УДК 512.542

М. Г. СЕМЕНОВ, Н. Т. ВОРОБЬЕВ

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ИНЪЕКТОРОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 03.03.2014)

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Одним из известных результатов в теории разрешимых групп является обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла, которое было получено Гашюцом, Фишером и Хартли в работе [1], где доказано, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга вытекает, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Ее называют $\mathfrak{F}$-радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором G, если для любой субнормальной подгруппы N группы G подгруппа $V \cap N$ является максимальной из подгрупп N, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Заметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi$ – класс всех π-групп, $\mathfrak{F}$-инъектор группы G – это силовская p-подгруппа G и холлова π-подгруппа E_π-группы G [2, с. 328, п. 7.2] соответственно. Очевидно, что каждый $\mathfrak{F}$-инъектор группы G содержит ее $\mathfrak{F}$-радикал. Примечателен тот факт, что Фишером [3] при помощи $\mathfrak{N}$-радикала разрешимой группы G, т. е. подгруппы Фиттинга $F(G)$, была найдена изящная характеризация $\mathfrak{N}$-инъекторов G ($\mathfrak{N}$ – класс Фиттинга всех нильпотентных групп). А именно, в работе [3] установлено, что множество всех нильпотентных инъекторов разрешимой группы G – это, в точности, множество всех максимальных нильпотентных подгрупп G, которые содержат подгруппу $F(G)$. Развивая данный результат, Хартли [4] показал, что для локальных классов Фиттинга вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга) подгруппа V группы G является $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-инъектором тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – нильпотентная подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{X}}$. Значительный прогресс в этом направлении исследований был достигнут в работе [5], где доказано, что для любого класса Хартли – класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ вида $\bigcap_{i \in I} h(\pi_i)\mathfrak{S}_{\pi_i'}\mathfrak{S}_{\pi_i}$ подгруппа V разрешимой группы G является $\mathfrak{H}$-инъектором тогда и только тогда, когда V/G_h – $\mathfrak{D}$-инъектор группы G/G_h, где $\mathfrak{D} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i'}\mathfrak{S}_{\pi_i}$ и $G_h = \prod_{i \in I} G_{h(\pi_i)}$. Более того, было установлено, что множество всех $\mathfrak{H}$-инъекторов группы G совпадает с множеством всех $\mathfrak{H}$-максимальных подгрупп G, содержащих ее $\mathfrak{H}$-радикал.

Заметим, что все указанные выше результаты об инъекторах ограничивались только случаем универсума $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп. Вместе с тем Иранцо и Торесс [6] (см. также [2, следствие 1 и замечание 7.2.32]) показали, что любая конечная p-разрешимая группа G обладает единственным классом сопряженных p-нильпотентных инъекторов и, кроме того, p-нильпотентные инъекторы G – это, в точности, те максимальные из p-нильпотентных подгрупп G, которые содержат ее p-нильпотентный радикал, т. е. подгруппу $F_p(G)$.

В настоящей работе мы усиливаем результаты Иранцо – Торесса из [6]. Нами, в частности, установлено, что $\mathfrak{H}$-инъекторы существуют и сопряжены для любого класса Хартли вида $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ лишь при ограничении p-разрешимости не самой группы, а только ее подходящей факторгруппы.

В качестве следствия, мы получаем основной результат работы [6] о существовании и сопряженности p-нильпотентных инъекторов в любой p-разрешимой группе и их характеризацию при помощи p-нильпотентного радикала.

1. Предварительные сведения. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведением называют класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=(G:G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H})$. Хорошо известно (см. [7, IX.1.12]), что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Пусть $\Sigma=\{\pi_i : i\in I\}$ – семейство таких попарно различных множеств простых чисел π_i, что $\pi=\bigcup_{i\in I}\pi_i$. Функцию h: $\Sigma\to$ $\{$классы Фиттинга$\}$ будем называть функцией Хартли или H-функцией [8]. Классом Хартли называют [5] класс Фиттинга $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ для некоторой H-функции h, где $\mathfrak{E}_{\pi_i}$ – класс всех π_i-групп и $\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ – класс всех π_i'-групп, а $\pi_i'=\mathbb{P}\backslash\pi_i$. В этом случае мы будем говорить, что $\mathfrak{H}$ определяется локально H-функцией h. В частности, если $\pi_i=\{p_i\}$ для всех $i\in I$ и $p_i\in\pi$, то H-функция h: $\pi\to$ $\{$классы Фиттинга$\}$ локально определяет класс Хартли вида $\bigcap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p$.

H-функцию h назовем приведенной, если $h(\pi_i)\subseteq\mathfrak{H}$ для всех i из I. Известно (см. [4]), что каждый класс Хартли определяется локально приведенной H-функцией.

Легко видеть, что классы Фиттинга $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ являются классами Хартли, так как они определяются H-функциями f и h такими, что $f(p)=(1)$ и $h(p)=\mathfrak{X}$ для всех $p\in\mathbb{P}$.

Мы будем использовать следующее известное свойство радикалов, которое представляет

Л е м м а 1 [9, IX.1.1]. *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G, то* $G_{\mathfrak{F}}\cap N=N_{\mathfrak{F}}$.

Напомним, что группу G называют [9, с. 251] p-нильпотентной, если она обладает нормальной p'-холловой подгруппой, и π-нильпотентной, если G является p-нильпотентной для всех $p\in\pi$.

Группу G называют $\mathfrak{F}$-скованной [2], если $C_G(G_{\mathfrak{F}})\subseteq G_{\mathfrak{F}}$. В частности, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}^{\pi}$ – класс Фиттинга всех π-нильпотентных групп, то группа G является $\mathfrak{N}$-скованной, если $C_G(F(G))\subseteq F(G)$ и $\mathfrak{N}^{\pi}$-скованной ($\mathfrak{N}^{p}$-скованной) в случае, когда $C_G(F_{\pi}(G))\subseteq F_{\pi}(G)$ ($C_G(F_p(G))\subseteq F_p(G)$) соответственно.

Известно (см. [9, следствие 4.1.2]), что каждая π-разрешимая (p-разрешимая) группа является $\mathfrak{N}^{\pi}$-скованной ($\mathfrak{N}^{p}$-скованной). В других обозначениях и определениях мы следуем [7, 9].

2. Классы Хартли и *h*-радикалы. Мы будем использовать локальное задание класса Хартли, которое представляет следующая лемма (см. также [10, лемма 2]).

Л е м м а 2. *Каждый класс Хартли $\mathfrak{H}=\bigcap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ определяется локально приведенной H-функцией h такой, что $h(p)\subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных p и q из π.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Хартли. Тогда для некоторой приведенной H-функции $\overline{h}$ и функция f такова, что $f(p)=\{G:G\cong H^{\mathfrak{E}_{p'}}(H\in\overline{h}(p))\}$ для всех $p\in\pi$.

Если $G\in f(p)$, то $G\cong H^{\mathfrak{E}_{p'}}$ для некоторой группы $H\in\overline{h}(p)$. Следовательно, $H^{\mathfrak{E}_{p'}}\in\overline{h}(p)$ и $G\in\overline{h}(p)$. Значит, $f(p)\subseteq\overline{h}(p)$ и справедливо включение $f(p)\mathfrak{E}_{p'}\subseteq\overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Докажем обратное включение. Пусть $G\in\overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда $G/G_{\overline{h}(p)}\in\mathfrak{E}_{p'}$ и $G^{\mathfrak{E}_{p'}}\in\overline{h}(p)$. Ввиду равенства

$(G^{\mathfrak{E}_{p'}})^{\mathfrak{E}_{p'}} = G^{\mathfrak{E}_{p'}}$, имеем $G^{\mathfrak{E}_{p'}} \in f(p)$. Следовательно, $G \in f(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Итак, мы показали справедливость равенства $f(p)\mathfrak{E}_{p'} = \overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}$.

Пусть теперь $h(p) = \mathrm{Fit}(f(p))$ для всех $p \in \pi$. Тогда $f(p) \subseteq h(p) \subseteq \overline{h}(p)$ и $h(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq \overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi$. Так как $f(p)\mathfrak{E}_{p'} = \overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}$, то $\mathrm{Fit}(f(p)\mathfrak{E}_{p'}) = \mathrm{Fit}(\overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}) = \overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Значит,

$$\overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'} = \mathrm{Fit}(f(p)\mathfrak{E}_{p'}) \subseteq \mathrm{Fit}(f(p))\mathfrak{E}_{p'} = h(p)\mathfrak{E}_{p'}.$$

Итак, $\overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'} = h(p)\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi$. Следовательно, $\overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{H} = \bigcap_{p\in\pi} \overline{h}(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = \bigcap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Таким образом, h является H-функцией, определяющей локально класс $\mathfrak{H}$. Заметим также, что из включения $h(p) \subseteq \overline{h}(p)$ для всех $p \in \pi$ следует, что h является приведенной H-функцией класса $\mathfrak{H}$.

Предположим теперь, что $L \in f(p)$. Тогда $L \cong K^{\mathfrak{E}_{p'}}$ для некоторой группы K из $\overline{h}(p)$. Пусть $q \in \pi$ и $q \neq p$. Тогда $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{E}_{p'}$ и $K^{\mathfrak{E}_{p'}} \le K^{\mathfrak{N}_q}$. Ввиду того что $K \in \overline{h}(p) \subseteq \mathfrak{H}$, имеем $K / K_{\overline{h}(q)\mathfrak{E}_{q'}} \in \mathfrak{N}_q$. Значит, $K^{\mathfrak{N}_q} \in \overline{h}(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Учитывая включение $K^{\mathfrak{E}_{p'}} \le K^{\mathfrak{N}_q}$, получаем $K^{\mathfrak{E}_{p'}} \in \overline{h}(q)\mathfrak{E}_{q'}$ и $L \in \overline{h}(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Итак, мы доказали включение $f(p) \subseteq \overline{h}(q)\mathfrak{E}_{q'}$. Следовательно,

$$h(p) = \mathrm{Fit}(f(p)) \subseteq Fit(\overline{h}(q)\mathfrak{E}_{q'}) = \overline{h}(q)\mathfrak{E}_{q'} = h(q)\mathfrak{E}_{q'}$$

и h – искомая приведенная H-функция класса $\mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

Множество $\{p \in \mathbb{P} : h(p) \neq \varnothing\}$ назовем носителем H-функции h и будем обозначать Supp(h). Пусть $\pi = \mathrm{Supp}(h)$. Тогда подгруппу $G_h = \prod_{p\in\pi} G_{h(p)}$ назовем h-радикалом группы G.

Л е м м а 3. *Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Хартли вида $\bigcap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, где $\pi = \mathrm{Supp}(h) \neq \varnothing$ и h – такая приведенная H-функция, что $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$ для всех p и q из π. Если группа G такова, что G/G_h $\mathfrak{N}^{\pi}$-скована, то подгруппа V, содержащая $\mathfrak{H}$-радикал G, принадлежит $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда V/G_h – π-нильпотентная группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $V \in \mathfrak{H}$ и $G_{\mathfrak{H}} \subseteq V$, то $V_{h(p)} \bigcap G_{\mathfrak{H}} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(p)} = G_{h(p)}$. Значит, $[V_{h(p)}, G_{\mathfrak{H}}] \subseteq G_{h(p)}$. Следовательно, $V_{h(p)} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(p)})$ для всех простых $p \in \pi$.

Покажем сначала, что $G_{\mathfrak{H}} / G_h = F_{\pi}(G/G_h)$. Пусть $F_{\pi}(G/G_h) = K/G_h$. Так как $G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, то $G_{\mathfrak{H}} / G_{h(p)}$ – p-нильпотентная группа для всех простых $p \in \pi$. Следовательно, группа $G_{\mathfrak{H}} / G_h$ – π-нильпотентна. Тогда, ввиду определения $\mathfrak{N}^{\pi}$-радикала, $G_{\mathfrak{H}} / G_{h(p)} \le K / G_{h(p)}$ и $G_{\mathfrak{H}} \le K$. Докажем, что $K \subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Для этого достаточно выяснить, что $K \in \mathfrak{H}$. Так как K/G_h – π-нильпотентная группа, то, используя изоморфизм $K / K_{h(p)}G_h \cong K/G_h / K_{h(p)}G_h / G_h$, получаем $K / K_{h(p)}G_h \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, и поэтому $K / K_{h(p)} / K_{h(p)}G_h / K_{h(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех простых $p \in \pi$. Следовательно, для того чтобы $K \in \mathfrak{H}$, остается показать, что $K_{h(p)}G_h / K_{h(p)}$ является p'-группой для каждого простого $p \in \pi$.

Так как $G_h \lhd K$, то $G_{h(p)} = (G_h)_{h(p)} = G_h \bigcap K_{h(p)} \subseteq K_{h(p)}$. Пусть q – любое простое число из π отличное от p. Так как $G_{h(q)}G_{h(p)} / G_{h(p)} \cong G_{h(q)} / G_{h(q)} \bigcap G_{h(p)}$, то $G_{h(q)}G_{h(p)} / G_{h(p)} \cong G_{h(q)} / (G_{h(q)})_{h(p)}$.

Но h – такая H-функция, что $h(q) \subseteq h(p)\mathfrak{E}_{p'}$ для всех различных p и q из π. Следовательно, $G_{h(q)} \in h(p)\mathfrak{E}_{p'}$, и поэтому $G_{h(q)}/(G_{h(q)})_{h(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$.

Значит, для любых различных p и q из π подгруппа $G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(p)}$ является p'-группой. Следовательно, $G_h/G_{h(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Теперь, ввиду изоморфизма

$$K_{h(p)}G_h/K_{h(p)} \cong G_h/G_h \bigcap K_{h(p)} \cong G_h/G_{h(p)}/G_h \bigcap K_{h(p)}/G_{h(p)},$$

получаем, что $K_{h(p)}G_h/K_{h(p)}$ является p'-группой для каждого простого $p \in \pi$. Итак, мы показали, что $G_{\mathfrak{H}}/G_h = F_\pi(G/G_h)$.

Ввиду $\mathfrak{N}^\pi$-скованности группы G/G_h, имеем $C_{G/G_h}(G_{\mathfrak{H}}/G_h) \subseteq G_{\mathfrak{H}}/G_h$. Значит, $C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_h) \subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Так как $C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{h(p)}) \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_h)$, то $V_{h(p)} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{h(p)}) \subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $V_{h(p)} = G_{h(p)}$ для всех простых $p \in \pi$ и $V/V_{h(p)}$ – p-нильпотентная группа для всех простых $p \in \pi$. Итак, группа V/G_h π-нильпотентна.

Обратно, пусть V/G_h – π-нильпотентная группа. Тогда, ввиду изоморфизма $V/V_{h(p)}G_h \cong$ $\cong V/G_h/V_{h(p)}G_h/G_h$, следует $V/V_{h(p)}G_h \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Значит, $V/V_{h(p)}/V_{h(p)}G_h/V_{h(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех простых $p \in \pi$.

Так как $G_h \lhd V$, то $G_{h(p)} = (G_h)_{h(p)} = G_h \bigcap V_{h(p)} \subseteq V_{h(p)}$. Из того, что $G_h/G_{h(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ для всех простых $p \in \pi$, ввиду изоморфизма $V_{h(p)}G_h/V_{h(p)} \cong G_h/G_h \bigcap V_{h(p)} \cong G_h/G_{h(p)}/G_h \bigcap V_{h(p)}/G_{h(p)}$, следует, что $V_{h(p)}G_h/V_{h(p)}$ является p'-группой для каждого простого $p \in \pi$. Таким образом, $V/V_{h(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех простых $p \in \pi$ и $V \in \mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

В случае, когда $\operatorname{Supp}(h) = \{p\}$, из леммы 3 получаем

С л е д с т в и е 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Хартли вида $\mathfrak{X}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и G – такая группа, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{N}^p$-скованной группой. Подгруппа V, содержащая $\mathfrak{H}$-радикал группы G, принадлежит $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентная группа.*

Следующие свойства $\mathfrak{F}$-инъектора для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ вытекают непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-инъектора.

Л е м м а 4. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *если V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $K \trianglelefteq G$, то $V \bigcap K$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы K;*

2) *если V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $\alpha: G \to G^\alpha$ – изоморфизм, то V^α – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G^α;*

3) *если V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G и $V \bigcap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G.*

3. Основной результат. Для доказательства теоремы мы будем использовать следующий результат [6].

Л е м м а 5 [6]. *В любой $\mathfrak{N}^p$-скованной группе G существует единственный класс сопряженных p-нильпотентных инъекторов. Более того, p-нильпотентные инъекторы G – это, в точности, те $\mathfrak{N}^p$-максимальные в G подгруппы, которые содержат ее $\mathfrak{N}^p$-радикал.*

Т е о р е м а. *Пусть класс Хартли $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и G – такая группа, что группа $G/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}^p$-скована (в частности, p-разрешима). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $V/G_{\mathfrak{X}}$ – *p-нильпотентный инъектор группы* $G/G_{\mathfrak{X}}$ *тогда и только тогда, когда V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G;*

2) *в группе G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены;*

3) *$\mathfrak{H}$-инъекторы группы G это, в точности, те $\mathfrak{H}$-максимальные в G подгруппы, которые содержат ее $\mathfrak{H}$-радикал.*

Доказательство. 1) Пусть V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Тогда $G_{\mathfrak{H}} \leq V$ и V – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа в G. Ввиду следствия 1, $V/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}^p$. Тогда из $\mathfrak{H}$-максимальности V в G следует, что $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}^p$-максимальная подгруппа в $G/G_{\mathfrak{X}}$. Действительно, если предположить, что $V/G_{\mathfrak{X}} \leq W/G_{\mathfrak{X}} \leq G/G_{\mathfrak{X}}$ и $W/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}^p$-максимальная подгруппа в $G/G_{\mathfrak{X}}$, то, ввиду следствия 1, $W \in \mathfrak{H}$. Но тогда из $\mathfrak{H}$-максимальности V в G следует $V = W$.

Как и при доказательстве леммы 3, легко видеть, что $G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}} = F_p(G/G_{\mathfrak{X}})$. Тогда из $G_{\mathfrak{H}} \leq V$ получаем, что $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}^p$-максимальная подгруппа в $G/G_{\mathfrak{X}}$, содержащая $\mathfrak{N}^p$-радикал группы $G/G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, по лемме 5 $V/G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентный инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Докажем обратное утверждение.

Пусть $V/G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентный инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$. Покажем, что V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Доказательство проведем методом индукции по порядку группы G. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой утверждение неверно, и M – максимальная нормальная подгруппа G. Заметим, что $G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{H}}/(G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}^p$. Так как $V/G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентный инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$, то $G_{\mathfrak{H}} \leq V$. Теперь, учитывая следствие 1, заключаем, что $V \in \mathfrak{H}$. Итак, V является $\mathfrak{H}$-подгруппой.

Рассмотрим два возможных случая.

1. *$\mathfrak{X}$-радикал $G_{\mathfrak{X}}$ является подгруппой M.*

В этом случае, ввиду леммы 1, $M_{\mathfrak{X}} = M \cap G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Так как $V/G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентный инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$, то по утверждению 1) леммы 4 подгруппа $V \cap M/G_{\mathfrak{X}}$ является p-нильпотентным инъектором группы $M/M_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, по индукции $V \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы M.

Докажем, что подгруппа V является $\mathfrak{H}$-максимальной в G. Пусть $V \leq V_1$, где V_1 – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа в G. Из $\mathfrak{H}$-максимальности подгруппы $V \cap M$ в M следует равенство $V \cap M = V_1 \cap M$. Значит, $V_1 \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы M для любой максимальной нормальной подгруппы M из G. Следовательно, по утверждению 3) леммы 4 подгруппа V_1 – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Теперь, ввиду следствия 1, $V_1/G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентная группа и $V/G_{\mathfrak{X}} \subseteq V_1/G_{\mathfrak{X}}$. Но $V/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}^p$-максимальна в $G/G_{\mathfrak{X}}$ и, следовательно, $V = V_1$. Значит, V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Остается принять случай

2. *$\mathfrak{X}$-радикал $G_{\mathfrak{X}}$ не является подгруппой M.*

Так как M – максимальная нормальная подгруппа группы G, то $G = MG_{\mathfrak{X}}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{X}} \cong M/G_{\mathfrak{X}} \cap M = M/M_{\mathfrak{X}}$ и по утверждению 2) леммы 4 заключаем, что подгруппа $V \cap M/M_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{N}^p$-инъектором группы $M/M_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, по индукции $V \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы M. Теперь, следуя доказательству случая 1, заключаем, что V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Утверждение 1) настоящей теоремы доказано.

2) Так как группа $G/G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{N}^p$-скованной, то по лемме 5 в $G/G_{\mathfrak{X}}$ существует p-нильпотентный инъектор $V/G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, по утверждению 1) V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Пусть $V_1/G_{\mathfrak{X}}$ – инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$, отличный от $V/G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $V_1/G_{\mathfrak{X}}$ и $V/G_{\mathfrak{X}}$ сопряжены в $G/G_{\mathfrak{X}}$. Отсюда следует, что V_1 и V сопряжены в G и утверждение 2) теоремы доказано.

3) Если V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G, по определению $\mathfrak{H}$-инъектора, очевидно, $G_{\mathfrak{H}} \leq V$ и V – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа G.

Обратно, если $G_{\mathfrak{H}} \subseteq V$ и V – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа G, ввиду следствия 1, $V / G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентная группа. Как и при доказательстве утверждения 1) настоящей теоремы, легко видеть, что $V / G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}^p$-максимальная подгруппа группы $G / G_{\mathfrak{X}}$, содержащая $\mathfrak{N}^p$-радикал группы $G / G_{\mathfrak{X}}$. Тогда, по лемме 5, $V / G_{\mathfrak{X}}$ – p-нильпотентный инъектор группы $G / G_{\mathfrak{X}}$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2 [6]. *Любая p-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных p-нильпотентных инъекторов, причем такими инъекторами являются, в точности, все максимальные p-нильпотентные подгруппы из G, содержащие p-нильпотентный радикал.*

Литература

1. *Fischer B., Gaschütz W., Hartley B.* // Math. Z. 1967. N 102. S. 337–339.
2. *Ballester-Bolinches A, Ezquerro L. M.* Classes of Finite Groups. Dordrecht, 2006.
3. *Fischer B.* Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen. Frankfurt, 1966.
4. *Hartley B.* // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, N 2. P. 193–207.
5. *Vorob'ev N. T., Guo W.* // Comm. Algebra. 2008. N 36. P. 3200–3208.
6. *Iranzo M. I., Torres M.* // Rend. Semc. Math. Univ. Padova. 1989. Vol. 82. P. 233–237.
7. *Doerk K., Hawkes. T.* Finite Soluble Groups. Berlin; New York, 1992.
8. *Воробьев Н. Т.* // Сиб. мат. журн. 1996. № 37 (6). С. 1137–1142.
9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М., 1978.
10. *Семенов М. Г.* // Весн. ВДУ. 2012. № 2 (68). С. 10–13.

M. G. SEMENOV, N. T. VOROB'EV

CHARACTERIZATION OF INJECTORS OF FINITE GROUPS

Summary

Let $\mathfrak{X}$ be a non-empty Fitting class and $\mathfrak{H}$ be a Hartley class such that $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. It is proved that if G is a finite group such that the quotient $G / G_{\mathfrak{X}}$ is $\mathfrak{N}^p$-constrained, then G has unique conjugation of $\mathfrak{H}$-injectors. Moreover, the characterization of $\mathfrak{H}$-injectors is established.