Математические заметки

Том 105 выпуск 2 февраль 2019

УДК 512.542

Множества Хартли и инъекторы конечной группы

Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Караулова

Множеством Фиттинга группы G называют такое непустое множество подгрупп $\mathscr{F}$ конечной группы G, которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. В настоящей работе доказано существование и сопряженность $\mathscr{F}$-инъекторов частично π-разрешимой группы G и описано строение $\mathscr{F}$-инъекторов в случае, когда $\mathscr{F}$ – множество Хартли G.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: конечная группа, множество Фиттинга, π-разрешимая группа, инъектор.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11837

1. Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. В обозначениях мы следуем [1]–[3].

Основополагающим результатом в теории классов конечных разрешимых групп является обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла, которое было получено Гашюцом, Фишером и Хартли в [4], где установлено, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Пусть G – группа и $\mathfrak{F}$ – класс групп. Если H является подгруппой группы G и $H \in \mathfrak{F}$, то H называют $\mathfrak{F}$-*подгруппой*.

Напомним, что *классом Фиттинга* называют класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения следует, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ любая группа G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу, которую называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп, то подгруппа V группы G называется

(а) $\mathfrak{F}$-*максимальной*, если $V \in \mathfrak{F}$ и $U{=}V$ при условии, что $V \leqslant U \leqslant G$ и $U \in \mathfrak{F}$;

(б) $\mathfrak{F}$-*инъектором*, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Локализуя понятие класса Фиттинга, Шеметков [5] и в разрешимом случае Андерсон [6] определили понятие множества Фиттинга группы G. *Множеством Фиттинга* группы G называют такое непустое множество подгрупп группы G, которое

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ “Конвергенция-2020” и БРФФИ (грант № Ф17М-064).

© Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Караулова, 2019

замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Понятие *$\mathscr{F}$-инъектора* группы G для ее множества Фиттинга определяется аналогично соответствующему определению для класса Фиттинга.

Развивая и обобщая результат Гашюца, Фишера и Хартли [4], Шеметков доказал, что если $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G, π – множество всех простых делителей всех $\mathscr{F}$-подгрупп G и группа G π-разрешима, то G обладает единственным классом сопряженных $\mathscr{F}$-инъекторов.

Заметим, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ в группе G соответствует множество Фиттинга $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G) = \{H \leqslant G : H \in \mathfrak{F}\}$ – *след* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в группе G, хотя обратное в общем случае неверно (см. [1; пример VIII.2.2(c)]).

Если $\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$, то множества $\mathfrak{F}$-инъекторов и $\mathscr{F}$-инъекторов группы G совпадают, и указанная выше теорема Гашюца, Фишера и Хартли является следствием теоремы Шеметкова [5].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Дополнение к π в множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π', т.е. $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. В случае, когда $\pi = \{p\}$, множество $\{p\}'$ будем обозначать p'. Если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, то множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G назовем *π-насыщенным*, если $\mathscr{F} = \{H \leqslant G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}\}$.

Воробьёвым и Семёновым в работе [7] было доказано, что в любой π-разрешимой группе G для каждого ее π-насыщенного множества Фиттинга $\mathscr{F}$ существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Задача описания строения инъекторов для локальных классов Фиттинга впервые рассматривалась Хартли [8] и Д'Арси [9]. В настоящей работе мы развиваем локальный метод изучения множеств Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G (в общем случае неразрешимой) и используем его для описания строения $\mathscr{F}$-инъекторов G.

Напомним, что *произведением* классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение любых двух классов Фиттинга является также классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см. [1; теорема IX.(1.12)(a),(c)]). Заметим, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, где класс групп

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : \exists\, K \trianglelefteq G,\ K \in \mathfrak{F} \text{ и } G/K \in \mathfrak{H}).$$

Если $\mathfrak{H}$ – гомоморф, т.е. замкнут относительно гомоморфных образов, то $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ (см. [1; замечание II.1.11]). Поэтому произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ мы будем обозначать символом $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ для случая, когда $\mathfrak{H}$ – гомоморф.

Мы будем использовать следующие общепринятые обозначения классов групп:

- $\mathfrak{E}$ – класс всех групп;
- $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;
- $\mathfrak{E}_\pi$ – класс всех π-групп;
- $\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп;
- $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп;
- $\mathfrak{S}^\pi$ – класс всех π-разрешимых групп;
- $\mathfrak{N}^\pi$ – класс всех π-нильпотентных групп.

Хартли [8] в разрешимой группе G в терминах радикалов были описаны инъекторы для локального класса Фиттинга $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, а в последующем Воробьёвым и Го [10] – $\mathfrak{H}$-инъекторы G для любого локального класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ вида $\bigcap_{p\in\mathbb{P}} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ (класса Хартли), где отображение $h\colon \mathbb{P} \to \{\textit{классы Фиттинга}\}$.

Следуя [10], отображение

$$h\colon \mathbb{P} \to \{\text{множества Фиттинга группы } G\}$$

назовем *функцией Хартли* (или кратко *H-функцией*) группы G. *Произведением множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$* (см. [11; определение 2.2]) называется множество подгрупп $\{H \leqslant G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{X}\}$, которое, следуя [1; определение IX.(1.10)], обозначим $\mathscr{F} \diamond \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathscr{H}$ – непустое множество подгрупп группы G. Для $\mathscr{H}$ и непустого класса групп $\mathfrak{F}$ назовем множество подгрупп $\{H \leqslant G : L \trianglelefteq H$, где $L \in \mathscr{H}$, $H/L \in \mathfrak{F}\}$ группы G *произведением множества $\mathscr{H}$ и класса групп $\mathfrak{F}$*, которое, следуя определению произведения классов групп (см. [1; определение II.(1.3)]), будем обозначать $\mathscr{H}\mathfrak{F}$.

Замечание 1.1. Если $\mathscr{H}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то, очевидно, $\mathscr{H} \diamond \mathfrak{F} \subseteq \mathscr{H}\mathfrak{F}$. Предположим, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является гомоморфом. Тогда если $H \leqslant G$ и $H \in \mathscr{H}\mathfrak{F}$, то $H/L \in \mathfrak{F}$ для некоторой нормальной $\mathscr{H}$-подгруппы L группы H. Так как $L \leqslant H_{\mathscr{H}}$ и $H/L/H_{\mathscr{H}}/L \cong H/H_{\mathscr{H}}$, то $H \in \mathscr{H} \diamond \mathfrak{F}$. Поэтому в данном случае $\mathscr{H} \diamond \mathfrak{F} = \mathscr{H}\mathfrak{F}$, и мы будем обозначать $\mathscr{H} \diamond \mathfrak{F}$ как $\mathscr{H}\mathfrak{F}$.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, h – функция Хартли группы G и $HS(h) = \bigcap_{p\in\pi} h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Множество Фиттинга $\mathscr{H}$ группы G назовем *множеством Хартли группы G*, если $\mathscr{H} = HS(h)$ для некоторой H-функции h.

Произведем классификацию H-функций группы G.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и h – H-функция множества Хартли $\mathscr{H}$ группы G. Тогда h назовем:

1) *приведенной*, если $h(p) \subseteq \mathscr{H}$ для всех $p \in \pi$;
2) *устойчивой*, если $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных $p, q \in \pi$;
3) *устойчивой приведенной*, если h является одновременно устойчивой и приведенной;
4) *постоянной*, если $h(p) = h(q)$ для всех различных $p, q \in \pi$.

По аналогии с [10; лемма 2.2] мы покажем, что каждое множество Хартли группы G определяется устойчивой приведенной H-функцией G.

Отметим, что каждое множество Хартли группы G может быть определено с помощью приведенной H-функции (смотри ниже лемму 3.2). Нетрудно заметить, что постоянная H-функция является устойчивой приведенной. Действительно, так как $h(p) = h(q)$ для всех различных $p, q \in \pi$, получаем $h(p) \subseteq h(p)\mathfrak{E}_{q'} = h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ и поэтому

$$h(p) \subseteq \bigcap_{q\in\pi} h(q)(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q) = \mathscr{H}.$$

Заметим, что из [3; теорема 7.1.3] следует существование множеств Фиттинга неразрешимой группы G, которые не являются множествами Хартли G и в которых не существует $\mathscr{F}$-инъекторов. Например, если $S = A_7$ – группа подстановок степени 7, $T = PSL(2, 11)$, класс Фиттинга $\mathfrak{F} = D_0(S, T, 1)$ и группа G определена как в [3; теорема 7.1.3], то в множестве Фиттинга $\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$ группа G не имеет $\mathscr{F}$-инъекторов. Кроме того, известны примеры множеств простых чисел π и неабелевых групп G таких, что G имеет холлову π-подгруппу, однако холловы π-подгруппы не сопряжены (см. [12; теорема 1.1]). Напомним, что группа G называется *E_π-группой*,

если G имеет холлову π-подгруппу. Известно, что холловы π-подгруппы E_π-группы G являются $\mathfrak{E}_\pi$-инъекторами G (см. [3; с. 328]). Таким образом существуют E_π-группы, $\mathfrak{E}_\pi$-инъекторы которых не сопряжены.

В связи с этим возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Для каких групп G (в общем случае неразрешимых) и множеств Хартли $\mathscr{H}$ групп G существует в G единственный класс сопряженных $\mathscr{H}$-инъекторов?

Вопрос 2. В случае существования $\mathscr{H}$-инъекторов G, каково их строение?

В настоящей работе даны положительные ответы на указанные вопросы для частично π-разрешимой группы G и множества Хартли, определяемого постоянной H-функцией.

Основной результат работы – следующая

Теорема 1.2. *Пусть $\mathscr{X}$ – непустое множество Фиттинга группы G, и пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathscr{H} = HS(h)$ – множество Хартли G, определяемое H-функцией h такой, что $h(p) = \mathscr{X}$ для любого $p \in \pi$. Если $G \in \mathscr{X}\mathfrak{S}^\pi$, то справедливы следующие утверждения*:

1) *G имеет $\mathscr{H}$-инъектор, и любые два $\mathscr{H}$-инъектора сопряжены*;
2) *каждый $\mathscr{H}$-инъектор V группы G – подгруппа вида $G_{\mathscr{X}\mathfrak{E}_{\pi'}}L$, где L – подгруппа G такая, что $L/G_{\mathscr{X}}$ является $\mathfrak{N}_\pi$-инъектором некоторой холловой π-подгруппы $G/G_{\mathscr{X}}$.*

2. Предварительные сведения. Напомним, что конечная группа, порядок которой есть степень простого числа p, называется *p-группой*. Конечная группа G называется *π-разрешимой*, если каждый ее главный фактор является либо π'-группой, либо абелевой π-группой.

Подгруппа H группы G называется *холловой π-подгруппой* группы G, если $|H|$ является π-числом, а индекс $|G : H|$ – π'-числом. Группа G называется *p-нильпотентной*, если G имеет нормальную холлову p'-подгруппу и *π-нильпотентной*, если G p-нильпотентна для всех $p \in \pi$.

Для доказательства теоремы 1.2 мы будем использовать ряд известных утверждений, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 2.1 (см. [1; предложение VIII.2.4(d)]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G. Если N – субнормальная подгруппа группы G, то $G_{\mathscr{F}} \cap N = N_{\mathscr{F}}$.*

Лемма 2.2 (см. [1; свойство VIII.2.6]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G. Если V – $\mathscr{F}$-инъектор G и подгруппа K субнормальна в G, то $V \cap K$ – $\mathscr{F}$-инъектор подгруппы K.*

Лемма 2.3 (см. [11; лемма 2.3]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G, $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $H \leqslant G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *произведение $\mathscr{F} \diamond \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G*;
2) $(H/H_{\mathscr{F}})_{\mathfrak{X}} = H_{\mathscr{F}\diamond\mathfrak{X}}/H_{\mathscr{F}}$;
3) *если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – классы Фиттинга, то $(\mathscr{F} \diamond \mathfrak{X}_1) \diamond \mathfrak{X}_2 = \mathscr{F} \diamond (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2)$.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;
2) из того, что H/A принадлежит $\mathfrak{F}$ и H/B принадлежит $\mathfrak{F}$, всегда следует, что $H/A \cap B$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 2.4 (см. [11; лемма 2.4]). *Пусть $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ – множества Фиттинга группы G. Тогда выполнены следующие утверждения*:

1) *если $\mathfrak{X}$ является одновременно непустым классом Фиттинга и гомоморфом, то из включения $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$ следует $\mathscr{F}_1\mathfrak{X} \subseteq \mathscr{F}_2\mathfrak{X}$*;
2) *если $\mathfrak{X}$ – непустая формация Фиттинга, то $(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2)\mathfrak{X} = \mathscr{F}_1\mathfrak{X} \cap \mathscr{F}_2\mathfrak{X}$*;
3) *если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – непустые классы Фиттинга, то*

$$\mathscr{F} \diamond (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2) = \mathscr{F} \diamond \mathfrak{X}_1 \cap \mathscr{F} \diamond \mathfrak{X}_2.$$

Лемма 2.5 (см. [13; свойство 3.2 (1)]). *Пусть G – группа, $H \leqslant G$ и $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга G. Если $\mathfrak{H}$ – непустой класс Фиттинга, то $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} \diamond \mathfrak{H}$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Наименьшую нормальную подгруппу $G^{\mathfrak{F}}$ группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, называют $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G.

Лемма 2.6 (см. [1; теорема IV.(1.8)]). *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые формации. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ для каждой группы G.*

Лемма 2.7 (см. [4; теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда разрешимая группа имеет точно один класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов.*

Если G – группа, то символом $\sigma(G)$ будем обозначать множество всех простых делителей $|G|$.

Лемма 2.8 (см. [14] или [15; теорема 2.5.3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, $\pi = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$. Если группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ π-разрешима, то G имеет $\mathfrak{F}$-инъектор и любые два $\mathfrak{F}$-инъектора G сопряжены.*

Напомним, что символом $F(G)$ обозначают π-нильпотентный радикал группы G, т.е. $\mathfrak{N}^{\pi}$-радикал G. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то группа G называется $\mathfrak{F}$-*скованной*, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leqslant G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 2.9 (см. [15; теорема 1.8.18 и 1.8.19]). *Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$. Тогда G является $\mathfrak{N}^{\pi}$-скованной, т.е. $C_G(G_{\mathfrak{N}^{\pi}}) \leqslant G_{\mathfrak{N}^{\pi}}$. В частности, если $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$, то G π-скована, т.е. $C_G(G_{\mathfrak{E}_{\pi}}) \leqslant G_{\mathfrak{E}_{\pi}}$.*

Лемма 2.10 (см. [1; замечание IX.(1.3)]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Тогда выполнены следующие утверждения*:

1) *если V – $\mathfrak{F}$-инъектор G и $K \trianglelefteq G$, то $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-инъектором K*;
2) *если V – $\mathfrak{F}$-инъектор G и $\alpha\colon G \to \overline{G}$ – изоморфизм, то $\alpha(V)$ – $\mathfrak{F}$-инъектор $\overline{G}$*;
3) *если V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G и $V \cap M$ является $\mathfrak{F}$-инъектором M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор G*;
4) *если V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то $G_{\mathfrak{F}} \leqslant V$ и V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G.*

Лемма 2.11 (теорема Чунихина) (см. [16]). *Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) *G имеет холловы π-подгруппы, и любые две из них сопряжены*;
2) *каждая π-подгруппа G содержится в некоторой холловой π-подгруппе G.*

3. Локальные задания множеств Хартли. Напомним, что если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и G – группа, то *множеством Хартли* называется множество Фиттинга $\mathscr{H}$ группы G такое, что $\mathscr{H} = HS(h)$ для некоторой H-функции h группы G, т.е.

$$\mathscr{H} = \bigcap_{p\in\pi} h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p).$$

Примеры 3.1. (a) Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathscr{N}^\pi$ является следом класса Фиттинга $\mathfrak{N}^\pi$ в группе G и h является H-функцией такой, что $h(p) = \{1\}$ для всех $p \in \pi$, где 1 – единичная подгруппа G. Тогда по утверждению 3) леммы 2.4 мы имеем

$$HS(h) = \bigcap_{p\in\pi}\{1\}(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p) = \{1\}\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right) = \mathscr{N}^\pi.$$

(b) Пусть $\mathscr{F}$ является множеством Фиттинга группы G и $\mathscr{H} = \mathscr{F}\mathfrak{N}^\pi$. Пусть h – H-функция такая, что $h(p) = \mathscr{F}$ для всех $p \in \pi$. Тогда по утверждению 3) леммы 2.4 мы получаем

$$HS(h) = \mathscr{F}\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right) = \mathscr{F}\mathfrak{N}^\pi$$

и поэтому $\mathscr{H}$ является множеством Хартли G (равенство следует из леммы II.2.7 (a) из [1]).

(c) Если $\pi = \mathbb{P}$ и $k \in \mathbb{N}$, то обозначим $(\mathscr{N})^k$ – множество всех подгрупп разрешимой группы G нильпотентной длины не превосходящей k. Пусть $k \geqslant 1$ и H-функция h такая, что $h(p) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{N}^{k-1}}(G)$ для всех $p \in \pi$. Тогда с учетом примера (b) получаем, что $HS(h) = (\mathscr{N})^k$ является множеством Хартли G.

(d) Пусть $\pi = \mathbb{P}$ и $\mathscr{H}$ является следом класса Фиттинга $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ группы G. Тогда $\mathscr{H}$ является множеством всех p-нильпотентных подгрупп группы G. Пусть h – H-функция такая, что

$$h(p) = \{1\}, \qquad h(q) = \mathscr{H} \quad \text{для всех простых} \quad q \neq p.$$

Тогда по утверждению 3) леммы 2.4 получаем, что

$$HS(h) = (\{1\}(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)) \cap \left(\mathscr{H}\left(\bigcap_{q\neq p}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right)\right) = \mathscr{H} \cap \mathscr{H}\left(\bigcap_{q\neq p}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right) = \mathscr{H}$$

и $\mathscr{H}$ является множеством Хартли G.

Лемма 3.2. *Каждое множество Хартли группы G определяется приведенной H-функцией.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}$ – множество Хартли группы G. Тогда $\mathscr{H} = HS(h_1)$ для некоторой H-функции h_1, т.е. $\mathscr{H} = \bigcap_{p\in\pi} h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Определим H-функцию h следующим образом:

$$h(p) = h_1(p) \cap \mathscr{H} \qquad \text{для всех} \quad p \in \pi.$$

Так как $\mathscr{H} = \bigcap_{p\in\pi} h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$ для некоторой H-функции h_1, то

$$HS(h) = \left(\bigcap_{p\in\pi}(h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p))\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi}(\mathscr{H}(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p))\right) = \mathscr{H} \cap \left(\bigcap_{p\in\pi}(\mathscr{H}(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p))\right).$$

Следовательно, ввиду утверждений 2) и 3) леммы 2.4

$$HS(h) = \mathscr{H} \cap \left(\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{H}(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)\right) = \mathscr{H} \cap \mathscr{H}\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\right) = \mathscr{H} \cap \mathscr{H}\mathfrak{N}^{\pi} = \mathscr{H}.$$

Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{X}$ – непустое множество подгрупп группы G. Тогда через Fitset $\mathscr{X}$ будем обозначать наименьшее множество Фиттинга группы G, содержащее $\mathscr{X}$ (см. [1; определение VIII.3.1(b)]).

Лемма 3.3. *Каждое множество Хартли определяется устойчивой приведенной H-функцией.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}$ – множество Хартли группы G. По лемме 3.2 $\mathscr{H} = \bigcap_{p\in\pi} h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$ для некоторой приведенной H-функции h_1.

Определим множество подгрупп группы G следующим образом:

$$\overline{h}_1(p) = \left\{H \leqslant G : H \text{ сопряжена с } R^{\mathfrak{E}_{p'}} \text{ в } G \text{ для некоторой подгруппы } R \in h_1(p)\right\}$$

для каждого $p \in \pi$.

Заметим, что если $H \in \overline{h}_1(p)$, то $H \in h_1(p)$ и поэтому $\overline{h}_1(p) \subseteq h_1(p)$ для всех $p \in \pi$.

Допустим, что $X \in \overline{h}_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда X имеет нормальную подгруппу $K \in \overline{h}_1(p)$ такую, что $X/K \in \mathfrak{E}_{p'}$. Поскольку $\overline{h}_1(p) \subseteq h_1(p)$, имеем $K \leqslant X_{h_1(p)}$. Следовательно, ввиду изоморфизма $X/K/X_{h_1(p)}/K \cong X/X_{h_1(p)}$ имеем $X/X_{h_1(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и $X \in h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Значит, $\overline{h}_1(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$.

С другой стороны, пусть $Y \in h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда $Y/Y_{h_1(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \leqslant Y_{h_1(p)}$. Следовательно, $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h_1(p)$. Поскольку $(Y^{\mathfrak{E}_{p'}})^{\mathfrak{E}_{p'}} = Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ и, очевидно, подгруппа $Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ сопряжена $Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ в группе G, $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \in \overline{h}_1(p)$. Значит, $Y \in \overline{h}_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Таким образом, справедливо равенство

$$\overline{h}_1(p)\mathfrak{E}_{p'} = h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}. \tag{3.1}$$

Пусть h – H-функция такая, что $h(p) = \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p))$ для каждого $p \in \pi$. Докажем, что $HS(h) = \mathscr{H}$. Поскольку, $\overline{h}_1(p) \subseteq h_1(p)$, имеем

$$h(p) = \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p)) \subseteq \mathrm{Fitset}(h_1(p)) = h_1(p)$$

и поэтому $h(p) \subseteq h_1(p)$. Значит, ввиду утверждения 1) леммы 2.4 $h(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Заметим, что в силу утверждения 3) леммы 2.3

$$(h(p)\mathfrak{E}_{p'})\mathfrak{N}_p = h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$$

и $(h_1(p)\mathfrak{E}_{p'})\mathfrak{N}_p = h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Таким образом, $h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p) \subseteq h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$ для всех $p \in \pi$ и $HS(h) \subseteq \mathscr{H}$.

Теперь ввиду (3.1) получаем

$$h_1(p)\mathfrak{E}_{p'} = \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p)\mathfrak{E}_{p'}).$$

Поскольку $\overline{h}_1(p) \subseteq \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p))$, то по утверждению 1) леммы 2.4 имеем $\overline{h}_1(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p))\mathfrak{E}_{p'}$. Поэтому $\mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p)\mathfrak{E}_{p'}) \subseteq \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p))\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда для каждого $p \in \pi$ справедливо включение

$$h_1(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p))\mathfrak{E}_{p'} = h(p)\mathfrak{E}_{p'}. \tag{3.2}$$

С учетом утверждения 3) леммы 2.3 и утверждения 1) леммы 2.4 получаем включение $h_1(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p) \subseteq h(p)(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Следовательно, $\mathscr{H} \subseteq HS(h)$ и $\mathscr{H} = HS(h)$.

Поскольку $\overline{h}_1(p) \subseteq h_1(p)$ для всех $p \in \pi$ и h_1 является приведенной H-функцией $\mathscr{H}$, то $h(p) \subseteq \mathscr{H}$ для каждого $p \in \pi$ и h – приведенная H-функция $\mathscr{H}$.

Остается показать, что h – устойчивая функция $\mathscr{H}$, т.е. $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных $p, q \in \pi$. Пусть X_1 – произвольная подгруппа в $h_1(p)$ и $p \neq q$. Так как h_1 – приведенная H-функция, то $X_1 \in \mathscr{H}$ и поэтому

$$X_1 \in h_1(q)(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q).$$

Ввиду утверждения 3) леммы 2.3 справедливо равенство

$$h_1(q)(\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q) = (h_1(q)\mathfrak{E}_{q'})\mathfrak{N}_q.$$

Значит, $X_1^{\mathfrak{N}_q} \in h_1(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Поскольку $p \neq q$, по лемме 2.6 имеем $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \leqslant X_1^{\mathfrak{N}_q}$. Следовательно, $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h_1(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Тогда ввиду равенства (3.2) имеем $X_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для каждой подгруппы X_1 из $h_1(p)$ и различных простых p и q из π.

Пусть $R \in \overline{h}_1(p)$. Тогда по определению множества $\overline{h}_1(p)$ получаем, что подгруппа R сопряжена с $S^{\mathfrak{E}_{p'}}$ для некоторой подгруппы $S \in h_1(p)$. Поэтому $R \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ и $h_1(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Таким образом,

$$h(p) = \mathrm{Fitset}(\overline{h}_1(p)) \subseteq \mathrm{Fitset}(h(q)\mathfrak{E}_{q'}) = h(q)\mathfrak{E}_{q'}$$

для всех различных простых p и q из π. Лемма доказана.

4. Основной результат. Напомним, что если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то характеристика $\mathfrak{X}$ – это множество $\{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{X}\}$, где Z_p – циклическая группа порядка p. Доказательство основного результата состоит из нескольких шагов. Главные шаги его представляют следующие пять лемм.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга характеристики π и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{X}$. Тогда любая π-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов и каждый $\mathfrak{F}$-инъектор G является произведением π'-радикала G и $\mathfrak{X}$-инъектора некоторой холловой π-подгруппы G.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по порядку группы $|G|$. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа G. Предположим, что для всех групп, порядок которых меньше $|G|$, теорема верна. Рассмотрим следующие два возможных случая.

Случай 1: *π'-Радикал $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ группы G – единичная подгруппа, т.е. $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$.* Так как по условию $M \trianglelefteq G$, то по лемме 2.1 $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = M \cap G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$. По индукционному предположению M имеет точно один класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов и каждый $\mathfrak{F}$-инъектор M является произведением π'-радикала M и $\mathfrak{X}$-инъектора некоторой холловой π-подгруппы M.

Пусть F_1 – $\mathfrak{X}$-инъектор некоторой холловой π-подгруппы группы M. Так как любая холлова π-подгруппа группы G разрешима, то по лемме 2.8 G_π имеет $\mathfrak{X}$-инъектор V и любые два из них сопряжены в G_π. Поскольку $M_\pi = M \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi$, то ввиду утверждения 1) леммы 2.10 подгруппа $V \cap M_\pi$ является $\mathfrak{X}$-инъектором M_π. Теперь, учитывая сопряженность $\mathfrak{X}$-инъекторов в G_π, мы можем допустить, что $F_1 = V \cap M_\pi$. Так как холлова π-подгруппа любой $\mathfrak{F}$-группы является $\mathfrak{X}$-подгруппой, то любой $\mathfrak{F}$-инъектор G_π является $\mathfrak{X}$-инъектором G_π. Следовательно, если мы докажем, что V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, то в силу утверждения 3) леммы 2.10 V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G и, значит, V – $\mathfrak{X}$-инъектор G.

Допустим, что V_1 – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G и $V < V_1$. Так как $G_{\mathfrak{X}}$ и $(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ нормальны в V_1, то $[(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}, G_{\mathfrak{X}}] \leqslant (V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \cap G_{\mathfrak{X}} = 1$. Следовательно,

$$(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \leqslant C_G(G_{\mathfrak{X}}).$$

Поскольку по лемме 2.9 $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$, $C_G(G_{\mathfrak{E}_\pi}) \leqslant G_{\mathfrak{E}_\pi}$, т.е. $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leqslant G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$. Ввиду выбора группа $V_1 \in \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{X}$. Значит, $V_1/(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = V_1 \in \mathfrak{X}$ и поэтому $V_1 = V$ и V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Утверждение о существовании $\mathfrak{F}$-инъекторов в случае 1 доказано.

Случай 2: *π'-Радикал $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \neq 1$.* Пусть $G_1 = G/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$. По утверждению 2) леммы 2.3 имеем

$$(G/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = G_{\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1.$$

Следовательно, по случаю 1 группа G_1 имеет в точности один класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов вида $(G_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V_1$, где V_1 – $\mathfrak{X}$-инъектор некоторой холловой π-подгруппы G_1. Ввиду π-разрешимости группы G_1 по утверждению 1) леммы 2.11 в группе G существуют и сопряжены холловы π-подгруппы. Кроме того, в силу утверждения 2) леммы 2.11 каждая π-подгруппа содержится в некоторой холловой π-подгруппе G_1. Пусть $V_1 \leqslant G_\pi G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$, где $G_\pi G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ – некоторая холлова π-подгруппа группы G_1. Так как $(G/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$, то множество $\mathfrak{F}$-инъекторов группы G_1 совпадает с множеством $\mathfrak{X}$-инъекторов холловой π-подгруппы $G_\pi G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$. Поскольку G_π – разрешимая группа, то по лемме 2.7 G_π имеет $\mathfrak{X}$-инъектор V. Тогда по утверждению 2) леммы 2.10 подгруппа $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ является $\mathfrak{X}$-инъектором $G_\pi G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$. Отсюда следует, что $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ – $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G.

Покажем, что $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Допустим, что $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}} < F$ и F – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Так как $F \in \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{X}$, имеем $F/F_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \in \mathfrak{X}$. Значит, $F/F_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \in \mathfrak{S}_\pi$. Тогда $F_\pi F_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/F_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = F/F_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ и поэтому

$$F = F_{\mathfrak{E}_{\pi'}}F_\pi,$$

где F_π является холловой π-подгруппой F. Без ограничения общности можно допустить, что $F_\pi \leqslant G_\pi$. Следовательно, $V \leqslant F_\pi \leqslant G_\pi$. Так как $\mathfrak{X}$-инъектор V $\mathfrak{X}$-максимален в G_π, то $V = F_\pi$. Ввиду утверждения 2) леммы 2.3 и нормальности $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ в F получаем

$$(F/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = F_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}.$$

Следовательно,

$$(F/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}})/(F/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \cong F/F_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \cong F_\pi = V \in \mathfrak{X}.$$

Значит, $F/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ и

$$VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \leqslant F/G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}.$$

Отсюда $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V = F$ и $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G.

Теперь чтобы показать, что $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ – $\mathfrak{F}$-инъектор G, ввиду утверждения 3) леммы 2.10 достаточно выяснить, что $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор M.

По индукции M имеет $\mathfrak{F}$-инъектор вида $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}}L$, где L – $\mathfrak{X}$-инъектор некоторой холловой π-подгруппы M_π группы M. Так как $M_\pi = M \cap G_\pi \trianglelefteq G_\pi$ и по лемме 2.7 любые два $\mathfrak{X}$-инъектора M_π сопряжены, то без ограничения общности можно считать, что $L = V \cap M_\pi$. Так как $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M \trianglelefteq G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ и $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ – $\mathfrak{F}$-подгруппа, то $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-подгруппа. Поскольку $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}}L \leqslant G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор M и $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}}L$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой M, имеем $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}}L = G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$. Следовательно, $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор M. Существование $\mathfrak{F}$-инъектора в группе G доказано.

Сопряженность $\mathfrak{F}$-инъекторов следует из сопряженности $\mathfrak{X}$-инъекторов холловой π-подгруппы π-разрешимой группы. Лемма доказана.

Следствие 4.2. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-нильпотентных инъекторов.*

Напомним, что группу G называют *π-замкнутой*, если она имеет нормальную холлову π-подгруппу, и *π-специальной*, если она имеет нормальную нильпотентную холлову π-подгруппу.

Следствие 4.3. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-замкнутых инъекторов.*

Следствие 4.4. *Каждая π-разрешимая группа имеет единственный класс π-специальных инъекторов.*

Заметим, что следствия 4.3 и 4.4 были получены другими методами в работе [7].

Для множества Хартли $\mathscr{H} = HS(h)$ группы G, определяемого устойчивой приведенной H-функцией h, подгруппу $G_h = \prod_{p\in\pi} G_{h(p)}$ назовем *h-радикалом* группы G.

Лемма 4.5. *Если $\mathscr{H} = HS(h)$ для устойчивой приведенной H-функции h, R – такая подгруппа группы G, что $G_h \leqslant R$ и $R/G_h \in \mathfrak{N}^\pi$, то $R \in \mathscr{H}$.*

Доказательство. Пусть q – любое простое число из π. Поскольку $G_{h(q)} \trianglelefteq R$, $G_{h(q)} \leqslant R_{h(q)}$ для всех $q \in \pi$. Пусть $p \in \pi$ и $p \neq q$. Заметим, что

$$G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(q)} \cong G_{h(p)}/G_{h(p)} \cap G_{h(q)} = G_{h(p)}/(G_{h(p)})_{h(q)}.$$

Поскольку h является устойчивой приведенной H-функцией, $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Следовательно, $G_{h(p)} \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ и $G_{h(p)}/(G_{h(p)})_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$. Таким образом,

$$G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'} \qquad \text{для всех простых} \quad p \neq q.$$

Значит, $G_h/G_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$. Тогда ввиду изоморфизмов

$$R_{h(q)}G_h/R_{h(q)} \cong G_h/G_h \cap R_{h(q)} \cong (G_h/G_{h(q)})/(G_h \cap R_{h(q)})/G_{h(q)}$$

имеем $R_{h(q)}G_h/R_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$. Поскольку $R/G_h \in \mathfrak{N}^\pi$, имеем $R/R_{h(q)}G_h \in \mathfrak{N}^\pi$ и поэтому $R/R_{h(q)}G_h \in \bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q$. Теперь, учитывая изоморфизм

$$R/R_{h(q)}G_h \cong (R/R_{h(q)})/(R_{h(q)}G_h/R_{h(q)}),$$

получаем, что $R/R_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q$ для всех $q \in \pi$. Следовательно,

$$R \in \bigcap_{q\in\pi} h(q)\mathfrak{E}_{q'}\mathfrak{N}_q = \mathscr{H}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Если $\mathscr{H}$ – множество Хартли группы G и h – устойчивая приведенная H-функция $\mathscr{H}$, то*

$$G_{\mathscr{H}}/G_h = F_\pi(G/G_h).$$

Доказательство. Пусть $F_\pi(G/G_h) = R/G_h$. Поскольку h является приведенной H-функцией $\mathscr{H}$, имеем $(G_{\mathscr{H}})_{h(p)} = G_{h(p)}$. Следовательно, $G_{\mathscr{H}}/G_{h(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \pi$ и $G_{\mathscr{H}}/G_h \in \mathfrak{N}^\pi$. Отсюда $G_{\mathscr{H}}/G_h \leqslant R/G_h$ и $G_{\mathscr{H}} \leqslant R$.

С другой стороны, поскольку $R/G_h \in \mathfrak{N}^\pi$, по лемме 4.5 $R \in \mathscr{H}$ и поэтому $R \leqslant G_{\mathscr{H}}$. Таким образом, $G_{\mathscr{H}}/G_h = F_\pi(G/G_h)$. Лемма доказана.

Лемма 4.7. *Пусть h – устойчивая приведенная H-функция множества Хартли $\mathscr{H}$ группы G и R – $\mathscr{H}$-подгруппа G, содержащая $G_{\mathscr{H}}$. Если группа G/G_h $\mathfrak{N}^\pi$-скована, то $R/G_h \in \mathfrak{N}^\pi$.*

Доказательство. Поскольку $G_{\mathscr{H}} \trianglelefteq R$ и h является приведенной H-функцией $\mathscr{H}$, по лемме 2.1 $G_{h(p)} = (G_{\mathscr{H}})_{h(p)} = R_{h(p)} \cap G_{\mathscr{H}}$. Следовательно, $[R_{h(p)}, G_{\mathscr{H}}] \leqslant R_{h(p)} \cap G_{\mathscr{H}} = G_{h(p)}$ и поэтому

$$R_{h(p)} \leqslant C_G(G_{\mathscr{H}}/G_{h(p)}) \leqslant C_G(G_{\mathscr{H}}/G_h).$$

Так как группа G/G_h является $\mathfrak{N}^\pi$-скованной, по лемме 4.6 $G_{\mathscr{H}}/G_h = F_\pi(G/G_h)$ и $C_G(G_{\mathscr{H}}/G_h) \leqslant G_{\mathscr{H}}$. Таким образом, $R_{h(p)} \leqslant G_{\mathscr{H}}$. Следовательно,

$$G_{h(p)} = (G_{\mathscr{H}})_{h(p)} = R_{h(p)} \cap G_{\mathscr{H}} = R_{h(p)} \qquad \text{для всех} \quad p \in \pi.$$

Значит, $R/G_h = R/R_h \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \pi$ и $R/G_h \in \mathfrak{N}^\pi$. Лемма доказана.

Лемма 4.8. *Пусть $\mathscr{H} = HS(h)$ для устойчивой приведенной H-функции h группы G. Если $\sigma(G_h) \subseteq \pi \neq \varnothing$, фактор G/G_h $\mathfrak{N}^\pi$-скован и V/G_h – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор G/G_h, то V – $\mathscr{H}$-инъектор группы G.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по порядку группы G. Пусть M – произвольная максимальная нормальная подгруппа G и p, q – различные простые числа из π.

Покажем, что $G_h/G_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$ для каждого $q \in \pi$. Поскольку h является устойчивой H-функцией, $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных $p, q \in \pi$. Значит, $G_{h(p)} \in h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ и $G_{h(p)}/(G_{h(p)})_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$. Ввиду изоморфизма

$$G_{h(p)}/(G_{h(p)})_{h(q)} = G_{h(p)}/G_{h(q)} \cap G_{h(p)} \cong G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(q)},$$

имеем $G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$. Следовательно, $G_h/G_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$ для каждого $q \in \pi$.

Поскольку

$$(G_h \cap M)G_{h(q)}/G_{h(q)} \cong (G_h \cap M)/M_{h(q)},$$

то $(G_h \cap M)/M_{h(q)}$ является q'-группой для всех простых $q \in \pi$. Следовательно,

$$(G_h \cap M)/M_h \in \bigcap_{q\in\pi} \mathfrak{E}_{q'} = \mathfrak{E}_{\pi'},$$

где $M_h = \prod_{p\in\pi} M_{h(p)}$. Так как по условию $\sigma(G_h) \subseteq \pi$, то

$$(G_h \cap M)/M_h \in \mathfrak{E}_\pi \cap \mathfrak{E}_{\pi'} = (1).$$

Следовательно, $G_h \cap M = M_h$.

Рассмотрим следующие два возможных случая.

Случай 1: $G_h \leqslant M$. В этом случае $G_h = M_h$. Так как по условию V/G_h – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор G/G_h, то по утверждению 1) леммы 2.10 $(V \cap M)/M_h$ – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор M/M_h. Поскольку группа G/G_h $\mathfrak{N}^\pi$-скована и класс $\mathfrak{N}^\pi$-скованных групп является классом Фиттинга по теореме B(b) из [17], группа M/M_h также является $\mathfrak{N}^\pi$-скованной. Следовательно, по индукции $V \cap M$ – $\mathscr{H}$-инъектор M.

Допустим, что $V < V_1$ и V_1 – $\mathscr{H}$-максимальная подгруппа G. Так как $V \cap M$ – $\mathscr{H}$-максимальная подгруппа M, то $V \cap M = V_1 \cap M$. Следовательно, $V_1 \cap M$ – $\mathscr{H}$-инъектор M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G. Ввиду утверждения 3) леммы 2.10 следует, что V_1 является $\mathscr{H}$-инъектором G. Но тогда $G_{\mathscr{H}} \leqslant V_1$ и поэтому по лемме 4.7 группа V_1/G_h π-нильпотентна. Так как V/G_h – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор G/G_h, то V/G_h – $\mathfrak{N}^\pi$-максимальная подгруппа G/G_h. Это противоречит включению $V/G_h < V_1/G_h$. Таким образом, $V = V_1$ и V – $\mathscr{H}$-максимальная подгруппа G. Следовательно, по утверждению 3) леммы 2.10 V – $\mathscr{H}$-инъектор G.

Случай 2: $G_h \nleqslant M$. Тогда $G = G_h M$. Так как V/G_h – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор G/G_h и

$$G/G_h \cong M/G_h \cap M = M/M_h,$$

то по утверждению 2) леммы 2.10 $(V \cap M)/M_h$ – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор M/M_h. Тогда по индукции $V \cap M$ является $\mathscr{H}$-инъектором M. Рассуждая аналогично, как и в случае 1, мы получаем, что V – $\mathscr{H}$-инъектор G. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как по условию H-функция h такова, что $h(p) = \mathscr{X}$ для всех $p \in \pi$, то h – устойчивая приведенная H-функция. Ввиду того, что группа $G/G_{\mathscr{X}}$ π-разрешима, по лемме 2.9 $G/G_{\mathscr{X}}$ $\mathfrak{N}^\pi$-скована и по лемме 4.7 $G/G_{\mathscr{X}}$ имеет $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор $V/G_{\mathscr{X}}$. Так как $h(p) = \mathscr{X}$ для всех $p \in \pi$, то

$$G_h = G_{\mathscr{X}}, \qquad M_h = M_{\mathscr{X}}, \qquad G_h \cap M = M_h.$$

Значит, по лемме 4.8 V является $\mathscr{H}$-инъектором G.

Обратно, пусть V – $\mathscr{H}$-инъектор группы G. Докажем, что $V/G_{\mathscr{X}}$ – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор $G/G_{\mathscr{X}}$. Так как V – $\mathscr{H}$-инъектор G, то $V \cap S$ является $\mathscr{H}$-максимальной подгруппой группы S для любой субнормальной подгруппы S группы G. Для того, чтобы доказать, что V/G_h – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор G/G_h, достаточно выяснить, что

$$V/G_{\mathscr{X}} \cap S/G_{\mathscr{X}} = (V \cap S)/G_{\mathscr{X}}$$

– $\mathfrak{N}^\pi$-максимальная подгруппа $G/G_{\mathscr{X}}$ для субнормальной подгруппы $S/G_{\mathscr{X}}$ группы $G/G_{\mathscr{X}}$. Так как

$$\mathscr{H} = HS(h) = \bigcap_{p\in\pi} \mathscr{X}(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p) \qquad \text{для всех} \quad p \in \pi$$

и $V \cap S \in \mathscr{H}$, то $(V \cap S)/G_{\mathscr{X}} \in \mathfrak{N}^\pi$. Допустим, что $(V \cap S)/G_{\mathscr{X}}$ не является $\mathfrak{N}^\pi$-максимальной подгруппой $G/G_{\mathscr{X}}$. Пусть $(V \cap S)/G_{\mathscr{X}} < R/G_{\mathscr{X}}$, где $R/G_{\mathscr{X}}$ – $\mathfrak{N}^\pi$-максимальная подгруппа $G/G_{\mathscr{X}}$. Тогда

$$R \in \bigcap_{p\in\pi} \mathscr{X}(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p) = HS(h) = \mathscr{H}.$$

Но $V \cap S$ – $\mathscr{H}$-максимальная подгруппа G и поэтому $V \cap S = R$. Полученное противоречие показывает, что $V/G_{\mathscr{X}}$ – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор $G/G_{\mathscr{X}}$.

Допустим, что F – другой $\mathscr{H}$-инъектор G. По установленному выше $F/G_{\mathscr{X}}$ – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор $G/G_{\mathscr{X}}$. Ввиду следствия 4.2 подгруппы $F/G_{\mathscr{X}}$ и $V/G_{\mathscr{X}}$ сопряжены в $G/G_{\mathscr{X}}$. Следовательно, $\mathscr{H}$-инъекторы V и F сопряжены в G. Первое утверждение теоремы доказано.

Если V – $\mathscr{H}$-инъектор G, то $V/G_{\mathscr{X}}$ – $\mathfrak{N}^\pi$-инъектор $G/G_{\mathscr{X}}$. Следовательно, по лемме 4.1

$$V/G_{\mathscr{X}} = (G/G_{\mathscr{X}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}}(L/G_{\mathscr{X}}),$$

где $L/G_{\mathscr{X}}$ является $\mathfrak{N}^\pi$-инъектором некоторой холловой π-подгруппы $G/G_{\mathscr{X}}$. Ввиду утверждения 2) леммы 2.3 имеем

$$(G/G_{\mathscr{X}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = G_{\mathscr{X}\mathfrak{E}_{\pi'}}/G_{\mathscr{X}}$$

и, значит, $V = G_{\mathscr{X}\mathfrak{E}_{\pi'}}L$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Walter De Gruyter, Berlin, 1992.

[2] W. Guo, *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups*, Springer, Heidelberg, 2015.

[3] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Springer, Dordrecht, 2006.

[4] B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley, “Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen”, *Math. Z.*, **102** (1967), 337–339.

[5] Л. А. Шеметков, “О подгруппах π-разрешимых групп”, *Конечные группы*, Наука и техника, Минск, 1975.

[6] W. Anderson, “Injectors in finite soluble groups”, *J. Algebra*, **36**:3 (1975), 333–338.

[7] Н. Т. Воробьёв, М. Г. Семёнов, “Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы”, *Матем. заметки*, **97**:4 (2015), 516–528.

[8] B. Hartley, “On Fischer’s dualization of formation theory”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **3**:2 (1969), 193–207.

[9] P. D’Arcy, “Locally defined Fitting classes”, *J. Austral. Math. Soc.*, **20**:1 (1975), 25–32.

[10] W. Guo, N. T. Vorob’ev, “On injectors of finite soluble groups”, *Comm. Algebra*, **36**:9 (2008), 3200–3208.

[11] М. Г. Семёнов, “Формула инъектора конечной π-разрешимой группы”, *Проблемы физики, математики и техники*, **4**:21 (2014), 77–88.

[12] D. Revin, E. Vdovin, “On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups.”, *J. Algebra*, **324**:12 (2010), 3614–3652.
[13] N. Yang, W. Guo, N. T. Vorob’ev, “On $\mathscr{F}$-injectors of Fitting set of a finite group”, *Comm. Algebra*, **46**:1 (2018), 217–229.
[14] W. B. Guo, “Injectors of finite groups”, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, **18**:2 (1997), 145–148.
[15] W. Guo, *The Theory of Classes of Groups*, Sci. Beijing Press, Beijing, 2000.
[16] С. А. Чунихин, *Подгруппы конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1964.
[17] M. J. Iranzo, F. Pérez Monazor, “$\mathfrak{F}$-Constraint with respect to a Fitting class”, *Arch. Math. (Basel)*, **46**:3 (1986), 205–210.

Н. Т. Воробьёв
Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Республика Беларусь
E-mail: vorobyovnt@tut.by

Т. Б. Караулова
Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Республика Беларусь
E-mail: tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

Поступило
26.10.2017
После доработки
06.03.2018
Принято к публикации
04.04.2018