МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 43, № 2 (1988)

О РАДИКАЛЬНЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С УСЛОВИЕМ ЛОКЕТТА

Н. Т. Воробьев

В теории радикальных классов конечных разрешимых групп (классов Фиттинга) хорошо известной является следующая проблема (предположение Локетта): каждый ли радикальный класс $\mathfrak{F}$ можно определить как пересечение двух радикальных классов $\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{F}^* = \{G \in \mathfrak{S} \mid (G^2)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^2 \langle g, g^{-1} \rangle \mid g \in G\}$ и $\mathfrak{X}$ — некоторый нормальный радикальный класс [1]?

Первые результаты, относящиеся к указанной проблеме, были получены Брайсом и Косси в [2], где доказано, что предположение Локетта верно для всех радикальных классов $\mathfrak{F}$, которые удовлетворяют условию $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$; при этом $\mathfrak{F}_* = \bigcap \{\mathfrak{H} \mid \mathfrak{H}^* = \mathfrak{F}^*\}$ и $\mathfrak{S}_*$ — минимальный нормальный радикальный класс. Радикальный класс групп $\mathfrak{F}$, для которого $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, называют *удовлетворяющим предположению Локетта* [3]. Хотя позднее [4] и построен пример радикального класса $\mathfrak{F}$ такого, что $\mathfrak{F}_* \neq \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, однако проблема описания радикальных классов, удовлетворяющих предположению Локетта, остается по-прежнему актуальной (см., например, [2, 3]).

До настоящего времени самым общим в этом направлении являлся результат Бейдлемана и Хаука [3], который устанавливает, что радикальные классы вида $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ удовлетворяют предположению Локетта.

В [5] автором анонсированы результаты, относящиеся к изучению локальных радикальных классов — конструкций, двойственных хорошо известным основным объектам теории формаций конечных групп — локальным формациям (см. [6, гл. I]).

Доказательство того, что каждый локальный радикальный класс конечных разрешимых групп удовлетворяет предположению Локетта,— основной результат настоящей работы. Специальные случаи его (радикальные классы вида $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ являются примерами локальных) — отмеченные выше известные результаты [3] и [2]. Из основного результата легко вытекает также положительное решение для случая локальных радикальных классов вопроса 8.30, сформулированного Лаушем в «Коуровской тетради» [7] (следствие 2).

Если $\mathfrak{F}$ — радикальный класс, то через $G_\mathfrak{F}$ обозначают $\mathfrak{F}$-радикал группы G, через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначают произведение радикальных классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — класс всех тех групп G, для которых $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}$. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ назовем *локальным* [5], если существует такая локальная групповая функция f [6], что $f(p)$ — радикальный класс для всех простых p и $\mathfrak{F} = \bigcap_p f(p)\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$. При этом f будем называть *радикальной функцией класса* $\mathfrak{F}$. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта* [1], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [6, 8] и [9]. Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы. Следуя Л. А. Шеметкову [6], введем

Определение 1. Пусть f — радикальная функция класса $\mathfrak{F}$. Тогда f назовем:

1) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого простого p;

2) *полной*, если $f(p)\mathfrak{S}_p = f(p)$ для всех простых p.

ЛЕММА 1. *Каждый локальный радикальный класс* (*в общем случае не обязательно разрешимых групп*) *определяется полной внутренней радикальной функцией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальный радикальный класс. Тогда существует такая радикальная функция f, что $\mathfrak{F} = \bigcap_p f(p)\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Определим радикальную функцию φ следующим образом: $\varphi(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ для каждого простого p. Очевидно, $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_p \varphi(p)\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Определим теперь радикальную функцию ψ таким образом, что $\psi(p) = \varphi(p)\mathfrak{S}_p$. Очевидно, что ψ — полная радикальная функция класса $\mathfrak{F}$. Покажем, что ψ — внутренняя радикальная функция. Пусть $G \in \psi(p)$. Тогда $G/G_{\varphi(p)} \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$ и поэтому $G \in \varphi(p)\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Предположим теперь, что q — любое простое число, отличное от p. Тогда $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{S}_{q'}$ и, следовательно, $G^{\mathfrak{S}_{q'}} \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $(G^{\mathfrak{G}_{q'}})^{\mathfrak{G}_q\mathfrak{G}_{q'}} \in \varphi(q)$. Используя теорему 7 [9], получаем $G^{\mathfrak{G}_q\mathfrak{G}_{q'}} \in \varphi(q)$. Значит, $G/G_{\varphi(q)} \simeq G/G^{\mathfrak{G}_q\mathfrak{G}_{q'}}/G_{\varphi(q)}/G^{\mathfrak{G}_q\mathfrak{G}_{q'}} \in \mathfrak{G}_q\mathfrak{G}_{q'}$. Итак, мы показали, что $G \in \bigcap_p \varphi(p)\, \mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — радикальные классы групп. Обозначим через $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ класс групп, который определяется следующим образом:

$G \in \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$-инъектор группы G принадлежит $\mathfrak{H}$.

Легко видеть, что класс $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ является S_n-замкнутым, однако в общем случае не является радикальным (см. пример 3.2 (в) [10]). Построенный класс групп является конструкцией, двойственной известным в теории формаций формационным произведениям 2-го рода, задача исследования которых рассматривалась [11, 12].

Напомним, что радикальный класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера* [1], если из того, что $K \subseteq H \subseteq G \in F$, $K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{G}_p$, всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ (p — некоторое простое число).

В следующих трех леммах мы не предполагаем, что рассматриваемые группы разрешимы.

ЛЕММА 2. *Каждый локальный радикальный класс является классом Фишера.*

Доказательство. Пусть f — радикальная функция класса $\mathfrak{F}$ и G — группа из $\mathfrak{F}$. Покажем, что если K — такая нормальная подгруппа группы G, что $K \subseteq H \subseteq G$ и $H/K \in \mathfrak{G}_q$ для некоторого простого числа q, то $H \in \mathfrak{F}$. Для этого достаточно выяснить, что $H^{\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}} \in f(p)$ для всех простых p. Рассмотрим два возможных случая.

1. p — простое число, отличное от q.

В этом случае $H/K \in \mathfrak{G}_{p'}$ и поэтому $H^{\mathfrak{G}_{p'}} \subseteq K$. Значит, $K^{\mathfrak{G}_{p'}} = H^{\mathfrak{G}_{p'}}$ и, следовательно, $K^{\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}} = H^{\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}}$. Но $K \in \mathfrak{F}$, и поэтому $H^{\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}} \in f(p)$.

2. $p = q$. Пусть H_q — силовская q-подгруппа группы H. Тогда H_qK/K является силовской q-подгруппой группы H/K. Следовательно, $H = H_qK$. Так как силовская q-подгруппа G_q группы G содержится в $G^{\mathfrak{G}_{q'}}$ и H_q содержится в G_q, то $[H_q, K] \subseteq [G^{\mathfrak{G}_{q'}}, K] \subseteq G^{\mathfrak{G}_{q'}} \cap K$. Но $G \in \mathfrak{F}$ и поэтому $G^{\mathfrak{G}_{q'}} \subseteq G_{f(q)\mathfrak{G}_q}$. Значит, $[H_q, K] \subseteq K \cap G_{f(q)\mathfrak{G}_q} = K_{f(q)\mathfrak{G}_q} = R$. Легко видеть, что $RH_q \trianglelefteq KH_q = H$. Так как $RH_q \in f(q)\,\mathfrak{G}_q$, то из $H/RH_q \in$

$\in \mathfrak{S}_{q'}$ следует, что $H \in f(q)\mathfrak{S}_q\mathfrak{S}_{q'}$. Таким образом, $H \in \in \bigcap_p f(p)\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

Радикальный класс групп, который является одновременно гомоморфом (формацией), замкнутым относительно операции Ext_Φ (см. также [6, с. 12]), назовем насыщенным радикальным гомоморфом (соответственно насыщенной радикальной формацией).

ЛЕММА 3. *Если $\mathfrak{F}$ — некоторый радикальный класс и $\mathfrak{H}$ — насыщенный радикальный гомоморф, то*

$$\mathfrak{F}^*\mathfrak{H} = (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*.$$

Доказательство. Докажем вначале, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H} \subseteq \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$. Предположим, что это не так. Выберем в классе $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H} \setminus (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$ группу G минимального порядка. Очевидно, $G_\mathfrak{F} \subseteq G_{\mathfrak{F}^*}$. Пусть $G_{\mathfrak{F}^*}/G_\mathfrak{F} \subseteq \Phi(G/G_\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{H}$ — гомоморф, то ввиду $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{H}$ получаем $G/G_\mathfrak{F}/G_{\mathfrak{F}^*}/G_\mathfrak{F} \in \in \mathfrak{H}$. Отсюда следует, что $G/G_\mathfrak{F}/\Phi(G/G_\mathfrak{F}) \in \mathfrak{H}$ и поэтому $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}$.

Значит, $G \in (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$, что невозможно.

Если $G_{\mathfrak{F}^*}/G_\mathfrak{F}$ не содержится в $\Phi(G/G_\mathfrak{F})$, то существует в $G/G_\mathfrak{F}$ такая максимальная подгруппа $M/G_\mathfrak{F}$, что $G/G_\mathfrak{F} = = (G_{\mathfrak{F}^*}/G_\mathfrak{F})(M/G_\mathfrak{F})$. Так как по теореме 3.5 1) [13] $G_{\mathfrak{F}^*}/G_\mathfrak{F} \subseteq \subseteq Z(G/G_\mathfrak{F})$, то $M/G_\mathfrak{F} \lhd G/G_\mathfrak{F}$. Следоват льно, по индукции $M \in (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$. Так как $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$, тое $G_{\mathfrak{F}^*} \in (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$. Таким образом, $G = G_{\mathfrak{F}^*}M \in (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$. По лученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^*$.

Докажем обратное включение. Если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то ввиду того, что $\mathfrak{H}$ — гомоморф, вытекает, что $G \in \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$ и поэтому по теореме 3.3 с) [13] $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* \subseteq (\mathfrak{F}^*\mathfrak{H})^*$. Так как по определению класса $\mathfrak{H}^*$ (см. [1], а также [13]) каждая группа G из $\mathfrak{H}^*$ является гомоморфным образом группы $(G \times G)_\mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$. Поэтому очевидно, что $\mathfrak{H}$ является классом Локетта, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$. Кроме того, по теореме 3.3 с) [13] класс $\mathfrak{F}^*$ — также класс Локетта. Таким образом, $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$ — произведение классов Локетта, и, следуя доказательству леммы 3.1 (в) [14], легко видеть, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$ — также класс Локетта. Итак, $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* \subseteq \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — радикальные классы групп. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{X}$ — радикальный гомоморф и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$;*

2) *если* $\mathfrak{X}$ — *радикальная формация, то* $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — радикальный гомоморф и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Тогда $G/G_{\mathfrak{F}_2} \simeq G/G_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_2}/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{X}$ и поэтому $G \in \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$.

По утверждению 1) $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\,\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$.

Если $G/G_{\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{X}$, то $G/\bigcap G_{\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{X}$. Понятно, что $\bigcap G_{\mathfrak{F}_i} = G_{\bigcap \mathfrak{F}_i}$. Следовательно, $G \in (\bigcap \mathfrak{F}_i)\mathfrak{X}$ $(i = 1, 2)$.

Лемма доказана.

Определение 3. Радикальную функцию f назовем *функцией Локетта*, если $f(p)$ — класс Локетта для всех простых p.

ЛЕММА 5. *Каждый локальный радикальный класс определяется функцией Локетта. В частности, каждый локальный радикальный класс является классом Локетта.*

Доказательство. Пусть φ — радикальная функция класса $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \bigcap_p \varphi(p)\,\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Легко видеть, что для каждого простого p радикальный класс $\varphi(p)\,\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$ является локальным. Следовательно, по лемме 2 $\varphi(p)\,\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$ — класс Фишера и поэтому по теореме 2.2 d) [1] также класс Локетта. Теперь, применяя лемму 3, мы получаем, что $(\varphi(p))^*\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'} = \varphi(p)\,\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех простых p. Построим теперь радикальную функцию f следующим образом: $f(p) = (\varphi(p))^*$ для всех простых p. Тогда по теореме 2.2 b) [1] f является функцией Локетта, определяющей локально $\mathfrak{F}$. Тот факт, что $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, вытекает непосредственно из свойства 2.3 b) [1].

Лемма доказана.

Следствие. *Каждый локальный радикальный класс определяется полной внутренней функцией Локетта.*

Доказательство. По лемме 1 каждый локальный радикальный класс $\mathfrak{F}$ определяется полной внутренней радикальной функцией ψ, которую легко получить из существующей по лемме 5 функции Локетта f, предполагая, что $\psi(p) = (f(p) \cap \mathfrak{F})\,\mathfrak{S}_p$ для всех простых p.

Определение 4. Пусть f — радикальная функция класса $\mathfrak{F}$. Радикальный класс $\mathfrak{H}$ назовем *f-инъекторно замкнутым*, если $\mathfrak{H} \subseteq f(p) \circ \mathfrak{H}$ для всех простых p.

Примеры. Пусть f — внутренняя радикальная функция класса $\mathfrak{F}$. Тогда радикальный класс $\mathfrak{H}$ является f-инъекторно замкнутым в каждом из следующих случаев:

1) $f(p)$ — S-замкнутый радикальный класс для всех простых p, $\mathfrak{H}$ — минимальный нормальный;

2) $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, причем $\mathfrak{X} \subseteq f(p)$ для всех простых p, $\mathfrak{Y}$ — S-замкнутый радикальный класс;

3) $\mathfrak{H} \supseteq f(p)$ для всех простых p или $\mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{F}$;

4) $f(p)$ — нормальный для всех простых p, $\mathfrak{H}$ — произвольный;

5) $\mathfrak{H}$ — S-замкнутый.

Действительно, в случае 1) $f(p)$ является классом Фиттера для всех простых p, и поэтому по теореме 4.4 [10] класс $\mathfrak{H}$ будет f-инъекторно замкнутым.

Проверим случай 2). Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и F — $f(p)$-инъектор группы G. Тогда $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{H}$. Но $G_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{f(p)} \subseteq F$, и поэтому $F/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$, так как класс $\mathfrak{Y}$ S-замкнут. По теореме 1.1 [15] радикальный класс $\mathfrak{Y}$ является формацией. Следовательно, $F \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{H}$. Случаи 3) — 5) тривиальны.

ЛЕММА 6. *Если ψ — полная внутренняя радикальная функция класса $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — ψ-инъекторно замкнутый радикальный класс, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$, то по теореме 3.5 [2] $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{H}_*$. Следовательно, $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$. Докажем обратное включение. Пусть G — группа из $\mathfrak{H}$ и F — $\psi(p)$-инъектор группы G, где p — простое. Тогда $F \in \psi(p) \cap \mathfrak{H}$ и поэтому $F \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Следовательно, ввиду леммы 3 и теоремы 2.2 b) [1] получаем, что $F \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'})^* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^*\mathfrak{S}_{p'}$. Значит, $G \in f(p) = \psi(p) \circ ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'})^*$. Итак, мы показали, что $\mathfrak{H} \subseteq f(p)$.

По теореме 3.3 [10] класс $f(p)$ является радикальным. Следовательно, по лемме 3 [3] имеет место равенство:

$$\psi(p) \circ ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'})^* = (\psi(p) \circ (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'})^*.$$

Но тогда по теоремам 3.5 [2] и 2.2 b) [1] имеем включение $\mathfrak{H}_* \subseteq \psi(p) \circ (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'}$. Следовательно,

$$\psi(p) \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'}.$$

По лемме 4 1) $(\psi(p) \cap \mathfrak{H}_*)\mathfrak{S}_{p'} \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'}$. Используя теперь утверждение 2) из леммы 4, мы получим, что $\psi(p)\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{p'} \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'}$ для всех простых p. Следовательно, $\bigcap_p (\psi(p)\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{H}_*\mathfrak{S}_{p'}) \subseteq \bigcap_p (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*\mathfrak{S}_{p'}$. Но, тогда $(\bigcap_p \psi(p)\mathfrak{S}_{p'}) \cap (\mathfrak{H}_*(\bigcap_p \mathfrak{S}_{p'})) \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*(\bigcap_p \mathfrak{S}_{p'})$. Значит, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$.

Лемма доказана.

Теорема. *Каждый локальный радикальный класс удовлетворяет предположению Локетта.*

Доказательство. Пусть ψ — полная внутренняя радикальная функция класса $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — класс всех разрешимых групп. Тогда, очевидно, $\mathfrak{H}$ — ψ-инъекторно замкнутый класс и по лемме 6 $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$.

Следствие 1 (Брайс, Косси, Бейдлеман, Хаук [2, 3]). *Примитивная насыщенная формация и радикальные классы групп типов $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ удовлетворяют предположению Локетта.*

Доказательство. Очевидно, класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ является примером локального, так как определяется полной внутренней радикальной функцией ψ такой, что для каждого простого p имеет место

$$\psi(p) = \begin{cases} \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi, \\ \mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

Теперь утверждение вытекает непосредственно из теоремы и следствий 2, 3 [3].

Следствие 2. *Если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — локальные радикальные классы, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — радикальный класс, удовлетворяющий предположению Локетта.*

Доказательство. Очевидно, радикальный класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — локальный, и утверждение вытекает из теоремы.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — радикальные классы, причем $\mathfrak{H}$ — локальный. Тогда произведение радикальных классов $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ удовлеворяет предположению Локетта.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — локальный радикальный класс, определяемый радикальной функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}h(p)$ для всех простых p, где h — некоторая радикальная функция класса $\mathfrak{H}$. Теперь утверждение вытекает непосредственно из теоремы.

Витебский государственный педагогический институт им. С. М. Кирова

Поступило 09.09.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lockett F. P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Bd. 137, № 2. S. 131—136.
[2] Bryce R. A., Cossey J. A problem in Theory of Normal Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd. 141, № 2. S. 99—110.
[3] Beidleman J. C., Hauck P. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermutung // Math. Z. 1979. Bd. 167, № 2. S. 161—167.

[4] Berger T. R., Cossey J. An example in the theory of normal Fittingclasses // Math. Z. 1977. Bd. 154, № 3. S. 287—293.
[5] Воробьев Н. Т. О локальных классах Фиттинга // XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Часть вторая. Минск, 14—17 сентября 1983 г./ Институт математики АН БССР. С. 42—43.
[6] Шеметков Л. А. Формация конечных групп. М.: Наука, 1978.
[7] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1982.
[8] Шеметков Л. А. О подгруппах π-разрешимых групп // Конечные группы / Минск: Наука и техника, 1975. С. 207—212.
[9] Gaschütz W. Selected topics in the theory of soluble groups // Lecture notes. Canberra: Austral. Nat. Univ., 1969.
[10] Hauck P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse // J. Algebra. 1979. V. 53, № 3. P. 395—401.
[11] Воробьев Н. Т. Максимальные экраны локальных формаций // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 137—161.
[12] Воробьев Н. Т. Об одном признаке локальности формационных произведений // Математические заметки. 1983. Т. 34, вып. 2. С. 165—170.
[13] Laue H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen // J. Algebra. 1977. V. 45, № 2. P. 274—283.
[14] Hauck P. On products of Fitting classes // J. London Math. Soc. 1979. V. 20, № 2. P. 423—434.
[15] Bryce R. A., Cossey J. Subgroup closed Fittingclasses are formations // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1982. V. 91, № 2. P. 225—258.