

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542.6

Н. Т. ВОРОБЬЕВ

О ПРОБЛЕМЕ ЛАУША
В ТЕОРИИ НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

(Представлено академиком В. П. Платоновым)

Все рассматриваемые в данной статье группы конечны и разрешимы. Напомним, что класс групп $\mathcal{F}$ называют классом Фиттинга, если выполняются следующие два условия: 1) из $G \in \mathcal{F}$ и $N \triangleleft G$ всегда следует $N \in \mathcal{F}$; 2) если $G = N_1 N_2$, где $N_i \triangleleft G$ и $N_i \in \mathcal{F}$ ($i=1, 2$), то $G \in \mathcal{F}$. Из условия 2) следует, что если $\mathcal{F}$ — произвольный непустой класс Фиттинга и G — группа, то произведение $G_{\mathcal{F}}$ всех нормальных $\mathcal{F}$ -подгрупп из G принадлежит $\mathcal{F}$.

Особую роль в теории классов Фиттинга играют так называемые нормальные классы Фиттинга. Непустой класс Фиттинга $\mathcal{F}$ называется нормальным, если в любой группе G подгруппа $G_{\mathcal{F}}$ является максимальной $\mathcal{F}$ -подгруппой G . В работе [1] было установлено, что пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга снова является нормальным классом Фиттинга (его называют минимальным нормальным классом Фиттинга). Среди открытых проблем о минимальном нормальном классе Фиттинга известен следующий вопрос Х. Лауша: «Существуют ли максимальные классы Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга?» (см. вопрос 9.18 [2]). В настоящей работе мы покажем, что ответ на вопрос Лауша отрицателен. Используемая в дальнейшем терминология общепринята [3–5]. Напомним лишь обозначение классов $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}_*$.

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный непустой класс Фиттинга. Тогда $\mathcal{F}^* = \{G \mid (G \times G)_{\mathcal{F}} \text{ входит подпрямую в } G \times G\}$, а $\mathcal{F}_*$ — пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathcal{F}$, что $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*$ [6]. Хорошо известно [6], что минимальный нормальный класс Фиттинга есть $\mathcal{C}_*$, где $\mathcal{C}$ — класс всех конечных разрешимых групп. Если $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$, то $\mathcal{F}$ называют классом Локетта. Класс Фиттинга $\mathcal{F}$ называется классом Фишера [7], если из того, что $K \leq H \leq G \in \mathcal{F}$, $K \triangleleft G$ и $H/K \in \mathcal{R}_p$, всегда следует $H \in \mathcal{F}$ (p — некоторое простое число). Сформулируем в виде леммы необходимые в дальнейшем свойства классов $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}_*$.

Лемма 1 [6, 8]. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{M}$ — непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, то $\mathcal{F}_* \subseteq \mathcal{M}_*$;
- 2) $(\mathcal{F}_*)^* = \mathcal{F}^*$, $(\mathcal{F}^*)_* = \mathcal{F}_*$ и $(\mathcal{F}_*)_* = \mathcal{F}_*$;
- 3) если $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ — множество непустых классов Фиттинга, то $(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i)^* = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i^*$;
- 4) каждый класс Фишера является классом Локетта.

Класс Фиттинга $\mathcal{F}$ называют локальным [9, 10], если существует такая локальная групповая функция f [3], что $f(p)$ — класс Фиттинга для всех простых p и $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\pi(\mathcal{F})} \cap (\bigcap_{p \in \pi(\mathcal{F})} f(p) \mathcal{R}_p \mathcal{C}_{p'})$. При этом f называют радикальной функцией класса $\mathcal{F}$.

Лемма 2. *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} (\bigcap_{r \in \pi(\mathfrak{F})} f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{C}_{p'})$ для некоторой радикальной функции f . Пусть $\mathfrak{E} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{E}_p$, $f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{C}_{p'} = \mathfrak{F}_p$ и $\mathfrak{M} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{F}_p$. Ввиду утверждения 3) леммы 1 для доказательства леммы достаточно выяснить, что классы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}$ — классы Локетта. Так как $\mathfrak{E}$ — наследственный класс Фиттинга, то $\mathfrak{E}$ — класс Фишера и поэтому по утверждению 4 леммы 1 $\mathfrak{E}$ — класс Локетта. Теперь, учитывая утверждение 3 леммы 1, остается выяснить, что $\mathfrak{F}_p$ — класс Локетта для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Это справедливо по лемме 1, так как $\mathfrak{F}_p$ — класс Фишера для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$ (см., например, доказательство леммы 5 [10]).

Лемма доказана.

Лемма 3 [10]. *Для каждого локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, содержащего класс $\mathfrak{N}$ всех конечных нильпотентных групп, выполняется равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{C}_*$.*

Лемма 4 [10]. *Если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ — классы Фиттинга, причем класс $\mathfrak{M}$ является одновременно Q-замкнутым и Ext₀-замкнутым, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{M})^* = \mathfrak{F}^* \mathfrak{M}$.*

Лемма 5 [11]. *Если $\mathfrak{F}$ — такой класс Фиттинга, что $\mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{F}$ — нормальный класс Фиттинга.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется максимальным подклассом Фиттинга класса $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ и из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$. Следующая теорема дает отрицательный ответ на отмеченный во введении вопрос Лауша.

Теорема. *В $\mathfrak{C}_*$ нет максимальных подклассов Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_*$ — минимальный нормальный класс Фиттинга и $\mathfrak{F}$ — максимальный подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{G}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ — ненормальный класс Фиттинга.

Предположим вначале, что существует по крайней мере один класс Фиттинга $\mathfrak{X}$, такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_*$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C}$, то ввиду утверждения 1) леммы 1 имеем $\mathfrak{X}_* \subseteq (\mathfrak{X}\mathfrak{N})_* \subseteq \mathfrak{G}$. Значит, поскольку по условию $\mathfrak{F}$ максимален в $\mathfrak{G}$, то либо $\mathfrak{X}_* = (\mathfrak{X}\mathfrak{N})_*$, либо $(\mathfrak{X}\mathfrak{N})_* = \mathfrak{G}$.

Если $\mathfrak{X}_* = (\mathfrak{X}\mathfrak{N})_*$, то по утверждению 2) леммы 1 $\mathfrak{X}^* = (\mathfrak{X}\mathfrak{N})^*$. Но $\mathfrak{N}$ — радикальная насыщенная формация. Следовательно, по лемме 4 $(\mathfrak{X}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{X}^* \mathfrak{N}$. Итак, $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}^* \mathfrak{N}$ и поэтому ввиду ассоциативности умножения классов Фиттинга (см., например, лемму 1 [12]) для любого натурального n имеет место равенство $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}^* \mathfrak{N}^n$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{X}^* \mathfrak{N}^n = \mathfrak{X}^*$. Следовательно, $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{C}$. Теперь, применяя утверждение 2) леммы 1, получаем $\mathfrak{X}_* = \mathfrak{G}$, что противоречит максимальнойности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$.

Предположим теперь, что $(\mathfrak{X}\mathfrak{N})_* = \mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{X}\mathfrak{N} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{C}_{p'}$ и $\mathfrak{C} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{E}_p$, где $f(p) = \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{C}_{p'} = \mathfrak{E}$ для всех простых p , то $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{C}$ — локальные классы Фиттинга. Следовательно, по лемме 2 $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{C}$ — классы Локетта. Но тогда из равенства $(\mathfrak{X}\mathfrak{N})_* = \mathfrak{G}$ и утверждения 2) леммы 1 следует, что $\mathfrak{X}\mathfrak{N} = \mathfrak{C}$. Значит, по лемме 5 $\mathfrak{X}$ — нормальный класс Фиттинга и поэтому ввиду минимальности класса $\mathfrak{G}$ справедливо включение $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{X}$. Теперь, применяя утверждения 1) и 2) леммы 1, получаем $(\mathfrak{G})_* = \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{X}_* = \mathfrak{F}$. Снова получили противоречие с максимальнойностью $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{X}_*$ для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}$. Но $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ — локальный класс Фиттинга (см. выше). Следовательно, по лемме 3 $\mathfrak{F}\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G} = (\mathfrak{F}\mathfrak{N})_*$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{N})_*$. По нашему предположению $\mathfrak{F} \neq (\mathfrak{F}\mathfrak{N})_*$. Поэтому $\mathfrak{F} \subset (\mathfrak{F}\mathfrak{N})_* \subseteq \mathfrak{G}$. Значит, ввиду максимальнойности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$ из последнего следует $(\mathfrak{F}\mathfrak{N})_* = \mathfrak{G}$. Но тогда, как и в случае 1, классы Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{C}$ локальны и по лемме 2 и утверждению 2) леммы 1 имеет место равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{C}$. Значит, по лемме 5 $\mathfrak{F}$ — нормальный класс Фиттинга. А это невозможно, так как $\mathfrak{F}$ ненормален. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Summary

It is proved that in Fitting's minimal normal class Fitting's maximal subclasses do not exist.

Литература

1. Blessenohl D., Gaschütz W. // Math. Z. 1970. Bd 118, N 1. S. 1—8.
2. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск, 1984.
3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
4. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
5. Gaschütz W. Selected topics in the theory of soluble groups. Canberra, 1969.
6. Lockett F. P. // Math. Z. 1974. Bd 137, N 2. S. 131—136.
7. Lockett F. P. // Math. Z. 1973. Bd 131, N 2. S. 103—115.
8. Bryce R. A., Cossey J. // Math. Z. 1974. Bd 141, N 2. S. 99—110.
9. D'Arcy P. // J. Austral. Math. Soc. 1975. Vol. 20, N 1. P. 25—31.
10. Воробьев Н. Т. // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 2. С. 161—168.
11. Cossey J. // Math. Z. 1975. Bd 141, N 3. S. 289—295.
12. Воробьев Н. Т. // Вopr. алгебры. 1986. № 2. С. 41—50.

Витебский государственный педагогический институт
им. С. М. Кирова

Поступило 13.02.91