

О ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ХОУКСА ДЛЯ РАДИКАЛЬНЫХ КЛАССОВ*)

Н. Т. Воробьев

Решение ряда классификационных задач теории конечных разрешимых групп связано с изучением тотально локальных или примитивных насыщенных формаций (см. например, [1, гл. 5; 2, гл. 11]). Напомним, что согласно определению кратно локальной формации, предложенному А. Н. Скибой [3], каждая формация считается 0-кратно локальной. Формацию $\mathfrak{F}$ называют n -кратно локальной ($n \rightarrow$ натуральное число), если все непустые значения ее локального экрана являются $(n-1)$ -кратно локальными формациями, и *тотально локальной* (то же, что и примитивной насыщенной в смысле Хоукса [4]), если $\mathfrak{F}$ — n -кратно локальная формация для любого натурального n .

В 1971 г. для разрешимых формаций конечных групп Хоуксом [4] было установлено, что каждая тотально локальная формация является наследственной и радикальной, а также высказано предположение о том, что тотально локальные формации — это в точности наследственные радикальные насыщенные формации (см. [4, с. 586]).

Это предположение было подтверждено Брайсом и Косси, которые доказали [5, теоремы А и 4], что каждая разрешимая наследственная радикальная насыщенная формация тотально локальна. Заметим, что формацию $\mathfrak{F}$ называют *радикальной* [2], если $\mathfrak{F}$ является одновременно радикальным классом (классом Фиттинга), т. е. $\mathfrak{F}$ замкнута относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп.

В настоящей работе мы подтверждаем справедливость предположения Хоукса для разрешимых радикальных классов: доказано, что разрешимый радикальный класс тотально локален тогда и только тогда, когда он наследствен. Для этой цели мы будем использовать принципиально новый локальный метод построения радикалов и радикальных классов конечных разрешимых групп, предложенный Хартли [6]. Пусть [6] f — отображение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел в множество разрешимых радикальных классов F и $\pi = \text{Supp } f$ — носитель f , т. е. $\pi = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq \emptyset\}$. Отображение f (по предложению Л. А. Шеметкова) назовем *локальной функцией Хартли* или *локальной H -функцией*. Обозначим через $\text{LR}(f)$ класс всех тех π -групп, факторгруппы по $f(p)$ -радикалам которых являются расширениями p -групп с помощью p' -групп для всех простых $p \in \pi$. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ называется *локальным* [7], если $\mathfrak{F} = \text{LR}(f)$ для некоторой локальной H -функции f . Используя понятие произведения радикальных классов, заметим, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \right).$$

*) Настоящая работа была частично поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук.

Напомним, что произведение радикальных классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — класс всех таких групп G , для которых $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$, где $G_{\mathfrak{F}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы G . Аналогично [3] введем понятие кратно локального радикального класса. Каждый радикальный класс будем считать 0-кратно локальным. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ назовем n -кратно локальным (n — натуральное число), если все непустые значения его локальной H -функции являются $(n-1)$ -кратно локальными радикальными классами, и *тотально локальным*, если $\mathfrak{F}$ n -кратно локален для любого натурального n .

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в [2, 8].

Радикальный класс называют *наследственным* или *S-замкнутым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп. В лемме 1 приведены простейшие свойства наследственных радикальных классов, которые мы будем использовать.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество наследственных радикальных классов, то пересечение $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ — наследственный радикальный класс;

2) каждое конечное произведение $\mathfrak{F} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{F}_i$ наследственных радикальных классов $\mathfrak{F}_i$ является наследственным радикальным классом.

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Для доказательства утверждения 2 ввиду свойства ассоциативности умножения радикальных классов (см. [2, IX.1.12, c]) достаточно выяснить его справедливость для $n = 2$. Пусть G — группа из класса $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ и H — любая подгруппа группы G . Тогда $G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2$ и ввиду наследственности радикального класса $\mathfrak{F}_2$

$$H/H \cap G_{\mathfrak{F}_1} \cong HG_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2.$$

Так как $H \cap G_{\mathfrak{F}_1} \trianglelefteq H$ и класс $\mathfrak{F}_1$ наследствен, то $H \cap G_{\mathfrak{F}_1} \subseteq H_{\mathfrak{F}_1}$. Из теоремы Брайса — Косси (см. [2, XI.1.1]) ввиду наследственности радикального класса $\mathfrak{F}_2$ вытекает, что $\mathfrak{F}_2$ является формацией. Следовательно, $H/H \cap G_{\mathfrak{F}_1}/H_{\mathfrak{F}_1}/H \cap G_{\mathfrak{F}_1} \cong H/H_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2$, поэтому $H \in \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$. Лемма доказана.

Локальную H -функцию f назовем *наследственной*, если $f(p)$ — наследственный радикальный класс для всех простых p .

Лемма 2. *Каждое конечное произведение радикальных классов $\mathfrak{F} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{F}_i$ ($n \geq 2$), где $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{S}_{\pi_i}$ для некоторого множества простых чисел π_i , является радикальным классом, определяемым наследственной локальной H -функцией f такой, что для каждого простого p имеет место равенство*

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{F}_1, & \text{если } p \in \pi_1 \setminus (\pi_2 \cup \pi_3 \cup \dots \cup \pi_n), \\ \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2, & \text{если } p \in \pi_2 \setminus (\pi_3 \cup \pi_4 \cup \dots \cup \pi_n), \\ \dots & \dots \\ \mathfrak{F}, & \text{если } p \in \pi_n, \\ \emptyset, & \text{если } p \in (\pi_1 \cup \pi_2 \cup \dots \cup \pi_n)'. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_n$ — произведение радикальных классов, причем для некоторых множеств простых чисел $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ справедливы равенства $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{S}_{\pi_1}, \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{S}_{\pi_2}, \dots, \mathfrak{F}_n = \mathfrak{S}_{\pi_n}$, и $\sigma_1 = \pi_1 \setminus (\pi_2 \cup \pi_3 \cup \dots \cup \pi_n), \sigma_2 = \pi_2 \setminus (\pi_3 \cup \dots \cup \pi_n), \dots, \sigma_n = \pi_n, \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_n$.

$\text{LR}(\psi)$. Итак, $\mathfrak{F} = \text{LR}(\psi)$. Но тогда ввиду того, что по лемме 1 из [11] (см. также [12, лемма 6]) каждый локальный радикальный класс определяется полной внутренней локальной H -функцией, заключаем, что $\mathfrak{F} = \text{LR}(h)$. Наследственность каждой из локальных H -функций φ , ψ и h вытекает из леммы 1. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F} = \text{LR}(f)$ для некоторой наследственной локальной H -функции f и Ω — множество всех полных наследственных локальных H -функций класса $\mathfrak{F}$. Следуя [8], определим на множестве Ω отношение порядка $\leq$ следующим образом. Если $f, \varphi \in \Omega$, то $f \leq \varphi$ в том и только в том случае, когда $f(p) \subseteq \varphi(p)$ для всех простых p . Минимальный элемент множества Ω назовем *минимальной полной наследственной локальной H -функцией класса $\mathfrak{F}$* .

Если $\mathfrak{X}$ — множество групп, то через $\text{SFit } \mathfrak{X}$ будем обозначать наследственный радикальный класс, порожденный множеством $\mathfrak{X}$.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{F} = \text{LR}(h)$ для некоторой наследственной локальной H -функции h . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\mathfrak{F}$ определяется единственной минимальной полной наследственной локальной H -функцией f такой, что для каждого простого p имеет место равенство

$$f(p) = \begin{cases} (\text{SFit}\{G \in \mathfrak{F} \mid G = 0^{p'}(G)\})\mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi'(\mathfrak{F}); \end{cases} \quad (1)$$

2) если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — радикальные классы, определяемые минимальными полными локальными H -функциями f_1 и f_2 соответственно, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

Доказательство. Так как по условию радикальный класс $\mathfrak{F}$ определяется наследственной локальной H -функцией h , то по лемме 3 $\mathfrak{F}$ определяется также некоторой полной наследственной локальной H -функцией. Следовательно, множество Ω всех полных наследственных локальных H -функций класса $\mathfrak{F}$ непусто. Пусть φ — произвольный элемент из Ω . Тогда $\mathfrak{F} = \text{LR}(\varphi)$, причем $\varphi(p) = \varphi(p)\mathfrak{N}_p$ и $\varphi(p)$ — наследственный радикальный класс для всех простых p . Учитывая результат Хартли (см. [6, 3.1.1]) о том, что условие $p \in \pi(\mathfrak{F})$ эквивалентно $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, легко видеть, что $\pi(\mathfrak{F}) = \text{Supp } \varphi$.

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Определим множество

$$\psi(p) = \{G \in \mathfrak{F} \mid G = 0^{p'}(G)\}.$$

Пусть $(\text{SFit } \psi(p))\mathfrak{N}_p = f(p)$. Если $X \in \psi(p)$, то $X = 0^p(X)$ и $X \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $X/X_{\varphi(p)} \in \mathfrak{S}_{p'}$ и $X \in \varphi(p)$. Итак, $\psi(p) \subseteq \varphi(p)$. Но тогда $f(p) \subseteq \text{SFit } \varphi(p) = \varphi(p)$ для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $f \leq \varphi$, и поэтому

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \right) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Докажем обратное включение: $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть Y — любая группа из $\mathfrak{F}$. Так как $0^{p'}(0^{p'}(Y)) = 0^{p'}(Y)$ и $0^{p'}(Y) \in \mathfrak{F}$ для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то Y является расширением $\psi(p)$ -группы с помощью p' -группы для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Но $\psi \leq f$, и поэтому $Y \in \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Кроме того, $Y \in \mathfrak{F}$ и, следовательно, $Y \in \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Значит, $Y \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Первое утверждение леммы доказано.

Если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то по утверждению 1 и определению оператора SFit имеем $f_1 \leq f_2$. Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

Лемма 5. Объединение любой непустой цепи радикальных классов, каждый из которых определяется наследственной локальной H -функцией, является радикальным классом, определяемым наследственной локальной H -функцией.

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольная непустая цепь радикальных классов, каждый из которых определяется наследственной локальной H -функцией. По лемме 4 каждый радикальный класс $\mathfrak{F}_i$ определяется единственной минимальной полной наследственной локальной H -функцией f_i ($i \in I$). Пусть $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $f = \bigcup_{i \in I} f_i$. Установим вначале, что f — локальная H -функция. Пусть $G \in f(p)$ (p простое) и K — нормальная подгруппа группы G . Тогда $G \in f_{i_0}(p)$ для некоторого $i_0 \in I$. Так как f_{i_0} — локальная H -функция, то $K \in f_{i_0}(p)$ и, значит, $K \in f(p)$. Следовательно, класс групп $f(p)$ является нормально наследственным. Если теперь $L = K_1 K_2$, где K_1, K_2 — нормальные $f(p)$ -подгруппы группы L , то $K_1 \in f_{i_k}(p)$ и $K_2 \in f_{i_l}(p)$ для некоторых $i_k, i_l \in I$. Так как либо $f_{i_k} \leq f_{i_l}$, либо $f_{i_l} \leq f_{i_k}$ и f_{i_k}, f_{i_l} — локальные H -функции, то L является либо $f_{i_k}(p)$ -группой, либо $f_{i_l}(p)$ -группой. Но в каждом из этих случаев, очевидно, $L \in f(p)$. Итак, f — локальная H -функция. Тот факт, что $\mathfrak{F}$ — радикальный класс, доказывается аналогично.

Проверим, что f локально определяет $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M} = \text{LR}(f)$. Так как $f_i \leq f$ и $\mathfrak{F}_i = \text{LR}(f_i)$ для всех $i \in I$, очевидно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть теперь $M \in \mathfrak{M}$. Тогда $M^{\mathfrak{M}_p \mathfrak{S}_{p'}}$ $\in f(p)$ для всех простых $p \in \text{Supp } f$. Легко видеть, что $\text{Supp } f = \pi(\mathfrak{F})$, и поэтому $M^{\mathfrak{M}_p \mathfrak{S}_{p'}}$ $\in f_{i_r}(p)$ для $i_r \in I$ и всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Тем самым $M \in \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F}_r)} f_{i_r}(p) \mathfrak{M}_p \mathfrak{S}_{p'}$. Так как $M \in \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то $M \in \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_m})}$ для некоторого $i_m \in I$. Но из того, что $\mathfrak{F}_{i_r}$ и $\mathfrak{F}_{i_m}$ — элементы цепи, следует, что либо $\mathfrak{F}_{i_r} \subseteq \mathfrak{F}_{i_m}$, либо $\mathfrak{F}_{i_m} \subseteq \mathfrak{F}_{i_r}$. Следовательно, либо $\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_r})} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_m})}$, либо $\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_m})} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_r})}$, и по утверждению 2 леммы 4 либо $f_{i_r} \leq f_{i_m}$, либо $f_{i_m} \leq f_{i_r}$. В каждом из этих случаев получаем, что $M \in \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$.

Остается показать, что локальная H -функция f наследственна. Действительно, если $R \in f(p)$ и U — любая подгруппа из R , то $R \in f_{i_r}(p)$ для некоторого $i_r \in I$. Но локальная H -функция f_{i_r} наследственна. Значит, $U \in f_{i_r}(p) \subseteq f(p)$. Лемма доказана.

Следующая лемма является следствием известных результатов Брайса, Косси [5, 13, 14] и Хоукса [4].

Лемма 6. Если $\mathfrak{F}$ — такой наследственный радикальный класс, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}^k$ для некоторого натурального k , то $\mathfrak{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — конечное произведение радикальных классов $\mathfrak{S}_{\pi_1}, \mathfrak{S}_{\pi_2}, \dots, \mathfrak{S}_{\pi_n}$ для некоторых множеств простых чисел $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$.

Доказательство. Так как радикальный класс $\mathfrak{F}$ наследствен, то по теореме 1.1 из [13] $\mathfrak{F}$ является формацией. Но тогда по теореме 4 из [5] формация $\mathfrak{F}$ тотально локальна. Теперь утверждение вытекает непосредственно из условия $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}^k$ по лемме 2.3 из [14].

Следующая теорема классифицирует наследственные радикальные классы посредством локальных функций Хартли и подтверждает справедливость указанного во введении предположения Хоукса для радикальных классов.

Теорема. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой радикальный класс. Справедливы следующие утверждения:

1) $\mathfrak{F}$ является наследственным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \text{LR}(f)$ для локальной H -функции f , значения которой определяются формулой (1);

2) $\mathfrak{F}$ тотально локален тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ наследствен.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальный класс, определяемый локальной H -функцией f со значениями (1). Тогда выполнено равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\sigma \cap \left(\bigcap_{p \in \sigma} f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \right)$, где $\sigma = \text{Supp } f = \pi(\mathfrak{F})$, и по лемме 1 $\mathfrak{F}$ — наследственный радикальный класс.

Предположим, что непустой радикальный класс $\mathfrak{F}$ наследствен. Если $\mathfrak{F}$ имеет ограниченную нильпотентную длину, т. е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^k$ для некоторого натурального k , то в этом случае по лемме 6 $\mathfrak{F} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$, где

$\mathfrak{F}_i$ — некоторое произведение радикальных классов $\mathfrak{S}_{\pi_1}, \mathfrak{S}_{\pi_2}, \dots, \mathfrak{S}_{\pi_n}$ для некоторых множеств простых чисел $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ и некоторого натурального n . По лемме 2 каждое из произведений $\mathfrak{F}_i$ определяется наследственной локальной H -функцией f_i , и тогда по лемме 3 из [10] $\mathfrak{F}$ локальный радикальный и его локальная H -функция (см. доказательство леммы 3 в [10]) $\varphi = \bigcap_{i \in I} f_i$. Итак, $\mathfrak{F} = \text{LR}(\varphi)$ и локальная

H -функция φ наследственна по лемме 1. Значит, по утверждению 1 леммы 4 $\mathfrak{F} = \text{LR}(f)$ для локальной H -функции f , значения которой определяются равенством (1).

Для доказательства первого утверждения теоремы остается рассмотреть случай, когда нильпотентная длина класса $\mathfrak{F}$ неограниченна. Пусть $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^i$, $i \geq 1$. Тогда для каждого натурального i класс $\mathfrak{F}_i$ имеет ограниченную нильпотентную длину и наследствен по лемме 1. Следовательно, как и ранее, $\mathfrak{F}_i = \text{LR}(f_i)$ для некоторой наследственной H -функции f_i . Но тогда $\mathfrak{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$ — объединение цепи радикальных

классов, каждый из которых определяется наследственной локальной H -функцией. Значит, по лемме 5 $\mathfrak{F} = \text{LR}(\psi)$ для некоторой наследственной локальной H -функции ψ . Но тогда по утверждению 1 леммы 4 $\mathfrak{F} = \text{LR}(f)$ и значения локальной H -функции f определяются равенством (1). Первое утверждение теоремы доказано.

Если $\mathfrak{F}$ наследствен, то $\mathfrak{F}$ тотально локален по утверждению 1 данной теоремы. Докажем обратное. Для этой цели, следуя [4] (см. также [2, VII.3]), опишем семейство $\mathcal{F}$ всех тотально локальных радикальных классов следующим образом. Пусть $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}\}$. Для всякого натурального $i > 0$ семейство радикальных классов $\mathcal{F}$ определим индуктивно: $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$ в том и только в том случае, если либо $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}_{i-1}$, либо $\mathfrak{X} = \text{LR}(x)$ для локальной H -функции x такой, что $x(p) \in \mathcal{F}_{i-1}$ для всех простых $p \in \text{Supp } x$. Тогда $\mathcal{F}$ — семейство всех таких радикальных классов $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X} = \bigcup_j \mathfrak{X}_j$, где $\mathfrak{X}_j \in \bigcup_j \mathcal{F}_i$ и $\mathfrak{X}_j \subseteq \mathfrak{X}_{j+1}$.

Пусть $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ и $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \dots$ и $\mathfrak{F}_i \in \mathcal{F}_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$. Очевидно, что $\mathcal{F}_0$ состоит из множества наследственных радикальных классов. Используя индукцию по i и утверждение 1 теоремы, легко видеть, что все радикальные классы из $\mathcal{F}_i$ наследственны для всех натуральных i . Но тогда и радикальный класс $\mathcal{F}$ наследствен как объединение цепи наследственных радикальных классов. Теорема доказана.

Доказанная теорема показывает, что семейство локальных радикальных классов обширно: оно содержит все непустые наследствен-

ные радикальные классы. Однако не всякий локальный радикальный класс является наследственным. Это подтверждает следующий

ПРИМЕР. Пусть $\emptyset \subset \pi \subset \mathbb{P}$ и $\mathfrak{X}^\pi$ — класс всех тех групп G , π -радикалы которых гиперцентральны в G . Тогда по [2, IX.2.5,a] $\mathfrak{X}^\pi$ — ненаследственный радикальный класс. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}^\pi \mathfrak{N}$. Легко видеть, что $\mathfrak{F} = \text{LR}(f)$ для локальной H -функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{X}^\pi$ для всех простых p . Покажем, что класс $\mathfrak{F}$ ненаследствен. Так как радикальный класс $\mathfrak{X}^\pi$ не является наследственным, то существует такая группа $G \in \mathfrak{X}^\pi$, что ее подгруппа H не принадлежит $\mathfrak{X}^\pi$. Пусть p — простое число, не делящее $|G|$, и $W = G \wr C_p$ — регулярное сплетение группы G с циклической группой порядка p . Очевидно, что $W \in \mathfrak{F}$. Если предположить, что класс $\mathfrak{F}$ наследствен, то $\Gamma = H \wr C_p \in \mathfrak{F}$. По утверждению X.1.25 из [2] радикальный класс $\mathfrak{X}^\pi$ является классом Локетта, т. е. $(X \times X)_{\mathfrak{X}^\pi} = X_{\mathfrak{X}^\pi} \times X_{\mathfrak{X}^\pi}$ для любой группы X . Поэтому по лемме 2.2 из [15] (см. также [2, X.2.1,a]) $\Gamma_{\mathfrak{X}^\pi} = (H_{\mathfrak{X}^\pi})^*$, где $(H_{\mathfrak{X}^\pi})^*$ — база сплетения $H_{\mathfrak{X}^\pi} \wr C_p$. Теперь из того, что $\Gamma \in \mathfrak{F}$ и $H_{\mathfrak{X}^\pi} \trianglelefteq H$, по [2, A.18.2,d] $(H/H_{\mathfrak{X}^\pi}) \wr C_p \cong \Gamma / (H_{\mathfrak{X}^\pi})^* \in \mathfrak{N}$. Но тогда из того, что p не делит $|G|$, следует, что $H = H_{\mathfrak{X}^\pi}$, а это противоречит выбору H . Значит, $\mathfrak{F}$ — ненаследственный локальный радикальный класс.

Отметим, что условие разрешимости радикального класса $\mathfrak{F}$ в теореме существенно, так как из результатов Л. А. Шеметкова и А. Ф. Васильева [16] следует, что существуют неразрешимые наследственные радикальные классы, которые нелокальны.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает основной результат [10] о том, что каждый непустой разрешимый наследственный радикальный класс локален, что в общем случае неверно для разрешимых формаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. Скиба А. Н. Кратно локальные формации // 10 Всесоюз. симпозиум по теории групп: Тез. докл. Минск, 1986. С. 211.
4. Hawkes T. O. Skeletal classes of soluble groups // Arch. Math. 1971. Bd 22, N 6. S. 577–589.
5. Bryce R. A., Cossey J. Fitting formation of finite soluble groups // Math. Z. 1972. Bd 127, N 3. S. 217–223.
6. Hartley B. On Fisher's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. V. 3, N 9. P. 103–115.
7. D'Arcy P. Locally defined Fitting classes // J. Austral. Math. Soc. 1975. V. 20, N 1. P. 25–32.
8. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
9. Воробьев Н. Т. Локальные произведения классов Фиттинга // Вестн. АН БССР. Сер. физ. матем. наук. 1991. № 6. С. 22–26.
10. Воробьев Н. Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга // Мат. заметки. 1992. Т. 51, вып. 3. С. 3–8.
11. Воробьев Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки. 1988. Т. 43, вып. 2. С. 161–168.
12. Grytczuk A., Vorob'ev N. T. On Lockett's conjecture for finite groups // Tsukuba J. Math. 1994. V. 18, N 2. P. 63–67.
13. Bryce R. A., Cossey J. Subgroup closed Fitting classes are formations // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1982. V. 91, N 2. P. 225–258.
14. Bryce R. A., Cossey J. A problem in theory of normal Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd 141, N 2. S. 99–110.
15. Cossey J. Products of Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd 141, N 3. S. 289–295.
16. Шеметков Л. А., Васильев А. Ф. О конечных группах с заданными холловскими подгруппами // 6 конф. математиков Беларуси: Тез. докл. Гродно, 1992. Ч. I. С. 56.