УДК 517.587

Ю. В. ТРУБНИКОВ, И. А. ОРЕХОВА

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 20.12.2013)

Построение экстремальных полиномов в комплексной плоскости является весьма важной задачей не только с теоретической точки зрения, но и в приложениях, в частности, при построении оптимальных итерационных процессов высоких порядков для линейных операторов в банаховых пространствах [1].

Под экстремальными полиномами понимаются точные и приближенные полиномы типа Чебышева, определенные на различных множествах действительной прямой или комплексной плоскости. Такие полиномы применяются для решения самых различных задач: аппроксимации потенциалов в небесной механике, проектировании электрических фильтров, построении оптимальных итерационных процессов и т. д. Основными теоретическими методами доказательства экстремальности полиномов в комплексных областях являются методы, основанные на критериях А. Н. Колмогорова (1948) [2] или В. К. Иванова, Е. Я. Ремеза (1953) [3]. В настоящей статье принят метод доказательства экстремальности, основанный на критерии экстремальности, который изложен в монографии [4]. Ю. В. Трубниковым были построены экстремальные полиномы комплексного аргумента, заданные на квадрате комплексной плоскости до шестой степени включительно, непосредственно обобщающие полиномы Чебышева [5]. Авторами данной статьи ранее были получены результаты, связанные с доказательством одного из случаев построения экстремальных полиномов третьей степени комплексного аргумента, заданного на прямоугольнике, смещенном по оси абсцисс [6].

В данной работе рассматривается одно из самых естественных обобщений на комплексный случай полиномов Чебышева, т. е. задача нахождения кубического полинома вида

$$z^3 + az^2 + bz + c$$

комплексного аргумента z, заданного на прямоугольнике D с вершинами в точках $w + hi$, $-w + hi$, $-w - hi$, $w - hi$ ($w > 0$, $h > 0$), имеющего минимальную чебышевскую норму (экстремального полинома).

Приведем для удобства читателя соответствующий результат для полиномов второй степени. Обозначим $s = h/w$.

Т е о р е м а 1 [5]. *При выполнении неравенства* $0 \le s \le 1/2$ *экстремальным является полином*

$$P_*(z) = z^2 - \frac{w^2}{2} - h^2,$$

при этом

$$\|P_*\| = \frac{w^2}{2} + 2h^2;$$

если $1/2 \le s \le 2$, *то*

$$P_*(z) = z^2 - w^2 + h^2,$$

при этом

$$\|P_*\| = 2wh;$$

и, наконец, если s > 2, то

$$P_*(z) = z^2 + w^2 + \frac{h^2}{2},$$

$$\|P_*\| = 2w^2 + \frac{h^2}{2}.$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *При выполнении неравенства* $0 \le s \le \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right)$ *экстремальным является полином*

$$P_*(z) = z^3 - \frac{3\left(w^2 + h^2\right)^2}{4\left(w^2 - 3h^2\right)} \cdot z, \tag{1}$$

а его норма $\|P_*\|$ *равна*

$$\|P_*\| = \frac{1}{4} \cdot \frac{w^3\left(1 + 9s^2\right)\left(1 + s^2\right)^{3/2}}{1 - 3s^2} \qquad \left(s = \frac{h}{w}\right). \tag{2}$$

Если

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right) \le s \le 1, \tag{3}$$

то

$$P_* = z^3 - \left(w^2 - h^2\right)z, \tag{4}$$

$$\|P_*\| = 2w^3 s\left(1 + s^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Далее при выполнении неравенства

$$1 \le s \le \sqrt{7} + 2 \tag{6}$$

имеем

$$P_* = z^3 + \left(w^2 - h^2\right)z, \tag{7}$$

$$\|P_*\| = \frac{2h^3\left(1 + s^2\right)^{1/2}}{s^2}; \tag{8}$$

и, наконец, если

$$\sqrt{7} + 2 \le s < \infty, \tag{9}$$

то

$$P_*(z) = z^3 + \frac{3\left(w^2 + h^2\right)^2}{4\left(h^2 - 3w^2\right)} \cdot z, \tag{10}$$

$$\|P_*\| = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^3\left(s^2 + 9\right)\left(s^2 + 1\right)^{3/2}}{s^3\left(s^2 - 3\right)}. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся субдифференциальным критерием оптимальности [7]. В соответствии с алгоритмом, основанном на субдифференциальном критерии оптимальности, прежде всего необходимо найти систему e-точек (т. е. точек, в которых $\left|P(z)\right| = \|P\|$) полинома (1).

Так как по теореме о максимуме модуля аналитической функции максимум модуля достигается на границе области, то при $y = h$ получаем:

$$\left|P_*\left(x+hi\right)\right|^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{w^6 s^2\left(1+10s^2-9s^4\right)^2}{\left(1-3s^2\right)^2}+$$

$$+\frac{3}{16}\cdot\frac{w^4\left(1+6s^2+21s^4\right)\left(3-6s^2+7s^4\right)}{\left(1-3s^2\right)^2}\cdot t-\frac{3}{2}\cdot\frac{w^2\left(1+7s^4\right)}{1-3s^2}\cdot t^2+t^3 \quad \left(t=x^2\right). \tag{12}$$

Изучим поведение функции (12) по переменной t ($0 \le t \le w^2$).

Так как

$$\frac{d\left(\left|P_*\left(x+hi\right)\right|^2\right)}{dt}=\frac{3}{16}\cdot\frac{w^4\left(1+6s^2+21s^4\right)\left(3-6s^2+7s^4\right)}{\left(1-3s^2\right)^2}-3\cdot\frac{w^2\left(1+7s^4\right)}{1-3s^2}\cdot t+3t^2,$$

то, решая квадратное уравнение

$$\frac{d\left(\left|P_*\left(x+hi\right)\right|^2\right)}{dt}=0,$$

получаем, что его корни

$$t_1=\frac{w^2\left(3-6s^2+7s^4\right)}{4\left(1-3s^2\right)}, \quad t_2=\frac{w^2\left(1+6s^2+21s^4\right)}{4\left(1-3s^2\right)}.$$

Заметим, что при выполнении условия

$$0 \le s \le \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{7}-2\right) \approx 0{,}215249 \tag{13}$$

имеет место неравенство

$$t_2 < t_1.$$

Действительно, неравенство

$$1+6s^2+21s^4 < 3-6s^2+7s^4$$

эквивалентно неравенству

$$0 < 2-12s^2-14s^4$$

или, что то же самое, неравенству

$$7s^4+6s^2-1<0. \tag{14}$$

Неравенство (14) выполняется при

$$s \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right),$$

т. е. тем более и при

$$s \in \left[0, \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right].$$

Таким образом, локальный максимум квадрата модуля $\left|P\left(x+hi\right)\right|^2$ достигается при

$$x_2=\frac{w}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+6s^2+21s^4}{1-3s^2}}. \tag{15}$$

Подставляя значение (14) в выражение (12), получаем:

$$\left|P\left(x_2+hi\right)\right|^2=\frac{1}{16}\cdot\frac{w^6\left(1+9s^2\right)\left(1+s^2\right)^3}{\left(1-3s^2\right)^2}. \tag{16}$$

Кроме того, возможен краевой максимум, так как при выполнении условия (13) имеет место неравенство

$$t_1=\frac{w^2\left(3-6s^2+7s^4\right)}{4\left(1-3s^2\right)}<w^2.$$

При подстановке значения $x = w$ в правую часть равенства (12) получаем тот же самый результат

$$\left|P_*\left(w+hi\right)\right|^2=\frac{1}{16}\cdot\frac{w^6\left(1+9s^2\right)\left(1+s^2\right)^3}{\left(1-3s^2\right)^2}. \tag{17}$$

Таким образом, в восьми точках

$$z_1=w+hi,\quad z_2=\sqrt{t_2}+hi,\quad z_3=-\sqrt{t_2}+hi,\quad z_4=-w+hi,$$
$$z_5=-w-hi,\quad z_6=-\sqrt{t_2}-hi,\quad z_7=\sqrt{t_2}-hi,\quad z_8=w-hi$$

выполняется равенство

$$\left|P_*\left(z_j\right)\right|=\left\|P_*\right\| \qquad \left(j=1,2,...,8\right).$$

Далее в соответствии с алгоритмом [7] нам необходимо построить функционал μ, обладающий свойствами

$$\operatorname{Re}\langle\mu,\mathrm{const}\rangle=0,\qquad \operatorname{Re}\langle\mu,z\rangle=0,$$
$$\operatorname{Re}\left\langle\mu,z^2\right\rangle=0,\qquad \operatorname{Re}\langle\mu,P_*\rangle=\left\|P_*\right\|,\qquad \|\mu\|=1,$$

где скобки $\langle\mu,\varphi\rangle$ обозначают значение функционала μ на функции φ. Существование такого линейного функционала гарантирует экстремальность полинома P_*.

Для этого найдем значения Re $P_*(z_j)$, Im $P_*(z_j)$ $(1 \le j \le 4)$ в четырех точках:

$$\operatorname{Re}P_*\left(z_1\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{w^3\left(1-30s^2+33s^4\right)}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Im}P_*\left(z_1\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{w^3s\left(3-8s+3s^2\right)\left(3+8s+3s^2\right)}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Re}P_*\left(z_2\right)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{w^3\left(1+9s^2\right)\sqrt{\left(1-3s^2\right)\left(1+6s^2+21s^4\right)}}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Im}P_*\left(z_2\right)=\frac{2w^3s^3\left(1+9s^2\right)}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Re}P_*\left(z_3\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{w^3\left(1+9s^2\right)\sqrt{\left(1-3s^2\right)\left(1+6s^2+21s^4\right)}}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Im}P_*\left(z_3\right)=\frac{2w^3s^3\left(1+9s^2\right)}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Re} P_*(z_4) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{w^3\left(1-30s^2+33s^4\right)}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Im} P_*(z_4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{w^3 s\left(3-8s+3s^2\right)\left(3+8s+3s^2\right)}{1-3s^2}.$$

После нахождения этих значений записываем уравнения:

$$\|P_*\|\cdot\operatorname{Re}\langle\mu,\mathrm{const}\rangle = \operatorname{Re}\left(r_1\overline{P}_*(z_1)x + r_2\overline{P}_*(z_2)x + r_3\overline{P}_*(z_3)x + r_4\overline{P}_*(z_4)x\right) = 0, \tag{18}$$

$$\|P_*\|\cdot\operatorname{Re}\langle\mu,z\rangle = \operatorname{Re}\Big(r_1\overline{P}_*(z_1)(w+hi) + r_2\overline{P}_*(z_2)\left(\sqrt{t_2}+hi\right) +$$
$$+ r_3\overline{P}_*(z_3)\left(-\sqrt{t_2}+hi\right) + r_4\overline{P}_*(z_4)(-w+hi)\Big) = 0, \tag{19}$$

$$\|P_*\|\cdot\operatorname{Re}\left\langle\mu,z^2\right\rangle = \operatorname{Re}\Big(r_1\overline{P}_*(z_1)(w+hi)^2 + r_2\overline{P}_*(z_2)\left(\sqrt{t_2}+hi\right)^2 +$$
$$+ r_3\overline{P}_*(z_3)\left(-\sqrt{t_2}+hi\right)^2 + r_4\overline{P}_*(z_4)(-w+hi)^2\Big) = 0, \tag{20}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1. \tag{21}$$

Существование положительного решения r_j (j = 1,2,3,4) системы уравнений (18)–(21) гарантирует экстремальность полинома P_*.

Решим систему уравнений (18)–(21) по правилу Крамера. Обозначив матрицу системы через M, а соответствующие матрицы для нахождения r_j через M_j (j = 1,2,3,4), получаем:

$$\det M = \frac{9}{128}\cdot\frac{xw^{12}\left(1+9s^2\right)\left(1-7s^2\right)^3\left(1+s^2\right)^2}{\left(1-3s^2\right)^3}\cdot\sqrt{\left(1-3s^2\right)\left(1+6s^2+21s^4\right)};$$

$$\det M_1 = \frac{3}{256}\cdot\frac{xw^{12}\left(1+9s^2\right)^2\left(1+s^2\right)^3\left(1+5s^2\right)\left(1-7s^2\right)^2}{\left(1-3s^2\right)^4}\cdot\sqrt{\left(1-3s^2\right)\left(1+6s^2+21s^4\right)};$$

$$\det M_2 = \frac{3}{128}\cdot\frac{xw^{12}\left(1+9s^2\right)\left(1+4s-3s^2\right)\left(1-4s-3s^2\right)\left(1-7s^2\right)^2\left(1+s^2\right)^3}{\left(1-3s^2\right)^4}\times$$
$$\times\sqrt{\left(1-3s^2\right)\left(1+6s^2+21s^4\right)};$$

$$\det M_3 = \frac{3}{128}\cdot\frac{xw^{12}\left(1+9s^2\right)\left(1+4s-3s^2\right)\left(1-4s-3s^2\right)\left(1-7s^2\right)^2\left(1+s^2\right)^3}{\left(1-3s^2\right)^4}\times$$
$$\times\sqrt{\left(1-3s^2\right)\left(1+6s^2+21s^4\right)};$$

$$\det M_4 = \frac{3}{256}\cdot\frac{xw^{12}\left(1+9s^2\right)\left(1+s^2\right)^3\left(1+5s^2\right)\left(1-7s^2\right)^2}{\left(1-3s^2\right)^4}\cdot\sqrt{\left(1-3s^2\right)\left(1+6s^2+21s^4\right)}.$$

Таким образом,

$$r_1 = r_4 = \frac{1}{6}\cdot\frac{\left(1+5s^2\right)\left(1+9s^2\right)}{\left(1-7s^2\right)\left(1-3s^2\right)};$$

$$r_2 = r_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(1 - 4s - 3s^2\right)\left(1 + 4s - 3s^2\right)}{\left(1 - 7s^2\right)\left(1 - 3s^2\right)}.$$

Очевидно, что при $s \in \left[0, \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right)\right)$ выполняются неравенства $r_j > 0$ (j = 1,2,3,4). Далее выясним, что происходит при

$$s = \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right) \approx 0,215249.$$

Уравнение

$$\frac{3\left(w^2 + h^2\right)^2}{4\left(w^2 - 3h^2\right)} = w^2 - h^2$$

приводится к виду

$$9s^4 - 22s^2 + 1 = 0,$$

и один из его корней

$$s_1 = \frac{1}{3}\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right).$$

То есть происходит непрерывное «переключение» на выражение для квадрата корня, равное $w^2 - h^2$.

Так как

$$\frac{3\left(w^2 + h^2\right)^2}{4\left(w^2 - 3h^2\right)} = \frac{3w^2\left(1 + s^2\right)^2}{4\left(1 - 3s^2\right)} \equiv g(s)$$

и

$$\frac{dg}{ds} = \frac{3}{2} \cdot \frac{w^2 s\left(1 + s^2\right)\left(5 - 3s^2\right)}{\left(1 - 3s^2\right)^2} > 0$$

при $s \in \left[0, \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right)\right)$, то при $s = \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right)$ удаление корней переходит в их сближение, и такое сближение продолжается на интервале $s \in \left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right), 1\right)$, т. е. до того значения $s = 1$, когда прямоугольник превратится в квадрат.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right) \le s \le 1$.

Построим функционал μ, принадлежащий субдифференциалу полинома (4) с требуемыми свойствами. В этом случае

$$\left|P_*(x + hi)\right|^2 = w^6 s^2 + w^4\left(4s^4 - 2s^2 + 1\right)t + w^2\left(5s^2 - 2\right)t^2 + t^3 \qquad \left(t = x^2\right). \tag{22}$$

Далее находим производную

$$\frac{d\left|P_*(x + hi)\right|^2}{dt} = 3t^2 + 2w^2\left(5s^2 - 2\right)t + w^4\left(4s^4 - 2s^2 + 1\right). \tag{23}$$

Решая уравнение

$$3t^2 + 2w^2\left(5s^2 - 2\right)t + w^4\left(4s^4 - 2s^2 + 1\right) = 0, \tag{24}$$

получаем корни

$$t_1 = \frac{w^2}{3}\left(2 - 5s^2 - \sqrt{1 - 14s^2 + 13s^4}\right),$$
$$t_2 = \frac{w^2}{3}\left(2 - 5s^2 + \sqrt{1 - 14s^2 + 13s^4}\right).$$

Если выполняется неравенство

$$13s^4 - 14s^2 + 1 \geq 0, \tag{25}$$

а это происходит при $s \in \left[\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\sqrt{13}}{13}\right]$, то локальный максимум выражения (22) достигается при $t = t_1$. Подставляя значение $x_1 = \sqrt{t_1}$ в правую часть равенства (22), получаем:

$$\left|P_*\left(x_1 + hi\right)\right|^2 = \frac{2w^6}{27}\left[2\left(s^2 - 1\right) + \sqrt{\left(1 - s^2\right)\left(1 - 13s^2\right)}\right] \times$$
$$\times \left[11s^4 - 10s^2 + 1 + \left(s^2 - 1\right)\sqrt{\left(1 - s^2\right)\left(1 - 13s^2\right)}\right] \qquad \left(x_1 = \sqrt{t_1}\right).$$

С другой стороны,

$$\left|P_*\left(w + hi\right)\right|^2 = 4w^6 s^2\left(1 + s^2\right).$$

Знак разности

$$q(s) \equiv \left|P_*\left(x_1 + hi\right)\right|^2 - \left|P_*\left(w + hi\right)\right|^2 \tag{26}$$

на интервале $s \in \left(\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\sqrt{13}}{13}\right)$ можно определить прямым вычислением значений функции (26). Так, например,

$$q(0{,}23) \approx -0{,}02w^6, \quad q(0{,}24) \approx -0{,}04w^6, \quad q(0{,}25) \approx -0{,}05w^6,$$
$$q(0{,}26) \approx -0{,}07w^6, \quad q(0{,}27) \approx -0{,}09w^6.$$

Этот факт означает, что равенство $\left|P_*(z)\right| = \left\|P_*\right\|$ достигается только в четырех точках $z_1 = w + hi,$ $z_2 = -w + hi,$ $z_3 = -w - hi,$ $z_4 = w - hi$. При $s \in \left(\frac{\sqrt{13}}{13}, 1\right)$ дискриминант $13s^4 - 14s^2 + 1$ становится отрицательным, т. е. тем более равенство $\left|P_*(z)\right| = \left\|P_*\right\|$ достигается только в точках z_j ($j = 1,2,3,4$).

Далее находим

$$\alpha_1 = \operatorname{Re} P_*\left(w + hi\right) = -2w^3 s^2, \quad \beta_1 = \operatorname{Im} P_*\left(w + hi\right) = 2w^3 s,$$
$$\alpha_2 = \operatorname{Re} P_*\left(-w + hi\right) = 2w^3 s^2, \quad \beta_2 = \operatorname{Im} P_*\left(-w + hi\right) = 2w^3 s,$$
$$\alpha_3 = \operatorname{Re} P_*\left(-w - hi\right) = 2w^3 s^2, \quad \beta_3 = \operatorname{Im} P_*\left(-w - hi\right) = -2w^3 s,$$
$$\alpha_4 = \operatorname{Re} P_*\left(w - hi\right) = -2w^3 s^2, \quad \beta_4 = \operatorname{Im} P_*\left(w - hi\right) = -2w^3 s.$$

Таким образом,

$$\left\|P_*\right\| \cdot \operatorname{Re}\left\langle \mu, \mathrm{const}\right\rangle = \operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{4} r_j\left(\alpha_j - \beta_j i\right)\left(x + yi\right)\right] = -2w^3 s^2\left(r_1 - r_2 - r_3 + r_4\right)x +$$
$$+2w^3 s\left(r_1 + r_2 - r_3 - r_4\right)y;$$
$$\left\|P_*\right\| \cdot \operatorname{Re}\left\langle \mu, z\right\rangle = \operatorname{Re}(r_1\left(\alpha_1 - \beta_1 i\right)\left(w + hi\right) + r_2\left(\alpha_2 - \beta_2 i\right)\left(-w + hi\right) +$$
$$+r_3\left(\alpha_3 - \beta_3 i\right)\left(-w - hi\right) + r_4\left(\alpha_4 - \beta_4 i\right)\left(w - hi\right)] = 0;$$

$$\|P_*\|\cdot \mathrm{Re}\left\langle \mu, z^2\right\rangle = \mathrm{Re}(r_1(\alpha_1-\beta_1 i)(w+hi)^2 + r_2(\alpha_2-\beta_2 i)(-w+hi)^2 +$$
$$+r_3(\alpha_3-\beta_3 i)(-w-hi)^2 + r_4(\alpha_4-\beta_4 i)(w-hi)^2) =$$
$$= 2w^5 s^2\left(1+s^2\right)(r_1-r_2-r_3+r_4),$$

т. е. система уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left\langle \mu, \mathrm{const}\right\rangle = 0, \\ \mathrm{Re}\left\langle \mu, z\right\rangle = 0, \\ \mathrm{Re}\left\langle \mu, z^2\right\rangle = 0, \\ \|\mu\| = 1 \end{cases}$$

приводится к виду

$$\begin{cases} r_1 - r_2 - r_3 + r_4 = 0, \\ r_1 + r_2 - r_3 + r_4 = 0, \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1. \end{cases}$$

Одним из решений такой системы является решение $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/4$. Тем самым экстремальность полинома (4) установлена.

При $\frac{h}{w} = s = 1$, т. е. в случае квадрата $P_*(z)=z^3$, кроме того, при $s > 1$ движение корней начинается по оси $0y$. Вторая часть теоремы вытекает из аналогичного расположения корней полинома на оси $0y$.

Результатом данной работы является сформулированная и доказанная теорема 2 о виде экстремального полинома третьей степени, заданного на симметричном относительно осей $0x$, $0y$, прямоугольнике комплексной плоскости, которая также отражает движение корней построенного экстремального полинома.

Литература

1. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. С. 96.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977. С. 47.
3. *Иоффе А. Д.* Теория экстремальных задач. М., 1974. С. 89.
4. *Трубников Ю. В.* Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями. М., 2002. С. 71.
5. *Трубников Ю. В.* // Таврич. вестн. информатики и математики. 2003. № 2. С. 45–56.
6. *Трубников Ю. В., Орехова И. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 13–22.
7. *Трубников Ю. В., Орехова И. А., Сунь Байюй* // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. 2012. № 6. С. 13–19.

Yu. V. TRUBNIKOV, I. A. OREHOVA

ON THE EXTREME THIRD-DEGREE POLYNOMIALS WITH COMPLEX ARGUMENT

Summary

The article deals with the construction of extreme third degree polynomial defined on a rectangle in the complex plane. The main theoretical methods prove extreme polynomials in complex domains are those based on the criteria of A. N. Kolmogorov (1948) and V. K. Ivanov – E. Y. Remez (1953). Extreme polynomials are used in the construction of optimal high-order iterative processes for linear bounded operators in a Banach space, with the region of spectrum localization in the rectangle.