

УДК 512.542

Максимальные по сильному π -вложению классы Фиттинга

Н. В. САВЕЛЬЕВА, Н. Т. ВОРОВЬЕВ

Введение

Ряд известных результатов Брайса, Косси [1], Макана [2], Кусака [3], Дерка, Порты [4] был связан с применением отношения порядка " $\ll$ " для характеристики перестановочных и нормальных классов Фиттинга, а также для описания инъекторов конечных разрешимых групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют (см. IX.1.17 [5]) сильно вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ (обозначают $\mathfrak{F} \ll \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{H}$ -инъектор каждой конечной разрешимой группы G содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор этой группы.

Однако задача описания максимальных по сильному вложению подклассов Фиттинга в некотором классе Фиттинга до настоящего времени остается трудной проблемой.

Интерес к решению такой задачи обусловлен, прежде всего, результатом Брайса-Косси [6] о том, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ максимален (по включению) в классе Фиттинга $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{S}$, и следующей проблемой Дерка-Хоукса

Проблема (X.4, с. 735 [5]). Верно ли, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ максимален по сильному вложению в $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{S}$?

Положительное решение указанной проблемы было получено Локеттом [7] (см. также X.4.27 [5]) в случае, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормально погруженным.

Заметим сложность аналогичной задачи и в теории формаций конечных разрешимых групп, что подтверждают работы Клайна [8] и Дарси [9], в которых на множестве разрешимых локальных формаций были описаны максимальные по сильному вложению локальные подформации лишь в локальных формациях специального вида (см., например, IV.5.20 [5]). Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – локальные формации, то $\mathfrak{F}$ называют сильно вложенной в $\mathfrak{H}$, если для любой конечной разрешимой группы G ее $\mathfrak{H}$ -проектор содержит $\mathfrak{F}$ -проектор этой группы.

Вместе с тем, возможность расширения известных характеристик нормальных классов Фиттинга в $\mathfrak{S}$ на случай классов Фиттинга, нормальных в классе $\mathfrak{S}_\pi$, предложенная Дерком и Хоуксом в X.3 [5] (с. 708), с необходимостью приводит к следующим понятиям и обобщенному варианту указанной проблемы.

Определение. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} \neq (1)$ назовем:

- (1) нормальным в классе $\mathfrak{S}_\pi$ или просто π -нормальным (обозначим $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$), если для любой π -группы G ее $\mathfrak{F}$ -радикал является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой группы G ;
- (2) сильно π -вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ (обозначим $\mathfrak{F} \ll_\pi \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{H}$ -инъектор каждой конечной разрешимой π -группы G содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор этой группы.

Естественна следующая постановка указанного выше вопроса Дерка-Хоукса для случая π -нормальных классов Фиттинга.

Вопрос. Является ли максимальный в $\mathfrak{S}_\pi$ по сильному π -вложению подкласс Фиттинга π -нормальным?

Утвердительный ответ на данный вопрос для нормально π -погруженных классов Фиттинга — основной результат настоящей работы.

Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы. В определениях и обозначениях мы следуем [5].

1. Предварительные сведения

Классом Фиттинга называется нормально наследственный класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Если $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, то подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют ее $\mathfrak{F}$ -радикалом, если она является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы G .

Некоторые известные свойства субнормальных и нормальных подгрупп представляет

Лемма 1.1 (А.2.1 (b), IX.1.1 (a) [5]). Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $N \trianglelefteq G$ и $H \leq G$, то $NN/N \cong H/H \cap N$;
- 2) если $N \triangleleft \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют $\mathfrak{F}$ -инъектором G , если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой N для любой $N \triangleleft \triangleleft G$.

Произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс всех таких групп G , для которых $G/G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{H}$.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом (или Q -замкнутым классом), если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Гомоморф называют насыщенным, если из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, следует $G \in \mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

- 1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;
- 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Сформулируем некоторые свойства произведения классов Фиттинга в виде лемм:

Лемма 1.2 (IX.1.11, IX.1.12 [5]). Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\mathfrak{H} \neq \emptyset$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$;
- 2) если $\mathfrak{H}$ — гомоморф и $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$;
- 3) операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Лемма 1.3. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — классы Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:

- 1) (лемма 4 [10]) если $\mathfrak{X}$ — гомоморф и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$;
- 2) (лемма 4 [10]) если $\mathfrak{X}$ — формация, то $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$;
- 3) если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, то $\mathfrak{X}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{X}\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X}\mathfrak{F}_2$.

Доказательство третьего утверждения осуществляется непосредственной проверкой.

Напомним, что операторы ** и * определены Локеттом [11] следующим образом: для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ посредством оператора ** сопоставляется класс $\mathfrak{F}^*$ как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и $\mathfrak{H}$ справедливо равенство $(G \times \mathfrak{H})_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times \mathfrak{H}_{\mathfrak{F}^*}$.

Класс $\mathfrak{F}_*$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$.

Приведем известные свойства операторов Локетта ** и * .

Лемма 1.4. [5, 10, 12]. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) (лемма X.1.8 (b) [5], следствие 3.5 [12]) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{H}_*$;
- 2) (теорема X.1.15 [5]) $(\mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп;
- 3) (теорема X.1.13 [5]) имеет место равенство $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}^*$;
- 4) (лемма 3 [10]) если $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта. Секцией Локетта непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется множество всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Секцию Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ обозначают $\text{Locksec}(\mathfrak{F})$ [11].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Для класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ определяется множество $\pi(\mathfrak{X}) = \cup\{p \in \mathbb{P} : p \mid |G|\}$. Напомним, что через $\mathfrak{N}_p$ обозначают класс всех p -групп.

Лемма 1.5. Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $p \in \pi(\mathfrak{X})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$,

Доказательство следует из X.1.23 [5] и утверждения 2) леммы 1.4.

Напомним также определение некоторых известных операторов замыкания (см. II.1.5 [5]). Всякое отображение множества всех классов в групп в себя называется операцией на классах групп. Результат операции U , примененной к классу $\mathfrak{X}$, обозначается через $U\mathfrak{X}$.

- 1) $G \in S\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G вкладывается в качестве подгруппы в некоторую $\mathfrak{X}$ -группу;
- 2) $G \in N_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда из того, что G имеет нормальные $\mathfrak{X}$ -подгруппы N_1 и N_2 , следует, что $N_1N_2 \in \mathfrak{X}$;
- 3) $G \in Q\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G является гомоморфным (эпиморфным) образом некоторой $\mathfrak{X}$ -группы.

Лемма 1.6 (см. [11] или X.1.25 [5]). Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является Q -замкнутым, то $\mathfrak{F}$ – класс Локетта.

Лемма 1.7. Произведение двух S -замкнутых (Q -замкнутых) классов Фиттинга является S -замкнутым (Q -замкнутым) классом Фиттинга.

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 1.8 (X.3.7 [5]). Пусть π – непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга π -групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{F}$ π -нормален;
- 2) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$;
- 3) $G/G_\mathfrak{F}$ – абелева для всех $G \in \mathfrak{S}_\pi$.

Напомним, что подгруппа U группы G называется пронормальной (обозначают $U \text{ pr } G$), если для всех $g \in G$ подгруппы U и U^g сопряжены в объединении $\langle U, U^g \rangle$.

Для доказательства вспомогательных результатов нам также понадобится понятие холловской системы группы G . Холловской системой группы G называется (см. I.4.1 [5]) множество Σ ее холловских подгрупп, удовлетворяющее следующим двум требованиям:

HS1. Σ содержит в точности одну холловскую π -подгруппу G_π для любого $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

HS2. Если группы $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$.

Если Ξ – множество подгрупп группы G и $L \leq G$, то через $\Xi \cap L$ обозначают (см. I.4.15 [5]) такое множество подгрупп группы G , что $\Xi \cap L = \{X \cap L \mid X \in \Xi\}$.

Пусть Σ – холловская система группы G и $L \leq G$. Легко видеть, что в общем случае $\Sigma \cap L$ не является холловской системой группы L . Но если $\Sigma \cap L$ – холловская система группы L , то говорят, что Σ редуцирует в L и обозначают $\Sigma \searrow L$.

Нормализатором холловской системы Σ группы G называют подгруппу

$$N_G(\Sigma) = \{g \in G : H = H^g \text{ для всех } H \in \Sigma\}.$$

Системным нормализатором группы G называется ее подгруппа вида $N_G(\Sigma)$ для некоторой холловской системы $\Sigma \in \mathbf{H}(G)$, где $\mathbf{H}(G)$ обозначает множество холловских систем.

Напомним, что подгруппа U группы G называется Ξ -перестановочной (этот факт обозначают $X \perp \Xi$), если $UX = XU$ для всех $X \in \Xi$. Подгруппу H группы G называют системно перестановочной, если H является Σ -перестановочной для некоторой $\Sigma \in \mathbf{H}(G)$.

Основные свойства холловской системы группы G , которые мы будем далее использовать, приведем в виде следующей леммы:

Лемма 1.9 [5]. Пусть Σ – любая холловская система группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) (1.4.21 [5]) если $L \triangleleft \triangleleft G$, то $\Sigma \setminus L$;
- 2) (1.4.22 (а) [5]) если $U \leq G$, $V \leq G$ и $\Sigma \setminus U$, $\Sigma \setminus V$, то $\Sigma \setminus U \cap V$;
- 3) (1.6.8 [5]) если $H \text{ рг } G$ и $\Sigma \setminus H$, то $\Sigma \setminus N_G(H)$ и $N_G(\Sigma) \leq N_G(H)$.

2. π -Нормальные классы

Для доказательства основного результата мы изучим вначале свойства π -нормальных классов Фиттинга.

Лемма 2.1. Пусть π – непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π -нормальным в точности тогда, когда $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{S}_\pi$ и $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 1.8 факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A}_\pi$, где $\mathfrak{A}_\pi$ – формация всех абелевых π -групп. Следовательно, по определению произведения классов Фиттинга $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}_\pi$. Очевидно, $\mathfrak{A}_\pi \subseteq \mathfrak{N}_\pi$, и поэтому $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$.

Итак, $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, то $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Кроме того, подгруппа $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}_\pi$, и равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$ доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$ и G – произвольная π -группа. Тогда по определению произведения классов Фиттинга $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_\pi$.

Теперь, если V – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G , то $V/G_{\mathfrak{F}} \leq G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_\pi$. Значит, $V/G_{\mathfrak{F}} \triangleleft G/G_{\mathfrak{F}}$ и тогда $V \triangleleft \triangleleft G$. Учитывая утверждение 2) леммы 1.1, получаем $V = V_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap V$.

Таким образом, $V \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и по определению $\mathfrak{F}$ -радикала $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$. Следовательно, $V = G_{\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{F}$ -инъектор любой π -группы G является ее нормальной подгруппой. Значит, $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа для всех $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный класс Фиттинга. Тогда для N_0 -замкнутого класса $\mathfrak{F}$ определяется (см. X.3.4 (b) [5]) класс $\mathfrak{X}/\mathfrak{F}$ следующим образом:

$$\mathfrak{X}/\mathfrak{F} = (G/G_{\mathfrak{F}} : G \in \mathfrak{X}).$$

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – нетривиальный класс Фиттинга. Тогда каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для π -нормальности $\mathfrak{F}$:

- 1) $S(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{S}_\pi$;
- 2) $Q(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{S}_\pi$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 1.8 для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$ факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}}$ – абелева. Но по определению (см. X.3.4 (b) [5]) $\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F} = (G/G_{\mathfrak{F}} : G \in \mathfrak{S}_\pi)$, и поэтому $\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}_\pi$. Отсюда ввиду того, что S – оператор замыкания,

следует $S(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) \subseteq S\mathfrak{A}_\pi = \mathfrak{A}_\pi \neq \mathfrak{S}_\pi$. Аналогично заключаем $Q(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) \subseteq Q\mathfrak{A}_\pi = \mathfrak{A}_\pi \neq \mathfrak{S}_\pi$.

Пусть теперь выполняется условие 1) и класс $\mathfrak{F}$ не является π -нормальным. Тогда по лемме 1.8 существует группа $G \in \mathfrak{S}_\pi$ такая, что $G/G_\mathfrak{F}$ – неабелева.

Пусть $H \in \mathfrak{S}_\pi$ и $W = G \wr H$ – регулярное сплетение группы G с группой H . Обозначим через $U = HW_\mathfrak{F}/W_\mathfrak{F}$. Тогда $HU \leq W/W_\mathfrak{F}$. По утверждению 1) леммы 1.1 $U \cong H/W_\mathfrak{F} \cap H$.

Так как $G^\sharp \cap H = 1$ и по утверждению X.2.2 (а) [5] $W_\mathfrak{F} < G^\sharp$, то $W_\mathfrak{F} \cap H = 1$. Следовательно, $H/W_\mathfrak{F} \cap H \cong H$ и поэтому $U \cong H$.

Так как $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и $H \in \mathfrak{S}_\pi$, то $W = G \wr H \in \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда ввиду того, что $\mathfrak{S}_\pi$ – формация, получаем $W/W_\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}_\pi$. Значит, по определению класса $\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}$ имеем $W/W_\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}$.

Следовательно, из $H \cong U$ и $U \leq W/W_\mathfrak{F}$ по определению оператора замыкания S получаем $H \in S(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F})$. Но $S(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, ввиду произвольности выбора H имеем $S(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}_\pi$. Полученное противоречие с условием 1) доказывает, что $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$.

Пусть теперь выполняется условие 2) и класс $\mathfrak{F}$ не нормален в $\mathfrak{S}_\pi$. Аналогично, как и в предыдущем случае, пусть $U = HW_\mathfrak{F}/W_\mathfrak{F}$. Так как $U = U/1$, то $U/1 \leq W/W_\mathfrak{F}$ и $U \cong H$. Тогда $W/W_\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}$, и по определению оператора замыкания Q означает $H \in Q(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F})$.

С учетом того, что $Q(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, ввиду произвольности выбора группы H имеем $Q(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}_\pi$ – противоречие с условием 2). Следовательно, $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Лемма доказана.

В работе Бейдлемана [13] исследовались произведения нормальных классов Фиттинга, удовлетворяющих свойству (α) .

Напомним, что ненормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию (α) , если для всех классов Фиттинга $\mathfrak{Y}$ таких, что $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ нормален, класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ нормален.

Естественно расширение этого понятия в смысле следующего определения.

Определение 2.3. Пусть π – непустое множество простых чисел и класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ не является π -нормальным. Тогда для $\mathfrak{X}$ выполняется условие (α_π) , если для всех классов Фиттинга $\mathfrak{Y}$ таких, что $\mathfrak{Y}\mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$, всегда следует, что $\mathfrak{Y} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$.

Теорема 2.4. Пусть $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{S}_\pi$ – класс Фиттинга. Если $\mathfrak{X}$ является насыщенным гомоморфом, то $\mathfrak{X}$ удовлетворяет свойству (α_π) .

Доказательство. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ Q -замкнут, то по лемме 1.6 $\mathfrak{X}$ является классом Локетта, т.е. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^*$. Теперь, если $\mathfrak{X}$ π -нормален, то $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{X}$. Последнее противоречит условию $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{S}_\pi$. Итак, класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ не является π -нормальным.

Пусть теперь $\mathfrak{Y}$ – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{Y}\mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 2.1 $(\mathfrak{Y}\mathfrak{X})\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. Ввиду ассоциативности умножения классов Фиттинга получаем $\mathfrak{S}_\pi = (\mathfrak{Y}\mathfrak{X})\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{Y}(\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi)$. Так как $\mathfrak{X}$ – Q -замкнут, то по утверждению 2) леммы 1.7 произведение классов Фиттинга $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi$ является также Q -замкнутым классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 2.1 получаем $\mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по лемме 1.8 $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Но ввиду леммы 1.6 $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^*$ и в этом случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\pi \neq \mathfrak{S}_\pi$.

С учетом выбора $\mathfrak{Y}$ условие $\mathfrak{Y}\mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$ по лемме 1.8 означает $(\mathfrak{Y}\mathfrak{X})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Но $\mathfrak{X}$ – насыщенный гомоморф. Отсюда ввиду утверждения 4) леммы 1.4 получаем $(\mathfrak{Y}\mathfrak{X})^* = \mathfrak{Y}^*\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{Y}^*\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$.

Теперь по определению произведения классов Фиттинга имеем $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Заметим, что $(G/G_{\mathfrak{F}} | G \in \mathfrak{S}_\pi) = \mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}^*$. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{X}$ и по определению оператора замыкания Q имеем $Q(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}^*) \subseteq Q\mathfrak{X}$. Но по условию $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда ввиду Q -замкнутости класса $\mathfrak{X}$ получаем $Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \neq \mathfrak{S}_\pi$.

Таким образом, $Q(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}^*) \neq \mathfrak{S}_\pi$. По утверждению 2) леммы 2.2 это означает $\mathfrak{F}^* \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда по лемме 1.8 $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{X}$ удовлетворяет свойству (α_π) . Теорема доказана.

3. Свойства сильного π -вложения

В настоящем разделе изучим свойства отношения " $\ll$ ". Для этой цели мы будем использовать конструкцию класса Фиттинга, предложенную Локеттом [14] (см. также IX.1.14 [5]), в универсуме $\mathfrak{S}_\pi$.

Пусть $p \in \pi \subseteq \mathbb{P}$, $p^* = p' \cap \pi$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда через $L_p(\mathfrak{F})$ обозначим класс групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$ таких, что $\mathfrak{F}$ -инъекторы G имеют p^* -индекс в группе G для любого $p \in \pi$. Доказательство следующей леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $p \in \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $L_p(\mathfrak{F})$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{F} \subseteq L_p(\mathfrak{F})$.

Определение 3.2. Пусть U – подгруппа некоторой π -группы G ($p \in \pi \subseteq \mathbb{P}$), тогда

1) U назовем нормально p -погруженной в $G \in \mathfrak{S}_\pi$, если силовская p -подгруппа группы U является силовской p -подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы G .

2) U назовем нормально π -погруженной в $G \in \mathfrak{S}_\pi$ (обозначим $U \pi$ -не G), если U является нормально p -погруженной в G для всех простых чисел $p \in \pi$.

Напомним, что U называется нормально погруженной в G (обозначают $U \pi$ -не G), если U является нормально p -погруженной в G для всех $p \in \mathbb{P}$. Примерами нормально погруженных подгрупп в G являются холловские подгруппы нормальной группы G .

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем нормально погруженным в $\mathfrak{S}_\pi$ или нормально π -погруженным (см. [15] или IX.3.3 (b) [5]), если для всех π -групп G ее $\mathfrak{F}$ -инъекторы являются нормально π -погруженными подгруппами G .

Следуя IX.3.20 [5], для класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ определим понятия границы $b_\pi(\mathfrak{F})$ класса и ассоциированного класса $a_\pi(\mathfrak{F})$. Границей класса $\mathfrak{F}$ назовем класс

$$b_\pi(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{S}_\pi \setminus \mathfrak{F} : \text{если } G \neq K \triangleleft \triangleleft G, \text{ то } K \in \mathfrak{F}).$$

Напомним, что неединичную группу G называют одноглавой, если она имеет в точности одну максимальную нормальную подгруппу. Ассоциированным классом $a_\pi(\mathfrak{F})$ класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем класс, состоящий из всех одноглавых групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$ с тем свойством, что ее максимальная нормальная подгруппа содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G .

Свойство нормальной π -погруженности классов Фиттинга тесно связано со свойством π -перестановочности.

Определение 3.3. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем π -перестановочным, если $\mathfrak{F}$ -инъекторы π -группы G являются системно перестановочными подгруппами в G для всех $G \in \mathfrak{S}_\pi$.

Лемма 3.4. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F}$ является π -перестановочным. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathfrak{F} \ll_\pi \mathfrak{H}$;

$$2) b_{\pi}(\mathfrak{H}) \subseteq a_{\pi}(\mathfrak{F}).$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$ и G – произвольная группа из $b_{\pi}(\mathfrak{H})$. Тогда по определению границы класса $\mathfrak{H}$ группа G является одноглавой и ее $\mathfrak{F}$ -инъектор $W = G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, если V – $\mathfrak{F}$ -инъектор G , то по условию $V \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. А это означает, что $G \in a_{\pi}(\mathfrak{F})$ и включение $b_{\pi}(\mathfrak{H}) \subseteq a_{\pi}(\mathfrak{F})$ доказано.

2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что утверждение 2) леммы неверно. Выберем группу G минимального порядка с тем свойством, что ее $\mathfrak{F}$ -инъектор не содержится в ее $\mathfrak{H}$ -инъекторе.

Пусть Σ – холловская система группы G и пусть V и W – соответственно $\mathfrak{F}$ -инъектор и $\mathfrak{H}$ -инъектор группы G такие, что $\Sigma \searrow V$ и $\Sigma \searrow W$. Ясно, что $V \not\leq W$ за счет выбора G .

Пусть $M \triangleleft G$. Тогда по утверждению X.1.3 (a) [5] получаем, что $V \cap M$ и $W \cap M$ – соответственно $\mathfrak{F}$ -инъектор и $\mathfrak{H}$ -инъектор группы M . Так как $M \triangleleft G$, то по утверждению 1) леммы 1.9 имеем $\Sigma \searrow M$ и тогда $\Sigma \cap M$ – холловская система группы M . Из условий $\Sigma \searrow V$ и $\Sigma \searrow M$ по утверждению 2) леммы 1.9 получаем $\Sigma \searrow (V \cap M)$. Отсюда по определению редуцирования $\Sigma \cap (V \cap M) = (\Sigma \cap M) \cap (V \cap M)$ – холловская система группы M и $(\Sigma \cap M) \searrow (V \cap M)$. Аналогично можно показать, что $(\Sigma \cap M) \searrow (W \cap M)$.

Заметим, что $V \cap M$ и $W \cap M$ по утверждению IX.1.5 (a) [5]. Значит, $|V \cap M| < |G|$ и $|W \cap M| < |G|$. Отсюда с учетом выбора группы G следует $V \cap M \leq W \cap M$.

Если $V \leq M$, то $V = V \cap M \leq W \cap M \leq W$, т.е. $V \leq W$ – противоречие. Значит, $V \not\leq M$.

Покажем, что G – одноглавая группа. Предположим, что в G наряду с M существует, по крайней мере, еще одна максимальная нормальная подгруппа N , отличная от M . Аналогично можно показать, что $V \cap N \leq W \cap N$ и $V \not\leq N$.

Если $(V \cap M)(V \cap N) = V$, то ввиду $V \cap M \leq W \cap M \leq W$ и $V \cap N \leq W \cap N \leq W$ имеем $V \subseteq (V \cap M)(V \cap N) \leq W$ – противоречие с условием $V \not\leq W$. Значит, $(V \cap M)(V \cap N) \neq V$.

Так как $M, N \triangleleft G$, то G/M и G/N – простые циклические группы простого порядка. Кроме того, так как $M, N < G$ и $V \not\leq M$, $V \not\leq N$, то $VN = G = VM$. Поэтому с учетом утверждения 1) леммы 1.1 имеем $V/(V \cap N) \cong VN/N = G/N \cong Z_p$ и $V/(V \cap M) \cong VM/M = G/M \cong Z_q$, где $p, q \in \pi$. Следовательно, $(V \cap N) \triangleleft V$ и $(V \cap M) \triangleleft V$.

Если $V \cap N \neq V \cap M$, то $(V \cap N)(V \cap M) = V$, что невозможно. Остается признать $V \cap N = V \cap M$, что влечет $p = q$.

Обозначим $R = M \cap N$. Заметим, что $R \triangleleft G$ и $VR/R \leq G/R$. Тогда $(G/R)/(N/R) \cong G/N \cong Z_p$. Но по утверждению 1) леммы 1.1 $N/R = N/(M \cap N) \cong NM/M$. Кроме того, из $NM = G$ получаем $N/R \cong G/M \cong Z_p$. Значит, $|G/R| = p^2$ и G/R – абелева группа.

Итак, $VR/R \leq G/R \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$. Значит, $VR/R \triangleleft \triangleleft G/R$. Отсюда $VR \triangleleft \triangleleft G$. Кроме того, $R \triangleleft G$ и V ирредуцируема по утверждению IX.1.5 (a) [5]. Значит, VR ирредуцируема по утверждению I.6.3 (d) [5] дают $VR \triangleleft G$.

Заметим, что $V \leq W_1 \leq G_{\mathfrak{H}}V$. Отсюда ввиду $G_{\mathfrak{H}}G_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}}$ следует $G_{\mathfrak{H}}V \leq G_{\mathfrak{H}}W_1 \leq G_{\mathfrak{H}}V$. Это означает, что $G_{\mathfrak{H}}V = G_{\mathfrak{H}}W_1$.

Покажем, что $G_{\mathfrak{H}}V \leq W_1$. Так как радикал содержится в инъекторе, то $(G_{\mathfrak{H}}V)_{\mathfrak{H}} \leq W_1$. С другой стороны, из $G_{\mathfrak{H}} \triangleleft G$ ввиду $G_{\mathfrak{H}}V < G$ следует $G_{\mathfrak{H}} \triangleleft G_{\mathfrak{H}}V$. Таким образом, $(G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{H}} \leq (G_{\mathfrak{H}}V)_{\mathfrak{H}}$, т.е. $G_{\mathfrak{H}} \leq (G_{\mathfrak{H}}V)_{\mathfrak{H}} \leq W_1$. Значит, $G_{\mathfrak{H}} \leq W_1$. Отсюда $G_{\mathfrak{H}}W_1 = W_1$. Но,

как показано выше, $G_{\mathfrak{H}}W_1 = G_{\mathfrak{H}}V$. Следовательно, $G_{\mathfrak{H}}V = W_1$. Так как $W_1 \in \mathfrak{H}$, то $G_{\mathfrak{H}}V \in \mathfrak{H}$.

Пусть $D = N_G(\Sigma)$ – системный нормализатор группы G . Так как $V \text{ pr } G$, $W \text{ pr } G$ и $\Sigma \setminus V$, $\Sigma \setminus W$, то по утверждению 3) леммы 1.9 получаем $D \leq N_G(V)$ и $D \leq N_G(W)$. По определению нормализатора $V \leq N_G(V)$. Отсюда ввиду $N_G(V) \leq G$ следует $VD \leq G$. Аналогично, $N_G(W) \leq G$ и $WD \leq G$. Так как по условию леммы класс $\mathfrak{F}$ является π -перестановочным, то $D \perp (V \cap M)$. Следовательно, по утверждению IX.3.19 (a) $\Rightarrow$ (b) [5] с учетом условия $V \cap N \leq V \cap M$ имеем $V \leq D(V \cap M) = (V \cap M)D \leq WD$.

Предположим, что $WD < G$. Тогда $V \leq WD < G$ и $W \leq WD < G$. Это означает, что W , являясь $\mathfrak{H}$ -инъектором группы G , будет $\mathfrak{H}$ -инъектором в подгруппе WD группы G . Из условия выбора группы G имеем, что $\mathfrak{F}$ -инъектор V содержится в некотором $\mathfrak{H}$ -инъекторе из WD , сопряженном с W . Тогда $V \leq W^g$, где $g \in G$. Кроме того, так как $D \leq N_G(W)$ и $W \leq N_G(W)$, то $WD \leq N_G(W)$.

Таким образом, $V \leq W^g \leq WD \leq N_G(W)$. Так как $W \leq WD \leq N_G(W)$ и $W \triangleleft N_G(W)$, то $W^g = W$. Это означает, что $V \leq W$ – противоречие. Остается признать, что $WD = G$. Из того, что $N_G(W) \leq G$ и $G = WD \leq N_G(W)$, следует $N_G(W) = G$.

Следовательно, $W \triangleleft G$. Но $G_{\mathfrak{H}} \leq W$ и $G_{\mathfrak{H}}$ – максимальная нормальная $\mathfrak{H}$ -подгруппа группы G . Значит, $W = G_{\mathfrak{H}}$. Как показано выше, $G_{\mathfrak{H}}V \in \mathfrak{H}$, и поэтому ввиду $W = G_{\mathfrak{H}}$ получаем $WV \in \mathfrak{H}$. Отсюда, так как W – $\mathfrak{H}$ -инъектор группы G , то $WV = W$. Последнее равенство означает, что $V \leq W$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.5. Нормально π -погруженный класс Фиттинга π -перестановочен.

Доказательство. Пусть V – $\mathfrak{F}$ -инъектор группы $G \in \mathfrak{S}_{\pi}$. По условию V – нормально π -погруженная подгруппа в G для всех $p \in \pi$.

Пусть $q \notin \pi$. Покажем, что если V – нормально q -погруженная группа, то V – нормально p -погруженная группа для всех $p \in \pi$. Силовская q -подгруппа из V – это единичная группа, так как $V \in \mathfrak{S}_{\pi}$. Но $1 \triangleleft V$. Значит, V – нормально q -погруженная группа в $G \in \mathfrak{S}_{\pi}$.

Таким образом, V – нормально погруженная группа по определению. Но по утверждению I.7.10 [5], группа V является системно перестановочной. Следовательно, ввиду произвольности выбора V класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π -перестановочным. Лемма доказана.

Лемма 3.6. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi}$, причем $\mathfrak{F}$ является нормально π -погруженным. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$;
- 2) $L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально π -погруженный класс Фиттинга и $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$. Тогда по лемме 3.5 класс $\mathfrak{F}$ является π -перестановочным. По лемме 3.4 из $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$ следует $b_{\pi}(\mathfrak{H}) \subseteq a_{\pi}(\mathfrak{F})$.

Предположим, что класс $(L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p) \setminus \mathfrak{H} \neq \emptyset$. Выберем в нем группу G минимального порядка. Ввиду выбора группы G ее любая собственная нормальная подгруппа принадлежит классу $\mathfrak{H}$. Заметим, что по индукции произведение всех нормальных $\mathfrak{H}$ -подгрупп G – подгруппа из $\mathfrak{H}$. Значит, $G_{\mathfrak{H}}$ является единственной максимальной нормальной подгруппой в группе G . Заметим, что $G_{\mathfrak{H}} \subseteq W \subseteq G$, где W является $\mathfrak{H}$ -инъектором группы G . Равенство $W = G$ невозможно ввиду выбора группы G . Значит, $W = G_{\mathfrak{H}}$.

Так как $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$, то по определению $G_{\mathfrak{H}}$ содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор V группы G , причем $|G : G_{\mathfrak{H}}|$ делит $|G : V|$, где $|G : V|$ ввиду $G \in L_p(\mathfrak{F})$ является p^* -числом, в частности, p' -числом. Кроме того, так как $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$, то $|G : G_{\mathfrak{H}}| = p$. Таким образом, p -число $|G : G_{\mathfrak{H}}|$ делит p^* -число $|G : V|$, что невозможно. Следовательно, $L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть теперь $L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$ для любого $p \in \pi$. Покажем, что $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$.

Выберем группу $G \in b_{\pi}(\mathfrak{H})$, и пусть V — ее $\mathfrak{F}$ -инъектор. Заметим, что $G_{\mathfrak{H}}$ снова является единственным $\mathfrak{H}$ -инъектором группы G . Чтобы доказать, что $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$, по определению сильной π -вложенности достаточно показать, что $V \subseteq G_{\mathfrak{H}}$.

Если $V \not\subseteq G_{\mathfrak{H}}$, то в силу того, что $\mathfrak{H}$ -инъектор V является $\mathfrak{H}$ -максимальной подгруппой G , получаем $VG_{\mathfrak{H}} = G$. Отсюда по утверждению 1) леммы 1.1 имеем $V/(V \cap G_{\mathfrak{H}}) \cong G/G_{\mathfrak{H}}$, где $|G/G_{\mathfrak{H}}| = p$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$.

Пусть $P \in \text{Syl}_p(V)$. Предположим, что $P \subseteq G_{\mathfrak{H}} \cap V \subseteq V$. Тогда

$$\frac{|V : P|}{|V \cap G_{\mathfrak{H}} : P|} = |V : V \cap G_{\mathfrak{H}}| = p.$$

Последнее равенство невозможно, так как $|V : P|$ является p^* -числом. Следовательно, $P \not\subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Отсюда, так как G — одноглавая группа, по определению $\langle P^G \rangle$ получаем $P \leq \langle P^G \rangle \trianglelefteq G_{\mathfrak{H}} \triangleleft G$. Значит, $G = \langle P^G \rangle$ и по утверждению I.7.2 [5] $P \in \text{Syl}_p(G)$. Отсюда

$$\frac{|G : P|}{|V : P|} = |G : V| \in p^*,$$

где $|G : P|$ также является p^* -числом. Значит, $|V : P| \in p^*$. Последнее по определению класса $L_p(\mathfrak{F})$ означает, что $G \in L_p(\mathfrak{F})$. Кроме того, как показано выше, $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$. Но из условия теоремы $G \in L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$, т.е. $G \in \mathfrak{H}$ — противоречие с выбором G .

Следовательно, $V \leq G_{\mathfrak{H}}$. Последнее означает, что $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $p^* = p' \cap \pi$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π -групп такие, что $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$ в том и только том случае, когда $L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi$, то $\mathfrak{F} \ll_{\pi} L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{H}\mathfrak{S}_{p^*}$ для всех $p \in \pi$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{X} = L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{H}\mathfrak{S}_{p^*}$. Из $L_p(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{X}$ и $L_p(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ следует $L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p = L_p(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{X}$. Если $q \in \pi$ и $q \neq p$, то $q \in p^*$. Значит, $\mathfrak{S}_{p^*}\mathfrak{N}_q = \mathfrak{S}_{p^*}$. Следовательно, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_q$. Отсюда ввиду $L_q(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$ получаем $L_q(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{X}\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{X}$.

Но в силу леммы 3.6 условия $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$ и $L_p(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$ равносильны для всех $p \in \pi$. Это означает, что $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{X} = L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{H}\mathfrak{S}_{p^*}$. Лемма доказана.

Лемма 3.8 (см. X.1.37 [5]). Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $p \in \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $L_p(\mathfrak{F})^* = L_p(\mathfrak{F}^*)$. В частности, если $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то и класс $L_p(\mathfrak{F})$ является классом Локетта.

4. Основная теорема

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ мы называем сильно π -вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ (и обозначаем $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{H}$ -инъектор каждой конечной разрешимой π -группы G содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор этой группы.

Определение 4.1. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем максимальным по сильному π -вложению в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$ (обозначим $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{H}$ -инъектор каждой конечной разрешимой группы G содержит $\mathfrak{F}$ -инъектор этой группы и из $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{M} \ll_{\pi} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, всегда следует $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}\}$.

Утвердительный ответ на сформулированную во введении проблему для случая нормально погруженных классов Фиттинга в универсуме $\mathfrak{S}_\pi$ дает

Теорема 4.2. Пусть π – непустое множество простых чисел, $\mathfrak{F} \neq (1)$ – нормально π -погруженный класс Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{F} \ll_\pi \mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$.

Доказательство. Заметим, что если $\pi = \mathbb{P}$, то $\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}$, и утверждение теоремы верно в силу результата Локетта из [7] (см. также теорему X.4.27 [5]).

Если $\pi = \{p\}$, то по условию (1) $\neq \mathfrak{F} \ll_\pi \mathfrak{N}_p$. Следовательно, в $\mathfrak{F}$ существует неединичная p -группа G . Значит, $p \mid |G|$, и поэтому $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда по лемме 1.5 следует $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, получаем $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p$, что противоречит максимальнойности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{N}_p$.

Пусть теперь $|\pi| \geq 2$ и $\pi \subset \mathbb{P}$. Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. Класс $L_p(\mathfrak{F})$ не π -нормален для некоторого $p \in \pi$.

Тогда по лемме 2.2 имеем $S(\mathfrak{S}_\pi/L_p(\mathfrak{F})) = \mathfrak{S}_\pi$. Если положить $\mathfrak{S}_\pi = L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$, то $G/G_{L_p(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$ для всех $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Но $\mathfrak{S}_\pi/L_p(\mathfrak{F}) = (G/G_{L_p(\mathfrak{F})} : G \in \mathfrak{S}_\pi)$ по определению. Поэтому $\mathfrak{S}_\pi/L_p(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$. Но тогда по определению оператора замыкания ввиду S -замкнутости классов $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{S}_{p^*}$ с учетом леммы 1.7 получаем

$$S(\mathfrak{S}_\pi/L_p(\mathfrak{F})) \subseteq S(\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}) = S(\mathfrak{N}_p)S(\mathfrak{S}_{p^*}) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \neq \mathfrak{S}_\pi.$$

Таким образом, $S(\mathfrak{S}_\pi/L_p(\mathfrak{F})) \neq \mathfrak{S}_\pi$ – противоречие. Значит, $L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \neq \mathfrak{S}_\pi$.

Так как по условию теоремы класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормально π -погруженным, то по лемме 3.7 имеем $\mathfrak{F} \ll_\pi L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$ для всех простых чисел $p \in \pi$.

Заметим, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ в любой π -группе G ее $\mathfrak{X}$ -инъектор является π -подгруппой. Следовательно, по теореме Холла (теорема A.3.3 [5]), он содержится в любой π -подгруппе G , т.е. $\mathfrak{S}_\pi$ -инъекторе. Поэтому $\mathfrak{X} \ll_\pi \mathfrak{S}_\pi$.

В данном случае $L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, и поэтому $L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \ll_\pi \mathfrak{S}_\pi$.

Таким образом, $\mathfrak{F} \ll_\pi L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \ll_\pi \mathfrak{S}_\pi$.

Отсюда с учетом условия $\mathfrak{S}_\pi \neq L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$ ввиду максимальнойности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{S}_\pi$ получаем $\mathfrak{F} = L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$. По лемме 3.1 имеем $\mathfrak{F} \subseteq L_p(\mathfrak{F})$. Тогда с учетом леммы 1.2 получаем $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \subseteq L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$. Значит, $\mathfrak{F} = L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} \subseteq L_p(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$.

Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}$. Отсюда ввиду свойства ассоциативности умножения классов Фиттинга и утверждения 2) леммы 1.3 получаем

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*} = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*})^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*})^2 = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*})^3 = \dots = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*})^n.$$

Покажем теперь, что $\mathfrak{S}_\pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*})^n$.

Заметим, что $\mathfrak{S}_{p^*} = \mathfrak{S}_{p' \cap \pi} = \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, с учетом утверждения 3) леммы 1.3 и равенства $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$, имеем

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p^*})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi))^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi)^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi)^n.$$

Индукцией по числу n убедимся в справедливости равенства

$$(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})^n = \mathfrak{S}_\pi \cap (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})^n. \quad (*)$$

Предположим, что для $n = k$ данное равенство выполняется. Тогда

$$(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})^{k+1} = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})^k (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) = (\mathfrak{S}_\pi \cap (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})^k) (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}).$$

Заметим, что $\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}$ — формация. Тогда по утверждениям 2) и 3) леммы 1.3 с учетом равенств $(\mathfrak{S}_\pi)^2 = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} = (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^k \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_\pi \cap (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^k) (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}) &= \mathfrak{S}_\pi (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}) \cap (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^k (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}) = \\ &= (\mathfrak{S}_\pi)^2 \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \cap (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^k \mathfrak{S}_\pi \cap (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^{k+1} = \mathfrak{S}_\pi \cap (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^{k+1}. \end{aligned}$$

Итак, равенство $(*)$ имеет место для любого натурального n . Значит,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{S}_\pi \cap (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^n) = \mathfrak{S}_\pi \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^n = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\pi.$$

Таким образом, $\mathfrak{S}_\pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^n$. Тогда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{F} \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^n = \mathfrak{F} \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'})^n,$$

и поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \mathfrak{S}_\pi$. Так как $\mathfrak{S}_\pi$ — универсальный класс, то $\mathfrak{F} \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Кроме того, по утверждению 1) леммы 1.2 справедливо обратное включение $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{S}_\pi$. Значит, $\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{F} \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$. Последнее равенство противоречит максимальнойности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{S}_\pi$. Остается принять

Случай 2. Класс $L_p(\mathfrak{F})$ является π -нормальным для всех $p \in \pi$.

В этом случае по лемме 1.8 следует $(L_p(\mathfrak{F}))^* = \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда ввиду леммы 3.8 получаем $L_p(\mathfrak{F}^*) = \mathfrak{S}_\pi$ для всех $p \in \pi$. Пусть $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и V — $\mathfrak{F}$ -инъектор группы G . Тогда по определению класса $L_p(\mathfrak{F})$ имеем $|G : V| \in \bigcap_{p \in \pi} p^* = \bigcap_{p \in \pi} (p' \cap \pi) = (\bigcap_{p \in \pi} p') \cap \pi = \pi' \cap \pi$. Последнее возможно лишь в случае $G = V$. Но тогда $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. По утверждению 1) леммы 1.4 имеем $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Но $\mathfrak{S}_\pi$ — универсальный класс, и поэтому $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Последнее по лемме 1.8 означает π -нормальность класса $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 4.3 (Локетт [7]). Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально погруженный класс Фиттинга и $\mathfrak{F} \ll \mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}$.

Следствие 4.4. Не существует максимальных по сильному π -вложению нормально π -погруженных подклассов Локетта в классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ всех π -групп.

Доказательство. Если $\mathfrak{F}$ — нормально π -погруженный класс Локетта и $\mathfrak{F} \ll_{\pi} \mathfrak{S}_\pi$, то по теореме 4.2 следует $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по лемме 1.8 имеем $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Но по условию $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, и поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$. Последнее противоречит максимальнойности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{S}_\pi$.

Замечание 4.5. Классы, определяемые условием следствия 4.3, существуют.

Таковыми классами являются π -нормальные классы Фиттинга. Выясним вначале, что π -нормальные классы Фиттинга являются π -нормально погруженными.

Пусть $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$ и $G \in \mathfrak{S}_\pi$. В этом случае, следуя доказательству леммы 2.1, получаем, что $\mathfrak{F}$ -инъектор любой π -группы G всегда совпадает с ее $\mathfrak{F}$ -радикалом. Отсюда следует для любой π -группы G ее $\mathfrak{F}$ -инъектор $V \triangleleft G$. Но любая нормальная подгруппа является нормально π -погруженной. Таким образом, $\mathfrak{F}$ -инъектор — нормально π -погруженная подгруппа и класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормально π -погруженным.

Покажем теперь, что среди нетривиальных π -нормальных классов Фиттинга нет классов Локетта. Пусть $\mathfrak{F}$ — нетривиальный π -нормальный класс Фиттинга. Предположим, что $\mathfrak{F}$ является классом Локетта, т.е. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Так как $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$, то по лемме 1.8 получаем $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ — противоречие с выбором класса $\mathfrak{F}$. Следовательно, нетривиальные π -нормальные классы Фиттинга не являются классами Локетта.

Abstract. The paper considers fitting classes maximal by their strong π -embedding. Let π be a nonempty set of primes and the symbol $\mathfrak{S}_\pi$ denotes a Fitting class of all finite solvable

π -groups. For every normally π -embedded Fitting class $\mathfrak{F} \neq (1)$ it is proved that if $\mathfrak{F}$ is maximal by strong containment in $\mathfrak{S}_\pi$, then $\mathfrak{F}$ is normal in $\mathfrak{S}_\pi$.

Литература

1. Bryce, R.A. Strong containment of Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Group Theory (Proc. Miniconf., Australian Nat.Univ., Canberra, 1975). Lecture notes in Math., Springer, Berlin. — 1977. — 573. — P. 6–16.
2. Makan, A.R. Normal Fitting Classes and the Lockett Ordering / A.R. Makan // Math. Z. — 1975. — 142. — S. 221–228.
3. Cusack, E. Strong containment of Fitting classes / E. Cusack // J. Algebra. — 1980. — 64. — P. 414–429.
4. Doerk, K. Über Vertauschbarkeit, normale Einbettung und Dominanz bei Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen / K. Doerk, M. Porta // Arch. Math. (Basel). — 1980. — 35. — P. 319–327.
5. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.
6. Cossey, J. Products of Fitting Classes / J. Cossey // Math. Z. — 1975. — 141. — S. 289–295.
7. Lockett, P. On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups / P. Lockett. — Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1971.
8. Cline, E. On an embedding property of generalized Carter subgroups / E. Cline // Pacific J. Math. — 1969. — 29. — P. 491–519.
9. D'Arcy, P. On strong containment of locally defined formations / P. D'Arcy // J. Algebra. — 1974. — 28. — P. 362–373.
10. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. — 1988. — 43(2). — С. 161–167.
11. Lockett, P. Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / P. Lockett // Math.Z. — 1974. — Bd.137(2). — S.131–136.
12. Bryce, R.A. A problem in theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. — 1975. — Band 141, N 2. — S. 99 — 110.
13. Beidleman, J.C. On Product and normal Fitting Classes / J.C. Beidleman // Arch. Math. — 1977. — 28(4). — P. 347–356.
14. Lockett, P. On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups / P. Lockett // Math. Z. — 1973. — 131. — S. 103–115.
15. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. — 1969. — 3(19). — P. 193–207.