УДК 512.542

В. Н. ЗАГУРСКИЙ, Н. Т. ВОРОБЬЕВ

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 17.03.2005)

В теории конечных групп многие исследования структуры классов групп и канонических подгрупп связаны с изучением отображений f : {простые числа} $\to$ {классы групп}, которые называют локальными групповыми функциями или просто локальными функциями. Такие отображения были впервые определены и классифицированы Л. А. Шеметковым в работе [1] (см. также монографию [2, гл. 1, § 3]). Хорошо известно, что локальная формация может определяться различными типами локальных функций и возникает задача существования и описания максимальной из них. Напомним, что если все значения локальной функции f являются формациями, то f называют локальным экраном или локальным спутником, а в случае, когда все значения f — классы Фиттинга, f называют функцией Хартли или H-функцией. Первоначальные попытки исследования локальных функций формации были предприняты в работе Райта [3], где описан максимальный локальный спутник формации всех нильпотентных групп. Максимальный локальный спутник произвольной локальной формации в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп описан Дерком [4]. В дальнейшем Н. Т. Воробьев [5], используя результаты Л. А. Шеметкова [6] о формационных нормализаторах, расширил результат Дерка на класс частично разрешимых групп. Вместе с тем в теории классов Фиттинга задача описания максимальных локальных функций класса Фиттинга до настоящего времени не рассматривалась. В этом направлении были получены только некоторые результаты [7], относящиеся к описанию максимальных функций Хартли специального вида. Основной результат настоящей работы — описание максимальной локальной функции, определяющей произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и класса $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп. Самостоятельный интерес представляют следствия основного результата, в которых определяются новые локальные задания некоторых известных классов Фиттинга. В частности, установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп определяется локальной функцией f такой, что f не является функцией Хартли и значения $f(p)$ для каждого простого p — классы всех тех и только тех групп, радикалы Фиттинга которых являются p-группами.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{X}$ называют: S_n-замкнутым, если из $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$, следует $N \in \mathfrak{X}$; N_0-замкнутым, если из условия $G = N_1N_2$, где $N_i \trianglelefteq G$ и $N_i \in \mathfrak{X} (i = 1, 2)$, следует $G \in \mathfrak{X}$; D_0-замкнутым, если из $G_i \in \mathfrak{X}$ для любого $i = 1, \ldots, r$, следует $G_1 \times \ldots \times G_r \in \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется классом Фиттинга, если он одновременно S_n-замкнут и N_0-замкнут. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в любой группе G существует единственная $\mathfrak{X}$-максимальная нормальная подгруппа $G_\mathfrak{X}$ группы G. Ее называют $\mathfrak{X}$-радикалом G. Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначают произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — класс всех тех групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Заметим также, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H справедливо равенство: $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [8]. Всякое отображение

$$f : \mathbb{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называется функцией Хартли или H-функцией [9].Через $\mathrm{Supp}(f) = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \varnothing\}$ обозначают носитель f.

Пусть $LR(f) = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$, где π — носитель H-функции f. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [9], если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f.

Следуя [9], пусть f — локальная функция и $\pi = \mathrm{Supp}(f) = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \varnothing\}$ — ее носитель. Тогда через $LR_Q(f)$ обозначим класс групп $\mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F} = LR_Q(f)$ для некоторой локальной функции f, то $\mathfrak{F}$ назовем квазилокальным. Очевидно, что всякая H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ является локальной. Легко видеть, что если непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется локальной функцией f, причем $f(p) = S_n f(p)$ для всех $p \in \mathrm{Supp}(f)$, то $\pi(\mathfrak{F}) = \mathrm{Supp}(f)$.

Следуя Л. А. Шеметкову [2], любое непустое множество Ω-локальных функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем считать частично упорядоченным с отношением $\leqslant$, которое задается следующим образом. Если $f, h \in \Omega$, то $f \leqslant h$ в том и только в том случае, когда $f(p) \subseteq h(p)$ для всех простых p. Максимальный элемент множества Ω назовем максимальной локальной функцией класса $\mathfrak{F}$.

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [2, 10].

Лемма 1 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — непустые классы Фиттинга и G — группа. Тогда* $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 2 [10]. *Произведение любых двух классов Локетта является снова классом Локетта.*

Лемма 3 [10]. *Если N — субнормальная подгруппа группы G и $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Локетта и π — непустое множество простых чисел. Если $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR_Q(f)$ для некоторой локальной функции f с носителем σ и значения f таковы, что $f(p) = < S_n, D_0 > f(p)$ для всех $p \in \sigma$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \cap f(p) \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \sigma$.*

Доказательство. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \cap f(p)) \backslash \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для некоторого p из σ. Тогда группа G комонолитична и ее комонолит $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}$. Поэтому $G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p} \cong Z_q$ для $q \neq p$. Теперь по лемме 1 $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}/G_{\mathfrak{F}} = (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_p}$ и ввиду изоморфизма $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}$ получаем $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_p} \cong Z_q$. Следовательно, $G/G_{\mathfrak{F}}$ — нильпотентная $\{p, q\}$-группа и справедливо равенство

$$G/G_{\mathfrak{F}} = (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_p} \times (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_q}.$$

Предположим, что $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_p} \neq 1$. Тогда $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_q} \neq G/G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}$ — комонолит группы G, то $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_q}/G_{\mathfrak{F}} \leqslant G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}/G_{\mathfrak{F}}$ и по лемме 1 $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_q} \leqslant (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_p}$. Следовательно, $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_q} = 1$ и $G/G_{\mathfrak{F}} = (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_p}$. Значит, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Получили противоречие с выбором G. Таким образом,$(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{N}_p} = 1$ и $G/G_{\mathfrak{F}} \cong Z_q$, причем $q \in \pi$.

Далее положим $X = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где K — база регулярного сплетения X. Поскольку $\mathfrak{F}$ — класс Локетта и $G \notin \mathfrak{F}$, то ввиду X. 2.1a [10] $X_{\mathfrak{F}} = K_1$, где K_1 — база регулярного сплетения $X_1 = G_{\mathfrak{F}} \wr Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, A. 18.2d [10])

$$X/X_{\mathfrak{F}} = X/K_1 \cong (G/G_{\mathfrak{F}}) \wr Z_p.$$

Учитывая $G/G_{\mathfrak{F}} \cong Z_q$, получаем $X/X_{\mathfrak{F}} \cong Z_q \wr Z_p$. Так как Z_p — силовская p-подгруппа группы $Z_q \wr Z_p$ и Z_p не является нормальной подгруппой в $Z_q \wr Z_p$, то $Z_q \wr Z_p \notin \mathfrak{N}$. Значит, ввиду изоморфизма $X/X_{\mathfrak{F}} \cong Z_q \wr Z_p$ вытекает $X/X_{\mathfrak{F}} \notin \mathfrak{N}$ и $X \notin \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

С другой стороны, поскольку $X = [K]Z_p$, то из свойств полупрямого произведения следует, что $X/K \cong Z_p \in \mathfrak{N}_p$. Но $G \in f(p)$ и класс $f(p)$ является D_0-замкнутым, поэтому $K \in f(p)$. Также по лемме 2 $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ — класс Локетта и, значит, $K \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Тогда по определению произведения классов групп получим $X \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}_p \cap f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}_p \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR_Q(f)$, то

$$X \in (\mathfrak{S}_\sigma \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap (\cap_{\substack{r \neq p \\ r \in \sigma}} f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'}))\mathfrak{N}_p \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} =$$

$$\mathfrak{S}_\sigma \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \cap (\cap_{\substack{r \neq p \\ r \in \sigma}} f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'}) \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{S}_\sigma \cap f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap (\cap_{\substack{r \neq p \\ r \in \sigma}} f(r)\mathfrak{N}_r\mathfrak{S}_{r'}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi.$$

Получили противоречие с тем, что $X \notin \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Это завершает доказательство того, что $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \cap f(p) \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех p из σ. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, π — непустое множество простых чисел и $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$. Тогда локальная функция x такая, что*

$$x(p) = \begin{cases} (G : G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p), & \text{если } p \in \sigma, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \sigma', \end{cases}$$

является $< S_n, D_0 >$-замкнутой и $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех p из σ.

Доказательство. Докажем вначале, что $x(p)$ — нормально-наследственный класс групп для любого p из σ.

Очевидно, что $x(p) \subseteq S_n x(p)$. Пусть $G \in S_n x(p)$. Тогда существует группа $K \in x(p)$ такая, что $G \triangleleft K$. Значит, по лемме 3 $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} = G \cap K_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \subseteq K_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}$. Кроме того, $G \cap K_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \trianglelefteq K$ и поэтому $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \trianglelefteq K_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Отсюда получаем $G \in x(p)$ и $S_n x(p) \subseteq x(p)$. Таким образом, класс $x(p)$ является нормально-наследственным для любого p из σ.

Докажем D_0-замкнутость класса $x(p)$ для каждого $p \in \sigma$.

Очевидно, что $x(p) \subseteq D_0 x(p)$. Пусть группа $G \in D_0 x(p)$. Тогда в G существуют нормальные подгруппы G_i такие, что $G_i \in x(p)$, где $i = 1, \dots, r$ и $G = G_1 \times \dots \times G_r$. Покажем, что $G \in x(p)$. Так как по лемме 2 $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ — класс Локетта, то $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} = (G_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \times \dots \times (G_r)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}$. Но $G_i \in x(p)$ и, следовательно, $(G_i)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для $i \in \{1, \dots, r\}$. Поскольку по лемме 2 $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ также является классом Локетта и $(G_i)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$, то

$$(G_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \times \dots \times (G_r)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} = ((G_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \times \dots \times (G_r)_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi})_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p}$$

и, значит, $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Тогда $G \in x(p)$ и $D_0 x(p) \subseteq x(p)$. Итак, класс $x(p)$ D_0-замкнут для любого p из σ.

Покажем теперь, что $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для любого p из σ.

Очевидно, что $x(p) \subseteq x(p)\mathfrak{N}_p$. Пусть группа $G \in x(p)\mathfrak{N}_p$. Тогда существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \in x(p)$, причем $G/K \in \mathfrak{N}_p$. Ввиду изоморфизма $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}K/K \cong G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}/(G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \cap K)$ и леммы 3 получаем $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}K/K \cong G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}/K_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}$. Но $G/K \in \mathfrak{N}_p$ и поэтому фактор $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}K/K$ является p-группой. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}/K_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p$. Так как $K \in x(p)$, то $K_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Тогда $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ и $G \in x(p)$, что доказывает равенство $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для любого p из σ. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, π — непустое множество простых чисел и $\sigma = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$ *для H-функции h такой, что $h(p) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ для всех p из σ.*

Доказательство. Докажем вначале, что из 1) следует 2). Пусть $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$. Тогда, учитывая определение функции h, получаем

$$LR(h) = \mathfrak{S}_\sigma \cap (\cap_{p\in\sigma}\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}(\cap_{p\in\pi}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) \cap \mathfrak{F}(\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) =$$

$$\mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'} = \mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'}.$$

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'} = \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\sigma \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{S}_{(\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi)'}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{S}_{\pi'}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$.

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi}$. Поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N} = \cap_p\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$, то $G \in \mathfrak{S}_\sigma \cap (\cap_{p\in\sigma}\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Тогда, учитывая $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR(h)$, имеем $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}(\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} \cap \mathfrak{N}_\pi) = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Максимальную $< S_n, D_0 >$-замкнутую локальную функцию класса Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ описывает следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, π — непустое множество простых чисел и $\sigma = \pi\cup\pi(\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ локален и определяется локальной функцией x такой, что*

$$x(p) = \begin{cases} (G : G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p), & \text{если } p \in \sigma, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \sigma'. \end{cases}$$

При этом функция x является единственной максимальной среди всех $< S_n, D_0 >$-замкнутых локальных функций класса $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ и для всех простых p из σ справедливо равенство $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi} = \mathfrak{F}$, то по лемме 6 класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ локален. Кроме того, по лемме 5 локальная функция x является $< S_n, D_0 >$-замкнутой и $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех p из σ.

Докажем, что x — единственная максимальная $< S_n, D_0 >$-замкнутая локальная функция класса $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$.

Пусть f — произвольная $< S_n, D_0 >$-замкнутая локальная функция, определяющая класс $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Покажем, что $f(p) \subseteq x(p)$ для любого p из σ. Если $G \in f(p)$, то $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \cap f(p)$. Но по лемме 4 $f(p) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$ и поэтому $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G \in x(p)$ и $f(p) \subseteq x(p)$ для всех $p \in \sigma$. Это означает, что $f \leqslant x$. Отсюда

$$\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = (\cap_{p\in\sigma}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) \cap \mathfrak{S}_\sigma \subseteq (\cap_{p\in\sigma}x(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) \cap \mathfrak{S}_\sigma = LR_Q(x).$$

Докажем обратное включение.

Выберем группу G минимального порядка такую, что $G \in LR_Q(x)\setminus\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Легко видеть, что группа G комонолитична и ее комонолит $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}$. Учитывая $G \in LR_Q(x)$ получаем $G \in x(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех $p \in \sigma$. По определению произведения классов групп существует нормальная подгруппа N из G такая, что $N \in x(p)$ и $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Так как $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}$ — комонолит группы G, то $N \trianglelefteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi}$ и $N \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Но $N \in x(p)$ и, значит, $N = N_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ и $N \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для любого простого p из σ. Кроме того, $G \in LR_Q(x) = \mathfrak{S}_\sigma \cap (\cap_{p\in\sigma}x(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Тогда по лемме 6 имеем $G \in \mathfrak{S}_\sigma \cap (\cap_{p\in\sigma}\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. Получили противоречие с выбором G. Итак, $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = LR_Q(x)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Класс Фиттинга $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$ π-нильпотентных групп определяется единственной максимальной $< S_n, D_0 >$-замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = (G : G_{\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_p)$ и $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех простых p.*

С л е д с т в и е 2. *Если $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ определяется единственной максимальной $< S_n, D_0 >$-замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = (G : G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p)$ и $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех простых p.*

С л е д с т в и е 3 [11]. *Класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп определяется локальной функцией x такой, что*

$$x(p) = \begin{cases} (G : G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p), & \text{если } p \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi' . \end{cases}$$

При этом функция x является единственной максимальной $< S_n, D_0 >$-замкнутой локальной функцией класса $\mathfrak{N}_\pi$ и для всех простых p из π справедливо равенство $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$.

В частности, справедливо

С л е д с т в и е 4 [11]. *Класс Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп определяется единственной максимальной $< S_n, D_0 >$-замкнутой локальной функцией x такой, что $x(p) = (G : G_{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}_p)$ и $x(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех простых p.*

Литература

1. Ш е м е т к о в Л. А. // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628 – 648.
2. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
3. W r i g h t C. R. B. // Math. Z. 1970. Bd 115, No 4. S. 273–282.
4. D o e r k K. // Math. Z. 1973. Bd 133, No 2. S. 133 – 135.
5. В о р о б ь е в Н. Т. // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22, № 1. С. 9 – 11.
6. Ш е м е т к о в Л. А. // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 684 – 715.
7. В о р о б ь е в Н. Т. // Вопросы алгебры. Гомель, 1992. Вып. 7. С. 60 – 69.
8. H a r t l e y B. // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, No 2. P. 193 – 207.
9. В о р о б ь е в Н. Т. // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1296 – 1302.
10. D o e r k K., H a w k e s T. Finite soluble groups. Walter de Gryeter. Berlin; New York, 1992.
11. В о р о б ь е в Н. Т., З а г у р с к и й В. Н. // Веснік ВДУ імя П. М. Машэрава. 2003. № 2. С. 100 – 104.

V. N. ZAGURSKY, N. T. VOROB'EV

MAXIMAL LOCAL FUNCTIONS OF FITTING CLASSES

Summary

The local function of Fitting class $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$ is described. $\mathfrak{F}$ is any solvable non-empty Fitting class, $\mathfrak{N}_\pi$ is class of all nilpotent π-groups.