варианты	Тип корма	Количество ед. корма, ежедневно получаемое зверем		Общее количество корма
1	*I*	2	3	180
	II	4	1	240
	III	8	27	1350
2	*I*	3	1	240
	II	9	2	630
	III	5	3	600
3	*I*	2	5	600
	II	4	5	1000
	III	4	15	1500
4	*I*	3	4	600
	II	2	2	380
	III	5	8	1120
5	*I*	4	1	400
	II	8	1	720
	III	2	1	300

Таблица 6

Варианты	Доход от реализации одной шкурки (д.е.)	
	1-го вида	2-го вида
1	300	400
2	200	600
3	400	900
4	350	700
5	250	340
6	480	300
7	500	400
8	380	200
9	350	210
10	550	400
11	260	320

12	400	60
13	350	260
14	360	420
15	400	460

***Задание* 3.** [2**,** стр. 15, задание 1.10]. Для производства некоторого сплава используют 4 различных шихтовых материала A_1, A_2, A_3, A_4. Химический состав сплава определяется содержанием в нем химических элементов B_1 и B_2. Готовый сплав должен иметь строго определенный состав, который задается долями (в %) химических элементов в готовом продукте. При этом известно содержание (в %) каждого химического элемента во всех видах шихтового материала (см. табл. 7). Задана также стоимость каждого шихтового материала (см. табл. 8). Определить необходимое количество шихтовых материалов, обеспечивающее получение заданного количества сплава при минимальной общей стоимости использования шихтовых материалов.

Таблица 7

Варианты	Химические элементы	Содержание (в %) химических элементов в шихтовом материале				Химический состав сплава (в %)	Заданное количество сплава (т)
		A_1	A_2	A_3	A_4		
1	B_1	30	10	40	40	57,5	800
	B_2	20	10	20	30	42,5	
2	B_1	20	10	40	50	65	400
	B_2	10	10	10	30	35	
3	B_1	50	20	50	10	62,5	400
	B_2	40	10	10	10	37,5	
4	B_1	10	0	20	30	45	700
	B_2	10	10	10	40	55	
5	B_1	50	10	10	20	42	1200
	B_2	40	10	20	30	58	

Таблица 8

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость 1 т шихты (д.е.)	A_1	100	60	90	70	80	75	65	70	95	105
	A_2	120	100	40	60	90	90	55	110	45	125
	A_3	70	80	50	15	100	105	10	90	55	75
	A_4	30	70	120	140	140	150	110	160	110	40

Задание 4. [2**,** стр. 18, задание 1.14]. Стальные прутья заданной длины необходимо разрезать на заготовки определенной длины. Требуемое количество заготовок данного типа, возможные варианты разреза и длина прутьев заданы в табл. 9–11. Определить, сколько прутьев необходимо

разрезать по каждому из возможных вариантов, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого типа при минимальных отходах.

Таблица 9

Вариант	Длина заготовок соответствующего типа (см)		Способы разреза					
			I	II	III	IV	V	VI
1	*А*	52	2	1	1	-	-	-
	Б	60	-	1	-	2	1	-
	В	35	1	1	2	-	2	4
2	*А*	60	2	1	1	-	-	-
	Б	70	-	1	-	2	1	-
	В	54	-	-	1	-	1	2
3	*А*	60	3	2	1	-	-	-
	Б	80	-	1	-	2	1	-
	В	90	-	-	1	-	1	2

Таблица 10

Вариант		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество заготовок соответствующего типа (шт.)	*А*	40	50	60	50	40	50	40	30	30	50
	Б	36	30	20	20	20	70	60	50	60	80
	В	20	20	10	10	10	30	20	10	20	20

Таблица 11

Вариант		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Длина прутьев (см)	1*а*	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
	2*а*	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
	3*а*	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209

Лабораторная работа № 3
ФОРМЫ ЗАПИСИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

I. Основные теоретические сведения и решение типовых задач

Модель задачи линейного программирования может быть записана в одной из приведенных ниже форм.

1. *Общая, или произвольная*, форма записи:

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{при ограничениях: } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m_1}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{m_1+1,m_2}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad (i=\overline{m_2+1,m}), \\ x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n_1}),\ x_j \le 0 \quad (j=\overline{n_1+1,n_2}) \end{cases}$$

x_j – произвольного знака $(j=\overline{n_2+1,n})$.

2. *Симметричная*, или *стандартная*, форма записи:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad\qquad \min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m}), \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}). \qquad\qquad x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

3. *Каноническая*, или *основная*, форма записи:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}), \quad x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

Указанные выше, три формы записи задач линейного программирования (ЗЛП) эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть сведена к другой форме.

Так, при необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот. Очевидно, что минимальное значение функции $z(x)$ равно максимальному значению функции $(-z(x))$, взятому с противоположным знаком, т.е. $min\, z(x) = -max(-z(x))$.

Неравенства типа $\ge$ путем умножения левых и правых частей на -1 можно превратить в неравенство типа $\le$, и наоборот.

Ограничения-неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \left\{ \begin{matrix} \le \\ \ge \end{matrix} \right\} b_i$ преобразуются в ограничения-равенства путем прибавления (вычитания) к левым частям дополнительных (балансовых) неотрицательных переменных $x_{n+i} \ge 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} x_{n+1} = b_i .$$

В случае необходимости ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде системы неравенств

$$\left. \begin{matrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i. \end{matrix} \right\}$$

Если в ЗЛП какая-то переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют разностью двух других неотрицательных переменных $x_k^{'} \ge 0$ и $x_k^{''} \ge 0$: $x_k = x_k^{'} - x_k^{''}$.

Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, прямо связанный с содержанием задачи. Так, в задачах об использовании ресурсов они показывают величину неиспользованного ресурса, в задачах о смесях – потребление соответствующего компонента сверх нормы.

***Пример* 1.** Привести к каноническому виду ЗЛП.

$minZ=-2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 2, \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 6, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \le 4, \end{cases}$$

x_1 и x_2 – любого знака, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$.

Решение. Преобразуем смешанную систему ограничений в систему уравнений. Это осуществляется путем вычитания дополнительной неотрицательной переменной x_5 из левой части третьего ограничения и прибавления дополнительных неотрицательных переменных x_6 и x_7 к левым частям четвертого и пятого ограничений. Балансовые переменные вводим в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

Функцию Z меняем на $Z' = -Z$. В результате получаем

$$max\ Z' = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_7,$$

при ограничениях:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 = 6, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_7 = 4, \end{cases}$$

x_1 и x_2 – любого знака, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$.

Остается переменные x_1 и x_2 произвольного знака заменить разностью двух неотрицательных переменных: $x_1 = x_1^{'} - x_1^{''}, x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$, где $x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''} \ge 0$. Это предоставляется сделать самостоятельно.

***Пример* 2.** Привести ЗЛП, заданную в каноническом виде, к задаче в симметричной форме:

$$max\ Z = 2x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 + 6;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 9x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,5}).$$

Решение. Находим (например, методом Гаусса) общее решение системы ограничительных уравнений:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 - \dfrac{13}{5}x_2 + \dfrac{9}{5}, \\ x_4 = 2x_1 - \dfrac{13}{5}x_2 + \dfrac{14}{5}, \\ x_5 = 2x_1 + \dfrac{3}{5}x_2 - \dfrac{9}{5}. \end{cases}$$

С помощью этих равенств исключаем из целевой функции x_3, x_4 и x_5. Получаем $Z = 4x_1 + \frac{34}{5}x_2 - \frac{2}{5}$.

Остается в полученных равенствах опустить неотрицательные слагаемые x_3, x_4 и x_5 и перейти к эквивалентным неравенствам. В результате приходим к симметричной форме ЗЛП:

$$\max Z = 4x_1 + \frac{34}{5}x_2 - \frac{2}{5}; \qquad \begin{cases} -x_1 + \dfrac{13}{5}x_2 \le -\dfrac{9}{5}, \\ -2x_1 + \dfrac{13}{5}x_2 \le -\dfrac{14}{5}, \\ -2x_1 - \dfrac{3}{5}x_2 \le \dfrac{9}{5}, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Общее решение системы ограничительных уравнений можно записать и в другом базисе, а потому и симметричная форма ЗЛП выразится через иные переменные.

II. Задания для лабораторной работы

Задание 1.

1. Привести к канонической форме задачи 2 и 4 из лабораторной работы № 1.

2. Задачу ЛП на максимум свести к канонической форме.

1. $\varphi = x_1 - 3x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2.$

2. $\varphi = -2x_1 - 2x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \\ -x_1 + x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 2, 3.$

3. $\varphi = -3x_1 + x_2 - x_3$

4. $\varphi = 2x_1 - 4x_2 - 4x_3$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4, \\ 2x_3 \leq 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 14, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq -6, \\ x_2 \leq 7, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{2,3}.$

5. $\varphi = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 14, \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq -5, \\ x_2 + 2x_3 \leq 2, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{2,3}.$

6. $\varphi = x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq -5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4, \\ x_3 \leq 4, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

7. $\varphi = 2x_1 - 3x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -14, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_2 \leq 7, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$

8. $\varphi = 2x_1 + x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 5, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0.$

9. $\varphi = -x_1 + x_2 - 5x_3$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \end{cases}$$

$x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0.$

10. $\varphi = -x_1 - 5x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

11. $\varphi = 5x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 \geq -5, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{2,3}.$

12. $\varphi = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -5, \\ x_2 + 8x_2 - x_3 \leq 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{2,3}.$

13. $\varphi = -2x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 \geq 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 21, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

14. $\varphi = -x_1 - 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ x_2 - 5x_3 \leq -5, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{2,3}.$

Задание 2.

1. Привести к стандартному виду задачу 3 из лабораторной работы №1.

2. Задачу ЛП на максимум свести к стандартной форме.

1. $\varphi = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \le 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

2. $\varphi = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ 20x_1 - 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 87, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 4,\ x_3 \le 0.$

3. $\varphi = -2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 15, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 30, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 15x_4 \ge -9, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

4. $\varphi = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 25x_3 + 4x_4 = 10, \\ 10x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \ge 20, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3,\ \ x_4 \le 0.$

5. $\varphi = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

6. $\varphi = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \le 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

7. $\varphi = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 40x_4 \ge -1, \end{cases}$$

$x_j \le 0,\ j = 1, 2,\ \ x_3 \ge 0,\ \ \mathrm{x}_4 \ge 0.$

8. $\varphi = -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 10, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 \le 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

9. $\varphi = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ -10x_2 - 20x_3 + 15x_4 = 60, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \le 9, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

10. $\varphi = 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \ge -2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \ge 0.$

11. $\varphi = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \le 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

12. $\varphi = 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 57, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

13. $\varphi = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ -3x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

14. $\varphi = 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 40x_4 \le -1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

Лабораторная работа № 4
ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ

I. Основные теоретические сведения и решение типовых задач

Производная по направлению и градиент функции трех переменных. Пусть на множестве $\{M\}$ задана функция $u = f(x, y, z)$. Возьмем точку M_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0) \in \{M\}$ и единичный вектор $\bar{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, задающий направление в точке M_0. Выберем точку $M(x, y, z)$ так, чтобы вектор $\bar{l}$ был направляющим вектором прямой M_0M (рис 1.). Обозначим через l длину отрезка M_0M, взятую со знаком «+», если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ сонаправлен с вектором $\bar{l}$, и взятую со знаком «–», если вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\bar{l}$ противоположно направлены. В этом случае прямую M_0M можно задать параметрически уравнениями

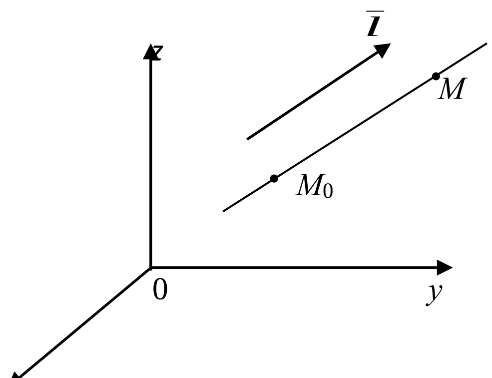

Рис. 4.1

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cos\alpha, \\ y = y_0 + l\cos\beta, \\ z = z_0 + l\cos\gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда функцию $u = f(x, y, z)$ на прямой M_0M можно рассматривать как сложную функцию от одной переменной l:

$$u = f(x, y, z) = f(x_0 + l\cos\alpha,\ y_0 + l\cos\beta,\ z_0 + l\cos\gamma).$$

Если эта функция имеет в точке $l = 0$ производную, то эта производная называется **производной по направлению** $\bar{l}$ **от функции** $u = f(x, y, z)$ **в точке** $\boldsymbol{M_0}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}$. Эту производную можно найти как производную сложной функции $u = f(x, y, z)$, аргументы которой являются функциями, заданными уравнениями (1) от переменной l:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dl}.$$

Так как $\frac{dx}{dl} = \cos\alpha,\ \frac{dy}{dl} = \cos\beta,\ \frac{dz}{dl} = \cos\gamma$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

Производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в формуле (2) находятся в точке M_0.

Рассмотрим вектор, обозначаемый символом $\mathrm{grad}\, u$ и имеющий координаты

$$\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right), \qquad (3)$$

который называется **градиентом функции** $u = f(x, y, z)$ в точке M_0. Тогда формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \bar{l} \cdot \mathrm{grad}\, u = |\mathrm{grad}\, u| \cdot |\bar{l}| \cos\varphi = |\mathrm{grad}\, u| \cdot \cos\varphi \qquad (4)$$

где φ – угол между векторами $\mathrm{grad}\ u$ и $\bar{l}$. Так как величина $|\mathrm{grad}\, u| \cdot \cos\varphi$ является наибольшей при $\cos\varphi = 1$ ($\varphi = 0$), то можно сделать вывод, что ***производная функции и по направлению*** $\bar{l}$ ***в точке*** M_0 ***будет наибольшей***, *если направления векторов* $\mathrm{grad}\, u$ *и* $\bar{l}$ *совпадают.*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = \mathrm{grad}\, u.$$

Говорят, *функция* $u = f(x, y, z)$ *в точке* M_0 *имеет* ***наибольшую скорость роста*** *в направлении вектора* $\mathrm{grad}\ u$. Величина наибольшего роста функции равна $|\mathrm{grad}\ u|$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$, *называется поверхность, которая задается формулой*

$$f(x, y, z) = C, \text{ где } C = \mathrm{const}.$$

Нетрудно убедиться, что градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 является нормальным вектором к поверхности уровня данной функции, проходящей через точку M_0.

Производная по направлению и градиент функции двух и *n*-переменных. Пусть у нас задана функция $z = f(x, y)$. Тогда аналогично функции трех переменных вводятся понятия производной по направлению и градиента функции двух переменных.

Для функции $z = f(x, y)$ единичный вектор $\bar{l}$, определяющий направление в точке M_0, имеет координаты $\cos\alpha,\ \sin\alpha$. Поэтому в указанном случае формула (2) имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

Градиент функции $z = f(x, y)$ определяется как вектор с координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Определение** 2. **Линией уровня функции $z = f(x, y)$ *называется линия на плоскости, задаваемая уравнением* $f(x, y) = C$, *где* $C = const$.

Аналогично вводится понятие производной по направлению и градиента функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке M_0, то производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ по направлению, задаваемому единичным вектором $\bar{l}(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n .$$

Градиентом функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0 называется вектор $\operatorname{grad} u\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0}, \ldots, \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{M_0}\right)$.

***Пример* 1.** Для функции $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$ найти

а) производную функции по направлению вектора $\bar{l}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ в точке $M_0(0, 3, 1)$,

б) величину и направление наибольшего роста функции в точке M_0,

в) поверхность уровня функции в точке M_0.

Решение. *а*) Найдем координаты единичного вектора $\vec{e}$ сонаправленного с вектором $\bar{l}$. Так как $\left|\bar{l}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то вектор $\vec{e}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Значит, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Найдем значение частных производных функции в точке M_0:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = \left.\frac{x}{2}\right|_{M_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left.\frac{2y}{9}\right|_{M_0} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left.\frac{z}{2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

Тогда по формуле (2) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{13}}{18}$.

б) Найдем координаты и абсолютную величину вектора $\operatorname{grad} u$.

Координаты вектора $\bar{a} = \operatorname{grad} u$ в точке $M_0(0,\ 3,\ 1)$ находятся по формуле (3): $\bar{a}\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right) = \bar{a}\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Этот вектор указывает направление наибольшего роста функции в точке M_0.

Величина наибольшего роста функции равна

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}.$$

в) Поверхности уровня функции задаются уравнением

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = C,$$

где C – произвольная постоянная. Найдем значение этой постоянной соответствующей поверхности уровня, проходящей через точку M_0. Для этого подставим координаты точки в данное уравнение, получим $C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$. Разделив левую и правую части уравнение поверхности на $C = \frac{5}{4}$, получим каноническое уравнение эллипсоида $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{45/4} + \frac{z^2}{5} = 1$ с полуосями $a = \sqrt{5}$, $b = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $c = \sqrt{5}$.

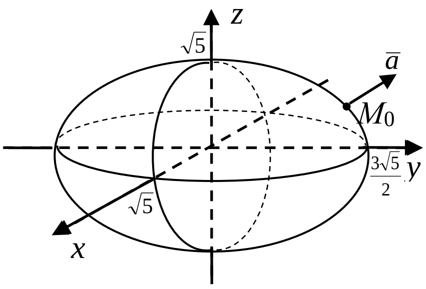

Рис. 4.2

Вектор $\bar{a} = \operatorname{grad} u\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ в точке $M_0(0,\ 3,\ 1)$ перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня и указывает направление наибольшего роста функции $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$.

II. Задания для лабораторной работы

1. Для функции $u = f(x, y, z)$ ($z = f(x, y)$) найти:

а) производную функции по направлению вектора $\bar{l}$ в точке M_0;

б) величину и направление наибольшего роста функции в точке M_0;

в) поверхность (линию) уровня функции в точке M_0;

г) в задании *б*) изобразить линию уровня функции $z = f(x, y)$.

Вариант	*а*)	*б*)
1.	$u = x^2yz + 2xyz^2 - 2xy + 4yz + 5$; $\bar{l}(1, 2, 1)$; $M_0(1, 0, 2)$	$z = \sin\frac{x^2}{y}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(\sqrt{\pi}, 2)$
2.	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 2y - 2$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(2, 3, 1)$	$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x}}$; $\bar{l}(1, 2)$; $M_0(1, 1)$
3.	$u = x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4yz + 3$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 3, 1)$	$z = tg\sqrt{xy}$; $\bar{l}(1, 2)$; $M_0(1, \frac{\pi^2}{16})$
4.	$u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} + 2z^2 + 4xy + 1$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 2, 1)$	$z = \frac{1}{\sqrt{y - x^2 + x}}$; $\bar{l}(2, 1)$; $M_0(1, 4)$
5.	$u = x^2 + 4y^2 - z^2 + 4x - 12z + 7$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 2, 2)$	$z = \frac{1}{(x - y^2)^3}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(8, 4)$
6.	$u = \frac{xz + yz + xy}{y}$ $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 2, 1)$	$z = y - 2x^2 + 2x$; $\bar{l}(1, 2)$; $M_0(2, 7)$
7.	$u = (2x + 4y - 3z)^4$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(0, 1, 3)$	$z = \frac{x^2 + 2x}{y}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(2, 7)$
8.	$u = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 4$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 2, 1)$	$z = \frac{1}{\sqrt{(yx)^3}}$; $\bar{l}(2, 1)$; $M_0(1, 3)$
9.	$u = 4x^2 + 2y^2 - z + 4x + 2y - 5$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 1, 1)$	$z = tg\frac{2x}{y}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(\frac{\pi}{4}, 2)$
10.	$u = x^2 + 2y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{yz}{x}$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(2, 0, 1)$	$z = e^{2x^2 + y^2}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(1, 1)$
11.	$u = xy^2z + x^2 + 2y^2 + z^2 + 4$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(2, 0, 1)$	$z = \ln\frac{x}{y}$; $\bar{l}(3, 3)$; $M_0(1, e)$
12.	$u = x\sqrt{xyz}$ $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 2, 2)$	$z = \sqrt{\frac{2x + y}{y}}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(1, 1)$
13.	$u = \frac{xz + yz + xy}{y}$ $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 2, 1)$	$z = 2^{x^2 + 2y^2 + 1}$; $\bar{l}(0, 1)$; $M_0(1, 1)$
14.	$u = x^2 + 2y^2 + z^2 + \ln xyz$; $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(1, 1, 1)$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(1, 1)$
15.	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\bar{l}(1, 1, 1)$; $M_0(4, 4, 2)$	$z = \arcsin(3x + 2y)$; $\bar{l}(1, 1)$; $M_0(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$

Лабораторная работа № 5
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

I. Основные теоретические сведения и решение типовых задач

Задача с двумя переменными. Найти решение $x = (x_1; x_2)$ задачи

$$\max (\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Начнем с геометрической интерпретации области допустимых решений. Каждое из неравенств (2) определяет на координатной плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость, а система неравенств (2), (3) в случае ее совместности – их пересечение. Это будет выпуклое множество. Оно может представлять собой выпуклый многоугольник – ***многоугольник решений*** (рис. 5.1), неограниченную выпуклую многоугольную область (рис. 5.2), пустое множество (рис. 5.3), отрезок (рис. 5.4), быть лучом или точкой.

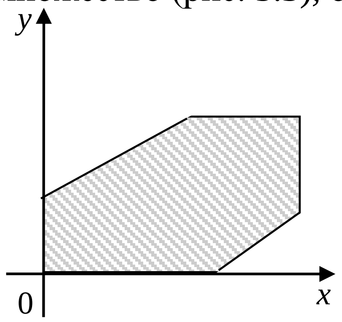

Рис. 5.1

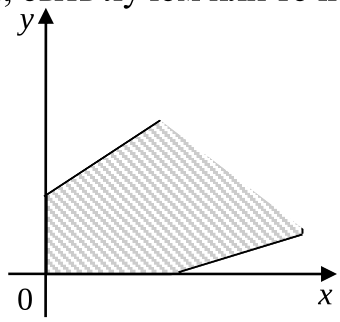

Рис. 5.2

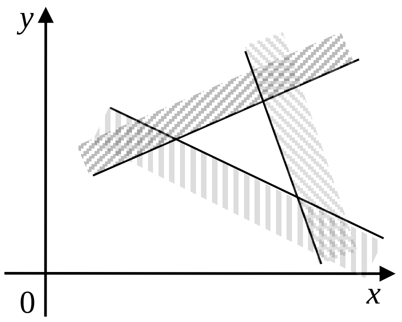

Рис. 5.3

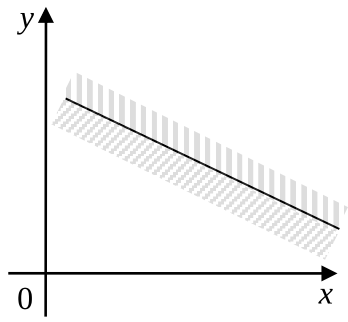

Рис. 5.4

Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции (1). Уравнение $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении $Z = Z_0$ определяет на плоскости прямую линию $Z_0 = c_1x_1 + c_2x_2$. При изменении Z получим семейство параллельных прямых, называемых линиями уровня. Градиентом функции Z является вектор $c = (c_1; c_2)$ с координатами из коэффициентов при x_1 и x_2, который перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор c ($-c$) показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

ЗЛП состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, где целевая функция принимает максимальное решение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху (для задачи на максимум). Для этого необходимо построить линию уровня целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$ (где Z_0 – произвольная константа), затем эта линия передвигается в направлении вектора $\overline{a} = grad\ Z = (c_1, c_2)$. Перемещение осуществляется до тех пор, пока линия не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальное решение данной задачи.

При нахождении решения задачи ЛП графически могут встретиться следующие случаи.

1. Целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке многоугольника решений – вершине данного многоугольника. В этом случае ЗЛП имеет единственное оптимальное решение. Рассматриваемая вершина называется ***оптимальной вершиной*** (***опорной точкой***).

2. Целевая функция принимает максимальное значение в любой точке отрезка, являющейся стороной многоугольника решений. Тогда имеем бесконечное множество оптимальных решений ЗЛП. В этом случае в качестве опорной точки можно рассматривать любую из вершин многоугольника решений, которые являются концами данного отрезка.

3. Целевая функция может быть не ограничена на множестве допустимых решений. В этом случае оптимальное решение ЗЛП не существует.

4. Решения задачи (1)–(3) не существует, поскольку система ограничений этой задачи несовместна.

***Пример* 1.** Фабрика производит два вида лака для покраски деревянных изделий для внутренних и наружных работ. Для их производства используются два вида продуктов – A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов определяются емкостями, имеющимися на фабрике, и составляют 6 и 8 т соответственно. Для производства 1 т лака для внутренних работ необходимо 1т продукта A и 2 т продукта B. Для производства 1 т лака для наружных работ необходимо 2т продукта A и 1 т. продукта B.

Изучение рынка сбыта показало, что спрос на лак для наружных работ не превышает 2 т. Доход от реализации 1 т лака для внутренних работ равен 3 у.е., а доход от реализации 1 т лака для наружных работ равен 2 у.е. Необходимо выяснить, какое количество лака каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации был максимальным.

Пусть x_1 – суточный объем лака для внутренних работ, x_2 – суточный объем лака для наружных работ. Тогда, суточный расход продукта A равен

$x_1 + 2x_2$, а продукта B – $2x_1 + x_2$. Доход от реализации произведенной продукции равен $z = 3x_1 + 2x_2$.

Математическая модель задачи имеет вид

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим графический метод решения задачи.

1) Построим геометрическую модель множества G множества допустимых решений задачи, т.е. множество точек плоскости x_1Ox_2, удовлетворяющее неравенствам:

$$1)\ x_1 \ge 0, \quad 2)\ x_2 \ge 0;$$
$$3)\ x_1 + 2x_2 \le 6; \quad 4)\ 2x_1 + x_2 \le 8.$$

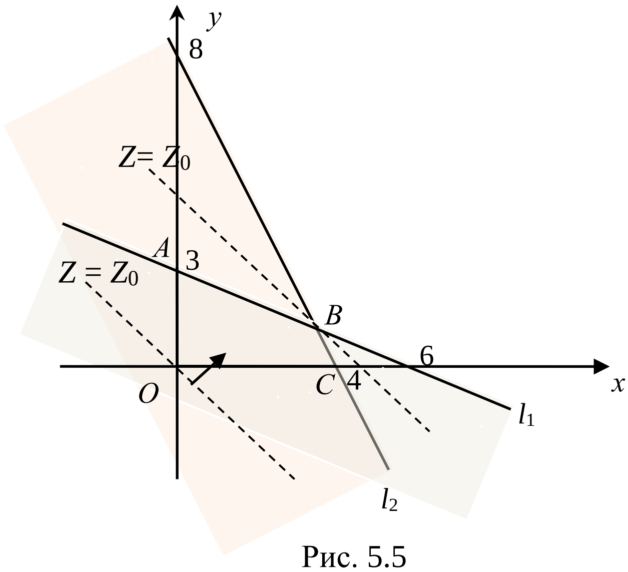

Рис. 5.5

Решением данной системы является многоугольник $OABC$ (рис. 5.5), где l_1 – прямая $x_1 + 2x_2 = 6$, l_2 – прямая $2x_1 + x_2 = 8$, ограничивающие полуплоскости, которые являются решениями неравенств 3) и 4) соответственно. $Z = Z_0$ – линия уровня функции $Z = 3x_1 + 2x_2$.

2) Определим направление возрастания целевой функции. Данная функция возрастает в направлении вектора $\bar{c} = grad\ Z = (3,\ 2)$. Для этого необходимо построить линию уровня функции $Z = 3x_1 + 2x_2$, например $3x_1 + 2x_2 = 0$ (На рисунке 5.5 линия уровня $Z = Z_0$ изображена пунктиром). Чтобы найти оптимальное решение надо перемещать линию уровня в направлении возрастания до тех пор, пока она не выйдет за область допустимых значений. Это произойдет в точке $B\left(\frac{10}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. Оптимальное решение $\bar{x}\ \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Следовательно, предприятие получит максимальную прибыль в том случае, если суточная норма выпуска лаков для внутренней и наружной обработки будет равна $3\frac{1}{3}$ т и $1\frac{1}{3}$ т соответственно. При этом максимальная прибыль $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$ у.е.

***Замечание* 1.** В рассматриваемой задаче предельная прибыль от производства лака каждого типа $c_1 = 3$ и $c_2 = 2$ может меняться по неконтролируемым причинам. Тогда суточный доход от производства лаков равен значению функции $Z = c_1x_1 + c_2x_2$.

При этом для того, чтобы оптимальное решение оставалось прежним, необходимо, чтобы прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$ пересекала область G в точке B $\left(\frac{10}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. Следовательно, $\frac{1}{2} \le \frac{c_1}{c_2} \le 2$. (Эта прямая проходит через точку B, лежит между прямыми l_1: $x_1 + 2x_2 = 6$ и l_2: $2x_1 + x_2 = 8$).

***Замечание* 2.** Если доход от реализации 1 т лака для внутренних работ равен 1 у.е., а доход от реализации 1 т лака для наружных работ равен 2 у.е., то целевая функция $Z = x_1 + 2x_2$ достигает максимума на отрезке AB, следовательно, любая точка на этом отрезке является оптимальным решением.

II. Задания для лабораторной работы

Решить геометрическим способом задачи 1 и 2 из лабораторной работы №2.

Лабораторная работа № 6
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ БОЛЬШЕ ДВУХ

I. Основные теоретические сведения

ЗЛП может быть решена геометрическим методом, если число уравнений m и число переменных n связаны соотношением $n-m \le 2$. В этом случае из m уравнений, аналогично, как в примере 2 лабораторной работы №3 выражаем m переменных, подставляем их в целевую функцию и ограничения-неравенства и переходим от ограничений-равенств к ограничениям-неравенствам. Далее решаем задачу геометрически.

II. Задания для лабораторной работы

1. Решить геометрическим способом задачу 3 из лабораторной работы № 1.

2. Рассмотреть задачу ЛП из лабораторной работы № 3 (задание 2 из задачи 2) как задачу на максимум и решить ее геометрическим способом.

Лабораторная работа № 7
РЕШЕНИЕ ЗЛП СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

I. Основные теоретические сведения и решение типовых задач

Рассмотрим задачу ЛП в стандартном виде:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1, n}).$$

Перейдем к канонической форме записи:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n+m}). \qquad (3)$$

В системе ограничений (2) векторы a_j ($j=n+1,n+2,\ldots,n+m$) образуют базис. Положим базисные переменные $x_{n+i}=b_i$, а остальные переменные равными нулю. Получаем первоначальный опорный план $x^0=(0,\ldots,0,b_1,\ldots,b_m)$. Далее задачу можно решать симплекс-методом. Рассмотрим это на примере.

Пример 1. Найти максимум целевой функции

$$Z = 11x_1 + 10x_2 \to \max$$

при ограничениях $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 41, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 77, \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Приведем систему к канонической форме:

$$Z = 11x_1 + 10x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 41, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_5 = 77, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,5}).$$

Таблица 1

			11	10	0	0	0	θ_i	
Базис	$C_Б$	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
a_3	0	5	−1	1	1	0	0		
a_4	0	41	−1	5	0	1	0		
a_5	0	77	3	5	0	0	1	77/3	→
Δ_j		0	−11	−10	0	0	0		
			↑						

Получили базисный план задачи: x=(0; 0; 5; 41; 77). Занесем условия задачи в симплексную таблицу. Строку оценок Δ_j вычислим по формуле $\Delta_j = c_Б x_j - c_j$, где x_j – координаты вектора a_j в данном базисе. В задаче на максимум для оптимального плана все оценки должны быть неотрицательными. В данном случае есть две отрицательные оценки. Выбираем из них наибольшую по модулю, т.е. −11. Вектор a_1 нужно ввести в базис. Найдем вектор, который нужно вывести из базиса. Для этого вычислим симплексные отношения $\theta_i = \min\limits_{x_{ij}>0}\left\{\dfrac{x_i}{x_{ij}}\right\}$. В нашем случае j=1. Получаем, что из базиса нужно вывести вектор a_5. Строим новую таблицу, в которой базисный вектор a_5 заменяем на вектор a_1.

Таблица 2

			11	10	0	0	0	θ_i
Базис	$C_Б$	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_3	0	92/3	0	8/3	1	0	1/3	
a_4	0	200/3	0	20/3	0	1	0	
a_1	11	77/3	1	5/3	0	0	1/3	
Δ_j		847/3	0	25/3	0	0	11/3	

Третью строку делим на 3. Остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника, т.е. $x'_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}} x_{i_0 j}$.

В нашем случае i_0 = 3, j_0 = 1. Элементы столбца $b(x_Б)$, а также строки оценок можно вычислять аналогично. В таблице 2 все Δ_j неотрицательные. Полученный базисный план является оптимальным. Оптимальный план x^0 = (77/3; 0; 92/3; 200/3; 0). Максимальное значение целевой функции равно $z_{\max}$ = 847/3.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$z = x_1 + x_2 \to \max, \qquad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Её каноническая форма

$$z = x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \to \max, \qquad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Базис составляют векторы a_3, a_4. Начальный базисный план x= (0;0;6;5). Заносим условия задачи в таблицу и вычисляем оценки.

Таблица 3

			1	1	0	0		
Базис	$C_Б$	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	θ_i	
a_3	0	6	-2	3	1	0	-	
a_4	0	5	1	-5	0	1	5	→
Δ_j			-1	-1	0	0		
			↑					

Из таблицы 3 видим, что план неоптимальный, так как $\Delta_1 = \Delta_2 = -1 < 0$. Введем в базис вектор a_1, вектор a_4 выведем из базиса. Проделав все симплексные преобразования, переходим к новому базисному плану x = (5; 0; 16; 0) (таблица 4). Этот план тоже неоптимальный.

Таблица 4

Базис	$C_Б$	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_3	0	16	0	-7	1	2
a_1	1	5	1	-5	0	1
Δ_j			0	-6	0	1

Из последней таблицы следует, что задача не имеет решения, так как целевая функция стремится к бесконечности. В данном случае оценка вектора a_2 отрицательная, т.е. его нужно ввести в базис, но все координаты этого вектора тоже отрицательные. Выполняется достаточное условие неразрешимости задачи, согласно которому $z_{\max} \to +\infty$ на множестве планов задачи.

Пример 3. Найти максимум в задаче

$$z = -2x_1 + 4x_2 \to \max, \qquad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение. Приведем поставленную задачу к канонической.

$$z = -2x_1 + 4x_2 \to \max, \qquad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 14, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Решим ее симплекс-методом. Находим начальное базисное решение: $x_1 = x_2 = 0$ (так как x_1, x_2 – свободные переменные), $x_3 = 4$, $x_4 = 14$. Заполняем таблицу 5 согласно алгоритму.

Таблица 5

			-2	4	0	0	θ
$a_Б$	$c_Б$	$x_Б(b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	
a_3	0	4	-1	2	1	0	2
a_4	0	14	3	2	0	1	7
Δ_j		0	2	−4	0	0	

Вычисляем оценки Δ_j, j= 1, …,4, и определяем, является ли базисное решение x_3=4, x_4=14, $x_1 = x_2 = 0$ оптимальным. Оценка $\Delta_2 < 0$, поэтому исследуемое решение оптимальным не является. Анализируем столбец. Его коэффициенты положительны. Вводим в базис вектор a_2. Определяем вектор, который должен быть выведен из базиса, вычисляя наименьшее из неотрицательных отношений $БР/a_{i2}$. Оно равно 2. Следовательно, из базиса выводится вектор a_3 и заменяется вектором a_2. Вычисляем новое базисное решение. Результаты пересчета таблицы 5 приведены в таблице 6.

Таблица 6

			-2	4	0	0	θ
$a_Б$	$c_Б$	$x_Б(b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	$БР/a_{ir}$
a_2	4	2	-1/2	1	1/2	0	
a_4	0	10	4	0	-1	1	
Δ_j		8	0	0	2	0	

Вычисляем оценки Δ_j, j= 1, …,4, и определяем, является ли базисное решение x_2=2, x_4=10, $x_1 = x_3 = 0$ оптимальным. Все оценки Δ_j, j= 1, …,4, неотрицательные, значит, исследуемое решение $x_2^* = 2, x_4^* = 10, x_1^* = x_3^* = 0$ оптимально. Значение целевой функции в точке максимума $z_{\max}$= 8. Однако, задача имеет бесконечное множество решений. В этом легко убедиться с помощью симплекс-метода, если ввести в базис переменную x_1 вместо переменной x_4, которой соответствует оценка Δ_4 = 0. Соответствующие расчеты приведены в таблице 7. Заметим, что равенство нулю оценки Δ_1 для небазисной переменной x_1 свидетельствует о наличии бесконечного множества решений.

Таблица 7

			-2	4	0	0	c_j
$a_Б$	$c_Б$	$x_Б(b)$	a_1	a_2	a_3	a_4	$БР/a_{ir}$
a_2	4	13/4	0	1	3/8	1/8	
a_1	−2	5/2	1	0	−1/4	1/4	
Δ_j		8	0	0	2	0	

Все оценки Δ_j, j= 1, …,4, неотрицательны, значит, исследуемое базисное решение $x_2^* = 13/4, x_1^* = 5/2, x_3^* = x_4^* = 0$ оптимально. Значение целевой функции в точке максимума $z_{\max}$= 8.

II. Задания для лабораторной работы

Решить симплекс-методом задачи 1 и 2 из лабораторной работы №1.

Лабораторная работа № 8
ДВУХФАЗНЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

I. Основные теоретические сведения и решение типовых задач

Рассмотрим задачу линейного программирования в общем виде

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i \in I_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in I_2, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, & i \in I_3, \\ x_j \ge 0, & j = \overline{1, n}. \end{cases}, \tag{2}$$

где I_1, I_2, I_3 попарно не пересекаются и в объединении дают все множество индексов от 1 до m. В общем случае можно считать, что $b_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}$, так как если в каком ни будь равенстве (неравенств) системы $b_i < 0$, то соответствующее ограничение достаточно умножить на -1.

Перейдем к задаче линейного программирования в канонической форме. Для этого в каждое ограничение-неравенство вводим новую неотрицательную переменную x_{n+i} и получим систему ограничений в виде равенств. Для сокращения записей, предположим, что уже первоначальная задача записана в каноническом виде. При этом мы не знаем, имеет ли задача решение, совместны ли ее условия.

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{3}$$

Одним из методов построения допустимого базисного решения в этом случае является метод введения искусственных переменных модели. Для этого, в систему (3) вводятся искусственные переменные и рассматривают вспомогательную задачу

$$\varphi = -x_{n+1} - \ldots - x_{n+m} \to \max, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n+m}). \tag{5}$$

Эта задача носит название ***первой фазы симплекс-метода***, а сам метод называется ***двухфазным симплекс-методом***. В качестве базисных векторов в этой задаче можно взять вектора $a_{n+i},\ i = \overline{1, m}$.

Так как все коэффициенты в целевой функции (4) равны -1, то решение, при котором $\varphi = 0$ будет оптимальным решением. Решив задачу

(4)−(5), мы построим оптимальный план, обладающий одним из следующих свойств:

1) в оптимальном решении задачи (4)−(5) не все искусственные переменные равны нулю, тогда задача (1)−(2) не имеет решения;

2) в оптимальном решении задачи (4)−(5) все искусственные переменные равны нулю и среди базисных векторов нет искусственных. Тогда задача (1)−(2) не имеет решения, и в качестве начального базисного плана этой задачи берем оптимальный план задачи (4)−(5). К этому плану снова применяется симплекс метод. Этот этап решения задачи (1)−(2) называется ***второй фазой симплекс-метода***.

3) в оптимальном решении задачи (4)−(5) все искусственные переменные равны нулю, но среди базисных векторов есть искусственные. В этом случае просматриваем строку, соответствующую искусственному базисному вектору. Если среди координат свободных векторов, которые не являются искусственными, есть ненулевые, стоящие в этой строке, то соответствующий вектор вводим в базис вместо искусственного. Таким образом, мы либо выведем из базиса все искусственные вектора, либо придем к ситуации, что все координаты свободных векторов этой строки равны нулю. Последнее означает, что соответствующее равенство основных ограничений есть следствие других равенств задачи. Данную строку можно вычеркнуть и число базисных векторов уменьшится на единицу. Далее поступаем как и в случае 2.

Замечание. Если рассматривается задача на минимум, то в первой фазе симплекс-метода в целевой функции все переменные берем со знаком плюс.

Пример. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 10, \\ x_2 \ge 5. \end{cases} \qquad (6)$$

Приведем задачу к канонической форме

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 - x_5 = 10, \\ x_2 - x_6 = 5, \\ x_k \ge 0,\ k = \overline{1,6}. \end{cases} \qquad (7)$$

В ограничениях (7) вектора a_3 и a_4 можно взять за базисные, в третье и четвертое неравенства вводим искусственные переменные x_7, x_8 и записываем вспомогательную задачу линейного программирования

$$\varphi = -x_7 - x_8 \to \max, \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 - x_5 + x_7 = 10, \\ x_2 - x_6 + x_8 = 5, \\ x_k \ge 0,\ k = \overline{1,8}. \end{cases} \qquad (8)$$

Для вспомогательной задачи (8) в качестве начального базисного решения возьмем вектор $x = (0, 0, 20, 20, 0, 0, 10, 5)$, где базисными будут переменные x_3, x_4, x_7, x_8, а свободными x_1, x_2, x_5, x_6 (свободные переменные полагаем равными нулю).

Переходим к первой фазе симплекс-метода.

Порядок заполнения симплекс-таблицы такой же, что и при решении стандартной задачи линейного программирования.

Итерация	$a_Б$	$c_Б$	$x_Б(b)$	0	0	0	0	0	0	−1	−1	θ
				a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
0	a_3	0	20	1	1	1	0	0	0	0	0	20
	a_4	0	20	−1	4	0	1	0	0	0	0	∞
	a_7	−1	10	**1**	0	0	0	−1	0	1	0	10←
	a_8	−1	5	0	1	0	0	0	−1	0	1	∞
	Δ_j		−15	−1	−1	0	0	1	1	0	0	
				↑								
1	a_3	0	10	0	1	1	0	1	0	−1	0	10
	a_4	0	30	0	4	0	1	−1	0	1	0	30/4
	a_1	0	10	1	0	0	0	−1	0	1	0	∞
	a_8	−1	5	0	**1**	0	0	0	−1	0	1	5←
	Δ_j		−5	0	−1	0	0	0	1	1	0	
					↑							
2	a_3	0	5	0	0	1	0	1	1	−1	−1	
	a_4	0	10	0	0	0	1	−1	4	1	−4	
	a_1	0	10	1	0	0	0	−1	0	1	0	
	a_2	0	5	0	1	0	0	0	−1	0	1	
	Δ_j		0	0	0	0	0	0	0	1	1	

Все оценки неотрицательные, следовательно, оптимальное решение этой задачи есть вектор $x = (10, 5, 5, 10, 0, 0, 0, 0)$. В оптимальном решении вспомогательной задачи искусственные переменные x_7 и x_8 равны нулю, следовательно, в качестве начального базисного плана задачи (7) можно взять вектор x, в котором вычеркнуты последние координаты, т.е. вектор $x^0 = (10, 5, 5, 10, 0, 0)$. Здесь в качестве базисных переменных выступают переменные x_1, x_2, x_3, x_4, свободными являются переменные x_5, x_6.

Переходим ко второй фазе симплекс-метода. При этом нулевая итерация симплекс-таблицы задачи (7) совпадает со второй итерацией симплекс-таблицы вспомогательной задачи, в которой вычеркнуты столбцы, соответствующие искусственным переменным x_7 и x_8.

Итерация	$a_Б$	$c_Б$	$x_Б(b)$	3	4	0	0	0	0	θ
				a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
0	a_3	0	5	0	0	1	0	1	1	5
	a_4	0	10	0	0	0	1	–1	**4**	10/4←
	a_1	3	10	1	0	0	0	–1	0	∞
	a_2	4	5	0	1	0	0	0	–1	
	Δ_j		50	0	0	0	0	–3	–4	
									↑	
1	a_3	0	5/2	0	0	1	–1/4	**5/4**	0	20←
	a_6	0	5/2	0	0	0	0	–1/4	1	
	a_1	3	10	1	0	0	1/4	–1	0	
	a_2	4	15/2	0	1	0	1/4	–1/4	0	
	Δ_j		60	0	0	0	1	–4	0	
								↑		
2	a_5	0	2	0	0	4/5	–1/5	1	0	
	a_6	0	3	0	0	1/5	1/5	0	1	
	a_1	3	12	1	0	4/5	–1/5	0	0	
	a_2	4	8	0	1	1/5	1/5	0	0	
	Δ_j		68	0	0	16/5	1/5	0	0	

Оптимальное решение задачи (7) – вектор $x^* = (12, 8, 0, 0, 2, 3)$, которое соответствует значению целевой функции $z = 68$. Следовательно, оптимальное решение задачи (6) – вектор $x^* = (12, 8)$. В этом можно убедиться, решая задачу графическим способом.

II. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Решить задачу 2 (задания 1 и 2) из лабораторной работы № 3.

Лабораторная работа № 9
ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

I. Основные теоретические сведения и решение типовых задач

Рассмотрим пару двойственных задач в общем виде.

Прямая задача

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad (i = \overline{1, m_1}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{m_1+1, m_2}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{m_2+1, m}), \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n_1}),\ x_j \le 0 \quad (j = \overline{n_1+1, n_2}), \\ x_j - \textit{произвольногознака}\ (j = \overline{n_1+1, n_2}). \end{cases}$$

Двойственная задача

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = \overline{1, n_1}), \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad (j = \overline{n_1+1, n_2}), \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad (i = \overline{n_2+1, n}), \\ y_i \le 0 \quad (j = \overline{1, m_1}), \\ y_i - \textit{произвольногознака}\ (i = \overline{m_1+1, m_2}), \\ y_i \ge 0 \quad (j = \overline{m_2+1, m}). \end{cases}$$

Двойственная задача со смешанными ограничениями составляется с соблюдением следующих правил.

1. Если прямая задача на максимум, то двойственная на минимум, и наоборот.

2. Коэффициенты целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной задачи.

3. Свободные члены ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной.

4. Матрицы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.

5. Если прямая задача на максимум и ее а) система ограничений имеет неравенства типа $\le$, то соответствующие двойственные переменные неотрицательны; б) система ограничений имеет неравенства типа $\ge$, то соответствующие двойственные переменные неположительны; в) система ограничений имеет вид равенств, то соответствующие двойственные переменные любого знака.

Если прямая задача на минимум и ее а) система ограничений имеет неравенства типа $\ge$, то соответствующие двойственные переменные неотрицательны; б) система ограничений имеет неравенства типа $\le$, то соответствующие двойственные переменные неположительны; в) система ограничений имеет вид равенств, то соответствующие двойственные переменные любого знака.

6. Если прямая задача на максимум и у нее а) некоторые переменные неотрицательны, то соответствующие ограничения двойственной задачи имеет вид неравенств типа $\geq$; б) некоторые переменные неположительны, то соответствующие ограничения двойственной задачи имеет вид неравенств типа $\leq$; в) некоторые переменные любого знака, то соответствующие ограничения двойственной задачи имеет вид равенств.

Если прямая задача на минимум и у нее а) некоторые переменные неотрицательны, то соответствующие ограничения двойственной задачи имеет вид неравенств типа $\leq$; б) некоторые переменные неположительны, то соответствующие ограничения двойственной задачи имеет вид неравенств типа $\geq$; в) некоторые переменные любого знака, то соответствующие ограничения двойственной задачи имеет вид равенств.

7. Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной – числу переменных прямой.

Пример 1. Для следующей задачи на максимум построить двойственную задачу:

$z = x_1+7x_2-3x_3-2x_4 \to max,$

$2x_1+3x_2-2x_3+7x_4 \leq 32,$

$x_1-10x_2+16x_3-x_4 \leq 40,$

$x_1 \quad +2x_3+x_4 \geq 1500,$

$5x_1-7x_2+6x_3-2x_4 = 25,$

$x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0\ ,\ x_2,\ x_4$ –любого знака.

Решение. Математическая модель двойственной задачи:

$f = 32\,y_1+40\,y_2+1500\,y_3+25y_4 \to min,$

$2y_1+y_2+y_3+5y_4 \leq 1,$

$3y_1-10y_2-7\,y_4 = 7,$

$-2y_1+16y_2+2\,y_3+6\,y_4 \geq -3,$

$7y_1-y_2+y_3-2\,y_4 = -2,$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0,\ y_4$ –любого знака. ▲

Свойства решений двойственных задач

1. *Для любых допустимых планов* **x**$=(x_1,\ldots,x_n)$ *и* **y**$=(y_1,\ldots,y_m)$ *прямой и двойственной задач справедливо неравенство* $z(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$, *т.е.*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (1)$$

Неравенство (1) называется *основным неравенством теории двойственности* ▲

Экономический смысл неравенства (1): для любого допустимого плана производства **x** и любого допустимого вектора оценок ресурсов **y** общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.

2. ***Критерий оптимальности Канторовича.*** *Если для некоторых допустимых планов* **x*** *и* **y*** *прямой и двойственной задач справедливо равенство* $z(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{y}^*)$, то **x*** *и* **y*** *являются оптимальными планами соответствующих задач.*

Экономический смысл: план производства **x** и вектор оценок ресурсов **y** являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

3. ***Малая теорема двойственности.*** *Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.*

Основные теоремы двойственности

Теорема 1. *Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны* $z(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{y}^*)$. *Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.*

Экономический смысл: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Цена продукции, полученной при реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. *План производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов.* Двойственные оценки гарантируют рентабельность оптимального плана, т.е. равенство общей оценки продукции и ресурсов, и обусловливают убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставить и сбалансировать затраты и результаты системы.

Замечание. Из теоремы 1 вытекает, что решая симплекс-методом одну из пары двойственных задач, автоматически получаем решение второй. Для этого достаточно воспользоваться соответствием переменных прямой и двойственной задач, а также оценок в последней симплексной таблице:

$x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ x_j\ \ldots\ x_n$ $\updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \ldots\ \ \updownarrow\ \ldots \updownarrow$ $y_{m+1}\ y_{m+2}\ldots y_{m+j}\ldots y_{m+n}$	$x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{n+i}\ \ldots\ x_{n+m}$ $\updownarrow\ \ \updownarrow\ \ldots \updownarrow\ \ldots\ \ \updownarrow$ $y_1\ \ \ y_2\ldots y_i\ \ \ldots\ \ y_m$
$\Delta_1\,\Delta_2\ldots\Delta_j\ldots\Delta_n$	$\Delta_{n+1}\Delta_{n+2}\ldots\Delta_{n+i}\ldots\ \Delta_{n+m}$

Отсюда можно получить оптимальный план двойственной задачи. Если прямая задача решается на максимум, то

$y_1 = \Delta_{n+1},\ y_2 = \Delta_{n+2},\ \ldots,\ y_i = \Delta_{n+i}, \ldots,\ y_m = \Delta_{n+m},$

$y_{m+1} = \Delta_1,\ y_{m+2} = \Delta_2,\ \ldots,\ y_{m+j} = \Delta_j, \ldots,\ y_{m+n} = \Delta_n.$

Если прямая задача решается на минимум, то

$y_1 = -\Delta_{n+1},\ y_2 = -\Delta_{n+2},\ \ldots,\ y_i = -\Delta_{n+i}, \ldots,\ y_m = -\Delta_{n+m},$

$y_{m+1} = -\Delta_1,\ y_{m+2} = -\Delta_2,\ \ldots,\ y_{m+j} = -\Delta_j, \ldots,\ y_{m+n} = -\Delta_n.$

Теорема 2. О дополняющей нежесткости. *Для того, чтобы планы* $\mathbf{x}^*$ *и* $\mathbf{y}^*$ *пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий*:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{2}$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0 \quad (i = \overline{1,m}). \tag{3}$$

Условия (2) и (3) называют *условиями дополняющей нежесткости*. Из них следует: *если какое-либо ограничение одной из задач ее оптимальным планом обращается в строгое неравенство, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство.*

Экономически это означает, что если по некоторому оптимальному плану производства расход i-го ресурса строго меньше его запаса, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i-ая компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Отсюда следует вывод: *двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов; дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.*

Теорема 3 (об оценках). *Двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения задачи математического программирования, а именно*

$$\frac{\partial z(x^*)}{\partial b_i} = y_i^* \quad (i = \overline{1,m}) \,. \tag{4}$$

Заменим в равенстве (4) дифференциалы приращениями. Получим $\Delta z(x^*) \approx y_i^* \, \Delta b_i$. При $\Delta b_i = 1$ имеем $\Delta z(x^*) \approx y_i^*$. Величина двойственной оценки численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу. В прикладных задачах двойственные оценки часто называются *скрытыми, теневыми ценами или маргинальными оценками ресурсов.*

Пример 2. На предприятии изготавливают три вида различных изделий *A*, *B*, *C*. Для их изготовления используют три вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена каждого изделия, а также общее количество сырья, которое может быть использовано предприятием, приведено в таблице 1.

Таблица 1

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	

Изделия могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен). Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной продукции является максимальной. Требуется:

1) составить математическую модель прямой и двойственной задачи;

2) найти оптимальный план выпуска продукции;

3) пользуясь большой теоремой двойственности найти оптимальное решение двойственной задачи;

4) дать содержательный экономический анализ переменных прямой и двойственной задач и проиллюстрировать теоремы 1-3 теории двойственности.

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 плановый выпуск изделий *A*, через x_2 – изделий *B*, через x_3 – изделий *C*. Получим задачу

$$z = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \\ x_k \ge 0,\ k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Запишем ее в канонической форме:

$$z = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \\ x_k \ge 0,\ k = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Поскольку среди векторов a_j имеется три единичных вектора, то мы можем сразу найти опорный план и записать данную задачу в симплексную таблицу.

Итерация	$a_Б$	$c_Б$	$x_Б(b)$	9	10	16	0	0	0	θ
				a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
0	a_4	0	360	18	15	12	1	0	0	30
	a_5	0	192	6	4	**8**	0	1	0	24←
	a_6	0	180	5	3	3	0	0	1	60
	Δ_j		0	−9	−10	−16	0	0	0	
						↑				
1	a_4	0	72	9	**9**	0	1	−3/2	0	8←
	a_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0	48
	a_6	0	108	11/4	3/2	0	0	−3/8	1	72
	Δ_j		384	3	−2	0	0	2	0	
					↑					
2	a_2	10	8	1	1	0	1/9	−1/6	0	
	a_3	16	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0	
	a_6	0	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1	
	Δ_j		400	5	0	0	2/9	5/3	0	

Получен оптимальный план $\mathbf{x^0} = (0, 8, 20, 0, 0, 96)$. Значение целевой функции равно 400.

Построим двойственную задачу. Математическая модель двойственной задачи:

$$f = 360\,y_1 + 192\,y_2 + 180\,y_3 \to min, \qquad \begin{array}{l} 18y_1 + 6y_2 + 5y_3 \geq 9, \\ 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 10, \\ 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 16, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{array}$$

Приведем ее к канонической форме:

$$f = 360\,y_1 + 192\,y_2 + 180\,y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 \to min,$$
$$18y_1 + 6y_2 + 5y_3 - y_4 = 9,$$
$$15y_1 + 4y_2 + 3y_3 - y_5 = 10,$$
$$12y_1 + 8y_2 + 3y_3 - y_6 = 16,$$
$$y_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,6.$$

Пользуясь теоремой 1 теории двойственности, оптимальный план двойственной задачи мы можем выписать из строки оценок прямой задачи: $\mathbf{y^0} = (2/9, 5/3, 0, 5, 0, 0)$. Найдем $f(\mathbf{y^0})$:

$$f(\mathbf{y^0}) = 360 \cdot 2/9 + 192 \cdot 5/3 = 400.$$

По теореме 1 выполняется $z(\mathbf{x^0}) = f(\mathbf{y^0})$.

Проанализируем переменные прямой и двойственной задач: $x_1 = 0$, значит изделия A выпускать по плану не будут, $x_2 = 8$, т.е. по плану будут выпускать 8 изделий B, $x_3 = 20$, т.е. по плану будут выпускать 20 изделий C.

Рассмотрим балансовые переменные прямой задачи. $x_4 = 0$. Переменная x_4 входит в первое ограничение прямой задачи и

$$x_4 = 360 - (9x_1 + 10x_2 + 16x_3).$$

На оптимальном плане $x_4 = 360 - (9 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + 16 \cdot 20) = 0$. Это означает, что ресурс I используется полностью, т.е. является дефицитным. Аналогично получаем, что ресурс II тоже используется полностью, так как $x_5 = 0$. Рассмотрим переменную x_6. Она равна 96. Воспользуемся третьим ограничением: $x_6 = 180 - (5x_1 + 3x_2 + 3x_3)$. На оптимальном плане $x_6 = 180 - (5 \cdot 0 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 20) = 96$. Это означает, что ресурс III не является дефицитным, он используется не полностью и избыток ресурса равен 96 ед..

Проанализируем переменные двойственной задачи. Вначале рассмотрим основные переменные y_1, y_2, y_3. Воспользуемся теоремой 2 теории двойственности. По этой теореме на оптимальных планах

$$y_1(360 - (9x_1 + 10x_2 + 16x_3)) = 0.$$

Так как $y_1 = 2/9 \neq 0$, то должно выполняться:

$$9x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 360,$$

т.е. ресурс I используется полностью. Аналогично, так как $y_2 = 5/3$, то ресурс II тоже используется полностью. Переменная $y_3 = 0$, это означает, что ресурс III дефицитным не является.

По теореме 3 теории двойственности получаем, что увеличение ресурса I на 1 ед. приведет к увеличению значения целевой функции на 2/9 ден.ед., а увеличение ресурса II на 1 ед. приведет к увеличению значения целевой функции на 5/3 ден.ед.

Рассмотрим балансовые переменные двойственной задачи. Переменная $y_4 = 5$ входит в первое ограничение двойственной задачи, т.е. $y_4 = 18y_1 + 6y_2 + 5y_3 - 9$. 9 ден.ед. – это стоимость 1 ед. первой продукции, а $18y_1 + 6y_2 + 5y_3$ – это стоимость ресурсов, идущих на изготовление 1 ед. этой продукции. Поскольку стоимость ресурсов больше стоимости продукции, то продукцию этого вида выпускать нецелесообразно.

Переменная $y_5 = 0$ и входит во второе ограничение двойственной задачи, т.е. $y_5 = 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 10$. 10 ден.ед. – это стоимость 1 ед. второй продукции, а $18y_1 + 6y_2 + 5y_3 = 10$ – это стоимость ресурсов, идущих на изготовление 1 ед. этой продукции. Поскольку стоимость ресурсов равна стоимости продукции, то продукцию этого вида выпускать целесообразно. Аналогично, так как $y_6 = 0$, то продукцию третьего вида тоже целесообразно выпускать.

II. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Для следующей задачи на максимум построить двойственную задачу:

1. $\varphi = x_1 - 3x_2 - 3x_3$, 2. $\varphi = -2x_1 - 2x_2 + x_3$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 2, 3.$

3. $\varphi = -3x_1 + x_2 - x_3$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_3 \le 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 3.$

4. $\varphi = 2x_1 - 4x_2 - 4x_3$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \ge -6, \\ x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 2, 3.$

5. $\varphi = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3$,

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -5, \\ x_2 + 2x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 2, 3.$

6. $\varphi = 11x_1 + 2x_2 - x_3$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_3 \le 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0.$

7. $\varphi = 2x_1 - 3x_2 - x_3$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \le 0.$

8. $\varphi = 2x_1 + x_2 - 3x_3$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \le 1, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

9. $\varphi = -x_1 + x_2 - 5x_3$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \end{cases}$$

$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

10. $\varphi = -x_1 - 5x_2 + x_3$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,3.$

11. $\varphi = 5x_1 + 2x_2 - x_3$,

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 \ge -5, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 2, 3.$

12. $\varphi = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_2 + 8x_2 - x_3 \le 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 2, 3.$

13. $\varphi = -2x_1 - x_2 + x_3$,

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 \geq 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 21, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 3.$

14. $\varphi = -x_1 - 2x_2 + 3x_3$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ x_2 - 5x_3 \leq -5, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 2, 3.$

Задание 2. Предприятие может выпускать продукцию двух видов. Используется три вида ресурсов. Норма расходов ресурсов, объемы имеющихся ресурсов и прибыль на единицу продукции приведены в таблице. (*n* – номер варианта).

Ресурсы	Нормы расхода на единицу продукции		Объем ресурса
	$П_1$	$П_2$	
P_1	3	2	15 + *n*
P_2	5	6	30 + *n*
P_3	1	4	12 + *n*
Прибыль	6	*n*	

Требуется:

1) составить математическую модель прямой и двойственной задачи;

2) найти оптимальный план выпуска продукции;

3) пользуясь большой теоремой двойственности найти оптимальное решение двойственной задачи;

4) дать содержательный экономический анализ переменных прямой и двойственной задач и проиллюстрировать теоремы 1–3 теории двойственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов, Р. Методы оптимизации: пособие / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.В. Альсевич, А.И. Калинин, В.В. Крахотко, Н.С. Павленок. – Мн: Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

2. Альсевич, В.В. Методы оптимизации: упражнения и задания: Учебное пособие / В.В. Альсевич, В.В. Крахотко. – Мн.: БГУ, 2005. – 405 с.

3. Ашманов, С.А. Линейное программирование: Учебное пособие / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1981. – 304 с.

4. Карманов, В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие / В.Г. Карманов. – М.: Физматлит, 2001. – 263 с.

5. Пантелеев, А.В.Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Г.А. Летова. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна

ИВАНОВА Жанна Викторовна

СИТУАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методические рекомендации
и задания к лабораторным работам

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *В.Л. Пугач*

Подписано в печать 06.06.2022. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 1,48. Тираж 40 экз. Заказ 84.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.