УДК 512.542

Е. А. ВИТЬКО, Н. Т. ВОРОБЬЕВ

О КЛАССАХ ФИТТИНГА И ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(*Поступила в редакцию 16.04.2010*)

В теории конечных разрешимых групп известен результат Блессеноля [1] о том, что для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ класс $\mathcal{B}^{\pi}(\mathfrak{F})$ всех групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$, является локальной формацией. Расширение указанного результата на случай класса π-разрешимых групп и класса групп, формационные проекторы которых являются $\mathfrak{F}$-подгруппами, было получено в работах [2] и [3] соответственно.

Дуальной конструкцией формации $\mathcal{B}^{\pi}(\mathfrak{F})$ является класс Фиттинга $\mathcal{B}_{\pi}(\mathfrak{F})$ всех конечных разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат классу Фиттинга $\mathfrak{F}$. Такая конструкция в теории разрешимых классов Фиттинга нашла эффективное применение для описания радикалов холловых подгрупп и холловски замкнутых классов Фиттинга, что нашло отражение в серии работ Е. Кусака [4], О. Бризона [5,6] и П. Хаука [7]. Более того, в работе [8] в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп был получен результат, в точности дуальный теореме Блессеноля [1]: было доказано, что для любого локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathcal{B}_{\pi}(\mathfrak{F})$ локален. Хорошо известно, что по теореме С. А. Чунихина [9] холловы π-подгруппы существуют и сопряжены в любой конечной π-разрешимой группе. В связи с этим Л. А. Шеметковым была сформулирована задача о локальности класса Фиттинга $\mathcal{B}_{\pi}(\mathfrak{F})$ в классе $\mathfrak{S}^{\pi}$ всех конечных π-разрешимых групп. Решению ее и посвящена настоящая работа.

Все исследования в работе проводятся в классе $\mathfrak{S}^{\pi}$; в терминологии и обозначениях мы следуем [10, 11].

1. Предварительные сведения. Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то через G_{π} мы будем обозначать холлову π-подгруппу группы G, т. е. подгруппу, порядок которой есть π-число, а ее индекс в G является π'-числом.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G = N_1N_2$, где $N_i \trianglelefteq G$ и $N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1,2)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда наибольшую нормальную подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G, принадлежащую $\mathfrak{F}$, называют ее $\mathfrak{F}$-радикалом.

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{X}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ называется класс всех таких групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Заметим, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Будем использовать концепцию частичной локализации Шеметкова–Скибы [12].

Пусть $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Всякое отображение

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называется ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной H-функцией. Для каждой ω-локальной H-функции f полагаем

$$\mathrm{Supp}(f)=\{a\in\omega\cup\{\omega'\}\mid f(a)\neq\varnothing\}\text{ – носитель } f.$$

Положим

$$LR_\omega(f)=\left(\bigcap_{p\in\pi_2}\mathfrak{S}^\pi_{p'}\right)\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi_1}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^\pi_{p'}\right)\bigcap f(\omega')\mathfrak{S}^\pi_\omega,$$

где $\pi_1=\mathrm{Supp}(f)\bigcap\omega$, $\pi_2=\omega\setminus\pi_1$, $\mathfrak{S}^\pi_\omega$ – класс всех π-разрешимых ω-групп и $\mathfrak{S}^\pi_{p'}$ – класс всех π-разрешимых p'-групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальным, если $\mathfrak{F}=LR_\omega(f)$ для некоторой ω-локальной H-функции f. В случае, когда $\omega=\mathbb{P}$, ω-локальный класс Фиттинга называют локальным.

2. Класс $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$ и его свойства.

Определение. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$ обозначим класс всех тех π-разрешимых групп G, в которых холлова π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой, т. е.

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})=(G\in\mathfrak{S}^\pi:G_\pi\in\mathfrak{F}).$$

Если $\mathfrak{F}=\varnothing$, то положим $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$. В случае, когда $\pi=\varnothing$ и $\pi=\mathbb{P}$, положим $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})=\mathfrak{S}^\pi$ и $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}$ соответственно.

Лемма 1 [13]. *Для любого множества простых чисел π и любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$ является классом Фиттинга.*

Доказательство следующего свойства осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, π – множество простых чисел. Тогда*

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})=\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\cap\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X})$$

и, если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$, то

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\subseteq\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

Лемма 3 [13]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, G – π-разрешимая группа, H – ее холлова π-подгруппа, тогда*

$$G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}\cap H=H_\mathfrak{F}.$$

Используя лемму 3, установим свойства класса $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$, которые будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, тогда*

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X})=\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\,\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Пусть $G\in\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X})$ и H – холлова π-подгруппа группы G. Тогда $H\in\mathfrak{F}\mathfrak{X}$ и следовательно $H/H_\mathfrak{F}\in\mathfrak{X}$. По лемме 3 следует, что

$$H_\mathfrak{F}=G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}\cap H.$$

Тогда, учитывая изоморфизм, получим

$$H/H_\mathfrak{F}\cong HG_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{X}.$$

Следовательно, из того, что $HG_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}$ – холлова π-подгруппа группы $G/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}$, получаем, что $G/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X})$ и поэтому

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X})\subseteq\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\,\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

С другой стороны, если $G\in\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X})$, то $G/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X})$. Следовательно,

$$H/H_\mathfrak{F}\cong HG_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{X}.$$

Тогда $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{X}$ и $G \in \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X})$, т. е.

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X}) \supseteq \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – множество простых чисел. Тогда*

1) *если $p \in \pi$, то $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{S}^\pi_{p'}) = \mathfrak{S}^\pi_{p'}$;*

2) *если $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$ для некоторого p, то $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p = \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{S}^\pi_{p'} \subseteq \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{S}^\pi_{p'})$.

Пусть группа $G \in \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{S}^\pi_{p'})$ и G_π – холлова π-подгруппа G. Тогда $|G_\pi|$ является p'-числом. Но так как $p \in \pi$, то $\pi' \subseteq p'$. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}^\pi_{p'}$ и

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{S}^\pi_{p'}) \subseteq \mathfrak{S}^\pi_{p'}.$$

Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть $G \in \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$. Так как по лемме 3

$$G_\pi \cap G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})} = (G_\pi)_\mathfrak{F},$$

то ввиду изоморфизма

$$G_\pi G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})} \cong G_\pi/(G_\pi \cap G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}) = G_\pi/(G_\pi)_\mathfrak{F}$$

получаем

$$G_\pi/(G_\pi)_\mathfrak{F} \cong G_\pi G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}.$$

Но холлова π-подгруппа $G_\pi G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}$ группы $G/G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}$ является p-группой. Следовательно, $G_\pi/(G_\pi)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_p$ и поэтому $G_\pi \in \mathfrak{F}$. Итак, справедливо включение

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p \subseteq \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}).$$

Обратное включение очевидно.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и ω, σ – множества простых чисел, причем $\sigma \cap \omega = \varnothing$ и $\sigma \subseteq \pi$. Тогда*

$$\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^\pi_\omega = \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F}).$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^\pi_\omega$.

Пусть $G \in \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^\pi_\omega$. По лемме 3 $G_\sigma \cap G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} = (G_\sigma)_\mathfrak{F}$. Тогда, учитывая изоморфизм $G_\sigma G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} \cong G_\sigma/(G_\sigma \cap G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})})$, получаем

$$G_\sigma G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})}/G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} \cong G_\sigma/(G_\sigma)_\mathfrak{F}.$$

Но $G/G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{S}^\pi_\omega$, следовательно $G_\sigma/(G_\sigma)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}^\pi_\omega \cap \mathfrak{S}^\pi_\sigma = (1)$, и поэтому $G_\sigma = (G_\sigma)_\mathfrak{F}$.

Следовательно, $G_\sigma \in \mathfrak{F}$ и $G \in \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})$.

Лемма доказана.

Следствие. *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и σ – множество простых чисел, причем $\sigma \subseteq \pi$, то*

$$\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^\pi_{\sigma'} = \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F}).$$

3. ω-Локальность класса $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$. Основной результат настоящей работы представляет следующая

Теорема. *Если $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то класс групп $\mathcal{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$ – ω-локальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{F}=\varnothing$. Тогда $\mathscr{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})=\varnothing$ и ввиду [12] $\mathscr{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$ является ω-локальным.

Предположим, что $\mathfrak{F}\neq\varnothing$. Если $\omega\bigcap\pi=\varnothing$, то по определению $\mathscr{B}_{\varnothing}(\mathfrak{F})=\mathfrak{S}^{\pi}$. Определим H-функцию следующим образом: $f(a)=\mathfrak{S}^{\pi}$ для всех a из $\omega\bigcup\{\omega'\}$. Тогда

$$LR_{\omega}(f)=\left(\bigcap_{p\in\omega}\mathfrak{S}^{\pi}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\right)\bigcap\mathfrak{S}^{\pi}\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega}=\mathfrak{S}^{\pi}$$

и класс Фиттинга $\mathscr{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$ ω-локален.

Предположим, что $\omega\bigcap\pi\neq\varnothing$. Так как $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга, то существует ω-локальная H-функция F такая, что $\mathfrak{F}=LR_{\omega}(F)$, ее значения $F(p)=F(p)\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{F}$ для всех p из ω и $F(\omega')=\mathfrak{F}$ по теореме работы [14].

Обозначим через

$$\pi_1=\mathrm{Supp}(F)\cap\omega,\ \pi_2=\omega\backslash\pi_1.$$

Тогда

$$\mathfrak{F}=LR_{\omega}(F)=(\bigcap_{p\in\pi_2}\mathfrak{S}^{\pi}_{p'})\bigcap(\bigcap_{p\in\pi_1}F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'})\bigcap\mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega}.$$

Определим теперь ω-локальную H-функцию следующим образом:

$$f(p)=\begin{cases}\mathscr{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p)), & \text{если } p\in\pi_1\bigcap\pi\\ \mathscr{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F}), & \text{если } p\in\omega\setminus\pi\\ \varnothing, & \text{если } p\in\pi_2\bigcap\pi\end{cases}$$

и $f(\omega')=\mathscr{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$.

Легко видеть, что $\mathrm{Supp}(f)=(\pi_1\bigcap\pi)\bigcup(\omega/\pi)\bigcup\{\omega'\}$. Следовательно,

$$LR_{\omega}(f)=\left(\bigcap_{p\in\pi_2\bigcap\pi}\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\right)\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi_1\bigcap\pi}\mathscr{B}_{\pi_1\bigcap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\right)\bigcap\left(\bigcap_{p\in\omega\backslash\pi}\mathscr{B}_{\pi\bigcap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\right)\bigcap\mathscr{B}_{\pi\bigcap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega}.$$

Докажем вначале, что справедливо равенство

$$\bigcap_{p\in\pi_1\bigcap\pi}\mathscr{B}_{\pi_1\bigcap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\mathscr{B}_{\pi_1\bigcap\pi}(\mathfrak{F}).\tag{1}$$

Так как $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга и $F(p)=F(p)\mathfrak{N}_p$ для всех p из ω, то

$\mathfrak{F}\subseteq\bigcap_{p\in\pi_1\bigcap\pi}F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\bigcap_{p\in\pi_1\bigcap\pi}F(p)\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}$. Тогда по лемме 2

$$\mathscr{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\subseteq\mathscr{B}_{\pi_1\cap\pi}\left(\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi}F(p)\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\right)=\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi}\mathscr{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p)\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}).$$

Следовательно, по лемме 4 и утверждению 1) леммы 5 получаем

$$\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi}\mathscr{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p)\mathfrak{S}^{\pi}_{p'})=\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi}\mathscr{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}.$$

Кроме того, по утверждению 2) леммы 5 для любого $p\in\pi_1\bigcap\pi$ имеет место равенство

$$\mathscr{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))=\mathscr{B}_{\pi_1\bigcap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\subseteq\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi}\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}.$$

Докажем обратное включение. Так как $F(p)\subseteq\mathfrak{F}$ для всех p из ω, то по лемме 2 имеем

$$\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\subseteq\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\subseteq\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}$$

и по утверждению 2) леммы 5

$$\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))=\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p$$

для любого p из $\pi_1\bigcap\pi$. Следовательно,

$$\bigcap_{p\in\pi_1\bigcap\pi}\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\subseteq\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi}\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_1\cap\pi)'}.$$

Кроме того, по следствию леммы 6

$$\mathfrak{B}_{\pi_1\bigcap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_1\cap\pi)'}=\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi}\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}\subseteq\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}),$$

и равенство (1) доказано.

Установим теперь, что

$$\bigcap_{p\in\omega/\pi}\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{(\omega/\pi)'}. \quad (2)$$

По лемме 6

$$\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})=\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega/\pi}.$$

Кроме того, $\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega/\pi}\mathfrak{N}_p=\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega/\pi}$ для любого p из ω/π. Следовательно,

$$\bigcap_{p\in\omega\setminus\pi}\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\bigcap_{p\in\omega\setminus\pi}\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega\setminus\pi}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\bigcap_{p\in\omega\setminus\pi}\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega\setminus\pi}\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}$$

и

$$\bigcap_{p\in\omega\setminus\pi}\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega\setminus\pi}\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\bigcap_{p\in\omega\setminus\pi}\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{p'}=\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{(\omega\setminus\pi)'},$$

что доказывает равенство (2).

Таким образом, мы имеем

$$LR_{\omega}(f)=\mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_2\cap\pi)'}\bigcap\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\bigcap\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{(\omega\setminus\pi)'}\bigcap\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}^{\pi}_{\omega}.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно выяснить справедливость равенства

$$\mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_2\cap\pi)'}\bigcap\mathfrak{B}_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})=\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F}). \quad (3)$$

Пусть $G\in\mathfrak{B}_{\pi\cap\omega}(\mathfrak{F})$. Тогда из того, что $\mathfrak{F}=LR_{\omega}(F)$, следует $G_{\pi\cap\omega}\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}^{\pi}_{\pi'_2}$ и поэтому $|G_{\pi\cap\omega}|$ является $(\pi'_2\bigcap\pi\bigcap\omega)$-числом. Кроме того, $|G:G_{\pi\cap\omega}|$ является $(\pi\bigcap\omega)'$-числом. Легко видеть, что $(\pi\bigcap\omega)'\bigcup(\pi'_2\bigcap\pi\bigcap\omega)=(\pi_2\bigcap\pi)'$ и, значит, $G\in\mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_2\cap\pi)'}$. Так как $\pi_1\subseteq\omega$, то $(\pi\bigcap\omega)'\subseteq(\pi_1\bigcap\pi)'$ и $|G:G_{\pi\cap\omega}|$ является $(\pi_1\bigcap\pi)'$-числом. Далее из $\pi_1\bigcap\pi\bigcap\omega\subseteq\pi_1\bigcap\pi$ следует, что $|G_{\pi\cap\omega}|$ есть

$(\pi_1 \cap \pi)$-число. Тогда $(\pi \cap \omega)$-холлова подгруппа $G_{\pi \cap \omega}$ группы G является также $(\pi_1 \cap \pi)$-холловой подгруппой группы G. Значит, $G_{\pi_1 \cap \pi} \in \mathfrak{F}$ и $G \in \mathscr{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})$. Следовательно,

$$\mathscr{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap \mathscr{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}).$$

Покажем обратное включение. Пусть теперь $G \in \mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap \mathscr{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})$. Тогда $G_{\pi_1 \cap \pi} \in \mathfrak{F}$. Так как $(\pi_2 \cap \pi)' \setminus (\pi_1 \cap \pi) = (\pi \cap \omega)'$, то $|G : G_{\pi_1 \cap \pi}|$ является $(\pi \cap \omega)'$-числом. Теперь, ввиду $\pi_1 \cap \pi \subseteq \pi \cap \omega$, получаем, что $|G_{\pi_1 \cap \pi}|$ является $(\pi \cap \omega)$-числом. Значит, $(\pi_1 \cap \pi)$-холлова подгруппа G является $(\pi \cap \omega)$-холловой подгруппой G и поэтому $G_{\pi \cap \omega} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathscr{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$. Это означает, что

$$\mathfrak{S}^{\pi}_{(\pi_2 \cap \pi)'} \cap \mathscr{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathscr{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$$

и равенство (3) доказано.

Теорема доказана.

В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ получаем

С л е д с т в и е. *Для любого локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любого множества простых чисел π класс групп $\mathscr{B}_{\pi}(\mathfrak{F})$ является локальным классом Фиттинга.*

Литература

1. B l e s s e n o h l D. // Math. Z. 1975. Vol. 142, N 3. S. 299-300.
2. С л е п о в а Л. М. // Докл. АН БССР. 1977. Т. 21, № 7. С. 557–589.
3. В о р о б ь е в Н. Т. // Матем. заметки. 1983. Т. 34, № 2. С. 165–170.
4. C u s a c k E. // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 21, N 2. P. 229–236.
5. B r i s o n O. J. // Bull. Austral. Math. Soc. 1981. Vol. 23. P. 361–365.
6. B r i s o n O. J. // Austral. Math. Soc (Series A). 1984. Vol. 32. P. 145–164.
7. H a u c k P. // J. London Math. Soc. 1979. Vol. 20, N 2. P. 423–434.
8. З а г у р с к и й В. Н., В о р о б ь е в Н. Т. // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 2. С. 234-240.
9. Ч у н и х и н С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
10. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
11. D o e r k K., H a w k e s T. Finite Soluble Groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
12. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
13. В о р о б ь е в Н. Т., В и т ь к о Е. А., И в а н о в а Н. В. // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. 2008. № 2(48). С. 125–129.
14. В о р о б ь е в Н. Т. // Известия Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 1999. № 1 (15). С. 8–13.

E. A. VITKO, N. T. VOROB'EV

FITTING CLASSES AND HALL SUBGROUPS OF FINITE π-SOLUBLE GROUPS

Summary

It is proved that if a Fitting class $\mathfrak{F}$ is ω-local, then the class of all finite π-soluble groups, all of whose Hall $(\omega \cap \pi)$-subgroups belong to $\mathfrak{F}$, is also ω-local.