двух зависимых задач Карлемана:

$$U^-\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\lambda_1+A_1(x)}{\mu_1+B_1(x)}\left(\frac{\Delta(x)}{\Delta(1/x)}U^-(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_1+A_1(1/x))G(x)-(\mu_1+B_1(x))G(1/x)}{\Delta(1/x)}\right),$$

$$U^+(1/x)=-\frac{\lambda_1+A_1(x)}{\mu_1+B_1(x)}U^+(x)+\frac{\lambda_2+A_2(x)}{\mu_1+B_1(x)}U^-(x)+$$

$$+\frac{\mu_2+B_2(x)}{\mu_1+B_1(x)}U^-\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{G(x)}{\mu_1+B_1(x)}. \qquad (11)$$

Следуя [3, § 18], можно подсчитать число линейно независимых решений и условий разрешимости в задачах Карлемана (10), (11).

Summary

For the full equation of convolution type in a special space of the generalised functions the index is computed, the Neter conditions are obtained, the cases are indicated when the equation can be solved in a closed form.

Литература

1. Тузик Т. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. № 2. С. 35—40.
2. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977.
4. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов-на-Дону, 1988.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

Брестский политехнический институт

Поступила в редакцию 23.10.89

УДК 512.542

Н. Т. ВОРОБЬЕВ

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Общие закономерности построения локальных произведений формаций описаны Л. А. Шеметковым [1—3] (см. также [4], § 7). Один из наиболее ярких результатов в этом направлении, ставший уже классическим,— теорема о локальности произведений локальных формаций конечных групп, которая в разрешимом случае была доказана Гашюцом [5], в произвольном с явным описанием экранов произведения — Л. А. Шеметковым [1]. В настоящей работе получен результат, в точности двойственный указанному, в теории классов Фиттинга — классов конечных групп, наследственных относительно нормальных подгрупп и их произведений. Исследуются также условия локальности произведения классов $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ в случае, когда $\mathfrak{H}$ — локальный класс Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. Тогда их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — класс всех групп G таких, что $G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H}$, где $G_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-радикал группы G [4]. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга ассоциативно [5]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем локальным [6], если существует такая локальная групповая функция f [7], что $f(p)$ — класс Фиттинга для каждого простого p и $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}\pi(\mathfrak{F})\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}f(p)\mathfrak{N}p\mathfrak{G}_{p'})$. В дальнейшем f будем называть радикальной функцией класса $\mathfrak{F}$ [8]. Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ назовем локальным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — локальный класс Фиттинга. В других обозначениях и определениях мы следуем монографии Л. А. Шеметкова [7] и книге [4]. Рассматриваются только конечные группы.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\{\mathfrak{H}_i \mid i\in I\}$ — множество классов Фиттинга, то имеет место равенство:

$$\bigcap_{i\in I}(\mathfrak{F}\mathfrak{H}_i)=\mathfrak{F}(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{H}_i);$$

2) если $\{\mathfrak{F}_i \mid i\in I\}$ — множество классов Фиттинга и $\mathfrak{H}$ — радикальная формация, то справедливо равенство:

$$\bigcap_{i\in I}(\mathfrak{F}_i\mathfrak{H})=(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)\mathfrak{H}.$$

Доказательство утверждения 1) осуществляется непосредственной проверкой, утверждения 2) — аналогично доказательству леммы 4.2) [6].

Следуя Л. А. Шеметкову [7], любое множество $\Omega\neq\varnothing$ радикальных функций частично упорядочим следующим образом: $f_i\leqslant f_j$ тогда и только тогда, когда $f_i(p)\subseteq f_j(p)$ для всех простых p ($f_i, f_j\in\Omega$). (см. также [9—11]).

Лемма 2. *Пересечение любого непустого множества локальных классов Фиттинга — локальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга с радикальной функцией f_i, $i\in I$. Построим групповую функцию $f=\bigcap_{i\in I}f_i$. Так как для всякого $i\in I$ и любой группы $G\neq 1$ имеет место равенство $f_i(G)=\bigcap_{p\in\pi(G)}f_i(p)$, то $f(G)=\bigcap_{i\in I}(\bigcap_p f_i(p))=\bigcap_p(\bigcap_{i\in I}f_i(p))=\bigcap_p f(p)$ и поэтому f — радикальная функция. Докажем, что f определяет локально $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{G}_\pi\bigcap(\bigcap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'})$, где $\pi=\pi(\mathfrak{F})$. Так как $f\leqslant f_i$ для всех $i\in I$, то $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Пусть G — группа из $\mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{f_i(p)}\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ для каждого $i\in I$, простого $p\in\pi$. Значит, $G/\bigcap_{i\in I}G_{f_i(p)}=G/G_{f(p)}\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$. Следовательно, $G\in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ для всех простых p из π. Кроме того, $G\in\mathfrak{G}_\pi$. Итак, $G\in\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если π — множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ — такой непустой класс Фиттинга, что $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p=\mathfrak{F}$ для всех простых чисел $p\in\pi'$, то произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi$ локально.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — локальный класс Фиттинга с радикальной функцией f такой, что

$$f(p)=\begin{cases}\mathfrak{G}, & \text{если } p\in\pi,\\ \mathfrak{F}, & \text{если } p\in\pi'.\end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{G}\bigcap(\bigcap_{p\in\pi'}\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'})$. По лемме 1.1) $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}(\bigcap_{p\in\pi'}\mathfrak{G}_{p'})=\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi$.

Лемма доказана.

Радикальную функцию f класса $\mathfrak{F}$ назовем полной внутренней [8], если $f(p)\subseteq\mathfrak{F}$ и $f(p)\mathfrak{N}_p=f(p)$ для всех простых p.

Следствие 1. *Пусть π — множество простых чисел. Если $\mathfrak{F}$ — такой непустой класс Фиттинга, что $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p=\mathfrak{F}$ для всех простых $p\in\pi'$, то функция ψ такая, что для всех простых p имеет место равенство*

$$\psi(p)=\begin{cases}\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi, & \textit{если } p\in\pi,\\ \mathfrak{F}, & \textit{если } p\in\pi',\end{cases}$$ *является полной*

внутренней радикальной функцией класса $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi$.

Доказательство. Легко видеть, что искомая функция ψ класса $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi$ определяется для каждого простого p равенством: $\psi(p)=(f(p)\bigcap\bigcap\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi)\mathfrak{N}_p$, где f — функция, определенная в доказательстве леммы 3.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и π — множество простых чисел, причем $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi'}=\mathfrak{F}$, то произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi$ локально.*

Доказательство. Достаточно показать, что из условия $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi'}=\mathfrak{F}$ следует условие леммы. Пусть $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$, где p — любое простое число из π'. Тогда $G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{G}_{\pi'}$. Следовательно, $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi'}=\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{F}$. Обратное включение очевидно.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и π — множество простых чисел, то каждое произведение классов Фиттинга вида $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}$ является локальным с полной внутренней радикальной функцией ψ такой, что*

$$\psi(p)=\begin{cases}\mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi, & \text{если } p\in\pi,\\ \mathfrak{F}\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}, & \text{если } p\in\pi'.\end{cases}$$

Лемма 4. *Каждое произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}=\Pi_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i$ $(n\geqslant 2)$, где $\mathfrak{F}_i=\mathfrak{G}_{\pi_i}$ для некоторого множества простых чисел π_i, является локальным.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по числу сомножителей n. Пусть $n=2$. Покажем, что произведение $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2=\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{\pi_2}$ является локальным. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга с радикальной функцией f такой, что

$$f(p)=\begin{cases}\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2, & \text{если } p\in\pi_2,\\ \mathfrak{F}_1, & \text{если } p\in\pi_1\setminus\pi_2\end{cases}$$

и $\pi=\pi_1\cup\pi_2$. Тогда, учитывая определение f и лемму 1.1), имеем

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{G}_\pi\cap(\cap_{p\in\pi_2}\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{\pi_2}\mathfrak{G}_{p'})\cap(\cap_{p\in\pi_1\setminus\pi_2}\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{p'})=$$
$$=\mathfrak{G}_\pi\cap\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{\pi_2}\mathfrak{G}_{\pi_2'}\cap\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{\pi_1\setminus\pi_2}\mathfrak{G}_{(\pi_1\setminus\pi_2)'}. \qquad (*)$$

Следовательно, применяя снова утверждение 1) леммы 1, получим

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{G}_\pi\cap\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{\pi_2}(\mathfrak{G}_{\pi_2'}\cap\mathfrak{G}_{(\pi_1\setminus\pi_2)'})=\mathfrak{G}_\pi\cap\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{\pi_2}\mathfrak{G}_{\pi'}=\mathfrak{G}_{\pi_1}\mathfrak{G}_{\pi_2}=\mathfrak{F}.$$

Итак, для $n=2$ лемма доказана.

Предположим, что $n>2$ и все произведения классов Фиттинга длины, меньшей n, локальны. Пусть $\mathfrak{H}=\Pi_{j=1}^{n-2}\mathfrak{F}_j$. Тогда, используя свойство ассоциативности умножения классов Фиттинга (см. лемму 1 [8]) и равенство $(*)$ для классов $\mathfrak{F}_{n-1}$ и $\mathfrak{F}_n$, получаем

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}(\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{F}_n)=\mathfrak{H}(\mathfrak{G}_\sigma\cap\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_\nu\mathfrak{G}_{\nu'}\cap\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{G}_{\omega\setminus\nu}\mathfrak{G}_{(\omega\setminus\nu)'}),$$

где $\pi_{n-1}=\omega$, $\pi_n=\nu$, $\sigma=\omega\cup\nu$. Но по лемме 1. 1) справедливо равенство:

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\mathfrak{G}_\sigma\cap\mathfrak{X}\mathfrak{G}_\nu\mathfrak{G}_{\nu'}\cap\mathfrak{X}\mathfrak{G}_{\omega\setminus\nu}\mathfrak{G}_{(\omega\setminus\nu)'},$$

где $\mathfrak{X}=\mathfrak{H}\mathfrak{G}_\omega$. Так как $\mathfrak{H}\mathfrak{G}_\sigma$ произведение длины $n-1$, то оно локально по индукции. Кроме того, произведения $\mathfrak{X}\mathfrak{G}_\nu\mathfrak{G}_{\nu'}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{G}_{\omega\setminus\nu}\mathfrak{G}_{(\omega\setminus\nu)'}$ локальны по следствию 3. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — локальное произведение по лемме 2. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — непустые классы Фиттинга, то $\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})=\pi(\mathfrak{F})\cup\pi(\mathfrak{H})$.*

Доказательство. Пусть $p\in\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$. Тогда существует такая группа G из $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, что $p\,|\,|G|$. Очевидно, $|G_{\mathfrak{F}}|$, $|G/G_{\mathfrak{F}}|\in\pi(\mathfrak{F})\cup\pi(\mathfrak{H})$. Следовательно, $p\in\pi(\mathfrak{F})\cup\pi(\mathfrak{H})$.

Так как $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $\pi(\mathfrak{F})\subseteq\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$. Покажем, что $\pi(\mathfrak{H})\subseteq\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$. Пусть $q\in\pi(\mathfrak{H})$. Тогда по X. 4c) [5] $\mathfrak{N}_q\subseteq\mathfrak{H}$. Следовательно, циклическая группа Q порядка q принадлежит $\mathfrak{H}$. Если $Q_{\mathfrak{F}}=1$, то $Q/Q_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H}$ и $Q\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Пусть $Q_{\mathfrak{F}}=Q$. Тогда $Q\in\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Итак, в каждом случае $q\in\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$. Значит, $\pi(\mathfrak{F})\cup\pi(\mathfrak{H})\subseteq\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$.

Лемма даказана.

Теорема 1. *Произведение двух любых локальных классов Фиттинга является локальным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга с радикальными функциями f и h соответственно. Тогда по лемме 1.1) имеет место равенство:

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{H}^*, \qquad (1)$$

где

$$\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})} \text{ и } \mathfrak{H}^*=\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{H})}(\mathfrak{F}h(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}. \qquad (2)$$

Так как по следствию 3 произведения $(\mathfrak{F}h(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ локальны для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{H})$, то по лемме 2 класс Фиттинга $\mathfrak{H}^*$ локальный. Поэтому, учитывая снова лемму 2, для локальности $\mathfrak{F}$ покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ локален. По утверждению 2 леммы 1 получаем равенство:

$$\mathfrak{F}^*=\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}). \qquad (3)$$

Пусть $x(p)=f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ и $\mathfrak{X}=\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}x(p)\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$. Учитывая (3) и леммы 2, 4 для доказательства теоремы теперь остается установить, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ локален. Для этого ввиду леммы 2 покажем, что произведения $x(p)\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$ локальны для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{F})$.

Имеются следующие две возможности:

1) $p\in\pi(\mathfrak{H})$. В этом случае $\mathfrak{G}_{\pi'(\mathfrak{H})}\subseteq\mathfrak{G}_{p'}$ и, следовательно, $x(p)\mathfrak{G}_{\pi'(\mathfrak{H})}=x(p)$. Значит, по следствию 2 $x(p)\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$ — локальный класс Фиттинга. Остается принять случай

2) $p\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi(\mathfrak{H})$. Но тогда $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}\subseteq\mathfrak{G}_{p'}$ и поэтому имеет место равенство:

$$x(p)\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}=x(p). \qquad (4)$$

Теперь класс Фиттинга $x(p)$ локален по следствию 3.

Теорема доказана.

Замечание. Равенства (1)—(4), (*) и доказательство теоремы 1 позволяют указать процедуру построения радикальной функции ψ локального произведения $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ посредством радикальных функций f и h классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Действительно, так как по лемме 5

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})}\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})}\psi(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'})=$$

$$=\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})\cup\pi(\mathfrak{H})}\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{H})}\psi(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'})\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi(\mathfrak{H})}\psi(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}),$$

то значения функции ψ, исходя из (1) и (*), определяются для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{H})$ ввиду (2), и для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi(\mathfrak{H})$ ввиду (3), (4) как $\psi(p)=\mathfrak{F}h(p)$ и $\psi(p)=f(p)$ соответственно. Этот факт мы сформулируем как

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга с радикальными функциями f и h соответственно. Тогда их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга с радикальной функцией ψ такой, что*

$$\psi(p)=\begin{cases}\mathfrak{F}h(p), & \text{если } p\in\pi(\mathfrak{H}),\\ f(p), & \text{если } p\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi(\mathfrak{H}).\end{cases}$$

Теорема 2. *Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга с радикальной функцией h, причем $\pi(\mathfrak{F})\subseteq\pi(\mathfrak{H})$, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально и определяется радикальной функцией f такой, что $f(p)=\mathfrak{F}h(p)$ для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{H})$.*

Доказательство. По лемме 1.1)

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{H})}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}),$$

где $f(p)=\mathfrak{F}h(p)$ для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{H})$. Теперь тот факт, что f определяет $\mathfrak{F}$, вытекает из того, что по лемме 5 $\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})=\pi(\mathfrak{H})$.

Теорема доказана.

Следствие 5. *Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{H}\supseteq\mathfrak{N}$ — класс Фиттинга с радикальной функцией h, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально и определяется такой радикальной функцией f, что $f(p)=\mathfrak{F}h(p)$*

для всех простых p. Через $\mathrm{lFit}\,\mathfrak{F}$ *будем обозначать локальный класс Фиттинга, порожденный классом Фиттинга* $\mathfrak{F}$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустой класс Фиттинга,* $\mathfrak{H}$ *— локальный класс Фиттинга. Если* $\mathrm{lFit}\,\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})}$ *или* $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p=\mathfrak{F}$ *для всех простых* $p\in\pi'(\mathfrak{H})$, *то произведение классов Фиттинга* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *локально.*

Доказательство. По лемме 1.1)

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}\cap\mathfrak{F}^*,\quad \mathfrak{F}^*=\bigcap\nolimits_{p\in\pi(\mathfrak{H})}(\mathfrak{F}h(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$$

и h — радикальная функция класса $\mathfrak{H}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ локален по лемме 2 и следствию 3. Поэтому ввиду леммы 2 для доказательства теоремы достаточно установить локальность произведения $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$.

Если $\mathrm{lFit}\,\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})}$, то $(\mathrm{lFit}\,\mathfrak{F})\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$, и поэтому произведение $(\mathrm{lFit}\,\mathfrak{F})\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}=\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$ локально по теореме 1.

Пусть $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p=\mathfrak{F}$ для всех простых $p\in\pi'(\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{H})}$ локальное произведение по лемме 3.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что теоремы 2, 3 и следствия 3—5 являются также результатами, двойственными соответствующим результатам из теории формаций, полученным Л. А. Шеметковым в [1, 2].

Summary

In thi paper a radical function of the product of two local Fittingclasses is described.

Литература

1. Шеметков Л. А. Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 8. С. 677—680.
2. Шеметков Л. А. Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101—103.
3. Шеметков Л. А.// Тр. VI Всесоюз. симпозиума по теории групп. Киев. 1980. С. 37—50.
4. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
5. Gaschütz W. Lectures on Subgroups of Ylow tupe in finite Soluble groups // Notes in Pure Mathematics. Canberra. 1979. Vol. 11.
6. Воробьев Н. Т.// Матем. заметки. 1988. Т. 43, № 2. С. 161—168.
7. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
8. Воробьев Н. Т.// Вопросы алгебры. Минск, 1986. № 2. С. 41—50.
9. Воробьев Н. Т.// Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 137—161.
10. Воробьев Н. Т.// Матем. заметки. 1981. Т. 30, № 2. С. 305—311.
11. Воробьев Н. Т.// Матем заметки. 1983. Т. 34, № 2. С. 165—170.

Витебский государственный педагогический институт им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 21.11.89

УДК 513.88

В. М. ЗУБОВ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА

В заметке изучается проблема описания множества линейных операторов $\{a\}$, удовлетворяющих условию $ax_0=f_0$, где известные элементы x_0, f_0 принадлежат векторным пространствам. Подобные задачи возникают в имитационном моделировании, теории информации и многих других разделах математики. Здесь сделана попытка описания одного метода решения задач такого типа. Метод приближенного решения таких задач указан в [1].

1. Операторы неоднозначности. Отправным утверждением в последующих рассуждениях является лемма, при доказательстве которой использованы свойства $aa^+a=a$, $a^+aa^+=a^+$ обобщенного обратного a^+ для оператора a [2].