Математические заметки

Том 97 выпуск 4 апрель 2015

УДК 512.542

Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы

Н. Т. Воробьёв, М. Г. Семёнов

Множество подгрупп $\mathscr{F}$ конечной группы G называют *множеством Фиттинга*, если оно замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, произведений нормальных $\mathscr{F}$-подгрупп и внутренних автоморфизмов G. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G назовем π*-насыщенным*, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^{\pi'}(H) \in \mathscr{F}$, справедливо $H \in \mathscr{F}$. В работе доказано, что если $\mathscr{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга π-разрешимой группы G, то в G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10645

1. Введение. Основополагающим результатом в теории классов конечных разрешимых групп является обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла, которое было получено Гашюцом, Фишером и Хартли [1], где доказано, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. При этом подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$*-инъектором* G, если для любой субнормальной подгруппы N группы G подгруппа $V \cap N$ является максимальной из подгрупп N, принадлежащих $\mathfrak{F}$. *Множеством Фиттинга* $\mathscr{F}$ группы G называют такое множество подгрупп группы G, которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Понятие $\mathscr{F}$*-инъектора* группы для ее множества Фиттинга $\mathscr{F}$ определяется аналогично, как и понятие $\mathfrak{F}$-инъектора для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Справедливость указанной выше теоремы Гашюца–Фишера–Хартли из [1] была подтверждена Шеметковым [2] для множества Фиттинга конечной частично разрешимой группы (разрешимый случай см. также в [3]). В [2] было установлено, что для любого множества Фиттинга $\mathscr{F}$ конечной π-разрешимой группы G (π – множество всех простых делителей всех групп из $\mathscr{F}$) в G существует единственный класс сопряженных $\mathscr{F}$-инъекторов.

Заметим, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то множество подгрупп $\{H \leqslant G \mid H \in \mathfrak{F}\}$ группы G является множеством Фиттинга G. Его обозначают $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$ и называют *следом класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ в группе G. Известно (см. [4; примеры VIII.2.2]), что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует его след в группе G, хотя обратное в общем случае неверно. Кроме того, очевидно, что множество $\mathfrak{F}$-инъекторов для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathscr{F}$-инъекторов для множества Фиттинга $\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$ совпадают, и поэтому из указанной выше теоремы Шеметкова [2], в частности, следует теорема Гашюца–Фишера–Хартли [1].

Пусть π – произвольное непустое множество простых чисел и π' – дополнение π в множестве всех простых чисел. Основной результат настоящей работы – доказательство того, что в любой π-разрешимой группе G для каждого ее π-насыщенного множества Фиттинга $\mathscr{F}$ существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены (теорема 3.10).

В заключительном пункте работы мы обобщаем результат Шеметкова из [2] о существовании и сопряженности $\mathscr{F}$-инъекторов, ослабляя требование π-разрешимости группы и заменяя его условием π-разрешимости ее подходящей факторгруппы. Все рассматриваемые в работе группы конечны. При необходимости определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в [4]–[6].

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathscr{X}$ – множество подгрупп группы G, $H \leqslant G$ и $\mathscr{X}_H = \{S \leqslant H : S \in \mathscr{X}\}$. Тогда если $\mathscr{X}$ – множество Фиттинга группы G, то $\mathscr{X}_H$ является, очевидно, множеством Фиттинга группы H. Символом $G_{\mathscr{X}}$ обозначим наибольшую из нормальных $\mathscr{X}$-подгрупп группы G. Такую подгруппу называют *$\mathscr{X}$-радикалом* группы G.

Мы будем использовать известное свойство $\mathscr{F}$-радикала группы, которое представляет

Лемма 2.1 (см. [4; свойство VIII.2.4 (a)]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G и N – субнормальная подгруппа. Тогда $N_{\mathscr{F}} = G_{\mathscr{F}} \cap N$.*

Определение 2.2. Пусть $\mathscr{F}$ – множество подгрупп группы G.

(a) $\mathscr{F}$-Подгруппу V группы G называют (см. [4; VIII.2.5 (a)]) *$\mathscr{F}$-максимальной*, если из $V \leqslant W \leqslant G$ и $V \in \mathscr{F}$ следует, что $V = W$.

(б) *$\mathscr{F}$-Инъектором* группы G называется (см. [4; VIII.2.5 (b)]) такая подгруппа V, что $V \cap K$ является $\mathscr{F}$-максимальной подгруппой в K для любой субнормальной подгруппы K из G.

Мы будем использовать также некоторые известные утверждения об $\mathscr{F}$-инъекторах группы для множеств Фиттинга, которые мы приведем в качестве лемм.

Лемма 2.3 (см. [4; теорема VIII.2.9]). *Если $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга разрешимой группы G, то в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Символом $\sigma(G)$ обозначим множество всех простых делителей порядка группы G, а $\sigma(\mathscr{F})$ – объединение множеств $\sigma(G)$ для всех групп G из ее множества Фиттинга $\mathscr{F}$.

Лемма 2.4 (см. [2; теорема 2.2]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга π-разрешимой группы G, где $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Лемма 2.5 (см. [3; свойство 2.2]). *Пусть A – нормальная подгруппа группы G. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *Если* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга группы* G *и* $A \in \mathscr{F}$, *то*

$$\overline{\mathscr{F}} = \{S/A : A \leqslant S \in \mathscr{F}\}$$

– множество Фиттинга группы G/A. *Более того, если* V *–* $\mathscr{F}$*-инъектор группы* G, *то* V/A *является* $\overline{\mathscr{F}}$*-инъектором группы* G/A.

(2) *Если* $\overline{\mathscr{F}}$ *– множество Фиттинга группы* G/A *и* V/A *является* $\overline{\mathscr{F}}$*-инъектором группы* G/A, *то*

$$\mathscr{F}_0 = \{S \leqslant G : (SA)/A \in \overline{\mathscr{F}}\}$$

– множество Фиттинга группы G *и* V *–* $\mathscr{F}_0$*-инъектор группы* G.

(3) *Если* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга группы* G *и* $V \in \mathscr{F}$ *– подгруппа группы* G *такая, что* $VA = G$ *и* $V \cap A$ *–* $\mathscr{F}$*-инъектор группы* A, *то* V *–* $\mathscr{F}$*-инъектор группы* G.

(4) *Если* V *–* $\mathscr{F}$*-инъектор группы* G, *то* VA/A *–* $\mathscr{F}$*-инъектор группы* G/A.

Напомним, что символом $F(G)$ обозначают *подгруппу Фиттинга* группы G – наибольшую нормальную нильпотентную подгруппу группы G, а символом $F_\pi(G)$ – наибольшую нормальную π-нильпотентную подгруппу группы G.

Лемма 2.6 (см. [5; следствие 4.1.2]). *Для любой* π*-разрешимой группы* G *имеет место включение*

$$C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G).$$

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Напомним, что символом $O_{\pi'}(G)$ обозначают наибольшую нормальную π'-подгруппу группы G, а символом $O^\pi(G)$ – такую наименьшую нормальную подгруппу группы G, что фактор-группа $G/O^\pi(G)$ является π-группой.

Для доказательства основного результата, мы будем использовать также свойства холловских θ-баз.

Определение 2.7. Пусть θ – некоторая конечная система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел: $\theta = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k\}$. Множество подгрупп

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3, \quad \dots, \quad H_k \tag{2.1}$$

называется (см. [8]) *холловской* θ*-базой группы* G, если эти подгруппы удовлетворяют следующим условиям:

1) H_i, $i = 1, 2, \dots, k$, – холловская π_i-подгруппа группы G;
2) подгруппы (2.1) попарно перестановочны.

Лемма 2.8 (см. [8; теорема 1]). *Пусть* G *–* π*-разрешимая группа,* $\overline{\pi}$ *– множество простых делителей порядка группы* G, *не принадлежащих* π, *множество* $\theta = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k\}$ *есть произвольная конечная система попарно непересекающихся подмножеств* π_1, π_2, π_3, $\dots$, π_k *множества простых чисел, удовлетворяющая следующему условию: либо все пересечения* $\pi_i \cap \overline{\pi} = \varnothing$, $i = 1, 2, \dots, k$, *либо в* θ *существует такое* π_s, *что* $\overline{\pi} \subseteq \pi_s$.

Тогда группа G *содержит по крайней мере одну холловскую* θ*-базу и любые две холловские* θ*-базы сопряжены между собой.*

3. Инъекторы для π-насыщенных множеств Фиттинга. Настоящий пункт посвящен доказательству существования и сопряженности инъекторов для π-насыщенного множества Фиттинга π-разрешимой группы.

Определение 3.1. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G назовем *π-насыщенным*, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^{\pi'}(H) \in \mathscr{F}$, справедливо $H \in \mathscr{F}$.

Мы будем использовать понятие строгой π-замкнутости π-подгрупп в группе и некоторые его свойства.

Определение 3.2. Пусть G – группа, π – некоторое множество простых чисел и H_0 является такой π-подгруппой группы G, что $H_0 \leqslant H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Подгруппу H_0 назовем *строго π-замкнутой подгруппой в H относительно G*, если $H_0^g \cap H \leqslant H_0$ для всех $g \in G$.

Заметим, что понятие строгой замкнутости (π-замкнутости для $\pi = \{p\}$) было определено в работе [7].

Докажем свойства строгой π-замкнутости подгрупп, аналогичные свойствам строгой замкнутости из работы [7], которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 3.3. *Пусть G – группа, π – некоторое множество простых чисел и H_0 является такой π-подгруппой группы G, что $H_0 \leqslant H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Если H_0 строго π-замкнута в H относительно G, то справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H_0 \leqslant H^x$ для некоторого элемента $x \in G$, то подгруппа H_0 строго π-замкнута в H^x относительно G*;
2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то подгруппа H_0N/N строго π-замкнута в HN/N относительно G/N*;
3) *H_0^x строго π-замкнута в H^x относительно G.*

Доказательство. 1) Из условия $H_0 \leqslant H^x$ следует, что $H_0^{x^{-1}} \leqslant H$. Тогда ввиду определения строгой π-замкнутости

$$H_0^{x^{-1}} = H_0^{x^{-1}} \cap H \leqslant H_0.$$

Следовательно, $x \in N_G(H_0)$. Так как для любого элемента $g \in G$ справедливо

$$H_0^g \cap H^x = (H_0^{gx^{-1}} \cap H)^x \leqslant H_0^x = H_0,$$

то H_0 строго π-замкнута в H^x относительно G.

2) Заметим, что для любого элемента $g \in G$ существует такой элемент $x \in N$, для которого

$$H_0^g \cap HN = H_0^g \cap H^x = (H_0^{gx^{-1}} \cap H)^x \leqslant H_0^x \leqslant H_0N.$$

Отсюда следует, что H_0N/N строго π-замкнута в HN/N относительно G/N.

3) Для любого элемента $g \in G$ выполняется включение $H_0^g \cap H \leqslant H_0$. Но

$$(H_0^g \cap H)^x = H_0^{gx} \cap H^x \leqslant H_0^x.$$

Тогда ввиду произвольности выбора g H_0^x строго π-замкнута в H^x относительно G.

Лемма 3.4. *Пусть G – π-разрешимая группа и H_0 строго π-замкнута в $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ относительно G. Тогда существует такая нормальная подгруппа N группы G, что $N \cap H = H_0$.*

Доказательство проведем методом индукции по порядку группы. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна и M – неединичная нормальная подгруппа группы G. Через $\overline{K}$ будем обозначать подгруппу KM/M факторгруппы $\overline{G}=G/M$. Тогда по утверждению 2 леммы 3.3 подгруппа $\overline{H}_0$ будет строго π-замкнутой в $\overline{H}$ относительно $\overline{G}$. Из того, что $|M|>1$, следует $|\overline{G}|<|G|$. Тогда по индукции в $\overline{G}$ найдется такая нормальная подгруппа $\overline{L}$, что $\overline{L} \cap \overline{H} = \overline{H}_0$. Следовательно, в группе G найдется такая нормальная подгруппа L, что $LM \cap HM = H_0M$. Применяя тождество Дедекинда, имеем

$$LM \cap H = LM \cap HM \cap H = H_0M \cap H = H_0(M \cap H).$$

Это означает, что в G найдется такая нормальная подгруппа N, для которой выполнено $N \cap H = H_0(M \cap H)$.

Пусть $O_{\pi'}(G) \neq 1$ и $M = O_{\pi'}(G)$. Тогда

$$N \cap H = H_0(O_{\pi'}(G) \cap H).$$

Так как H является π-подгруппой, а $O_{\pi'}(G)$ – π'-подгруппой, то $O_{\pi'}(G) \cap H = 1$. Следовательно, $N \cap H = H_0$ и в этом случае лемма верна.

Предположим, что $O_\pi(G) \cap H_0 \neq 1$. Значит, можно считать, что $M = O_\pi(G) \cap H_0$. Тогда

$$N \cap H = H_0(O_\pi(G) \cap H_0 \cap H) = H_0$$

и лемма верна.

Пусть теперь $O_{\pi'}(G) = 1$ и $O_\pi(G) \cap H_0 = 1$. Тогда $H_0 \leqslant C_G(O_\pi(G))$. Заметим, что по лемме 2.6 справедливо включение $C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G)$. Так как $O_{\pi'}(G) = 1$, то $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$. Следовательно,

$$H_0 \leqslant C_G(O_\pi(G)) \leqslant O_\pi(G), \qquad H_0 = O_\pi(G) \cap H_0 \neq 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Следствие 3.5 (см. [7]). *Пусть G – π-разрешимая группа и P_0 строго замкнута в $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ относительно G для некоторого простого числа p из π. Тогда в G существует такая нормальная подгруппа N, что $N \cap P = P_0$.*

Лемма 3.6. *Пусть группа G π-разрешима, π_1 – подмножество множества π и подгруппа H_0 строго π_1-замкнута в $H \in \mathrm{Hall}_{\pi_1}(G)$ относительно G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если группа L_0 строго π'-замкнута в $L \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(G)$ относительно G, то существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что*

$$H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s;$$

2) *если π_2 – такое подмножество множества π, что либо $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, либо $\pi_1 = \pi_2$, а подгруппа L_0 строго π_2-замкнута в $L \in \mathrm{Hall}_{\pi_2}(G)$ относительно G, то существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что $H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s$.*

Доказательство. 1) Пусть группа L_0 строго π'-замкнута в $L \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(G)$ относительно G и $\theta = \{\pi_1, \pi'\}$. Заметим, что при таком выборе множества θ по лемме 2.8 в группе G существует по крайней мере одна холловская θ-база. В силу сопряженности холловых подгрупп в группе G найдутся такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что H^s и L^t будут принадлежать холловской θ-базе. Значит, $H^s L^t = L^t H^s$. Тогда ввиду утверждения 3 леммы 3.3 и леммы 3.4 существуют такие нормальные подгруппы N и M из G, что $N \cap H^s = H_0^s$ и $M \cap L^t = L_0^t$. Следовательно, произведение

$$H_0^s L_0^t = (N \cap H^s)(M \cap L^t) \subseteq NL^t \cap H^s M \cap H^s L^t.$$

Так как $N \cap H^s = H_0^s$, то $H_0^s \in \mathrm{Hall}_{\pi_1}(N)$. Тогда из $L^t \in \mathfrak{E}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{E}_{\pi_1'}$ следует $|NL^t| = |H_0^s| \cdot l$, где l – π_1'-число. Аналогично, $|H^s M| = |L_0^t| \cdot m$, где m – π-число. Ввиду того, что $|NL^t \cap H^s M \cap H^s L^t|$ делит числа $|NL^t|$, $|H^s M|$ и $|H^s L^t|$, получаем

$$|NL^t \cap H^s M \cap H^s L^t| \leqslant |H_0^s| \cdot |L_0^t| = |H_0^s L_0^t|.$$

Следовательно, $NL^t \cap H^s M \cap H^s L^t = H_0^s L_0^t$ и $H_0^s L_0^t$ является подгруппой группы G. Этот факт завершает доказательство утверждения 1).

2) Пусть группа L_0 строго π_2-замкнута в $L \in \mathrm{Hall}_{\pi_2}(G)$ относительно G и $\pi_2 \subseteq \pi$. Рассмотрим два случая.

a) *Случай* $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Пусть $\theta = \{\pi_1, \pi_2\}$. Тогда по лемме 2.8 в группе G существует по крайней мере одна холловская θ-база. Как и при доказательстве утверждения 1), найдутся такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что H^s и L^t будут принадлежать холловской θ-базе и $H^s L^t = L^t H^s$. Далее, с учетом равенства $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, следуя доказательству утверждения 1) настоящей леммы, нетрудно показать, что

$$NL^t \cap H^s M \cap H^s L^t = H_0^s L_0^t.$$

Значит, $H_0^s L_0^t$ является подгруппой группы G и $H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s$.

b) *Случай* $\pi_1 = \pi_2$. В силу сопряженности холловых π_1-подгрупп в группе G найдутся такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что $H^s = L^t = \overline{H}$. Тогда ввиду утверждения 3 леммы 3.3 и леммы 3.4 существуют такие нормальные подгруппы N и M из G, что $N \cap \overline{H} = H_0^s$ и $M \cap \overline{H} = L_0^t$. Следовательно, по лемме 4.1 [9]

$$H_0^s L_0^t = (N \cap \overline{H})(M \cap \overline{H}) = NM \cap \overline{H}.$$

Значит, $H_0^s L_0^t$ является подгруппой группы G и $H_0^s L_0^t = L_0^t H_0^s$.

Следствие 3.7 (см. [7]). *Пусть G – π-разрешимая группа, p, q – простые числа из π и группа P_0 строго замкнута в $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ относительно G, а группа Q_0 строго замкнута в $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ относительно G. Тогда существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что*

$$P_0^s Q_0^t = Q_0^t P_0^s.$$

Следствие 3.8. *Пусть G является π-разрешимой группой и $p \in \pi$. Если группа P_0 строго замкнута в $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ относительно G и H_0 строго π'-замкнута в $H \in \mathrm{Hall}_{\pi'}(G)$ по отношению к G. Тогда существуют такие элементы $s \in G$ и $t \in G$, что*

$$P_0^s H_0^t = H_0^t P_0^s.$$

Ключевым свойством для доказательства основного результата работы является

Лемма 3.9. *Пусть G – π-разрешимая группа и $\mathscr{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга группы G. Пусть N – такая подгруппа группы G, что G/N является либо π'-группой либо нильпотентной π-группой. Если W – $\mathscr{F}$-максимальная подгруппа группы N и V_1, V_2 – такие $\mathscr{F}$-максимальные подгруппы G, что $W \leqslant V_1 \cap V_2$, то подгруппы V_1 и V_2 сопряжены в G.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Заметим, что $W = V_1 \cap N = V_2 \cap N$ и $V_i \leqslant N_G(W)$ для $i \in \{1, 2\}$. Легко видеть, что для группы $N_G(W)$ выполняются условия леммы. Если $N_G(W) < G$, то для $N_G(W)$ лемма верна по индукции. В этом случае очевидно, что лемма верна и для группы G. Таким образом, мы можем предположить $N_G(W) = G$, т.е. $W \trianglelefteq G$. Значит,

$$V_i/W = V_i/V_i \cap N \cong V_iN/N \leqslant G/N \qquad \text{для} \quad i \in \{1, 2\}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: *G/N является π'-группой.* В данном случае V_i/W является π'-группой. Следовательно, в факторгруппе G/W существуют такие холловы π'-подгруппы H_i/W, что $V_i/W \leqslant H_i/W$. Из того, что H_i/W являются π'-подгруппами и $W \trianglelefteq G$, следует, что $O^{\pi'}(H_i) \trianglelefteq W$. Значит, $O^{\pi'}(H_i) \in \mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}$ является π-насыщенным множеством Фиттинга группы G, то $H_i \in \mathscr{F}$. Тогда в силу $\mathscr{F}$-максимальности V_i можно заключить, что $V_i = H_i$, и сопряженность V_1 и V_2 следует из сопряженности холловых π'-подгрупп.

Случай 2: *G/N является нильпотентной π-группой.* В этом случае из $\mathscr{F}$-максимальности W в N и π-насыщенности $\mathscr{F}$ следует, что N/W также является π-группой. Следовательно, ввиду изоморфизма

$$G/N \cong G/W/N/W$$

получаем, что G/W является разрешимой π-группой, и доказательство в точности аналогично доказательству леммы VIII.2.8 из [4].

Основной результат работы – следующая

Теорема 3.10. *Пусть G – π-разрешимая группа и $\mathscr{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга G. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Доказательство. Докажем теорему методом индукции по порядку группы для всех пар $(G,\ \mathscr{F})$, удовлетворяющих условиям теоремы. Пусть G – контрпример минимального порядка и M – максимальная нормальная подгруппа G. Так как группа G π-разрешима, то факторгруппа G/M является либо π'-группой, либо элементарной абелевой p-группой для некоторого простого $p \in \pi$. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1: *G/M является π'-группой для каждой максимальной нормальной подгруппы M из G.* По предположению индукции в M существуют $\mathscr{F}$-инъекторы. Пусть V_1 – $\mathscr{F}$-инъектор группы M и $\overline{V}_1$ – такая $\mathscr{F}$-максимальная подгруппа группы G, что $V_1 \leqslant \overline{V}_1$. Покажем, что $\overline{V}_1 \cap N$ является $\mathscr{F}$-инъектором группы N для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G.

По индукции в группе N существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Пусть V_2 – $\mathscr{F}$-инъектор группы N и $\overline{V}_2$ – такая максимальная $\mathscr{F}$-подгруппа группы G, что $V_2 \leqslant \overline{V}_2$. Из сопряженности инъекторов в M и N, а также в $M \cap N$, следует, что

$$W = V_1 \cap M \cap N = V_2 \cap M \cap N.$$

Тогда $W \leqslant \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$. Так как в данном случае $G/M \cap N$ является π'-группой, то по лемме 3.9 существует такой элемент $x \in G$, что $\overline{V}_1^x = \overline{V}_2$. Следовательно,

$$(\overline{V}_1 \cap N)^x = \overline{V}_1^x \cap N = \overline{V}_2 \cap N = V_2.$$

Теперь из сопряженности $\mathscr{F}$-инъекторов в N получаем, что $\overline{V}_1 \cap N$ является $\mathscr{F}$-инъектором группы N для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G. Следовательно, подгруппа $\overline{V}_1$ является $\mathscr{F}$-инъектором группы G, и существование $\mathscr{F}$-инъекторов в G доказано.

Докажем теперь сопряженность $\mathscr{F}$-инъекторов группы G. Пусть V_1 и V_2 – $\mathscr{F}$-инъекторы G. Тогда подгруппы $V_1 \cap M$ и $V_2 \cap M$ являются $\mathscr{F}$-инъекторами группы M. Следовательно, по индукции существует такой элемент x из группы M, что

$$(V_1 \cap M)^x = V_1^x \cap M = V_2 \cap M.$$

Пусть

$$W = V_1^x \cap M = V_2 \cap M.$$

Тогда, V_1^x и V_2 – $\mathscr{F}$-максимальные подгруппы G, содержащие W. Кроме того, подгруппа W – $\mathscr{F}$-инъектор группы M. Следовательно, V_1^x и V_2 сопряжены в G, и теорема в случае 1 доказана.

Случай 2. *Существует такая максимальная нормальная подгруппа M из G, что G/M является p-группой для некоторого числа $p \in \pi$.* В этом случае $O^p(G) < G$. Если $O^p(G) = 1$, то группа G разрешима и теорема верна ввиду леммы 2.3. Пусть $O^p(G) \neq 1$. Тогда по индукции в группе $O^p(G)$ существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Если подгруппа S является $\mathscr{F}$-инъектором группы $O^p(G)$, то для $g \in G$ подгруппа S^g – $\mathscr{F}$-инъектор группы $O^p(G)$. Применяя снова индукцию, получаем, что $S^g = S^h$ для некоторого элемента $h \in O^p(G)$. По лемме Фраттини $G = N_G(S)O^p(G)$. Следовательно, если P является силовской p-подгруппой $N_G(S)$, то $G = PO^p(G)$.

Пусть R – подгруппа, порожденная $\mathscr{F}$-подгруппами группы PS, содержащими S. Так как любая такая подгруппа является субнормальной в PS, то $R \in \mathscr{F}$.

Пусть T является такой $\mathscr{F}$-подгруппой группы G, что S содержится в T. Заметим, что $T \cap O^p(G)$ является $\mathscr{F}$-подгруппой. Из $\mathscr{F}$-максимальности S в $O^p(G)$ следует $S = T \cap O^p(G)$. Следовательно, $T \leqslant N_G(S)$. Итак, любая силовская p-подгруппа группы T сопряжена в $N_G(S)$ с подгруппой P. Так как факторгруппа

$$T/S = T/T \cap O^p(G) \cong TO^p(G)/O^p(G)$$

является p-группой, то T сопряжена с подгруппой вида P_0S в $N_G(S)$, для некоторой подгруппы P_0 из P. Следовательно, все расширения S из $\mathscr{F}$ сопряжены в $N_G(S)$ с подгруппами группы R. В частности, если в G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы, то они сопряжены с R.

Итак, для завершения доказательства теоремы осталось показать, что R является $\mathscr{F}$-инъектором группы G. Так как подгруппа R $\mathscr{F}$-максимальна в G, то достаточно выяснить, что R содержит $\mathscr{F}$-инъектор подгруппы L для любой максимальной нормальной подгруппы L в G.

Так как группа G π-разрешима, то либо $|G:L|=q$ для некоторого простого числа $q\in\pi$, либо $|G:L|$ является π'-числом.

Пусть T – $\mathscr{F}$-инъектор группы L. Подгруппы

$$T\cap L\cap O^p(G)=T\cap O^p(G) \qquad \text{и} \qquad S\cap L\cap O^p(G)=S\cap L$$

являются $\mathscr{F}$-инъекторами нормальной подгруппы $L\cap O^p(G)$. Следовательно, они сопряжены в $L\cap O^p(G)$. Выберем группу T таким образом, что

$$T\cap O^p(G)=L\cap S=U.$$

Рассмотрим отдельно следующие две возможности.

Случай 2.1. *Индекс* $|G:L|$ *является* π'*-числом.* Пусть $P_1\in \mathrm{Syl}_p(T)$, и пусть $H_1\in \mathrm{Hall}_{\pi'}(S)$. Заметим, что группа

$$T/U=T/T\cap O^p(G)\cong TO^p(G)/O^p(G)$$

является p-группой, а группа

$$S/U=S/S\cap L\cong SL/L$$

является π'-группой. Следовательно, $T=P_1U$ и $S=H_1U$. Так как S и T подгруппы $N_G(U)$, то существуют такая силовская подгруппа P и холлова π'-подгруппа H группы $N_G(U)$, что $P_1\leqslant P$ и $H_1\leqslant H$. Если $g\in N_G(U)$, то

$$(H_1^g\cap H)U\leqslant S^g\in\mathscr{F}.$$

Так как HU/U является π'-группой, то $\langle H_1^g\cap H, H_1\rangle U/U$ также является π'-группой. Теперь из π-насыщенности множества Фиттинга и $U\trianglelefteq HU$ следует, что группа $\langle H_1^g\cap H, H_1\rangle U$ является $\mathscr{F}$-подгруппой HU. Значит,

$$S\leqslant \langle H_1^g\cap H, H_1\rangle U\leqslant\langle S^g,S\rangle\leqslant O^p(G).$$

Из $\mathscr{F}$-максимальности S в $O^p(G)$ получаем $H_1^g\cap H\leqslant H_1$. Таким образом, H_1 строго π'-замкнута в H относительно $N_G(U)$. Легко видеть, что $(P_1^g\cap P)U$ и $T=P_1U$ являются субнормальными подгруппами группы PU, и поэтому $\langle P_1^g\cap P, P_1\rangle U$ является $\mathscr{F}$-подгруппой PU. Тогда

$$T\leqslant\langle P_1^g\cap P, P_1\rangle U\leqslant\langle T^g,T\rangle\leqslant L$$

и ввиду $\mathscr{F}$-максимальности T в L имеем $P_1^g\cap P\leqslant P_1$. Таким образом, P_1 строго замкнута в P относительно $N_G(U)$. Отсюда по следствию 3.8 заключаем, что существует такой элемент $g\in N_G(U)$, для которого произведение $P_1^gH_1$ является подгруппой группы $N_G(U)$.

Пусть подгруппа

$$K=P_1^gH_1U=(P_1U)^g(H_1U)=T^gS.$$

Тогда

$$K \cap O^p(G) = T^g S \cap O^p(G) = (T^g \cap O^p(G))S = (T \cap O^p(G))^g S = U^g S = US = S$$

и, аналогично, $K \cap L = T^g$. Следовательно, S и T^g являются нормальными $\mathscr{F}$-подгруппами группы K и поэтому $K \in \mathscr{F}$. Так как S содержится в K, то R содержит подгруппу, сопряженную с K. Следовательно, R содержит $\mathscr{F}$-инъектор подгруппы L, и теорема в случае 2.1) доказана.

Остается рассмотреть

Случай 2.2. Индекс $|G : L| = q$ для некоторого простого числа $q \in \pi$. Пусть $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(T)$ и $Q_1 \in \mathrm{Syl}_q(S)$. Заметим, что группа

$$T/U = T/T \cap O^p(G) \cong TO^p(G)/O^p(G)$$

является p-группой, а группа

$$S/U = S/S \cap L \cong SL/L$$

является q-группой. Тогда $T = P_1U$ и $S = Q_1U$. Так как S и T подгруппы $N_G(U)$, то существуют такие силовские подгруппы P и Q группы $N_G(U)$, что $P_1 \leqslant P$ и $Q_1 \leqslant Q$. Если $g \in N_G(U)$, то

$$(P_1^g \cap P)U \leqslant T^g \in \mathscr{F}.$$

Как и в случае 2.1, P_1 строго замкнута в P относительно $N_G(U)$ и Q_1 строго замкнута в Q относительно $N_G(U)$. По следствию 3.7 существует такой элемент $g \in N_G(U)$, что произведение $P_1^g Q_1$ является подгруппой группы $N_G(U)$.

Пусть подгруппа

$$K_2 = P_1^g Q_1 U = (P_1U)^g (Q_1U) = T^g S.$$

Тогда

$$K_2 \cap O^p(G) = T^g S \cap O^p(G) = (T^g \cap O^p(G))S = (T \cap O^p(G))^g S = U^g S = US = S.$$

Аналогично, можно показать, что $K_2 \cap L = T^g$. Следовательно, S и T^g являются нормальными $\mathscr{F}$-подгруппами группы K_2 и $K_2 \in \mathscr{F}$. Так как S содержится в K_2, то R содержит подгруппу сопряженную с K_2. Следовательно, R содержит $\mathscr{F}$-инъектор подгруппы L.

Следуя определению 3.1 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть *π-насыщенным*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$.

Следствие 3.11. *Пусть G – π-разрешимая группа и $\mathfrak{F}$ – π-насыщенный класс Фиттинга группы G. Тогда в группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Доказательство. Пусть

$$\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G) = \{H \leqslant G : H \in \mathfrak{F}\}.$$

Тогда $\mathscr{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга, причем множества $\mathscr{F}$-инъекторов и $\mathfrak{F}$-инъекторов группы G совпадают. Теперь существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-инъекторов G вытекает непосредственно из теоремы 3.10.

Группу G называют (см. [5; с. 251]) *π-замкнутой*, если она имеет нормальную холлову π-подгруппу, и *π-специальной*, если она имеет нормальную нильпотентную холлову π-подгруппу. Легко видеть, что класс всех π-замкнутых и класс всех π-специальных групп являются π-насыщенными классами Фиттинга. Поэтому справедливы

Следствие 3.12. *В любой π-разрешимой группе существует единственный класс сопряженных π-замкнутых инъекторов.*

Следствие 3.13. *В любой π-разрешимой группе существуют π-специальные инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Следствие 3.14 (см. [7; теорема 3]). *Если $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга разрешимой группы G, то в G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Следствие 3.15 (см. [1; теорема 1]). *Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и группа G разрешима, то в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

4. Инъекторы групп с π-разрешимой факторгруппой. В этом пункте работы мы расширяем известные результаты Шеметкова [2] и Баллестера-Болинше [6; теорема 2.4.27] о существовании и сопряженности $\mathscr{F}$-инъекторов группы G в предположении о том, что π-разрешима не сама группа G, а только ее факторгруппа по $\mathscr{F}$-радикалу.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G и $G/G_{\mathscr{F}}$ является π-разрешимой группой, где $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Доказательство. По лемме 2.5 множество

$$\mathscr{F}^* = \{H/G_{\mathscr{F}} : H \in \mathscr{F} \wedge G_{\mathscr{F}} \leqslant H\}$$

является множеством Фиттинга группы $G/G_{\mathscr{F}}$, а

$$\mathscr{F}_0 = \{S \leqslant G : SG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}^* \wedge S \trianglelefteq SG_{\mathscr{F}}\}$$

является множеством Фиттинга группы G.

Покажем вначале, что для любой субнормальной подгруппы K из G справедливо равенство $K_{\mathscr{F}} = K_{\mathscr{F}_0}$. Очевидно, $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}$ и $K_{\mathscr{F}_0} \leqslant K_{\mathscr{F}}$. Так как $K_{\mathscr{F}}G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$ и $K_{\mathscr{F}}G_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}^*$, то $K_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}_0$ и $K_{\mathscr{F}} \leqslant K_{\mathscr{F}_0}$. Значит, $K_{\mathscr{F}} = K_{\mathscr{F}_0}$.

Заметим, что $\sigma(\mathscr{F}^*) \subseteq \sigma(\mathscr{F})$ и $G/G_{\mathscr{F}}$ является π-разрешимой группой для $\pi = \sigma(\mathscr{F}^*)$. Теперь, применяя лемму 2.4, имеем, что в π-разрешимой группе $G/G_{\mathscr{F}}$ существует $\mathscr{F}^*$-инъектор $V/G_{\mathscr{F}}$. Следовательно, по лемме 2.5 V является $\mathscr{F}_0$-инъектором группы G. Докажем, что V – $\mathscr{F}$-инъектор группы G. Для этого нам достаточно выяснить, что для любой субнормальной подгруппы K из G подгруппа $K \cap V$ является $\mathscr{F}$-максимальной в K. Пусть существует такая подгруппа $W \in \mathscr{F}$, что $K \cap V \leqslant W \leqslant K$. Тогда

$$(K \cap V)G_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}} = (V/G_{\mathscr{F}}) \cap (KG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}}) \leqslant WG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}} \leqslant KG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}}.$$

Заметим, что $K \cap V$ является $\mathscr{F}_0$-инъектором группы K. Значит,

$$K_{\mathscr{F}} = K_{\mathscr{F}_0} \leqslant V \cap K \leqslant W$$

и поэтому $K_{\mathscr{F}} \leqslant W$. Теперь ввиду леммы 2.1 $K_{\mathscr{F}} = K \cap G_{\mathscr{F}}$ и, значит,

$$WG_{\mathscr{F}} \cap K = W(G_{\mathscr{F}} \cap K) = WK_{\mathscr{F}} = W.$$

Следовательно, W субнормальна в $WG_{\mathscr{F}}$ и $WG_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$, т.е. $WG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}^*$. Ввиду $\mathscr{F}$-максимальности $(V/G_{\mathscr{F}}) \cap (KG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}})$ в $KG_{\mathscr{F}}/G_{\mathscr{F}}$ справедливо равенство

$$(K \cap V)G_{\mathscr{F}} = WG_{\mathscr{F}}.$$

Следовательно,

$$K \cap V = (K \cap V)(G_{\mathscr{F}} \cap K) = (K \cap V)G_{\mathscr{F}} \cap K = WG_{\mathscr{F}} \cap K = W$$

и V является $\mathscr{F}$-инъектором группы G.

Докажем сопряженность инъекторов в G. Пусть V – $\mathscr{F}$-инъектор группы G. Тогда по утверждению 1 леммы 2.5 $V/G_{\mathscr{F}}$ является $\mathscr{F}^*$-инъектором группы $G/G_{\mathscr{F}}$. Но по лемме 2.4 $\mathscr{F}^*$-инъекторы группы $G/G_{\mathscr{F}}$ сопряжены, и поэтому $\mathscr{F}$-инъекторы группы G также сопряжены.

Следствие 4.2 (см. [2; теорема 2.2]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга π-разрешимой группы G, где $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Следствие 4.3 (см. [6; теорема 2.4.27]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G и $G/G_{\mathscr{F}}$ является разрешимой группой. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Следствие 4.4 (см. [10]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $G/G_{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая группа, где $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Следствие 4.5 (см. [11]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $G/G_{\mathfrak{F}}$ – разрешимая группа. Тогда в группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

В заключение отметим, что представляет интерес задача нахождения характеризаций $\mathscr{F}$-инъекторов для множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы посредсвом радикалов и холловских подгрупп, аналогичных характеризациям $\mathfrak{F}$-инъекторов для классов Фиттинга $\mathfrak{F}$, полученных в работах [12], [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley, "Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen", *Math. Z.*, **102**:5 (1967), 337–339.

[2] Л. А. Шеметков, "О подгруппах π-разрешимых групп", *Конечные группы*, Наука и техника, Минск, 1975, 207–212.

[3] W. Anderson, "Injectors in finite solvable groups", *J. Algebra*, **36**:3 (1975), 333–338.

[4] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[5] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[6] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Math. Appl. (Springer), **584**, Springer, Dordrecht, 2006.

[7] I. Hawthorn, “The existence and uniqueness of injectors for fitting sets of solvable groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:8 (1998), 2229–2230.

[8] П. А. Гольберг, “Холловские θ-базы конечных групп”, *Изв. вузов. Матем.*, 1961, № 1, 36–43.

[9] С. Н. Воробьёв, Е. Н. Залесская, “Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:5 (2013), 989–999.

[10] W. Guo, “Injector of finite groups”, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, **18**:2 (1997), 145–148.

[11] В. Г. Сементовский, “Инъекторы конечных групп”, *Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1984, 166–170.

[12] W. Guo, N. T. Vorob’ev, “On injectors of finite soluble groups”, *Comm. Algebra*, **36**:9 (2008), 3200–3208.

[13] Y. Liu, W. Guo, N. T. Vorob’ev, “Description of $\mathfrak{F}$-injectors of Finite Soluble Groups”, *Math. Sci. Res. J.*, **12**:1 (2008), 17–22.

Н. Т. Воробьёв
Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Беларусь
E-mail: vorobyovnt@tut.by

Поступило
29.07.2013
Исправленный вариант
23.04.2014

М. Г. Семёнов
Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Беларусь
E-mail: mg-semenow@mail.ru