УДК 512.542

Н. В. САВЕЛЬЕВА, Н. Т. ВОРОБЬЕВ

О ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДКЛАССОВ МИНИМАЛЬНОГО π-НОРМАЛЬНОГО КЛАССА ФИТТИНГА

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(*Поступила в редакцию 18.04.2008*)

Введение. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется максимальным подклассом класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ (обозначают $\mathfrak{F}\lessdot\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{X}$ и из того, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M}\in\{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$.

Основополагающие результаты по описанию максимальных подклассов Фиттинга и их взаимосвязи с нормальными классами Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп были получены Брайсом и Косси [1]. Примечателен тот факт, что каждый класс Фиттинга, максимальный в $\mathfrak{S}$, является нормальным. В связи с этим была сформулирована следующая

Проблема А (Х. Лауш, 9.18 [2]). Существуют ли максимальные по включению подклассы Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}_*$?

Отрицательный ответ на этот вопрос был получен в [3].

Вместе с тем самостоятельный интерес представляет результат А. Н. Скибы о том, что каждая локальная формация не имеет максимальных подформаций (см. монографию [4], пример 5.1.1). Поиск аналога указанного результата в теории классов Фиттинга обусловила

Проблема Б (А. Н. Скиба, 13.50 [2]). Пусть $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?

Отрицательное решение этой проблемы было анонсировано в [5].

Естественным расширением понятия нормальности в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп является понятие π-нормальности в смысле следующего определения.

Определение. Пусть π обозначает непустое множество простых чисел и $\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех конечных разрешимых π-групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем нормальным в классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ или π-нормальным, если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G.

Если $\mathfrak{F}\lessdot\mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F}$ назовем π-максимальным.

Аналогично можно определить и класс Фиттинга, нормальный в произвольном классе групп $\mathfrak{X}$.

В работе [6] было доказано, что если $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то пересечение любого множества $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга снова является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

Нами установлено, что если π – непустое множество простых чисел, то пересечение любого множества неединичных π-нормальных классов Фиттинга есть неединичный π-нормальный класс Фиттинга (см. лемму 16). Отсюда следует, что существует единственный минимальный π-нормальный класс Фиттинга. В связи с этим естественен следующий аналог проблемы А, который представляет следующий вопрос: *существуют ли максимальные подклассы Фиттинга в минимальном π-нормальном классе Фиттинга?*

Основной результат настоящей работы – отрицательный ответ на указанный вопрос для случая, когда максимальные подклассы локальны. А именно, доказано, что в минимальном π-нормальном классе Фиттинга нет нетривиальных максимальных локальных подклассов Фиттинга.

Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными и разрешимыми, если не оговорено противное. В определениях и обозначениях мы следуем [7].

1. Предварительные сведения. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если выполняются следующие два условия:

1) из $G\in\mathfrak{F}$ и $N\triangleleft G$ всегда следует $N\in\mathfrak{F}$;

2) если $G=N_1N_2$, где $N_i\triangleleft G$ и $N_i\in\mathfrak{F}$ ($i=1, 2$), то $G\in\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Напомним, что подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют ее $\mathfrak{F}$-радикалом, если она является максимальной нормальной $\mathfrak{F}$-подгруппой G.

Лемма 1 [7, теорема IX.1.1(a)]. *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – нормальная подгруппа группы G, то $N_{\mathfrak{F}}=N\cap G_{\mathfrak{F}}$.*

Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $V\cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс всех таких групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{H}$.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Гомоморф называют насыщенным, если из того, что $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$, следует $G\in\mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/A\in\mathfrak{F}$ и $H/B\in\mathfrak{F}$ всегда следует $H/A\cap B\in\mathfrak{F}$.

Сформулируем некоторые простейшие свойства произведений классов Фиттинга в виде следующих двух лемм, доказательство которых осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{H}$ непуст, то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$;*

2) *если $\mathfrak{H}$ – гомоморф и $\mathfrak{F}$ непуст, то $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$;*

3) *умножение классов Фиттинга ассоциативно.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{X}$ – гомоморф и $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$;*

2) *если $\mathfrak{X}$ – формация, то $(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)\mathfrak{X}=\mathfrak{F}_1\mathfrak{X}\cap\mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$;*

3) $\mathfrak{X}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)=\mathfrak{X}\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{X}\mathfrak{F}_2$.

Решение многих задач описания структуры классов Фиттинга и их классификации связано с применением операторов Локетта «$*$» и «*» [8]. Напомним, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ посредством оператора «*» сопоставляется класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, а посредством оператора «$*$» сопоставляется класс Фиттинга $\mathfrak{F}_*$, равный пересечению всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$.

Если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта.

Секцией Локетта непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется множество всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{X}^*$. Секцию Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ обозначают Locksec($\mathfrak{F}$) [8].

Напомним свойства операторов Локетта «$*$» и «*», которые мы будем использовать.

Лемма 4 [7, 9, 10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^*\subseteq\mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{F}_*\subseteq\mathfrak{H}_*$* (*теорема* X.1.8(b) [7], *следствие* 3.5 [9]);

2) $(\mathfrak{F}_*)_*=(\mathfrak{F}^*)_*=\mathfrak{F}_*\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}^*=(\mathfrak{F}_*)^*=(\mathfrak{F}^*)^*\subseteq\mathfrak{F}_*\mathfrak{A}$, *где $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп* (*теорема* X.1.15 [7]);

3) *если $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф, то справедливо равенство*: $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*=\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$ (*лемма* 3 [10]);

4) *имеет место равенство* $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})^*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{H}^*$ (*предложение* X.1.13 [7]);

5) *пусть* $\mathfrak{N}_\pi$ *– класс Фиттинга всех нильпотентных* π*-групп, где* $\pi\subseteq\mathbb{P}$, *тогда* $\mathfrak{N}_\pi=(\mathfrak{N}_\pi)^*=(\mathfrak{N}_\pi)_*$ (*замечание* X.1.23 (a) [7]).

Лемма 5 [7, теорема X.3.7]. *Пусть* π *– непустое множество простых чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *является* π*-нормальным*;

2) $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{S}_\pi$;

3) $G/G_\mathfrak{F}$ *– абелева группа для любой* π*-группы* G.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$ и $\pi'=\mathbb{P}\setminus\pi$. Всякое отображение f: $\mathbb{P}\to${классы Фиттинга} называют функцией Хартли или H-функцией.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется локальным, если существует такая H-функция f, что

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{E}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}),$$

где $\pi=\mathrm{Supp}(f)=\{p\in\mathbb{P}\mid f(p)\neq\varnothing\}$ – носитель f.

Приведем в качестве лемм свойства локальных классов Фиттинга, которые мы будем использовать.

Лемма 6 [11]. *Каждый непустой наследственный класс Фиттинга является локальным.*

Лемма 7 [3]: *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Лемма 8 [12]. *Произведение двух локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга.*

В работе [10] была предложена следующая классификация H-функций класса $\mathfrak{F}$, аналогичная классификации локальных спутников формаций.

Локальная H-функция f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется [10]:

1) внутренней или приведенной, если $f(p)\subseteq\mathfrak{F}$ для каждого простого числа p;

2) полной, если $f(p)\mathfrak{N}_p=f(p)$ для всех простых p.

Лемма 9 [13]. *Любой локальный класс Фиттинга определяется полной внутренней* H*-функцией.*

Напомним, что множество $\mathrm{Char}(\mathfrak{X})=\{p$: $p\in\mathbb{P}$ и $Z_p\in\mathfrak{X}\}$, где Z_p – циклическая группа простого порядка p, называется характеристикой класса групп $\mathfrak{X}$.

Если $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G, то множество $\pi(\mathfrak{F})$ определяется как объединение всех таких $\pi(G)$, что $G\in\mathfrak{F}$.

Лемма 10. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mathfrak{F}$ *– локальный класс Фиттинга, то* $\pi(\mathfrak{F})=\mathrm{Supp}(f)$;

2) *если класс Фиттинга* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}$, *то* $\pi(\mathfrak{F})=\mathrm{Char}(\mathfrak{F})$.

Докажем первое утверждение леммы. Пусть $\sigma=\mathrm{Supp}(f)$ и $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Так как

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_\sigma\cap(\bigcap_{p\in\sigma} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}),$$

то $p\in\sigma$, и поэтому $\pi(\mathfrak{F})\subseteq\mathrm{Supp}(f)$.

Пусть теперь $p\in\sigma$ и Z_p – циклическая группа простого порядка p. Покажем, что $Z_p\in\mathfrak{F}$. Действительно, $f(p)\neq\varnothing$, так как $p\in\sigma$. Следовательно, с учетом утверждений 1) и 2) леммы 2, имеем:

$$Z_p\in\mathfrak{N}_p\subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}.$$

Если $q\in\sigma$ и $q\neq p$, то снова, применяя лемму 2, получаем

$$Z_p\in\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{S}_{q'}\subseteq\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}\subseteq f(q)\mathfrak{N}_q\mathfrak{S}_{q'}.$$

Таким образом, $Z_p\in\mathfrak{S}_\sigma\cap(\bigcap_{p\in\sigma} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})=\mathfrak{F}$. Это означает, что $p\in\pi(\mathfrak{F})$ и $\pi(\mathfrak{F})=\sigma$. Утверждение 1) доказано.

Доказательство второго утверждения леммы вытекает непосредственно из утверждения IX.1.7 [7].

Л е м м а 11 (теорема IX.1.9 [7]). *Если класс Фиттинга* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}$, *то* Char$(\mathfrak{F})=\pi$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{N}_\pi\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}_\pi$.

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Фишера, если из того, что $K\subseteq H\subseteq G\in\mathfrak{F}$, $K\lhd G$, $H/K\in\mathfrak{E}_p$, где p – некоторое простое число, всегда следует, что $H\in\mathfrak{F}$.

Л е м м а 12 (теорема 2.1 [6]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *класс Фишера и* $\{\mathfrak{F}_i \mid i\in I\}$ – *множество* $\mathfrak{X}$*-нормальных классов Фиттинга. Если* $\mathfrak{F}=\bigcap\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{S}$, *то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{X}$*-нормальным классом Фиттинга.*

2. О некоторых свойствах π-нормальных и локальных подклассов.

Л е м м а 13. *Каждый нильпотентный класс Фиттинга является локальным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{X}$ – нильпотентный класс Фиттинга, т. е. $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{N}$. Так как любая подгруппа каждой $\mathfrak{X}$-группы G субнормальна в G, то $\mathfrak{X}$ является наследственным. Следовательно, по лемме 6 класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ локален. Лемма доказана.

Напомним, что через $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{N}_\pi$ обозначают соответственно класс Фиттинга всех π-групп и класс Фиттинга всех нильпотентных π-групп.

Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}^n$ – это произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}$, состоящее из n сомножителей.

Л е м м а 14. *Если* π – *некоторое множество простых чисел, то справедливо равенство*:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{N}_\pi)^n=\mathfrak{S}_\pi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукцией по числу n покажем сначала, что для любого натурального n справедливо равенство $(\mathfrak{N}_\pi)^n=\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^n$. Если $n=1$, то равенство очевидно. Предположим, что данное равенство справедливо для $n=k$. Тогда

$$(\mathfrak{N}_\pi)^{k+1}=(\mathfrak{N}_\pi)^k\mathfrak{N}_\pi=(\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^k)\mathfrak{N}_\pi.$$

С учетом утверждения 2) леммы 3 имеем

$$(\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^k)\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_\pi\cap\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_\pi.$$

Заметим, что $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$, и поэтому $(\mathfrak{N}_\pi)^{k+1}=\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^k\mathfrak{N}_\pi$. Но $\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_\pi$. Значит, ввиду утверждения 3) леммы 3 имеет место равенство:

$$\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^k(\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N})=\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^k\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^{k+1}.$$

Следовательно, с учетом утверждения 2) леммы 2 имеем $\mathfrak{S}_\pi\subseteq\mathfrak{N}^k\mathfrak{S}_\pi$ и, значит, $(\mathfrak{N}_\pi)^{k+1}=\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^{k+1}$. Таким образом, для любого натурального n верно равенство

$$(\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N})^n=\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^n.$$

Отсюда ввиду того, что $\mathfrak{S}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{N}^n$ и $\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}$, следует

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{N}_\pi)^n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N})^n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{N}^n)=\mathfrak{S}_\pi\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{N}^n\Big)=\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_\pi.$$

Лемма доказана.

Следующая лемма расширяет известный критерий нормальности класса Фиттинга, полученный Локеттом [14], на случай π-нормальных классов Фиттинга.

Л е м м а 15. *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *класс Фиттинга и* π – *некоторое непустое множество простых чисел. Тогда* $\mathfrak{X}\lhd\mathfrak{S}_\pi$ *в том и только том случае, когда* $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{X}\lhd\mathfrak{S}_\pi$ и $G\in\mathfrak{S}_\pi$. Покажем, что $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$. По лемме 5 (утверждение 1)$\Rightarrow$3)) получаем, что факторгруппа $G/G_\mathfrak{X}$ – абелева π-группа, т. е. $G/G_\mathfrak{X}\in\mathfrak{A}_\pi$.

Следовательно, по определению произведения классов групп $G\in\mathfrak{X}\mathfrak{A}_\pi$. Но $\mathfrak{A}_\pi\subseteq\mathfrak{N}_\pi$ и поэтому $G\in\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi$. Это доказывает включение $\mathfrak{S}_\pi\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi$.

Обратное включение $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi\subseteq\mathfrak{S}_\pi$ очевидно ввиду того, что $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_\pi$.

Таким образом, из того, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ является π-нормальным, вытекает равенство $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$.

Докажем обратное утверждение. Пусть G – некоторая π-группа. Тогда ввиду равенства $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$ следует, что $G/G_\mathfrak{X}\in\mathfrak{N}_\pi$.

Пусть подгруппа V является $\mathfrak{X}$-инъектором группы G. Тогда, очевидно, $V\geq G_\mathfrak{X}$ и, следовательно, $V/G_\mathfrak{X}\leq G/G_\mathfrak{X}\in\mathfrak{N}_\pi$. Но всякая подгруппа нильпотентной группы субнормальна в ней, т. е. $V/G_\mathfrak{X}\lhd\lhd G/G_\mathfrak{X}$. Следовательно, $V\lhd\lhd G$. Теперь по лемме 1 получаем $V_\mathfrak{X}=V\cap G_\mathfrak{X}$.

Таким образом, $V=V_\mathfrak{X}\subseteq G_\mathfrak{X}$. Следовательно, $V=G_\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$-радикал любой π-группы G является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой G. Это означает, что $\mathfrak{X}\lhd\mathfrak{S}_\pi$. Лемма доказана.

В случае $\pi=\mathbb{P}$ получаем

Следствие 1 (Локетт [14]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. $\mathfrak{X}\lhd\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}\mathfrak{N}=\mathfrak{S}$.*

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, то через $\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y}$ обозначают класс групп [10], который определяется следующим образом: $G\in\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y}$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{X}$-инъектор группы G принадлежит $\mathfrak{Y}$.

Пусть f – H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ называется f-инъекторно замкнутым, если $\mathfrak{Y}\subseteq f(p)\circ\mathfrak{Y}$ для всех простых чисел p [10].

Ввиду леммы 12 для класса Фишера $\mathfrak{X}$ пересечение любого множества $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

Лемма 16. *Если π – непустое множество простых чисел, то пересечение любого множества неединичных π-нормальных классов Фиттинга есть неединичный π-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i\in I\}$ – множество всех π-нормальных классов Фиттинга и $\mathfrak{D}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{X}_i$. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ наследственен, то $\mathfrak{S}_\pi$ – класс Фишера и по лемме 12 класс Фиттинга $\mathfrak{D}$ является π-нормальным. Так как $\mathfrak{X}_i$ – π-нормальный класс Фиттинга для всех $i\in I$, то по лемме 5 имеем $\mathfrak{X}_i^*=\mathfrak{S}_\pi$ для каждого $i\in I$. Тогда по утверждению X.1.20 [7] следует $\pi(\mathfrak{X}_i^*)=\pi(\mathfrak{X}_i)=\pi$. Но по условию $\pi\neq\varnothing$. Следовательно, существует простое $p\in\pi$, такое, что $p\in\pi(\mathfrak{X}_i)$ для всех $i\in I$ и поэтому по лемме 11 получаем $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{X}_i$ для каждого $i\in I$. Отсюда следует, что $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}\neq(1)$.

Таким образом, $\mathfrak{D}$ – неединичный π-нормальный класс Фиттинга. Лемма доказана.

Следствие 2. *Если π – непустое множество простых чисел, то $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ – единственный нетривиальный минимальный π-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi)$ состоит из всех π-нормальных классов Фиттинга, т. е. $\mathfrak{X}\in\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi)$ в точности тогда, когда $\mathfrak{X}$ π-нормален. Тогда ввиду леммы 16 минимальный элемент секции Локетта $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ является минимальным π-нормальным классом Фиттинга.

Для доказательства основного результата мы будем также использовать следующее свойство минимальных элементов секций Локетта, которое представляет

Лемма 17. *Если ψ – полная внутренняя H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – ψ-инъекторно замкнутый класс Фиттинга, то*

$$\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}_*=(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}\subseteq\mathfrak{X}$, то по утверждению 1) леммы 4 $(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\subseteq\mathfrak{Y}_*$ и $(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\subseteq\mathfrak{X}_*\subseteq\mathfrak{X}$. Следовательно, $(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\subseteq\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}_*$.

Докажем обратное включение. Пусть $G\in\mathfrak{X}$ и X – $\psi(p)$-инъектор группы G для некоторого $p\in\pi(\mathfrak{X})$. По определению ψ-инъекторной замкнутости для класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$ следует, что

$\psi(p)$-инъектор принадлежит $\mathfrak{Y}$. Отсюда получаем $X\in\psi(p)\cap\mathfrak{Y}$. Но ψ – внутренняя H-функция. Значит, $\psi(p)\subseteq\mathfrak{X}$.

Итак, $X\in\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}$.

Так как по утверждению 2) леммы 4 и по утверждению 1) леммы 2 имеем $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}\subseteq(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})^*\subseteq(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})^*\mathfrak{S}_{p'}$ и ввиду утверждения 3) леммы 4 справедливо равенство

$$(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})^*\mathfrak{S}_{p'}=((\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'})^*,$$

то получаем $X\in((\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'})^*$.

Значит, по определению операции «$\circ$» любой $\psi(p)$-инъектор группы G принадлежит классу $f(p)$, где $f(p)=\psi(p)\circ((\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'})^*$.

Заметим, что ввиду полноты H-функции ψ по теореме IX.2.3 [7] $f(p)$ является классом Фиттинга для всех $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Таким образом, ввиду произвольности выбора группы G показано, что $\mathfrak{Y}$ – подкласс Фиттинга класса $f(p)$ для всех $p\in\pi(\mathfrak{F})$.

Теперь по утверждению X.1.36 [7] имеет место равенство:

$$\psi(p)\circ((\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'})^*=(\psi(p)\circ(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'})^*.$$

Но тогда по утверждениям 1) и 2) леммы 4 получаем включение:

$$\mathfrak{Y}_*\subseteq((\psi(p)\circ(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'})^*)_*=(f(p))_*=f_*(p).$$

Отсюда по определению класса $f(p)$ имеем

$$\psi(p)\cap\mathfrak{Y}_*\subseteq f_*(p)\cap\psi(p)=(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'}$$

для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{X})$. Согласно утверждению 2) леммы 3, для всех $p\in\pi(\mathfrak{X})$ справедливо включение:

$$\psi(p)\mathfrak{S}_{p'}\cap\mathfrak{Y}_*\mathfrak{S}_{p'}\subseteq(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'}.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}(\psi(p)\mathfrak{S}_{p'}\cap\mathfrak{Y}_*\mathfrak{S}_{p'})\subseteq\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{p'}.$$

Но тогда

$$(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\psi(p)\mathfrak{S}_{p'})\cap(\mathfrak{Y}_*(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\mathfrak{S}_{p'}))\subseteq(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\mathfrak{S}_{p'}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{X})}\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\psi(p)\mathfrak{S}_{p'})\cap(\mathfrak{Y}_*(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\mathfrak{S}_{p'}))\subseteq\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{X})}\cap(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\mathfrak{S}_{p'}).$$

Заметим, что $\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\mathfrak{S}_{p'}=\mathfrak{S}_{\pi'(\mathfrak{X})}$. Кроме того, ввиду условия локальности класса Фиттинга $\mathfrak{X}$, имеем $\mathfrak{S}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{X})}\psi(p)\mathfrak{S}_{p'})=LR(\psi)=\mathfrak{X}$.

Таким образом,

$$\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y}_*\mathfrak{S}_{\pi'}\subseteq\mathfrak{S}_\pi\cap(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{\pi'}. \qquad (1)$$

Но так как $\mathfrak{S}_\pi$ – гомоморф, то по утверждению 2) леммы 2

$$\mathfrak{S}_\pi\cap(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{\pi'}\subseteq(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_\pi\cap(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{\pi'}. \qquad (2)$$

Отсюда по утверждению 3) леммы 3 имеем

$$(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_\pi\cap(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*\mathfrak{S}_{\pi'}=(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*(\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{S}_{\pi'})=(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})_*. \qquad (3)$$

С учетом утверждения 1) леммы 2 имеем $\mathfrak{Y}_* \subseteq \mathfrak{Y}_* \mathfrak{S}_{\pi'}$. Следовательно,

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}_* \subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}_* \mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Но ввиду включений (1) и (2) и равенства (3) получаем:

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}_* \mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y})_*.$$

Значит, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}_* \subseteq (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y})_*$ и равенство $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y})_*$ доказано. Лемма доказана.

Заметим, что в случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, лемма была доказана в работе [10].

3. Основной результат. В теории нормальных классов Фиттинга основополагающей является теорема Блессеноля – Гашюца [15] о том, что пересечение неединичных нормальных классов Фиттинга есть неединичный нормальный класс Фиттинга. Расширение данного результата на случай π-нормальных классов Фиттинга получено в лемме 16. Напомним, что нами установлено, что класс Фиттинга $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ является минимальным π-нормальным классом Фиттинга для всякого непустого множества $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

Следующая теорема представляет новую информацию о классе $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ и дает отрицательный ответ на указанный во введении вопрос о существовании в нем максимальных подклассов Фиттинга для случая, когда такие подклассы локальны.

Теорема. *Если π – непустое множество простых чисел, то в классе Фиттинга $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ нет нетривиальных максимальных локальных подклассов Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга и $\mathfrak{F} <\cdot (\mathfrak{S}_\pi)_*$. Так как $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ – минимальный π-нормальный класс Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subset (\mathfrak{S}_\pi)_*$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не является π-нормальным.

Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. Существует хотя бы один класс Фиттинга $\mathfrak{K}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}_*$.

Ввиду локальности $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{K}_*$ также локален. Следовательно, $(\mathfrak{K}_*)^* = \mathfrak{K}_*$. Кроме того, с учетом утверждения 2) леммы 4 получаем $(\mathfrak{K}_*)^* = \mathfrak{K}^*$. Поэтому $\mathfrak{K}_* = \mathfrak{K}^*$. Но по утверждению 2) леммы 4 также имеем $\mathfrak{K}_* \subseteq \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}^*$. Значит, $\mathfrak{K}_* = \mathfrak{K} = \mathfrak{K}^*$. Последнее означает, что класс Фиттинга $\mathfrak{K}$ локален. Так как $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то, ввиду утверждения 1) леммы 4, следует

$$\mathfrak{K}_* \subseteq (\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)_* \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)_*.$$

По условию $\mathfrak{F} <\cdot (\mathfrak{S}_\pi)_*$, и поэтому имеются две возможности: либо $\mathfrak{K}_* = (\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)_*$, либо $(\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)_* = (\mathfrak{S}_\pi)_*$.

Если $\mathfrak{K}_* = (\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)_*$, то по утверждению 2) леммы 4 получаем $\mathfrak{K}^* = (\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)^*$. Но $\mathfrak{N}_\pi$ – насыщенная радикальная формация. Следовательно, по утверждению 3) леммы 4 имеем $(\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)^* = \mathfrak{K}^*\mathfrak{N}_\pi$. Значит, с учетом леммы 14 и утверждения 2) леммы 2 получаем:

$$\mathfrak{S}_\pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_\pi^{\,n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}^*\mathfrak{N}_\pi^{\,n} = \mathfrak{K}^*.$$

Отсюда по утверждению 2) леммы 4 имеем $(\mathfrak{K}_*)^* = \mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$ и класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π-нормальным, что невозможно.

Рассмотрим вторую из имеющихся возможностей:

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)_* = (\mathfrak{S}_\pi)_*.$$

В этом случае, так как $\mathfrak{N}_\pi$=LR(f) для H-функции f такой, что

$$f(p)=\begin{cases}\mathfrak{N}_p, & \text{если } p\in\pi;\\ \varnothing, & \text{если } p\in\pi',\end{cases}$$

то $\mathfrak{N}_\pi$ – локальный класс Фиттинга. Кроме того, $\mathfrak{K}$ – локальный класс Фиттинга. Следовательно, по лемме 8 класс Фиттинга $\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi$ также является локальным. Отсюда по лемме 7 класс $\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi$ является классом Локетта. Тогда из $((\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)_*)^*=((\mathfrak{S}_\pi)_*)^*$ следует $(\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi)^*=\mathfrak{S}^*$ и $\mathfrak{K}\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по лемме 15 получаем $\mathfrak{K}\lhd\mathfrak{S}_\pi$.

Но $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ – минимальный π-нормальный класс Фиттинга, и поэтому $(\mathfrak{S}_\pi)_*\subseteq\mathfrak{K}$. Из последнего включения по утверждениям 1) и 2) леммы 4 имеем $((\mathfrak{S}_\pi)_*)_*=(\mathfrak{S}_\pi)_*\subseteq\mathfrak{K}_*=\mathfrak{F}$.

Получаем противоречие с максимальностью $\mathfrak{F}$ в $(\mathfrak{S}_\pi)_*$. Остается принять

Случай 2. $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{K}_*$ ни для какого класса Фиттинга $\mathfrak{K}$.

Так как $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{F}\subset(\mathfrak{S}_\pi)_*$, то справедливо включение

$$\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\cap(\mathfrak{S}_\pi)_*. \tag{4}$$

По условию класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален. Значит, ввиду леммы 8 класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ также локален. Покажем выполнимость условий леммы 17 для классов Фиттинга $\mathfrak{X}=\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{Y}=\mathfrak{S}_\pi$. Заметим, что класс $\mathfrak{Y}$ локален, так как определяется H-функцией φ такой, что

$$\varphi(p)=\begin{cases}\mathfrak{S}_p, & \text{если } p\in\pi;\\ \varnothing, & \text{если } p\in\pi'.\end{cases}$$

Так как классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_\pi$ локальны, то по лемме 8 их произведение – локальный класс Фиттинга.

Остается установить, что $\mathfrak{Y}$ ψ-инъекторно замкнут для H-функции ψ такой, что $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$=LR($\psi$). Пусть $G\in\mathfrak{Y}$ и V – $\psi(p)$-инъектор группы G для некоторого простого $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по определению $\psi(p)$-инъектора $V\in\psi(p)$.

Но по лемме 9 каждый локальный класс Фиттинга определяется полной внутренней H-функцией. Следовательно, без ограничения общности можем считать, что ψ – полная внутренняя функция класса $\mathfrak{X}$. Но тогда $V\in\psi(p)\subseteq\mathfrak{X}$.

Кроме того, $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{N}_\pi\subseteq\mathfrak{S}_\pi$ и поэтому $V\in\mathfrak{S}_\pi=\mathfrak{Y}$.

Итак, для классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ выполняются все условия леммы 17 и поэтому $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\cap(\mathfrak{S}_\pi)_*=(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\cap\mathfrak{S}_\pi)_*=(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)_*$. Следовательно, ввиду включения (4) получаем $\mathfrak{F}\subseteq(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)_*$.

Но по предположению $\mathfrak{F}\neq(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)_*$. Значит, $\mathfrak{F}\subset(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)_*\subseteq(\mathfrak{S}_\pi)_*$. Отсюда, ввиду максимальности класса $\mathfrak{F}$ в $(\mathfrak{S}_\pi)_*$, получаем $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)_*=(\mathfrak{S}_\pi)_*$. Но тогда по утверждению 2) леммы 4 следует $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^*=(\mathfrak{S}_\pi)^*$. Заметим, что $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ – локальные классы Фиттинга. Следовательно, по лемме 7 каждый из них является классом Локетта. Значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$ и поэтому по лемме 15 имеем $\mathfrak{F}\lhd\mathfrak{S}_\pi$. Но класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не π-нормален. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. Теорема доказана.

Если $\pi=\mathbb{P}$, то из теоремы получаем

Следствие 3. *В минимальном нормальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}_*$ нет нетривиальных максимальных локальных подклассов Фиттинга.*

Заметим, что теорема дает положительный ответ на указанную во введении проблему А. Н. Скибы (см. проблему Б) для случая класса Фиттинга всех p-групп, что подтверждает

Следствие 4. *В классе Фиттинга $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп не существует нетривиальных максимальных подклассов Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\pi=\{p\}$. По теореме заключаем, что в классе $(\mathfrak{N}_p)_*$ нет нетривиальных максимальных локальных подклассов Фиттинга. Но по утверждению 5) леммы 4 имеем $(\mathfrak{N}_p)_*=\mathfrak{N}_p$. Значит, в $\mathfrak{N}_p$ нет нетривиальных максимальных локальных подклассов.

Однако, все подклассы любого нильпотентного класса нильпотентны, а следовательно, по лемме 13, являются локальными.

Таким образом, класс Фиттинга $\mathfrak{N}_p$ не содержит нетривиальных максимальных подклассов Фиттинга.

В заключение отметим, что справедлив и усиленный вариант следствия 4, а именно: в классе $\mathfrak{N}_p$ нет нетривиальных подклассов Фиттинга. Действительно, если $(1)\neq\mathfrak{X}\subset\mathfrak{N}_p$, то существует p-группа $G\in\mathfrak{X}$, и по утверждению 2) леммы 10 $\{p\}=\pi(\mathfrak{X})=\mathrm{Char}(\mathfrak{X})$. Следовательно, по лемме 11 $\mathfrak{N}_p\subset\mathfrak{X}$ и подкласс $\mathfrak{X}$ тривиален.

Литература

1. Bryce R. A., Cossey J. // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. Vol. 10. P. 169–175.
2. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 14 / Институт математики СО РАН. Новосибирск, 1999.
3. Воробьев Н. Т. // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35, № 6. С. 485–487.
4. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск, 1997.
5. Воробьев Н. Т. // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. 1997. № 4 (6). С. 60–62.
6. Shpakov V. V., Vorob'ev N. N., Vorob'ev N. T. // Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae. 2003. Vol. 30. P. 167–171.
7. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
8. Lockett F. P. // Math. Z. 1974. Bd. 137. S. 131–136.
9. Bryce R. A., Cossey J. // Math. Z. 1975. Bd. 141, N 2. S. 99–110.
10. Воробьев Н. Т. // Матем. заметки. 1988. Т. 43, № 2. С. 161–168.
11. Воробьев Н. Т. // Матем. заметки. 1992. Т. 51, № 3. С. 3–8.
12. Воробьев Н. Т. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. № 6. С. 28–32.
13. Воробьев Н. Т. // Известия Гомельского гос. ун-та. 1999. Т. 1 (15). С. 8–13.
14. Lockett F. P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups. Ph. D. Thesis. Warwick, 1971.
15. Blessenohl D., Gaschütz W. // Math. Z. 1970. Bd. 148, N 1. S. 1–8.

N. V. SAVELYEVA, N. T. VOROB'EV

PROBLEM OF EXISTENCE OF MAXIMAL SUBCLASSES OF THE MINIMAL π-NORMAL FITTING CLASS

Summary

It is proved that there are no nontrivial maximal local Fitting subclasses in the minimal π-normal Fitting class $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ where π is a nonempty set of primes.