МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 30, № 2 (1981)

ВЛОЖЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ЭКРАНОВ

Н. Т. Воробьев

В вопросах построения и классификации формаций важную роль играет понятие экрана, введенное Л. А. Шеметковым в работах [1, 2]. Экран — такое отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех конечных групп в множество классов групп, что для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ — формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^\alpha) \cap f(\operatorname{Ker} \alpha)$ для любого гомоморфизма α группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$, где 1 — единичная группа.

Любое множество Ω экранов будем, следуя Л. А. Шеметкову, считать частично упорядоченным с отношением $\leqslant$, которое задается следующим образом. Если $f_1, f_2 \in \Omega$, то будем говорить, что экран f_1 вложен в экран f_2, и обозначать $f_1 \leqslant f_2$, если $f_1(G) \subseteq f_2(G)$ для любой группы G. Возникает задача определить те условия, при которых экран f_1 вложен в экран f_2. Настоящая заметка посвящена рассмотрению этой задачи для локальных экранов. Получены три критерия вложения локальных экранов. Напомним, что экран f называется локальным [1], если выполняются следующие условия:

1) $f(R) = f(S)$ для любых двух неединичных p-групп и любого простого p (в этом случае значение f на неединичных p-группах обозначают $f(p)$);

2) $f(G) = \bigcap_p f(p)$ для любой неединичной группы G, где p пробегает все простые делители порядка G.

В настоящей заметке все рассматриваемые группы конечны. Через $\mathfrak{G}_p$ будем обозначать класс всех p-групп, где p — простое. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Экран f назовем $\mathfrak{X}$-экраном, если $f(G) \subseteq \mathfrak{X}$ для любой группы G. В случае необходимости определения и обозначения, которые здесь не приведены, можно найти в [1, 3—5]. В дальнейшем мы будем использовать следующие леммы, которые представляют самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. *Пусть H — такая подгруппа группы G, что $G = H\mathrm{F}(G)$. Если $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация, то $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть G — группа, имеющая наименьший порядок, для которой лемма неверна. Если $G \in \mathfrak{F}$, то по лемме 1.5 из работы [6] следует, что $H \in \mathfrak{F}$ и лемма верна. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Пусть $H^{\mathfrak{F}}$, $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикалы соответственно групп H, G. Тогда по лемме 1.5 из работы [1] имеем, что $H^{\mathfrak{F}} K/K$, $G^{\mathfrak{F}}/K$ — $\mathfrak{F}$-корадикалы соответственно групп HK/K, G/K. По индукции $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть в группе G все минимальные нормальные подгруппы разрешимы. Если G имеет не более двух минимальных нормальных подгрупп и $O_p(G) = 1$ для некоторого простого p, то G имеет точное неприводимое представление над конечным полем характеристики p.*

Доказательство. Предположим, что в группе G нет собственных нормальных подгрупп. Тогда порядок G равен простому числу q, отличному от p. Пусть X — группа Шмидта порядка $p^m q$ с нормальной элементарной абелевой силовской p-подгруппой X_p. Тогда силовская q-подгруппа X_q из X изоморфна G. Но X_q изоморфно вкладывается в группу $\mathrm{GL}(m, p)$ всех автоморфизмов силовской p-подгруппы X_n из X. Следовательно, представление

$$\varphi\colon \quad G \to \mathrm{GL}(m, p)$$

и является точным неприводимым представлением над полем из p элементов.

Пусть M — цоколь группы G. Если M — разрешимая минимальная нормальная подгруппа группы G, то в M существует такая нормальная подгруппа K, что группа M/K циклическая и $K_G = 1$. Предположим, что в G имеются точно две разрешимые различные минимальные нормальные подгруппы R и S. Тогда $M = R \times S$. Если порядки подгрупп R и S взаимно просты, то

$$R = \langle r\rangle \times K_1, \qquad S = \langle s\rangle \times K_2,$$

где K_1, K_2 — соответственно подгруппы простого индекса в R, S.

Пусть $K = K_1 \times K_2$. Тогда, очевидно, группа M/K циклическая и $K_G = 1$. Предположим, что порядки подгрупп R и S не взаимно просты. Пусть

$$R = \mathop{\times}_{i=1}^{k} \langle r_i \rangle, \quad S = \mathop{\times}_{j=1}^{l} \langle s_j \rangle$$

и

$$K = \langle r_1 \rangle \times \langle r_2 \rangle \times \ldots \times \langle r_{k-1} \rangle \times \langle s_1 \rangle \times \\ \times \langle s_2 \rangle \times \ldots \times \langle s_{l-1} \rangle \times \langle r_k s_l \rangle.$$

Тогда легко видеть, что группа M/K циклическая и $K_G = 1$. Итак, в M всегда существует такая нормальная подгруппа K, что $M = \langle m \rangle \times K$ и $K_G = 1$, причем $n = |\langle m \rangle|$ — либо простое, либо произведение двух простых чисел. Так как n и p взаимно просты, то в поле характеристики p существует точно n различных корней n-й степени из единицы $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n = 1$. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon\ m^\alpha K \to \varepsilon^\alpha,$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, φ является одномерным представлением группы M и $\operatorname{Ker} \varphi = K$. Пусть φ^G — представление группы G, индуцированное представлением φ, и τ — неприводимая компонента из матрицы $(\varphi^G(g))$, расположенная в левом верхнем угле. Нетрудно заметить, что $\operatorname{Ker} \tau \cap M = K_G = 1$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \tau = 1$, и поэтому τ — искомое представление группы G. Лемма доказана.

Подгруппу H группы G называют $\mathfrak{D}.\mathcal{M}$-подгруппой [7], если H либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G. Проверкой легко установить, что справедлива

ЛЕММА 3. *Если H — $\mathfrak{D}.\mathcal{M}$-подгруппа групы G, то порядок H равен произведению порядков всех главных факторов некоторого главного ряда группы G, которые она покрывает.*

Определение. Пусть f — экран. Подгруппу H группы G назовем f-$\mathfrak{D}.\mathcal{M}$-подгруппой, если H покрывает каждый f-центральный главный фактор группы G и изолирует каждый ее f-эксцентральный главный фактор.

Напомним, что экран f называют экраном формации $\mathfrak{F}$ [1], если $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, где $\langle f \rangle$ — множество всех групп, обладающих f-центральными рядами.

ЛЕММА 4. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если группа G обладает f-$\mathcal{DM}$-подгруппой H и $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, то H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, то $G = H\mathrm{F}(G)$. Пусть

$$G_0 = 1 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_t = G \qquad (1)$$

— главный ряд группы G. Рассмотрим ряд

$$1 \subseteq H \cap G_1 \subseteq H \cap G_2 \subseteq \ldots \subseteq H \cap G_t = H. \qquad (2)$$

Пусть G_{i+1}/G_i — главный фактор ряда (1), где $i = 0, 1, \ldots, t$. Если H изолирует G_{i+1}/G_i, то

$$H \cap G_{i+1}/H \cap G_i \cong G_i/G_i.$$

Если же H — покрывает G_{i+1}/G_i, то

$$H \cap G_{i+1}/H \cap G_i \cong G_{i+1}/G_i.$$

Следовательно, все факторы ряда (2) f-центральны в H. Поэтому $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. По индукции HK/K — $\mathfrak{F}$-проектор группы G/K. Поэтому, ввиду утверждения VI.7.9 из [5], для доказательства леммы достаточно показать, что H — $\mathfrak{F}$-проектор группы HK. Если $K \subseteq H$, то это очевидно. Пусть K не содержится в H. Тогда K — f-эксцентральный главный фактор группы G. Так как $G = H\mathrm{F}(G)$, то K является f-эксцентральным главным фактором группы HK. Следовательно, $K = (HK)^{\mathfrak{F}}$, и поэтому H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Лемма доказана.

Из теоремы 5.6 работы [3] следует, что если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G нильпотентен, то $\mathfrak{F}$-проектор группы G совпадает с $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G. Учитывая это, получаем из доказанной леммы

Следствие. *Пусть f_1, f_2 — локальные экраны формации $\mathfrak{F}$. Если группа G обладает f_1-$\mathcal{DM}$-подгруппой H_1 и f_2-$\mathcal{DM}$-подгруппой H_2, причем $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, то подгруппы H_1 и H_2 совпадают и являются $\mathfrak{F}$-нормализаторами группы G.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть f_1, f_2 — локальные экраны. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп и f_1, f_2^* — такие локальные $\mathfrak{X}$-экраны, что $f_i^* (p) = \mathfrak{G}_p f_i (p)$ для каждого простого p, $i = 1, 2$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $f_1^* \leqslant f_2^*$;

2) в любой группе G, принадлежащей $\mathfrak{X}$, каждый f_1-центральный главный фактор является f_2-центральным.

Доказательство. Пусть $f_1^* \leqslant f_2$. Очевидно, в любой группе G каждый f_1-центральный главный фактор является f_1^*-центральным. Пусть H/K — f_1-центральный главный фактор группы G. Нетрудно заметить, что $G/C_G(H/K)$ не имеет неединичных нормальных p-подгрупп для каждого простого $p \in \pi(H/K)$. Следовательно, H/K — f_1-центральный главный фактор группы G. Отсюда $\langle f_1 \rangle = \langle f_1^* \rangle$. Аналогично, $\langle f_2 \rangle = \langle f_2 \rangle$. Поэтому $\langle f_1 \rangle \subseteq \langle f_2 \rangle$ и утверждение 2) выполняется.

Пусть имеет место утверждение 2). Можно положить, что $f_1 = f_1^*$ и $f_2 = f_2$. Допустим, что существует такое простое p, что $f_1(p)$ не содержится в $f_2(p)$. Тогда, очевидно, формации $f_1(p)$ и $f_2(p)$ непусты. Пусть G — группа наименьшего порядка из $f_1(p)$, не содержащаяся в $f_2(p)$. Тогда, очевидно, $G^{f_2(p)}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Легко видеть, что $O_p(G) = 1$. Рассмотрим $\Gamma = C_p \wr G$ — регулярное сплетение циклической группы порядка p с группой G. Тогда $\Gamma = N \rtimes G$, где N — элементарная абелева p-группа. Очевидно, $\Gamma \in f_1(p)$ и $N = O_p(\Gamma) = F_p(\Gamma)$. Так как каждый главный фактор группы Γ, порядок которого делит p, является по условию f_2-центральным, то $\Gamma^{f_2(p)} \subseteq F_p(\Gamma)$. Из леммы 1 следует $G^{f_2(p)} \subseteq \Gamma^{f_2(p)}$. Поэтому $G^{f_2(p)} \subseteq N$. Но это возможно лишь в случае, когда $G \in f_2(p)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Экран f называют внутренним [1], если $f(G) \subseteq \langle f \rangle$ для любой группы G.

Следствие. *Пусть f_1, f_2 — максимальные по вложению внутренние локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $f_1 \leqslant f_2$;

2) $\mathfrak{F}_1$ является подформацией $\mathfrak{F}_2$.

Определение. Пусть f_1, f_2 — локальные экраны. Определим $\mathfrak{H}$ как класс всех групп, обладающих f_i-$\mathfrak{D}\mathcal{M}$-подгруппой, $i = 1, 2$. Обозначим через $\mathfrak{H}^*$ множество всех тех групп из $\mathfrak{H}$, для которых выполняется следующее условие. если H_i — f_i-$\mathcal{D}.\mathcal{M}$-подгруппа группы G, $i = 1, 2$, то $H_1 \cap H_2$ является $(f_1 \cap f_2)$-$\mathcal{D}.\mathcal{M}$-подгруппой группы G.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f_1, f_2 — локальные экраны, f_1, f_2 — такие локальные $\mathfrak{H}^*$-экраны, что $f_i^*(p) = \mathfrak{S}_p f_i(p)$ для каждого простого p, $i = 1, 2$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $f_1^* \leqslant f_2^*$;

2) *в любой группе G, принадлежащей $\mathfrak{H}^*$, каждая f_1-$\mathcal{D}.\mathcal{M}$-подгруппа содержится в некоторой f_2-$\mathcal{D}\mathcal{M}$-подгруппе.*

Доказательство. Пусть $f_1^* \leqslant f_2^*$. Пусть G — группа из $\mathfrak{H}^*$ и H_i — f_i-$\mathcal{D}.\mathcal{M}$-подгруппа группы G, $i = 1, 2$. По теореме 1 в любой группе G, принадлежащей $\mathfrak{H}^*$, каждый f_1-центральный главный фактор является f_2-центральным. Тогда подгруппа $H_1 \cap H_2$ покрывает каждый f_2-центральный главный фактор группы G и поэтому по лемме 3 $|H_1| \leqslant |H_1 \cap H_2|$. Следовательно, $H_1 \subseteq H_2$.

Пусть в любой группе G, принадлежащей $\mathfrak{H}^*$, каждая f_1-$\mathcal{D}\mathcal{M}$-подгруппа H_1 содержится в некоторой f_2-$\mathcal{D}\mathcal{M}$-подгруппе H_2. Пусть R/S — f_1-центральный главный фактор группы G. Очевидно, H_2 покрывает R/S. Следовательно, R/S является f_2-центральным главным фактором группы G. По теореме 1 следует, что $f_1^* \leqslant f_2^*$. Теорема доказана.

Назовем формацию $\mathfrak{X}$ S-замкнутой, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ — некоторые формации, причем $\mathfrak{F}$ локальна, $\mathfrak{X}$ S-замкнута и каждая группа из нее имеет разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, f_1 — такой локальный $\mathfrak{X}$-экран, что $f_1(p) = \mathfrak{S}_p f(p)$ для каждого простого p, а f_2 — такой локальный экран, что $f_2(p) = f_1(p) \cap \mathfrak{F}$ для каждого простого p. Если каждая группа G из $\mathfrak{X}$ обладает f_i-$\mathcal{D}\mathcal{M}$-подгруппой ($i = 1, 2$) и f_2-$\mathcal{D}\mathcal{M}$-подгруппа f_1-$\mathcal{D}\mathcal{M}$-подгруппы группы G является f_2-$\mathcal{D}\mathcal{M}$-подгруппой группы G, то $f_1 = f_2$.*

Доказательство. По лемме 1.3 из работы [1] локальный экран f_2 является внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, $f_2 \leqslant f_1$. Докажем, что $f_1 \leqslant f_2$. Предположим, что существует такое простое p, что $f_1(p)$ не содержится в $\mathfrak{F}$. Очевидно, $f_1(p) = \varnothing$. Выберем в классе $f_1(p) \setminus \mathfrak{F}$ группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{\mathfrak{F}}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенная, то $K = C_G(K)$. Очевидно, $O_p(G) = 1$. Следовательно, по лемме 2 группа G — неприводимая группа автоморфизмов p-группы N. Пусть $\Gamma = N \rtimes G$ — расширение группы G посредством N. Очевидно, N — f_1-центральный главный фактор группы Γ. Пусть F^* — f_1 - $\mathcal{DM}$-подгруппа группы Γ. Легко видеть, что тогда F^*/N—f_1-$\mathcal{DM}$-подгруппа группы Γ/N. По лемме 1.2 из работы [3] следует, что $(\Gamma/N)^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна. Поэтому, используя лемму 3, получаем, что F^*/N — $\mathfrak{F}$-проектор группы Γ/N. Так как $\Gamma/N = (F^*/N)\ \mathrm{F}\ (\Gamma/N)$, то из леммы 1.5 из [6] вытекает, что $E^*/N \in f_1(p)$. Но тогда нетрудно заметить, что $F^* \in \mathfrak{F}$. Пусть F — f_2-$\mathcal{DM}$-подгруппа группы F^*. Очевидно, $F = F^*$. Следовательно, F^* — f_2-$\mathcal{DM}$-подгруппа группы Γ, и поэтому

$$G \cong \Gamma/N \in f_2(p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

Гомельский государственный университет

Поступило 2.VI.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш е м е н к о в Л. А., Ступенчатые формации групп, Матем. сб., **94**, № 2 (1974), 264—248.

[2] Ш е м е т к о в Л. А., Два направления в развитии непростых конечных групп, Успехи матем. наук, **30**, № 2 (1975), 179—211.

[3] Ш е м е т к о в Л. А., Факторизации непростых конечных групп, Алгебра и логика, 15, № 6 (1976), 648—672.

[4] Б е л о н о г о в В. А., Ф о м и н А. Н., Матричные представления в теории конечных групп, М., «Наука», 1976.

[5] H u p p e r t B., Endliche Gruppen, I, Berlin — N. Y., Springer-Verlag, 1967.

[6] B r y a n t R. M., B r y c e R. A., H a r t l e y B., The formation generated by a finite group, Bull. Austral. Math. Soc., 4, № 1 (1970), 347—357.

[7] S c h a l l e r K. U., Einige Sätze über Deck—Meide Untergruppen endlicher auflösbarer Gruppen, Math. Z., **130**, № 2 (1973), 199—206.