Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 14–17

УДК 512.542

Н. Т. Воробьев

О НАИБОЛЬШЕЙ ПРИВЕДЕННОЙ ФУНКЦИИ ХАРТЛИ

Хорошо известно, что каждая локальная формация имеет наибольший приведенный (или внутренний) локальный экран. Этот результат был первоначально доказан в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп Картером, Хоуксом [1] и в дальнейшем расширен на класс $\mathfrak{E}$ всех конечных групп Шмидом [2]. Примечателен тот факт, что при этом процедура построения наибольшего приведенного локального экрана F локальной формации $\mathfrak{F}$ достаточно проста: если f — приведенный локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то значения F таковы, что $F(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех простых p. Заметим, что как для локального класса Шунка (см. III. 5 [3]), так и для локального класса Фиттинга аналогичная процедура построения наибольшего приведенного локального задания в общем случае невозможна. В частности, в работе [4] автором установлено, что каждый локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется функцией Хартли f, обладающей тем свойством, что $f(p)\mathfrak{N}_p = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых p и была описана наименьшая из функций Хартли с указанным свойством, определяющая $\mathfrak{F}$.

В настоящей работе, используя концепцию частичной локализации Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [5], мы докажем наличие наибольшего элемента во множестве Ω всех приведенных ω-локальных H-функций ω-локального класса Фиттинга, который является классом Локетта, и опишем процедуру построения такого элемента.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Отображение $f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{$классы Фиттинга$\}$ называют ω-локальной функцией Хартли или H-функцией [5]. Пусть $\mathfrak{E}_{\omega d}$ — класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой и $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{E}_{\omega d}}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}}$. Для любой ω-локальной H-функции f, следуя [5], обозначим через $LR_\omega(f)$ класс $\{G \mid G^{\omega d} \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальным, если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой ω-локальной H-функции f. Если при этом все значения f содержатся в $\mathfrak{F}$, то f называется приведенной или внутренней H-функцией класса $\mathfrak{F}$. Заметим, что в случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является локальным.

Мы будем использовать также конструкцию класса Фиттинга, которая была предложена Локеттом [6]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F}^*$ — наименьший класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H. Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то положим $\mathfrak{F}^* = \varnothing$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Пусть Ω — множество всех приведенных ω-локальных H-функций ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Следуя Л.А. Шеметкову [7], будем считать Ω частично упорядоченным следующим образом. Если $f, \varphi \in \Omega$, то $f \leq \varphi$ в том и только в том случае, когда $f(a) \leq \varphi(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Рассматриваются только конечные группы. В случае необходимости определения и обозначения, которые мы не приводим, см. [3,7]. Отметим также, что следствие из доказанной в настоящей работе теоремы впервые было анонсировано автором [8], а также позднее получено [9].

Теорема. *Пусть Ω — множество всех приведенных ω-локальных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то справедливы следующие утверждения:*

1) *множество Ω обладает наибольшим элементом F;*

2) *если F — наибольший элемент из Ω, то $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и класс $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p$ является классом Локетта для всех $p \in \omega$.*

Доказательство. Покажем, что в Ω есть такой элемент F, что $x \leq F$ для всех x из Ω. Из того, что ω-локальная H-функция x ω-локального класса $\mathfrak{F}$ приведена по лемме 24 [5] следует, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f — такая приведенная ω-локальная H-функция, что $f(p) = x(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Так как класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ является радикальной насыщенной формацией, то по лемме 3 [10] для всех $p \in \omega$ справедливо равенство $(f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})^* = (f(p))^*\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Легко видеть, что класс Фиттинга $f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'} = \mathfrak{F}_p$ локален и поэтому по лемме 2 [10], $\mathfrak{F}_p$ — класс Фишера. Следовательно, ввиду свойства X.1.25 [3], $\mathfrak{F}_p$ является классом Локетта и $\mathfrak{F}_p = (f(p))^*\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для каждого $p \in \omega$. Далее учитывая определение ω-локального класса Фиттинга заключаем, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(F)$, где $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = (f(p))^*\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. Так как функция $f \in \Omega$, то ввиду теоремы X.1.8 и леммы X.1.26 (b) из [3] вытекает, что $x \leq F \in \Omega$ и все значения F — классы Локетта.

Теперь для доказательства теоремы достаточно выяснить, что если X — любая другая приведенная ω-локальная H-функция класса $\mathfrak{F}$, такая, что $X(\omega') = \mathfrak{F}$ и $X(p) = X(p)\mathfrak{N}_p$ — классы Локетта для всех $p \in \omega$, то $F = X$. Предположим от противного, что $F(p)$ не содержится в $X(p)$ для некоторого простого $p \in \omega$ и G — группа из класса $F(p) \setminus X(p)$. Пусть $W = G \wr Z_p$ — регулярное сплетение группы G с циклической группой Z_p порядка p. Тогда $W \in F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $p \in \omega \cap \pi(W)$ и $\mathfrak{F} = LR_\omega(X)$, то $W/W_{X(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и p не делит $|W/W_{X(p)}|$. С другой стороны, так как $G \notin X(p)$ и $X(p)$ — класс Локетта, то по теореме Косси (см. X.2.1(a) [3]), $W_{X(p)} = (G_{X(p)})^*$, где $(G_{X(p)})^*$ — базисная группа сплетения $G_{X(p)} \wr Z_p$. Следовательно, ввиду леммы A.18.2 (d) [3], $W/W_{X(p)} = W/(G_{X(p)})^* \simeq G/G_{X(p)} \wr Z_p$ и p делит $|W/W_{X(p)}|$. Полученное противоречие доказывает, что $F \le X$. Аналогично устанавливается, что $X \le F$. Теорема доказана.

Ввиду леммы 2 [10] и свойства X.1.25 [3], каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта и поэтому из теоремы вытекает

Следствие. *Любой локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется единственной максимальной приведенной H-функцией F, каждое значение которой $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p$ и является классом Локетта.*

Summary

N.T.Vorob'ev. On the largest integrated Hartley function // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 14–17

All groups considered are finite.

Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes, $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ and $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. A map $f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto$ {Fitting classes} is called a ω-local Hartley function or an H-function. Let $\mathfrak{E}_{\omega d}$ be the class of all groups in which every composition factor is a ωd-group and $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{E}_{\omega d}}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}}$. For every ω-local H-function f the class

$$\{G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ and } F^p(G) \in f(p) \text{ for all } p \in \omega \cap \pi(G)\}$$

is denoted by $LR_\omega(f)$. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called ω-local if $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ for some ω-local H-function f. If all values of f are contained in $\mathfrak{F}$ then f is called an integrated (internal) H-function of $\mathfrak{F}$.

Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty Fitting class and let $\mathfrak{F}^*$ be the smallest Fitting class containing $\mathfrak{F}$ such that $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ for all groups G and H. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called a Lockett class if $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. In the paper the following theorem is proved.

Theorem. Let Ω be the set of all integrated ω-local H-functions of a Fitting class $\mathfrak{F}$. If $\mathfrak{F}$ is a Lockett class then the following statements hold:

1) the set Ω has the largest element F;

2) if F is the largest element of Ω then $F(\omega') = \mathfrak{F}$ and a class $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p$ is a Lockett class for all $p \in \omega$.

Corollary. Every local Fitting class $\mathfrak{F}$ is defined by the unique maximal integrated H-function F and every value $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p$ is a Lockett class.

Литература

1. *Carter R.W. and Hawkes T.O.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble groups // J.Algebra. — 1967. — Vol. 5, № 2. — P. 175–202.

2. *Schmid P.* Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math.Z. — 1974. — Bd. 137, № 1. — S. 31–48.

3. *Doerk K. and Hawkes T.O.* Finite Soluble Groups.— Berlin-New York: De Gruyter Exp. in Math., 1992 — 891 p.

4. *Воробьев Н.Т.* О локальных радикальных классах // Сб. Вопросы алгебры. — Минск, Университетское, 1986. — Вып. 2. — С. 41–50.

5. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. — Гомель, 1997. — 42 с. (Препринт / Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины: № 63.)

6. *Lockett P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. — 1974. — Bd. 137, № 2. — S. 131–136.

7. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

8. *Воробьев Н.Т.* О максимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга // 8-й Всесоюзный симпозиум по теории групп: Тез. докл. — Киев. —1982. — С. 51.

9. *Lucke H.* Zur Theorie der lokalerklärbaren Fittingklassen. Diplomarbeit. — Mainz. — 1985. — 79 s.

10. *Воробьев Н.Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. — 1988. — Т. 43, № 2. — С. 161–168.

Витебский государственный
университет им. П.М.Машерова

Поступило 17.12.98