

УДК 512.542

О ПОСТРОЕНИИ КЛАССОВ ФИТТИНГА ЛОКАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМИ РАДИКАЛАМИ ГРУПП

канд. физ.-мат. наук В.Н. ЗАГУРСКИЙ
(Витебский государственный технологический университет);
д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Т. ВОРОБЬЕВ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Рассматривается развитие метода Хартли и разработка нового метода построения локальных классов Фиттинга посредством обобщения понятия функции Хартли. Отличие нового метода от известного подхода построения локальных классов Фиттинга состоит в том, что вместо функций Хартли применены локальные функции, значения которых в общем случае не являются классами Фиттинга. Эффективность такого подхода подтверждена описанием новых локальных заданий классов Фиттинга посредством локальных функций, определяемых радикалами групп. Среди таких локальных функций (нормально-наследственных и замкнутых относительно конечных прямых произведений) класса Фиттинга описана в терминах радикалов наибольшая. В частности, описана наибольшая локальная функция для классических объектов теории классов – классов нильпотентных групп. Установлено, что класс всех нильпотентных групп может быть определен по-новому такой локальной функцией, каждое значение которой определяются группами, радикалы Фиттинга которых примарны.

Введение. В теории конечных групп многие исследования структуры классов групп и канонических подгрупп связаны с изучением отображений $f: \{\text{простые числа}\} \rightarrow \{\text{классы групп}\}$, которые называют локальными групповыми функциями или просто локальными функциями. Такие отображения были впервые определены и классифицированы Л.А. Шеметковым в работах [1, 2].

Известно, что локальная формация может определяться различными типами локальных функций и возникает задача существования и описания наибольшей из них. Напомним, что если все значения локальной функции f являются формациями, то f называют локальным экраном или локальным спутником, а в случае, когда все значения f – классы Фиттинга, f называют функцией Хартли или H -функцией.

Первоначальные попытки исследования локальных функций формации были предприняты в работе Райта [3], где описан наибольший локальный спутник формации всех нильпотентных групп. Наибольший локальный спутник произвольной локальной формации в классе S всех конечных разрешимых групп описан Дерком [4]. В дальнейшем Н.Т. Воробьев [5], используя результаты Л.А. Шеметкова [6] о формационных нормализаторах, расширил результат Дерка на класс частично разрешимых групп. Вместе с тем в теории классов Фиттинга задача описания наибольшей локальной функции класса Фиттинга в общем виде до настоящего времени не рассматривалась. В этом направлении были получены только некоторые результаты [7], относящиеся к описанию наибольшей функции Хартли специального вида и [8] по описанию наибольшей функции произведения FN_π непустого класса Фиттинга F и класса N_π всех нильпотентных π -групп.

Основной результат настоящей работы – описание в терминах радикалов наибольшей локальной функции произвольного разрешимого локального класса Фиттинга F . В частности, установлено, что класс Фиттинга N всех нильпотентных групп определяется локальной функцией f такой, что f не является функцией Хартли и значения $f(p)$ для каждого простого p – классы всех тех и только тех групп, радикалы Фиттинга которых являются p -группами.

В данной работе нами рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Класс групп X называют:

- S_n -замкнутым, если $G \in X$ и $N \triangleleft G$, следует $N \in X$;
- N_0 -замкнутым, если из условия $G = N_1 N_2$, где $N_i \triangleleft G$ и $N_i \in X$ ($i = 1, 2$), следует $G \in X$;
- D_0 -замкнутым, если из $G_i \in X$ для любого $i = 1, \dots, r$, следует $G_1 \times \dots \times G_r \in X$.

Класс групп X называется классом Фиттинга, если он одновременно S_n -замкнут и N_0 -замкнут. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга X в любой группе G существует единственная X -максимальная нормальная подгруппа G_X группы G . Ее называют X -радикалом G . Через FH обозначают произведение классов Фиттинга F и H – класс всех тех групп G , для которых $G/G_F \in H$.

Известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна. Произведением $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ классов групп X и Y [9] называют класс всех тех групп G , которые имеют такую нормальную X -подгруппу N , что $G/N \in Y$. Если $X = \emptyset$ или $Y = \emptyset$, то полагают $\mathcal{X}\mathcal{Y} = \emptyset$.

Заметим также, что для любого непустого класса Фиттинга F класс F^* определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий F такой, что для любых групп G и H справедливо равенство: $(G \times H)_{F^*} = G_{F^*} \times H_{F^*}$. Класс Фиттинга F называется классом Локетта, если $F = F^*$.

Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [10]. Всякое отображение $f: P \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется функцией Хартли или H -функцией [11]. Через $\text{Supp}(f) = \{p \in P \mid f(p) \neq \emptyset\}$ обозначают носитель f .

Пусть $LR(f) = S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)N_p S_p)$, где π – носитель H -функции f . Класс Фиттинга F называют локальным [10], если $F = LR(f)$ для некоторой H -функции f . Функцию Хартли f класса Фиттинга F называют приведенной, если $f(p) \subseteq F$ для всех простых p . Любой локальный класс Фиттинга F определяется наибольшей приведенной H -функцией F такой, что $F(p)N_p = F(p) \subseteq F$ и $F(p)$ – класс Локетта для всех простых p [12].

В этой работе мы используем метод построения локальных классов Фиттинга с помощью конструкции $S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)N_p S_p)$ посредством локальных функций f , значения которых в общем случае не являются классами Фиттинга. Мы говорим, что класс Фиттинга F определяется локальной функцией f , если $F = S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)N_p S_p)$ и локальная функция f в общем случае не является H -функцией.

Если все значения локальной функции f являются S_n -замкнутыми классами групп, то функция f называется S_n -замкнутой. Локальная функция f называется $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутой, если класс $f(p)$ для каждого простого p одновременно нормально-наследственен (S_n -замкнут) и замкнут относительно конечных прямых произведений (D_0 -замкнут).

Следуя Л.А. Шеметкову [2], любое непустое множество Ω – локальных функций класса Фиттинга F , будем считать частично упорядоченным с отношением \leq , которое задается следующим образом. Если $f, h \in \Omega$, то $f \leq h$ в том и только в том случае, когда $f(p) \subseteq h(p)$ для всех простых p . Наибольший элемент множества Ω назовем наибольшей локальной функцией класса F .

Возникает общая задача существования и описания наименьших, наибольших локальных функций класса Фиттинга F . В настоящей работе эта задача решается для случая наибольшей нормально-наследственной и замкнутой относительно конечных прямых произведений ($\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутой) локальной функции. Кроме того, описаны новые локальные задания классов Фиттинга посредством локальных функций, определяемых радикалами групп.

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [2, 9].

ЛЕММА 1 [9]. Если группа N субнормальна в группе G и F – непустой класс Фиттинга, то $N_F = N \cap G_F$.

Для непустых классов Фиттинга F и X через F_X обозначим класс всех групп, F -радикалы которых содержатся в X .

ЛЕММА 2. Пусть F, X – непустые классы Фиттинга. Тогда:

- 1) класс групп F_X является S_n -замкнутым;
- 2) если F – класс Локетта, то класс групп F_X является D_0 -замкнутым;
- 3) если $XN_p = X$ для некоторого простого p , то $F_X N_p = F_X$.

Доказательство. Докажем вначале, что класс групп F_X является S_n -замкнутым.

Очевидно, что $F_X \subseteq S_n F_X$. Пусть $G \in S_n F_X$. Тогда существует группа $K \in F_X$ такая, что $G \triangleleft K$. Значит, по лемме 1 $G_F = G \cap K_F \subseteq K_F$. Кроме того, $G \cap K_F \triangleleft K$ и поэтому $G_F \triangleleft K_F \in X$. Следовательно, $G_F \in X$. Отсюда получаем, $G \in F_X$ и $S_n F_X \subseteq F_X$. Таким образом, класс F_X является S_n -замкнутым.

Докажем, что если F – класс Локетта, то класс групп F_X является D_0 -замкнутым.

Очевидно, что $F_X \subseteq D_0 F_X$. Пусть группа $G \in D_0 F_X$. Тогда в G существуют нормальные подгруппы G_i такие, что $G_i \in F_X$, где $i = 1, \dots, r$ и $G = G_1 \times \dots \times G_r$. Покажем, что $G \in F_X$. Так как F – класс Локетта, то $G_F = (G_1)_F \times \dots \times (G_r)_F$. Но $G_i \in F_X$ и, следовательно, $(G_i)_F \in X$ для $i \in \{1, \dots, r\}$. Поскольку X является классом Фиттинга и $(G_i)_F \in X$, то $G_F \in X$. Тогда $G \in F_X$ и $D_0 F_X \subseteq F_X$. Итак, класс F_X является D_0 -замкнутым.

Покажем теперь, что если $XN_p = X$ для некоторого простого p , то $F_X N_p = F_X$.

Очевидно, что $F_X \subseteq F_X N_p$. Пусть группа $G \in F_X N_p$. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \in F_X$, причем $G/K \in N_p$. Ввиду изоморфизма $G_F K/K \cong G_F / (G_F \cap K)$ и леммы 1 получаем $G_F K/K \cong G_F / K_F$. Но $G/K \in N_p$ и поэтому фактор $G_F K/K$ является p -группой. Следовательно, $G_F / K_F \in N_p$. Так как $K \in F_X$, то $K_F \in X$. Тогда $G_F \in XN_p = X$ и $G \in F_X$, что доказывает равенство $F_X N_p = F_X$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если непустой класс Фиттинга F определяется некоторой S_n -замкнутой локальной функцией f , то $\pi(F) = \text{Supp}(f)$.

Доказательство. Пусть $\pi = \text{Supp}(f)$. Так как $F = S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)N_p S_p)$, то $\pi(F) \subseteq \text{Supp}(f)$. Пусть $p \in \text{Supp}(f)$ и Z_p – циклическая группа простого порядка p .

Покажем, что $Z_p \in F$. Действительно, $f(p) \neq \emptyset$ и $(1) \subseteq f(p)$. Следовательно, учитывая определение произведения классов групп, $Z_p \in N_p \subseteq f(p)N_p \subseteq f(p)N_p S_p$. Если $q \in \text{Supp}(f)$ и $q \neq p$, то снова по определению произведения классов групп $Z_p \in N_p \subseteq S_q \subseteq N_q S_q \subseteq f(q)N_q S_q$.

Таким образом, $Z_p \in S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)N_p S_p) = F$. Это означает, что $p \in \pi(F)$ и $\pi(F) = \text{Supp}(f)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть F – локальный класс Фиттинга с наибольшей приведенной H -функцией F , $\pi = \text{Supp}(F)$. Если F определяется некоторой $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутой локальной функцией f , то $F \cap f(p) \subseteq F(p)$ для всех $p \in \pi$.

Доказательство. По лемме 3 $\pi = \text{Supp}(f)$ и, значит, $f(p) \neq \emptyset$ для всех $p \in \pi$.

Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in (F \cap f(p)) \setminus F(p)$ для некоторого p из π . Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{F(p)}$. Поэтому $G/G_{F(p)} \cong Z_q$ для $q \in \pi$ и $q \neq p$.

Далее положим $X = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где K – база регулярного сплетения X . Поскольку $F(p)$ – класс Локетта и $G \notin F(p)$, то ввиду X.2.1a [9] $X_{F(p)} = K_1$, где K_1 – база регулярного сплетения $X_1 = G_{F(p)} \wr Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, A.18.2d [9])

$$X / X_{F(p)} = X / K_1 \cong (G / G_{F(p)}) \wr Z_p.$$

Учитывая $G/G_{F(p)} \cong Z_q$, получаем $X / X_{F(p)} \cong Z_q \wr Z_p \notin S_{p'}$. Тогда $X / X_{F(p)} \notin S_{p'}$.

С другой стороны, поскольку $X = [K]Z_p$, то из свойств полупрямого произведения следует, что $X/K \cong Z_p \in N_p$. Но $G \in f(p)$ и класс $f(p)$ является D_0 -замкнутым, поэтому $K \in f(p)$. Также по лемме 5 [13] локальный класс Фиттинга F является классом Локетта и $G \in F$, значит, $K \in F$. Тогда по определению произведения классов групп, получим $X \in FN_p \cap f(p)N_p \subseteq FN_p \cap f(p)N_p S_{p'}$.

Поскольку F определяется локальной функцией f , то

$$\begin{aligned} X &\in (S_\pi \cap f(p)N_p S_{p'} \cap (\bigcap_{r \in \pi} f(r)N_r S_{r'}))N_p \cap f(p)N_p S_{p'} = \\ &= S_\pi \cap f(p)N_p S_{p'} N_p \cap (\bigcap_{r \in \pi} f(r)N_r S_{r'}) \cap f(p)N_p S_{p'} = \\ &= S_\pi \cap f(p)N_p S_{p'} \cap (\bigcap_{r \in \pi} f(r)N_r S_{r'}) = F. \end{aligned}$$

Таким образом, $X \in F = LR(F)$ и, значит, $X / X_{F(p)} \in S_{p'}$. Получили противоречие с тем, что $X / X_{F(p)} \notin S_{p'}$. Это завершает доказательство того, что $F \cap f(p) \subseteq F(p)$ для всех $p \in \pi$.

Лемма доказана.

Новые локальные задания и наибольшую $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутую локальную функцию класса Фиттинга в терминах радикалов описывает

ТЕОРЕМА. Пусть F – локальный класс Фиттинга с H -функцией f и наибольшей приведенной H -функцией F , $\pi = \text{Supp}(F)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) F определяется S_n -замкнутой локальной функцией g такой, что

$$g(p) = \begin{cases} F_{f(p)N_p}, & \text{при } p \in \pi; \\ \emptyset & , \text{при } p \in \pi' \end{cases}$$

и $g(p) = D_0 g(p)$, $g(p) = g(p)N_p$ для всех $p \in \pi$;

2) F определяется наибольшей $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = F_{F(p)}$ для всех $p \in \pi$ и $x(p) = \emptyset$ для всех $p \in \pi'$.

Доказательство. Так как по лемме 5 [13] локальный класс Фиттинга F является классом Локетта, то по лемме 2 локальная функция g является S_n -замкнутой, $g(p) = D_0 g(p)$ и $g(p) = g(p)N_p$ для всех $p \in \pi$.

Докажем, что $F = M$, где $M = S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} g(p)N_p S_{p'})$.

Покажем, что $F \subseteq M$. Пусть $G \in F$. Тогда $G \in f(p)N_p S_{p'}$ для любого простого p из множества π и $G / G_{f(p)} \in N_p S_{p'}$. Но $(G_{f(p)})_F \triangleleft G_{f(p)} \in f(p)$ – класс Фиттинга, и поэтому $(G_{f(p)})_F \in f(p) \subseteq f(p)N_p$. Следовательно, $G_{f(p)} \in g(p)$. Далее, по определению произведения классов групп получаем, что $G \in g(p)N_p S_{p'}$ для любого p из π и поэтому $G \in S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} g(p)N_p S_{p'}) = M$. Значит, $F \subseteq M$.

Докажем обратное включение $M \subseteq F$. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in M \setminus F$. Легко видеть, что группа G комонотична и ее комонотит G_F . Учитывая $G \in M$, получаем $G \in g(p)N_p S_{p'}$ для всех $p \in \pi$. По определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа N из G такая, что $N \in g(p)$ и $G/N \in N_p S_{p'}$.

Покажем, что $G \in f(p)N_p S_{p'}$. Так как G_F – комонотит группы G , то либо $N \leq G_F$, либо $N = G$.

Пусть $N \leq G_F$. Тогда, учитывая $N = N_F$ и $N \in g(p)$, имеем $N = N_F \in f(p)N_p$. Значит, $G/N \in N_p S_{p'}$ и $N \in f(p)N_p$. Следовательно, по определению произведения классов групп получим, что $G \in f(p)N_p S_{p'}$.

Пусть $N = G$. Так как $N \in g(p)$, то $G_F \in f(p)N_p$. Поэтому либо $G_F = G_{f(p)N_p}$, либо $G = G_{f(p)N_p}$.

Если $G = G_{f(p)N_p}$, то $G \in f(p)N_p \subseteq f(p)N_p S_{p'}$.

Пусть $G_F = G_{f(p)N_p}$. Так как G_F – комонотит группы G , то $G/G_F \cong Z_q$ для $q \in \pi$. Значит, $G/G_{f(p)N_p} \cong Z_q$ для $q \in \pi$. Если $q = p$, то $G \in f(p)N_p \subseteq f(p)N_p S_{p'}$. Если $q \neq p$, то $G \in f(p)N_p N_q \subseteq f(p)N_p S_{p'}$.

Таким образом, $G \in f(p)N_p S_{p'}$ для любого простого p из π . Кроме того, $G \in S_\pi$ и поэтому $G \in S_\pi \cap (\bigcap_{p \in \pi} f(p)N_p S_{p'}) = F$. Получили противоречие с выбором G . Значит, $M \subseteq F$ и $F = M$.

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение.

Согласно первому утверждению теоремы класс Фиттинга F определяется $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = F_{F(p)}$ для всех $p \in \pi$ и $x(p) = \emptyset$ для всех $p \in \pi'$.

Покажем, что x – наибольшая $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутая локальная функция класса F . Пусть h – произвольная $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутая локальная функция, определяющая класс F .

Покажем, что $h(p) \subseteq x(p)$ для любого p из π . Если $G \in h(p)$, то $G_F \in F \cap h(p)$. Но по лемме 4 $F \cap h(p) \subseteq F(p)$ и поэтому $G_F \in F(p)$. Следовательно, $G \in x(p)$ и $h(p) \subseteq x(p)$ для любого p из π . Это означает, что $h \leq x$. Второе утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.

В частности, справедливо

СЛЕДСТВИЕ [8]. Класс Фиттинга N всех нильпотентных групп определяется наибольшей $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = (G \mid G_N \in N_p)$ и $x(p) = x(p)N_p$ для всех простых p .

Очевидно, что каждая H -функция класса Фиттинга F является локальной функцией. В связи с этим возникает следующий вопрос: существуют ли классы Фиттинга, определяемые локальными функциями, которые не являются H -функциями?

Доказательство того, что наибольшая $\langle S_n, D_0 \rangle$ -замкнутая локальная функцией x класса Фиттинга N всех нильпотентных групп не является H -функцией и тем самым утвердительный ответ на указанный выше вопрос дает теорема [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628 – 648.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Wright, C.R. B. On screens and L-izers of Finite Solvable Groups / C.R. Wright // Math. Z. – 1970. – Vol. 115, № 4. – P. 273 – 282.
4. Doerk, K. Die maximale lokale Erklärung einer gessättigten Formation / K. Doerk // Math. Z. – 1973. – Bd. 133, № 2. – S. 33 – 135.
5. Воробьев, Н.Т. Максимальные экраны и характеристика f -проекторов / Н.Т. Воробьев // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22, № 1. – С. 9 – 11.
6. Шеметков, Л.А. Факторизация непростых конечных групп / Л.А. Шеметков // Алгебра и логика. – 1976. – Т. 15, № 6. – С. 684 – 715.
7. Воробьев, Н.Т. О максимальных и минимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. – 1992. – № 7. – С. 60 – 69.
8. Загурский, В.Н. Максимальные функции Хартли классов Фиттинга / В.Н. Загурский, Н.Т. Воробьев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 2. – С. 46 – 50.
9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
10. Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193 – 207.
11. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. журнал. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296 – 1302.
12. Воробьев, Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н.Т. Воробьев // Изв. Гомельского гос. ун-та. – 1999. – Т. 1(15). – С. 8 – 3.
13. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161 – 168.
14. Загурский, В.Н. О квазилокальных функциях Хартли / В.Н. Загурский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 26 – 27.

Поступила 28.05.2008