Алгебра и логика, 18, № 2 (1979), 137-161.

УДК 519.44

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭКРАНЫ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

Н.Т.ВОРОБЬЁВ

Одной из главных задач теории формаций с самого момента ее зарождения и до настоящего времени остается нахождение и исследование новых формаций. Особую актуальность для успешного осуществления такой задачи представляет выбор и описание метода конструирования формаций. Первоначальные шаги в этом направлении были сделаны еще Гашюцом в 1963 году в первой работе по теории формаций [12], где указаны способы построения некоторых известных формаций посредством описания их локальных заданий. В дальнейшем, начиная с 1969 года, этой задаче было посвящено лишь несколько работ [13-16], почти все из которых принадлежат К.Дёрку. При этом под локальным заданием f формации $\mathfrak{F}$ всегда подразумевалась такая формация, сопоставляющая каждому простому p формацию $f(p)$, что $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, где $\langle f \rangle$ - класс всех групп, обладающих f-центральными главными рядами (см., например, [11]).

В 1974 году Л.А.Шеметков [1] ввел понятие экрана и предложил классификацию экранов. Используя понятие экрана, он сформулировал общую задачу конструирования и исследования формаций следующим образом.

Если $\mathfrak{F}$ - локальная формация, то задача состоит в том, чтобы описать те экраны f, для которых $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$. Если же данная формация $\mathfrak{F}$ не является локальной, то естественной является постановка аналогичного вопроса для наименьшей локальной формации $l\,form\,\mathfrak{F}$, содержащей данную.

Важную роль в решении такого рода вопросов играют максимальные локальные экраны формаций. Основная цель настоящей работы - исследование формаций конечных групп при помощи максимальных локальных экранов.

В § 1 построено пять новых типов формаций при помощи двух формаций (формационные произведения i-го рода $\mathfrak{F} *_i \mathfrak{H}$, $1 \le i \le 5$). В специальных случаях формационные произведения изучались ранее разными авторами. Так, в классе разрешимых групп Картер [26] , Хупперт [11] изучали классы $\mathfrak{N} *_3 \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} *_4 \mathfrak{N}$, Дёрк [20] и Дарси [25] - классы $\mathfrak{F} *_1 \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H}$, Дёрк, Хоукс [14] и Дёрк [13-16] - классы $\mathfrak{F} *_3 \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F} *_4 \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{Y} *_5 \mathfrak{F}$.

В § 2 формационные произведения используются для получения явного описания максимальных экранов локальных формаций. Заметим, что проблема нахождения максимальных экранов формаций в специальных случаях ставились Райтом [17] и П.Шмидом [18] и в общем виде - Л.А.Шеметковым [5, 6] .

В § 3 описаны максимальные экраны локальных формаций, порожденных формационными произведениями, § 4 посвящен признакам локальности формационных произведений.

На протяжении всей статьи иы будем проводить все исследования в некотором непустом классе конечных групп $\mathfrak{U}$, замкнутом относительно операций S , Q и $Ext_{\mathfrak{U}}$. Поэтому под группой мы всегда будем подразумевать только группу из $\mathfrak{U}$, все рассматриваемые классы групп, в частности, значения экранов на неединичных группах являются подклас - сами класса $\mathfrak{U}$.

Локальный экран f назовем:

1) полным, если $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ для каждого простого p ,

2) S -замкнутым, если формация $f(p)$ S -замкнута для каждого простого p .

Подгруппу H группы G называют $\mathcal{DM}$ -подгруппой [23] , если H либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G .

Все другие используемые определения и обозначения можно найти в монографии Л.А.Шеметкова [5] .

Основные результаты статьи опубликованы без доказательства в [7-10].

§ 1. Формационные произведения

В этом параграфе мы введем и изучим классы $\mathfrak{F} *_i \mathfrak{H}$ $(1 \le i \le 5)$, которые будем называть формационными произведениями i-го рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ - локальная формация, $\mathfrak{H}$ - произвольная формация. Обозначим через $\mathfrak{F} *_1 \mathfrak{H}$ класс всех групп, $\mathfrak{F}$ -нормализаторы которых принадлежат $\mathfrak{H}$, а через $\mathfrak{F}*_2\mathfrak{H}$ - класс всех групп, $\mathfrak{F}$-проекторы которых принадлежат $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}=\varnothing$, то положим $\mathfrak{F}*_i\mathfrak{H}=\varnothing$, $i=1,2$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ - локальная формация, $\mathfrak{H}$ - формация. Если $\mathfrak{F}$- корадикал каждой группы из $\mathfrak{H}$ $\pi(\mathfrak{F})$- разрешим, то класс $\mathfrak{F}*_i\mathfrak{H}$ $(i=1,2)$- формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы легко установить проверкой, используя тот факт, что по теоремам 15.7 и 21.4 из [5] все $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-нормализаторы групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом сопряжены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ - локальные формации с максимальными внутренними локальными экранами f, h соответственно. Построим классы $\mathfrak{F}*_i\mathfrak{H}$ $(i=3,4,5)$ следующим образом:

1) $G\in\mathfrak{F}*_3\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда каждый f^*-центральный главный фактор G является $\mathfrak{H}$-центральным, где f^* - такая локальная функция, что $f^*(p)=\mathfrak{F}*_2f(p)$ для каждого простого p;

2) $G\in\mathfrak{F}*_4\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$-проектор группы G содержится в некотором $\mathfrak{H}$-нормализаторе группы G;

3) $G\in\mathfrak{F}*_5\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}$-проектор группы G является $\mathcal{DM}$-подгруппой в G и принадлежит $f(p)$ для каждого простого p.

Если $f(p)=\varnothing$ для некоторого простого p, то $\mathfrak{F}*_5\mathfrak{H}=\varnothing$.

ТЕОРЕМА 1.2. Формационное произведение третьего рода - формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ - локальные формации, $\mathfrak{F}*_3\mathfrak{H}$ - формационное произведение 3-го рода. Пусть $K_i\trianglelefteq G$, $i=1,2$. Очевидно, что $G\in\mathfrak{F}*_3\mathfrak{H}$ влечет $G/K_i\in\mathfrak{F}*_3\mathfrak{H}$. Предположим, что $G/K_i\in\mathfrak{F}*_3\mathfrak{H}$, $i=1,2$. Легко видеть, что каждый главный фактор группы $G/K_1\cap K_2$ G-изоморфен либо некоторому главному фактору группы G/K_1, либо некоторому главному фактору группы G/K_2. Таким образом, имеем $G/K_1\cap K_2\in\mathfrak{F}*_3\mathfrak{H}$.

Теорема доказана.

Из теоремы 21.8 и утверждения 21.1.1 монографии [5] вытекает, что если в группе G $\mathfrak{F}$-корадикал $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим, то $\mathfrak{F}$-проектор группы G покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ - формация, $\mathfrak{F}$ - ее подформация и $\mathfrak{F}$- корадикал каждой груп -

пы из $\mathfrak{X}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим. Если φ- произвольный локальный $\mathfrak{X}$-экран, f- максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, причем $f(p)=\mathfrak{N}_p\varphi(p)\cap\mathfrak{F}$ для каждого простого p, то φ- локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\mathfrak{F}\subseteq\langle\varphi\rangle$. Докажем обратное включение. Предположим, что оно неверно. Выберем в классе $\langle\varphi\rangle\setminus\mathfrak{F}$ группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{\mathfrak{F}}$. Если K неабелева, то $C_G(K)=1$. Следовательно, $G\in\varphi(K)\subseteq\mathfrak{X}$ и поэтому не делится на числа из $\pi(\mathfrak{F})$. Но тогда $f(K)=\emptyset$, что влечет $\varphi(K)=\emptyset$. Получили противоречие. Остается принять, что K - абелева p-группа для некоторого $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Нетрудно заметить, что тогда $G/C_G(K)\in\in\varphi(p)\cap\mathfrak{F}\subseteq f(p)$. Следовательно, $G\in\mathfrak{F}$, что невозможно.

Лемма доказана.

ЛЕММА 1.2. Пусть каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал, где $\mathfrak{F}$-формация с максимальным внутренним локальным экраном f. Если f^*- такой локальный экран, что $f^*(p)=\mathfrak{F}*_2 f(p)$ для каждого простого p, то справедливы следующие утверждения:

1) f^*-полный локальный экран формации $\mathfrak{F}$;

2) если φ есть либо внутренний, либо $\mathfrak{S}$-замкнутый локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то $\varphi\leq f^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G- группа из $\mathfrak{N}_p f^*(p)$, где p- простое, и F - $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда $F/O_p(F)\simeq FO_p(G)/O_p(G)\in f(p)$. Так как, ввиду теоремы 3.3 из [5], экран f- полный, то $F\in f(p)$. Следовательно, $G\in f^*(p)$, и f^*- полный локальный экран. То, что он - экран формации $\mathfrak{F}$, вытекает теперь непосредственно из леммы 1.1.

Утверждение 2) в случае, когда φ- внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, тривиально. Пусть φ - $\mathfrak{S}$ замкнутый локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Пусть $G\in\varphi(p)$, где p- простое и F - $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда $F\in \varphi(p)\cap\mathfrak{F}$, и, по теореме 3.3 монографии [5], получаем, что $F\in f(p)$. Следовательно, $G\in f^*(p)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. Пусть каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал, где $\mathfrak{F}$- формация с максимальным внутренним локальным экраном f. Пусть f^*- такой локальный экран, что $f^*(p)=\mathfrak{F}*_2 f(p)$ для каждого простого p. И пусть F - $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) F покрывает каждый f^*-центральный главный фактор группы G;

2) каждый главный фактор группы G, покрываемый подгруппой F, является f^*-центральным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Пусть G - контрпример минимального порядка и K - минимальная нормальная подгруппа группы G. Используя индукцию, нетрудно показать, что F покрывает каждый f^*-центральный главный фактор группы G, расположенный выше K. Поэтому для доказательства 1) достаточно показать, что F покрывает K, если K f^*-центральна в G. Очевидно, $G^{\mathfrak{F}}\neq 1$. Предположим, что K не содержится в $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $KG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}\simeq K$, и поэтому K $\mathfrak{F}$-центральна в G. Следовательно, F покрывает K, что невозможно. Пусть K содержится в $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешима, то $|K|$ либо не делится на числа из $\pi(\mathfrak{F})$, либо есть степень простого p из $\pi(\mathfrak{F})$. В первом случае, в силу леммы 1.2, $f^*(K)=\varnothing$, что невозможно. Остается второй случай: K является p-группой, $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Тогда, очевидно, $FK/C_{FK}(K)\simeq F/C_F(K)\in$ $\in f(p)$. Следовательно, F покрывает каждый FK-главный фактор из K, а значит, F покрывает K. Противоречие.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть G - группа наименьшего порядка, для которой утверждение 2) не выполняется. Пусть K - минимальная нормальная погруппа группы G. Легко видеть, что для доказательства 2) достаточно показать, что K f^*-центральна в G, если F покрывает K. В силу леммы 1.2, $G^{\mathfrak{F}}\neq 1$. Если K не содержится в $G^{\mathfrak{F}}$, то K $\mathfrak{F}$-центральна в G и, по лемме 1.2,

f^* -центральна в G, что невозможно. Поэтому K является p-группой для некоторого простого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Так как, по теореме 3.3 монографии [5], f - полный локальный экран, то $F/O_{p'}(F)\in$ $\in f(p)$, и поэтому $FC_G(K)/C_G(K)\simeq F/C_F(K)\in f(p)$. Следовательно, $G/C_G(K)\in f^*(p)$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.3. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал, где $\mathfrak{F}$ - формация с максимальным внутренним локальным экраном f, то $\mathfrak{F}*_3\mathfrak{F}$ - формация всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор покрывает только $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает непосредственно из теоремы 1.2 и леммы 1.3.

Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{U}=\mathfrak{S}$, формация $\mathfrak{F}*_3\mathfrak{F}$ изучалась К.Дёрком в [13], Бейдлеманом и Маканом в [21].

ЛЕММА 1.4. Пусть G - группа, K_1, K_2 - произвольные нормальные подгруппы из G. Справедливы следующие утверждения:

1) если F - $\mathfrak{F}$-проектор группы G, то $FK_1\cap FK_2=F(K_1\cap K_2)$;

2) если H - $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G и $G^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим, то $HK_1\cap HK_2=H(K_1\cap K_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы вытекает из теоремы 2.1 и леммы 2.5 работы [22]. Докажем второе утверждение. Очевидно, что $H(K_1\cap K_2)\subseteq HK_1\cap HK_2$. Докажем обратное включение. Предположим, что оно неверно. Пусть G - контрпример минимального порядка. Если либо $K_1\cap K_2\neq 1$, либо одна из подгрупп K_1, K_2 есть 1, то, очевидно, $HK_1\cap HK_2=H(K_1\cap K_2)$. Следовательно, $K_1\cap K_2=1$, причем $K_1\neq 1$, $K_2\neq 1$. Пусть N - минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K_1. Тогда, применяя индукцию, имеем равенство $HK_1\cap HNK_2=HK_2$. Следовательно, $HK_1\cap HK_2=HN\cap$ $\cap HK_2$, и поэтому $N=K_1$. Аналогично легко видеть, что и K_2 - минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду утверждения 21.11 из [5], получаем, что K_1, K_2 - $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G. Так как K_1K_2/K_1 - $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G, то, применяя теорему 21.1 из [5], легко видеть, что $H\cap K_1K_2=1$. Пусть x - произвольный элемент группы $HK_1\cap HK_2$. Тогда $x=h_1k_1=h_2k_2$, где $h_1, h_2\in H$, $k_1\in K_1$, $k_2\in K_2$. Следовательно, $h_2^{-1}h_1=k_2k_1^{-1}$ - элемент из $H\cap K_1K_2=1$. Отсюда вытекает, что $x\in H$. Таким образом, $HK_1\cap HK_2\subseteq H$, что невозможно.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.4. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F}_i)$-разрешимый $\mathfrak{F}_i$-корадикал, причем $\mathfrak{F}_i$ - локальная формация $(i=1,2)$, то $\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2$ - формация.

Доказательство теоремы осуществляется проверкой с использованием леммы 1.4.

Из теоремы 1.4 и теоремы 21.8 монографии [5] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.4.1. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал, где $\mathfrak{F}$ - локальная формация, то $\mathfrak{F} *_4 \mathfrak{F}$ совпадает с классом всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор совпадает с $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Заметим, что изучению формации $\mathfrak{F} *_4 \mathfrak{F}$ в случае, когда $\mathfrak{U}=\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}\supseteq\mathfrak{N}$, были посвящены работы [13-15].

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ - локальные формации. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{H})$-разрешимый $\mathfrak{H}$-корадикал, то $\mathfrak{F} *_5 \mathfrak{H}$ - формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - нормальная подгруппа группы G. Очевидно, что $G\in\mathfrak{F} *_5 \mathfrak{H}$ влечет $G/K\in\mathfrak{F} *_5 \mathfrak{H}$. Предположим, что K_1, K_2 - такие различные минимальные нормальные подгруппы из G, что $G/K_i\in\mathfrak{F} *_5 \mathfrak{H}$, $i=1,2$. Докажем, что $G\in\mathfrak{F} *_5 \mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{H}$ - проекторы из G принадлежат $f(p)$ для каждого простого p. Пусть H/K - произвольный главный фактор группы G, расположенный выше K_1, и F - некоторый $\mathfrak{H}$-проектор группы G. Так как $G/K_1\in\mathfrak{F} *_5 \mathfrak{H}$, то, очевидно, F либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G, расположенный выше K_1. Далее, из того, что $G/K_2\in\mathfrak{F} *_5 \mathfrak{H}$, вытекает, что FK_2/K_2 либо покрывает, либо изолирует K_1K_2/K_2. Если FK_2/K_2 изолирует K_1K_2/K_2, то легко видеть, что $F\cap K_1=1$, и поэтому F изолирует K_1. Если же FK_2/K_2 покрывает K_1K_2/K_2, то $FK_2\supseteq K_1K_2$. Отсюда, ввиду теоремы 2.1 работы [22], $K_1K_2=K_2(F\cap K_1)$. Следовательно, $F\cap K_1=K_1$, и поэтому F покрывает K_1. Итак, мы показали, что F либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G в ее главном ряду, проходящем через K_1.

Пусть R/S – произвольный главный фактор группы G и h^* – такой локальный экран, что $h^*(p)=\mathfrak{G}_{*_2}h(p)$ для каждого простого p. Если R/S – h^*-центральный главный фактор, то, используя лемму 1.3, получаем, что F покрывает R/S. Итак, можно считать, что R/S – h^*-эксцентральный главный фактор группы G. Рассмотрим два случая.

1. Подгруппа K_1 покрывает R/S. Тогда, очевидно, $R/S\simeq K_1$. Отсюда, в силу леммы 1.3, $F\cap K_1=1$. Следовательно, по теореме 2.1 работы [22], $F\cap R\subseteq F\cap K_1S=F\cap S$, и поэтому F изолирует S.

2. Подгруппа K_1 изолирует R/S.

В этом случае $R/S\simeq K_1R/K_1S$, и поэтому из леммы 1.3 вытекает, что F изолирует K_1R/K_1S. Используя теорему 2.1 работы [22], имеем $F\cap R\subseteq(F\cap K_1)(F\cap S)$. Поэтому, применяя снова ту же теорему, получаем $F\cap R=(F\cap S)(F\cap K_1\cap R)\subseteq S$. Следовательно, F изолирует R/S. Таким образом, F -$\mathcal{DM}$-подгруппа из G.

Теорема доказана.

§ 2. Максимальные экраны локальных формаций

В работе [7] анонсирована следующая теорема, в которой используются формационные произведения первого рода.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$ – некоторые формации, причем $\mathfrak{F}$ локальна, а каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран f;

2) если ψ – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то $f(p) = (\mathfrak{F} *_1 \psi(p)) \cap \mathfrak{X}$ для каждого простого p.

Эта теорема подробно излагается в монографии Л.А.Шеметкова [5, 22], поэтому доказательство ее мы не приводим.

Заметим только, что теорема 2.1 при $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ включает результаты Картера, Хоукса [19], Шмида [18], а при $\mathfrak{U} = \mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$ - результат Дёрка [20].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ - формация с локальным экраном f, $\mathfrak{X}$ - некоторый класс групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимыми $\mathfrak{F}$-корадикалами. Экран f формации $\mathfrak{F}$ назовем $\mathfrak{X}$-монотонным, если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ и ее $\mathfrak{F}$-проектора F из того, что $F \subseteq K \subseteq L \subseteq G$, всегда следует $K^{f(p)} \subseteq L^{f(p)}$ для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ - некоторые формации, причем $\mathfrak{F}$ локальна, а $\mathfrak{X}$ S-замкнута и каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный $\mathfrak{X}$-монотонный локальный $\mathfrak{X}$-экран f;

2) если ψ - максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то $f(p) = (\mathfrak{F} *_2 \psi(p)) \cap \mathfrak{X}$ для любого простого p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 3.3 из [5] формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран ψ. Пусть f - такой локальный экран, что $f(p) = (\mathfrak{F} *_2 \psi(p)) \cap \mathfrak{X}$ для любого простого p (очевидно, $(\mathfrak{F} *_2 \psi(p)) \cap \mathfrak{X}$ - формация). Докажем, что f - $\mathfrak{X}$-монотонный локальный экран. Пусть группа G принадлежит $\mathfrak{X}$ и F - $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Возьмем такие подгруппы K и L группы G, что $F \subseteq K \subseteq L \subseteq G$. Пусть p - простое число, принадлежащее $\pi(\mathfrak{F})$. Очевидно, $\psi \leq f$. Поэтому $f(p) \neq \emptyset$. Так как F - $\mathfrak{F}$-проектор группы K, принадлежащей $\mathfrak{X}$, то $F^{\psi(p)} \subseteq K^{f(p)}$. Предположим, что N - такая нормальная подгруппа группы G, что $F^{\psi(p)} \subseteq N$ и $N \subset K^{f(p)}$. Но тогда $\mathfrak{F}$-проектор FN/N группы K/N принадлежит $\psi(p)$, и поэтому $K/N \in f(p)$. Следовательно, $K^{f(p)}$ - наименьшая нормальная в K подгруппа, содержащая $F^{\psi(p)}$. Аналогично $L^{f(p)}$ - наименьшая нормальная в L подгруппа, содержащая $F^{\psi(p)}$. Так как

$L^{f(p)} \cap K$ нормальна в K, то $K^{f(p)} \subseteq L^{f(p)}$. Итак, f - $\mathfrak{X}$-монотонный локальный $\mathfrak{X}$-экран. Тот факт, что $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, легко следует из леммы 1.1.

Пусть f_1 - произвольный $\mathfrak{X}$-монотонный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$. Пусть φ - такой внутренний экран формации $\mathfrak{F}$, что $\varphi(p) = f_1(p) \cap \mathfrak{F}$ для каждого простого p. Тогда $\varphi \leq \psi$. Предположим, что группа G принадлежит $f_1(p)$, где $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Пусть F - $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Следовательно, $F^{f_1(p)} \subseteq G^{f_1(p)}$, и поэтому $F \in \psi(p)$. Но тогда $G \in f(p)$. Значит, $f_1 \leq f$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ - некоторые формации, причем $\mathfrak{F}$ локальна, а $\mathfrak{X}$ S-замкнута и каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет нильпотентный $\mathfrak{F}$-корадикал. Если ψ - максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то локальный экран f такой, что для каждого простого p имеет место $f(p) = (\mathfrak{F} *, \psi(p)) \cap \mathfrak{X}$, является максимальным $\mathfrak{X}$-монотонным локальным $\mathfrak{X}$-экраном формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения вытекает непосредственно из доказанной теоремы и теоремы 21.5 из [5].

§ 3. Максимальные экраны порожденных локальных формаций

ЛЕММА 3.1. Пусть f_1, f_2 - максимальные внутренние локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$. Тогда $\mathfrak{F}_1$ является подформацией $\mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leq f_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы мы опускаем, так как оно помещено в монографии [5, с.65].

Проверкой легко установить, что справедлива следующая

ЛЕММА 3.2. Если $\mathfrak{F}$ - произвольная непустая формация, то локальный экран f такой, что для каждого простого p

имеет место $f(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$, является максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 3.3. Пусть в группе G все минимальные нормальные подгруппы разрешимы. Если G имеет не более двух минимальных нормальных подгрупп и $O_p(G)=1$ для некоторого простого p, то G имеет точное неприводимое представление над конечным полем характеристики p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G проста, то лемма тривиальна. Пусть M – произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G. Очевидно, $M=\langle m\rangle \times K$, где $K_G=1$ и $n=|\langle m\rangle|$ есть либо простое число, либо произведение двух различных простых чисел, причем $(n,p)=1$. Следовательно, в некотором конечном поле характеристики p существует первообразный корень n-й степени из единицы ε. Рассмотрим отображение $\varphi: m^{\alpha}k \longrightarrow \varepsilon^{\alpha}$, где $k\in K$. Очевидно, φ - одномерное представление группы M с ядром, равным K. Пусть φ^G - представление группы G, индуцированное представлением φ группы M. Выберем неприводимую компоненту $(\tau(g))$ из левого верхнего угла матрицы $(\varphi^G(g))$, где $g\in G$. Легко видеть, что $\mathrm{Ker}\,\tau\cap M=K_G=1$. Следовательно, $\mathrm{Ker}\,\tau=1$ и τ - искомое представление группы G.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathfrak{U}=\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$ - некоторые формации. Локальный экран f такой, что для каждого простого p имеет место $f(p)=\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})$, является максимальным внутренним локальным экраном формации $l\,form(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - максимальный внутренний локальный экран формации $l\,form(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})$. Так как $\mathfrak{F}*,\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})$, то $l\,form(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})\subseteq\mathfrak{N}(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})$. Следовательно, по леммам 3.1 и 3.2, $f(p)\subseteq\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})$. Докажем обратное включение. Предположим, что оно неверно. Выберем в классе $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}*,\mathfrak{H})\setminus f(p)$ группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{f(p)}$. Очевидно, $O_p(G)=1$. Следовательно, по лемме 3.3, G - неприводимая группа автоморфизмов некоторой p-группы N. Пусть $\Gamma = N \leftthreetimes G$ - расширение группы G посредством N. Легко видеть, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда G - максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы Γ. Следовательно, по лемме 13.3 из [5], G $\mathfrak{F}$-критична в Γ. Поэтому $\mathfrak{F}$-нормализатор H группы G является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы Γ. Отсюда $\Gamma \in \mathfrak{F} *_1 \mathfrak{H} \subseteq \mathit{lform}(\mathfrak{F} *_1 \mathfrak{H})$. Следовательно, $G \simeq \Gamma/N \in f(p)$. Противоречие.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал, где $\mathfrak{F}$ - формация с максимальным внутренним локальным экраном ψ. И пусть $\mathfrak{H}$ - такая формация, что $\mathfrak{N}_p \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} *_2 \psi(p)$ для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда локальный экран f такой, что для каждого простого p имеет место

$$f(p) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } \mathfrak{H} = \varnothing, \\ \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H}), & \text{если } \mathfrak{H} \neq \varnothing, \end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathit{lform}(\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.3 из [5], $\mathit{lform}(\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H})$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f. Если $\mathfrak{H} = \varnothing$, то $\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H} = \varnothing$, и поэтому $\mathit{lform}(\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ - формация единичных групп. Следовательно, $f(p) = \varnothing$ для всех простых p.

Если $\mathfrak{H} \neq \varnothing$, то, в силу лемм 3.1 и 3.2, $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H})$ для всех простых p. Пусть G - группа наименьшего порядка из класса $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H}) \setminus f(p)$ и F - $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = P \wr G$, где $|P| = p$. Тогда $\Gamma = N \leftthreetimes G$, где N - элементарная абелева p-группа. Очевидно, $N = F_p(\Gamma)$. Если $\psi(p) = \varnothing$, то F - $\mathfrak{F}$-проектор FN, и поэтому $\mathfrak{F}$-проектор группы Γ. Следовательно, $\Gamma \in \mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H} \subseteq \mathit{lform}(\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H})$ и $G \simeq \Gamma/F_p(\Gamma) \in f(p)$. Противоречие. Пусть $\psi(p) \neq \varnothing$. Тогда из теоремы 15.7 из [5] и леммы 2 из [23] вытекает, что FN - $\mathfrak{F}$-проектор группы Γ. Так как $FN \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, то $\Gamma \in \mathfrak{F} *_2 \mathfrak{G}$. Поэтому $G \simeq \Gamma / F_p'(\Gamma) \in f(p)$. Противоречие.

Теорема доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ - формации с максимальными внутренними локальными экранами f_1, f_2. Тогда локальная групповая функция φ такая, что

$$\varphi(p) = ((\mathfrak{U} \setminus (\mathfrak{F}_1 *_2 f_1(p)) \cap (\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)) \cup f_2(p)$$

для каждого простого p, является локальной групповой функцией формации $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $<\varphi> = \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ для групповой функции φ, указанной в теореме.

Пусть G - группа наименьшего порядка из класса $(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) \setminus <\varphi>$. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{<\varphi>}$. Очевидно, K f_1^*-эксцентральна, где f_1^* - такая локальная групповая функция, что $f_1^*(p) = \mathfrak{F}_1 *_2 f_1(p)$ для каждого простого p. Но тогда

$$G/C_G(K) \in (\mathfrak{U} \setminus f_1^*(p)) \cap (\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) \subseteq \varphi(p).$$

Следовательно, $G \in <\varphi>$. Противоречие.

Остается показать, что $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2 \supseteq <\varphi>$. Справедливость этого включения вытекает по индукции, ввиду того, что $\varphi(p) \cap f_1^*(p) \subseteq f_2(p)$ для каждого простого p.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет разрешимый $f_1(p)$-корадикал для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$, где $\mathfrak{F}_1$ - формация с максимальным внутренним локальным экраном f_1. Пусть $\mathfrak{F}_2$ - формация с максимальным внутренним локальным экраном f_2. Если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ и f - максимальный внутренний локальный экран формации $l\mathit{form}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$, то справедливы следую -

щ и е у т в е р ж д е н и я:

1) $\varphi \leq f$, г д е φ- т а к а я л о к а л ь н а я г р у п п о в а я ф у н к ц и я ф о р м а ц и и $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$, ч т о

$$\varphi(p) = (((\mathfrak{U} \setminus (\mathfrak{F}_1 *_2 f_1(p)) \cap (\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)) \cup f_2(p)$$

д л я к а ж д о г о п р о с т о г о p ;

2) $f = \psi$, г д е ψ- т а к о й л о к а л ь н ы й э к р а н, ч т о $\psi(p) = \mathfrak{N}_p \mathrm{form}\, \varphi(p)$ д л я в с е х п р о с т ы х p , г д е φ- г р у п п о в а я ф у н к ц и я и з у т в е р ж д е н и я 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f_1^* - такой локальный экран, что $f_1^*(p) = \mathfrak{F}_1 *_2 f_1(p)$ для всех простых p и φ- такая локальная групповая функция, что

$$\varphi(p) = ((\mathfrak{U} \setminus f_1^*(p)) \cap (\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)) \cup f_2(p)$$

для каждого простого p . Тогда, по лемме 3.4, φ является внутренней локальной групповой функцией формации $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$.

Докажем первое утверждение леммы. Предположим, что оно неверно. Тогда существует такое простое p , что $\varphi(p)$ не содержится в $f(p)$, где f - максимальный внутренний экран формации $l\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. Выберем в классе $\varphi(p) \setminus f(p)$ группу G , имеющую наименьший порядок.

Если $f_1(p) = \emptyset$, то $\varphi(p) = \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$. Очевидно, $O_p(G) = 1$. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = P \wr G$, где $|P| = p$. Тогда $\Gamma = N \rtimes G$, где N - элементарная абелева p-группа. Очевидно, $N = O_p(\Gamma) = F_p(\Gamma)$. Так как $\Gamma / O_p(\Gamma) \in \varphi(p)$, то $\Gamma \in l\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. Значит, $G \simeq \Gamma / F_p(\Gamma) \in f(p)$. Противоречие.

Предположим, что $f_1(p) \neq \emptyset$. Если $G \in f_1^*(p)$, то $G \in \varphi(p) \cap f_1^*(p) \subseteq f_2(p)$. Но $\mathfrak{F}_2 \subseteq l\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. Поэтому, по лемме 3.1, имеем $f_2(p) \subseteq f(p)$. Следовательно, $G \in f(p)$. Противоречие. Итак, можно считать, что G не принадлежит $f_1^*(p)$.

Если G имеет две различные минимальные нормальные подгруппы K_1 и K_2 такие, что $G/K_i \in \varphi(p)$, $i = 1, 2$, то $G/K_i \in f(p)$ и поэтому $G \in f(p)$, что невозможно. Если же G/K_i не принадлежат $\varphi(p)$, $i = 1, 2$, то $G/K_i \in f_1^*(p)$. Следовательно, $G \in f_1^*(p)$. Противоречие.

Предположим, что G имеет не более двух минимальных нормаль -

ных подгрупп. Если G имеет точно две различные минимальные нормальные подгруппы K_1 и K_2, причем $G/K_1 \in \varphi(p)$ и G/K_2 не принадлежит $\varphi(p)$, то $G/K_1 \in f_1(p)$ и $G/K_2 \in f_1^*(p)$. Очевидно, K_1 и K_2 являются подгруппами $f_1(p)$-корадикала группы G. Следовательно, K_1 и K_2 разрешимы и $O_p(G)=1$. Поэтому, по лемме 3.3, группа G является неприводимой группой автоморфизмов некоторой p-группы N. Пусть $\Gamma = N \leftthreetimes G$ - расширение группы G посредством N. Так как $\Gamma/N \simeq G \in \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ и N φ-центральна в Γ, то, по лемме 3.4, $\Gamma \in \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$. Следовательно, $G \simeq \Gamma/N \in f(p)$. Противоречие.

Случай, когда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, можно доказать аналогично.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть ψ_1 - такой локальный экран, что $\psi_1(p) = \mathrm{form}\,\varphi(p)$ для каждого простого p. Так как, по 1), имеет место $\varphi \leq f$, то $\psi_1 \leq f$. Очевидно, $<\psi> = <\psi_1>$. Следовательно, $<\psi> \subseteq \mathrm{lform}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. С другой стороны, из определения $\mathrm{lform}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$ вытекает, что $\mathrm{lform}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) \subseteq <\psi>$. Теперь справедливость утверждения 2 очевидна, в силу теоремы 3.3 из [5].

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ - локальные формации, f_1, f_2 - максимальные внутренние локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет разрешимый $f_1(p)$-корадикал для всех простых $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$, то локальный экран f такой, что для каждого простого p имеет место

$$f(p) = \begin{cases} f_2(p), & \text{если } f_1(p) = \mathfrak{F}_1, \\ \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2), & \text{если } f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1, \end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathrm{lform}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. Используя лемму 3.5, имеем, что $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним локальным экраном f таким, что $f(p) = \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,\varphi(p)$ для каждого простого p, причем $\varphi(p) = ((\mathfrak{U} \setminus (\mathfrak{F}_1 *_2 f_1(p)) \cap \mathfrak{F}^*) \cup f_2(p)$ для каждого простого p. Поэтому для доказательства теоремы достаточно выяснить строение $\mathrm{form}\,\varphi(p)$ для всех простых p.

Пусть $f_1(p) = \mathfrak{F}_1$, p простое. Тогда $\varphi(p)=f_2(p)$, и поэтому $\mathrm{form}\,\varphi(p)=f_2(p)$. Так как f_2 - полный экран, то $f(p)=f_2(p)$.

Предположим, что $f_1(p)\neq\mathfrak{F}_1$, где p простое. Если $f_1(p)=\varnothing$, то $\varphi(p)=\mathfrak{F}^*$ и поэтому $f(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}^*$.

Пусть $f_1(p)\neq\varnothing$. Докажем, что $\mathfrak{F}^*=\mathrm{form}\,\varphi(p)$. Очевидно, $\mathrm{form}\,\varphi(p)\subseteq\mathfrak{F}^*$. Докажем обратное включение. Пусть X - произвольная группа из $\mathfrak{F}^*$. Выберем в классе $\mathfrak{F}_1\setminus f_1(p)$ группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{f_1(p)}$. Очевидно, K разрешима и $O_p(G)=1$. Следовательно, по лемме 3.3, G - неприводимая группа автоморфизмов некоторой p-группы N. Пусть $\Gamma=N\rtimes G$. Так как $\Gamma/N\simeq G\in\varphi(p)$, то $\Gamma\in\mathfrak{F}^*$, ввиду леммы 3.4. Легко видеть,что $\Gamma\in\varphi(p)$. Пусть $\Gamma_1=\Gamma\times X$. Очевидно, $\Gamma_1\in\varphi(p)\subseteq\mathrm{form}\,\varphi(p)$. Следовательно, $X\in\mathrm{form}\,\varphi(p)$, и $\mathfrak{F}^*=\mathrm{form}\,\varphi(p)$. Поэтому $f(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}^*$.

Теорема доказана.

ЛЕММА 3.6. *Если $\mathfrak{F}$ - некоторая непустая формация и π - некоторое множество простых чисел, причем $(\mathfrak{G}_\pi\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$, то локальный экран f такой, что для каждого простого p имеет место*

$$f(p)=\begin{cases}\mathfrak{F}, & \text{если } p\in\pi,\\ (\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}, & \text{если } p\in\pi',\end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном формации $(\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $(\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}=\langle f\rangle$. Очевидно, $(\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}\subseteq\langle f\rangle$. Докажем, что $\langle f\rangle\subseteq(\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}$. Предположим, что это не так. Пусть G - группа, имеющая наименьший порядок из класса $\langle f\rangle\setminus(\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}$. Тогда G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой K. Пусть $O_{\pi'}(G/K)=L/K$. Тогда $G/L\in\mathfrak{F}$ и $L/K\in\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U}$. Будем считать, что L - подгруппа минимального порядка с тем свойством, что $G/L\in\mathfrak{F}$ и $L/K\in\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U}$.

Если K неабелева, то $C_G(K)=1$, и поэтому $G\in(\mathfrak{G}_{\pi'}\cap\mathfrak{U})\mathfrak{F}$, что невозможно. Предположим, что K абелева. Если $K \in \mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{U}$, то $L \in \mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{U}$, и поэтому $G \in (\mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{U})\mathfrak{F}$. Противоречие. Если же $K \in \mathfrak{G}_{\pi} \cap \mathfrak{U}$, то $G/C_G(K) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G/C_G(K) \cap \cap L \in \mathfrak{F}$ и $L \subseteq C_G(K)$, ввиду минимальности выбора L. По теореме Шура-Цассенхауза, K имеет в L дополнение N. Легко видеть, что N - нормальная π'-холловская подгруппа группы L. Но тогда N - нормальная подгруппа группы G. Следовательно, $N = 1$, и поэтому $G \in (\mathfrak{G}_{\pi} \cap \mathfrak{U})\mathfrak{F} = \mathfrak{F} = (\mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{U})\mathfrak{F}$. Противоречие. Теперь справедливость леммы вытекает, ввиду теоремы 3.3 из [5].

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ - локальные формации, f_1, f_2 - максимальные внутренние локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Если $\mathfrak{U}$ - множество всех $\pi(\mathfrak{F}_2)$-разрешимых групп из $\mathfrak{G}$, то локальный экран f такой, что для каждого простого p имеет место

$$f(p) = \begin{cases} f_2(p), & \text{если } f_1(p) = \mathfrak{F}_1, \\ \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2) & \text{если } f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1, \end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном формации $l\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}\,\mathfrak{F}^*$, где $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_1^* *_4 \mathfrak{F}_2$. Согласно теореме 3.3 из [5] формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f.

Пусть $f_1(p) = \mathfrak{F}_1$, где p простое. Докажем, что $f(p) = f_2(p)$. Очевидно, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 3.1, $f_2 \leq f$, и, значит, $f_2(p) \subseteq f(p)$. Пусть G - группа из $\mathfrak{F}^*$. Так как $f_1(p) = \mathfrak{F}_1$, то из леммы 1.3 вытекает, что $\mathfrak{F}_1$-проектор группы G покрывает каждый главный фактор из G, порядок которого делит p. Но тогда и $\mathfrak{F}_2$-нормализатор группы G покрывает эти же факторы. Следовательно, по теореме 21.1.1 из [5], каждый из них является $\mathfrak{F}_2$-центральным. Значит, $G \in (\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{U}) f_2(p)$. Итак, $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{U}) f_2(p)$, и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{U}) f_2(p)$. Но тогда, ввиду лемм 3.1 и 3.6, имеем $f(p) \subseteq f_2(p)$.

Предположим, что $f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1$, p простое. Докажем, что $f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}^*$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{F}^*$, то из лемм 3.1 и 3.2 следует, что

$f(p) \subsetneq \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}^*$. Пусть G - группа наименьшего порядка из $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}^* \setminus f(p)$. Очевидно, $G \in \mathfrak{F}^*$.

Пусть $f_1(p) = \varnothing$. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = P \wr G$, где $|P| = p$. Тогда $\Gamma = N \leftthreetimes G$, где N - элементарная абелева p-группа. Очевидно, $N = F_p(\Gamma)$. Пусть F - $\mathfrak{F}_1$-проектор группы G. Тогда, очевидно, F - $\mathfrak{F}_1$-проектор FN, и поэтому F - $\mathfrak{F}_1$-проектор группы Γ. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $F \subseteq H$, где H - некоторый $\mathfrak{F}_2$-нормализатор группы G. Из теоремы 21.6 книги [5] вытекает, что $H = G \cap H^*$, где H^* - некоторый $\mathfrak{F}_2$-нормализатор группы Γ. Следовательно, $\Gamma \in \mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$, и поэтому $G \simeq \Gamma / F_p(\Gamma) \in f(p)$. Противоречие.

Предположим, что $f_1(p) \neq \varnothing$. Докажем вначале, что в классе $\mathfrak{F}_1 \setminus f_1(p)$ существует такая группа X, что выполняются следующие условия:

1) X имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, порядок которой является p'-числом;

2) $Z(X)$ - собственная подгруппа $f_1(p)$-корадикала группы X.

Выберем в классе $\mathfrak{F}_1 \setminus f_1(p)$ группу Y, имеющую наименьший порядок. Тогда Y обладает единственной минимальной нормальной подгруппой K, совпадающей с $Y^{f_1(p)}$. Очевидно, $O_p(Y) = 1$. Пусть K - q-группа для некоторого простого $q \neq p$ и $Y \in f_1(q)$. Пусть Q - q-дополнение группы Y и M - Y-модуль над полем из q элементов, индуцированный неприводимым тривиальным Q-модулем над этим же полем. Тогда M - главный неразложимый модуль и его цоколь является неприводимым тривиальным Y-модулем над полем из q элементов. Очевидно, M - точный модуль. Пусть $X = M \leftthreetimes Y$. Так как модуль M точный, то $Z(X) \subseteq M$. Но цоколь модуля M - единственная минимальная нормальная подгруппа группы X. Поэтому $Z(X) = M$, и требование 1) для группы X выполняется. Так как $X^{f_1(p)}$ не содержится в M и $Z(X) \subseteq X^{f_1(p)}$, то $Z(X)$ является собственной подгруппой группы $X^{f_1(p)}$ и условие 2) для X справедливо.

Пусть $X^* = X \times G$. Очевидно, подгруппа $F_1 = X \times F$ - $\mathfrak{F}_1$-проектор группы X^*. Пусть $F^* = F_1^{f_1(p)} \cap X = 1$. Тогда, по лемме 1.1 работы [14], $F_1^{f_1(p)} \subseteq Z(X) \times F$. Следовательно, $X/Z(X) \simeq X^*/Z(X) \times F \in f_1(p)$, что противоречит тому, что $Z(X)$ - собственная подгруппа из $X^{f_1(p)}$. Итак, можно считать, что $F^* \neq 1$.

По лемме 3.3, X обладает точным неприводимым X-модулем N над полем из p элементов. Следовательно, ввиду того, что $F^* \neq 1$, имеем $C_N(F^*)=1$. Пусть R - регулярный G-модуль над полем из p элементов. Рассмотрим тензорное произведение $M^*=N\otimes R$ с операцией $(n\otimes r)(x,g)=nx\otimes rg$, где $r\in R$, $n\in N$, $x\in X$, $g\in G$. Пусть $M^*|_X$ - ограничение X^*-модуля M^* на X. Тогда $M^*|_X\simeq \simeq \underbrace{N\oplus\ldots\oplus N}_{|G|}$. Поэтому $C_{M^*}(F^*)=1$. Пусть $\Gamma^*=M^*\leftthreetimes(X\times G)$. Тогда, по теореме 15.7 из [5] и лемме 2 из [24], получаем, что F_1 - $\mathfrak{F}_1$-проектор группы F_1M^* и поэтому F_1 - $\mathfrak{F}_1$-проектор группы Γ^*. Очевидно, $X^*\in\mathfrak{F}_1*_4\mathfrak{F}_2$. Следовательно, $F_1\subseteq H_1$, где H_1 - некоторый $\mathfrak{F}_2$-нормализатор группы X^*. Но тогда $H_1=X^*\cap H^*$ для некоторого $\mathfrak{F}_2$-нормализатора группы Γ^*. Поэтому $\Gamma^*\in l\,form(\mathfrak{F}_1*_4\mathfrak{F}_2)$. Легко видеть, что M^* содержит X^*-подмодуль над полем из p элементов $\mathfrak{F}$, изоморфный X^*-модулю $N\otimes 1_G$, ядро которого равно G, и $M^*|_G$ - ограничение M^* на G изоморфно $\underbrace{R\oplus\ldots\oplus R}_{\dim_{\mathfrak{F}} N}$. Следовательно, M^* - точный X^*-модуль над $\mathfrak{F}$. Поэтому $M^*=F_p(\Gamma^*)$ и $X^*\simeq\Gamma^*/M^*\in f(p)$. Значит, $G\simeq X^*/X\in f(p)$. Противоречие.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$ - локальные формации. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F}_2)$-разрешимый $\mathfrak{F}_2$-корадикал, то локальный экран f такой, что для каждого простого p имеет место*

$$f(p)=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } p\in\pi'(\mathfrak{F}_1),\\ \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2), & \text{если } p\in\pi(\mathfrak{F}_1),\end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном формации $l\,form(\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p простое. Если $p\in\pi'(\mathfrak{F}_1)$, то $\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2=\varnothing$, и поэтому $l\,form(\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2)=\mathfrak{E}$. Следовательно, $f(p)=\varnothing$, где f - максимальный внутренний локальный экран $l\,form(\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2)$.

Предположим, что $p\in\pi(\mathfrak{F}_1)$. Тогда, очевидно, $f(p)\subseteq\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1*_5 *_5\mathfrak{F}_2)$. Докажем, что $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2)\subseteq f(p)$. Выберем в классе $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2)\setminus f(p)$ группу G, имеющую наименьший порядок. Очевидно, $O_p(G)=1$ и $G\in\mathfrak{F}_1*_5\mathfrak{F}_2$. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma=P\wr G$, где $|P|=p$. Тогда $\Gamma=N\leftthreetimes G$, где N - элементарная абелева p-группа. Очевидно, $N=F_p(\Gamma)$. Пусть F - $\mathfrak{F}_2$-проектор группы Γ. Так как $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$, то, по лемме 3.1,

$F^{f_2(p)} \subseteq F^{f_1(p)}$, где f_1, f_2 - максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Следовательно, по теореме 15.7 из [5] и лемме 2 работы [24], FN - $\mathfrak{F}_2$-проектор группы Γ. Так как f_1 - полный экран, то $FN \in f_1(p)$. Кроме того, $\Gamma/N \simeq G \in \in \mathfrak{F}_1 *_5 \mathfrak{F}_2$, и FN покрывает N. Поэтому легко видеть, что FN является $\mathfrak{D}\mathfrak{M}$-подгруппой группы Γ. Итак, $\Gamma \in \mathfrak{F}_1 *_5 \mathfrak{F}_2 \subseteq \subseteq l\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_5 \mathfrak{F}_2)$. Отсюда вытекает, что $G \simeq \Gamma/F_p(\Gamma) \in f(p)$. Противоречие.

Теорема доказана.

§ 4. Признаки локальности формационных произведений

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ - некоторые формации, причем $\mathfrak{F}$ локальна. Тогда $\mathfrak{F} *_1 \mathfrak{H}$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} *_1 \mathfrak{H} = \mathfrak{S}$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал, где $\mathfrak{F}$ - формация с максимальным внутренним локальным экраном ψ. Если $\mathfrak{H}$ - такая формация, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} *_2 \psi(p)$ для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H}$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} *_2 \mathfrak{H} = \mathfrak{U}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ - некоторые локальные формации, причем $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 *_5 \mathfrak{F}_2$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}_1 *_5 \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{S}$.

Доказательства теорем 4.1 - 4.3 однотипны и легко вытекают соответственно из теорем 3.1, 3.2, 3.5 и леммы 3.1.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ - формации, f_1, f_2 - максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет разрешимый $f_1(p)$-корадикал для всех простых p из

$\pi(\mathfrak{F}_1)$, то $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ для всех простых p со свойством $f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ локальна, то, в силу теоремы 3.3, $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ для всех простых p с условием $f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1$. Докажем обратное. Пусть $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ для всех простых p таких, что $f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1$. Выберем в классе $l\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) \setminus (\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$ группу G, обладающую наименьшим порядком. Тогда G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой K. Если K неабелева, то $C_G(K) = 1$, и поэтому $C \in f(p)$, где $p \,|\, |K|$ и f - максимальный внутренний локальный экран $l\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. Тогда, ввиду теоремы 3.3, $G \in \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$, что невозможно. Предположим, что K - абелева p-группа, p простое. Если $f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1$, то $G \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$. Если же $f_1(p) = \mathfrak{F}_1$, то $G \in f(p) = f_2(p) \subseteq \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$. Противоречие.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть существуют некоторое множество простых чисел σ и непустая формация $\mathfrak{F}$ такие, что $(\mathfrak{G}_\sigma \cap \mathfrak{U})\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ - формации, f_1, f_2 - максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет разрешимый $f_1(p)$-корадикал для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$ и либо $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_{\sigma'} \cap \mathfrak{U}$, либо $\mathfrak{F}_1 = (\mathfrak{G}_{\sigma'} \cap \mathfrak{U})\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ - локальная формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_{\sigma'} \cap \mathfrak{U}$, то $\mathfrak{F}_1$ обладает максимальным внутренним локальным экраном f_1 таким, что

$$f_1(p) = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\sigma'} \cap \mathfrak{U}, & \text{если } p \in \sigma', \\ \varnothing, & \text{если } p \in \sigma. \end{cases}$$

Если же $\mathfrak{F}_1 = (\mathfrak{G}_{\sigma'} \cap \mathfrak{U})\mathfrak{F}$, то, по лемме 3.6, локальный экран f_1 такой, что для каждого простого p имеет место

$$f_1(p) = \begin{cases} (\mathfrak{G}_{\sigma'} \cap \mathfrak{U})\mathfrak{F}, & \text{если } p \in \sigma', \\ \mathfrak{F}, & \text{если } p \in \sigma. \end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном $\mathfrak{F}_1$. Очевидно, что в каждом из указанных случаев $f_1(p) = \mathfrak{F}_1$, если $p \in \sigma'$, и $f_1(p) = \mathfrak{F}_1 *_2 f_1(p)$, если $p \in \sigma$. Пусть $l form(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$ - локальная формация, порожденная $\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$ и f - ее максимальный внутренний локальный экран. Пусть G - группа наименьшего порядка из класса $l form(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2) \setminus (\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. Тогда G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой K, совпадающей с $G(\mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2)$. Пусть f_1^* - такой локальный экран, что $f_1^*(p) = \mathfrak{F}_1 *_2 f_1(p)$ для каждого простого p. Если K f_1^*-эксцентральна в G, то теорема очевидна. Предположим, что K f_1^*-центральна в G. Тогда, ввиду леммы 3.1, $G/C_G(K) \in f_1^*(p) \subseteq f_2(p)$ для некоторого простого p из σ, делящего $|K|$. Отсюда, используя лемму 3.4, получаем $G \in \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$, что невозможно. Если же $p \in \sigma$, то $f_1(p) = \mathfrak{F}_1$ и, по теореме 3.3, $G/C_G(K) \in f_2(p)$. Следовательно, по лемме 3.4, $G \in \mathfrak{F}_1 *_3 \mathfrak{F}_2$. Противоречие.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ - формации, f_1, f_2 - максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Пусть $\mathfrak{U}$ совпадает с множеством всех $\pi(\mathfrak{F}_2)$-разрешимых групп из $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2$ для всех простых p с условием $f_1(p) \neq \mathfrak{F}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы аналогично доказательству теоремы 4.4.

Следуя [13], назовем локальную формацию $\mathfrak{F}_1$ сильно вложенной в некоторую локальную формацию $\mathfrak{F}_2$ и будем обозначать $\mathfrak{F}_1 \ll \mathfrak{F}_2$, если в любой группе G, обладающей разрешимым $\mathfrak{F}_i$-корадикалом $(i=1,2)$, $\mathfrak{F}_1$-проектор из G содержится в некотором $\mathfrak{F}_2$-проекторе из G.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ - локальные формации и каждая группа из $\mathfrak{U}$ обладает разрешимым $\mathfrak{F}_i$-корадикалом $(i=1,2)$. Если $\mathfrak{F}_1 \ll \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_2$ - единственная максимальная по включению локальная подформация формации $\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_2$ - локальная подформация $\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2$.

Пусть $\mathfrak{F}$ - произвольная локальная формация, содержащаяся в $\mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2$, и f - ее максимальный внутренний локальный экран. Ввиду лемм 3.1 и 3.2, для доказательства теоремы достаточно показать, что $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2$ для каждого простого p. Предположим, что это не так. Пусть G - группа наименьшего порядка из класса $f(p) \setminus \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2$, где p - некоторое простое. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2}$. Так как $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2$ - насыщенная формация, то K обладает в G дополнением M и $K = C_G(K)$. Так как $M^{\mathfrak{F}_1}$ разрешима, то M обладает, ввиду теоремы 15.7 из [5], $\mathfrak{F}_1$-проектором F. Очевидно, $O_p(G) = 1$. Пусть K - q-группа для некоторого простого $q \neq p$. Тогда, по лемме 2 работы [24], подгруппа $FC_K(F^{f_1(q')})$ является $\mathfrak{F}_1$-проектором группы G. Рассмотрим два случая.

1. $C_K(F^{f_1(q')}) = 1$.

Так как $M \subset G$, p не делит $|G:M|$ и $M_G = 1$, то, по лемме 2.2 из [13], группа G обладает таким точным неприводимым G-модулем N над полем из q элементов, что ограничение $N/_M$ модуля M на N имеет фактор-модуль N/N_0, на котором M действует тождественно. Пусть $\Gamma = N \leftthreetimes G$. Так как $F \subseteq M$ и $N/_M$ обладает фактор-модулем, на котором M действует тождественно, то $[F^{f_1(p)}, N] \subset N$. Пусть F^* - $\mathfrak{F}_1$-проектор группы FN. Тогда, ввиду леммы 2 из [24] и теоремы 21.10 из [5], получаем, что $F^* \cap N \neq 1$. Очевидно, F^* - $\mathfrak{F}_1$-проектор группы Γ. Так как $\Gamma \in \mathfrak{F}_1 *_4 \mathfrak{F}_2$, то $F^* \subseteq H$, где H - некоторый $\mathfrak{F}_2$-нормализатор группы Γ. По теореме 21.1 из [5], H либо покрывает N, либо изолирует N. Если H покрывает N, то, ввиду теоремы 21.1 из [5], N $\mathfrak{F}_2$-центральна в Γ, и поэтому $G \simeq \Gamma/N \in f_2(p) \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2$, что невозможно. Если же H изолирует N, то $F^* \cap N = 1$, а это противоречит тому, что $F^* \cap N \neq 1$.

2. $C_K(F^{f_1(q')}) \neq 1$.

Очевидно, $FC_K(F^{f_1(q')}) \subseteq H^*$, где H^* - некоторый $\mathfrak{F}_2$-нормализатор группы G. По теореме 21.1 из [5], H^* либо покрывает, либо изолирует K. Если H^* покрывает K, то, ввиду теоремы 21.1 из [5], K $\mathfrak{F}_2$-центральна в G, и поэтому $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2$. Противоречие. Если H^* изолирует K, то $C_K(F^{f_1(q')}) = 1$ и теорема верна в силу п.1.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.7.1. Пусть каждая группа из $\mathfrak{U}$ обладает разрешимым $\mathfrak{F}_i$-корадикалом, где $\mathfrak{F}_i$-локальная формация $(i=1,2)$, причем $\mathfrak{F}_1 \ll \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 *_1 \mathfrak{F}_2$ локальна в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}_1 *_1 \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{N}\mathfrak{F}_2$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору Л.А.Шеметкову, под руководством которого выполнена эта работа.

Литература

1. Л.А.ШЕМЕТКОВ, Ступенчатые формации групп, Матем.сб., 94, № 4 (1974), 628-648.

2. Л.А.ШЕМЕТКОВ, Два направления в развитии теории непростых конечных групп, Успехи матем. н., 30, № 2 (1975), 179-198.

3. Л.А.ШЕМЕТКОВ, $\mathfrak{F}$-разложение конечной группы, Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов, ч.1, Гомель,(1975), 80-81.

4. Л.А.ШЕМЕТКОВ, Факторизации непростых конечных групп, Алгебра и логика, 15, № 6 (1976), 648-672.

5. Л.А.ШЕМЕТКОВ, Формации конечных групп, М., Наука,(1978).

6. Л.А.ШЕМЕТКОВ, Экраны ступенчатых формаций, 6-й Всесоюзныйный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов, Киев, Наукова думка, (1978), 68.

7. Н.Т.ВОРОБЬЕВ, О максимальных однородных экранах, 14-я Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы докладов, ч.1, Новосибирск,(1977), 16-17.

8. Н.Т.ВОРОБЬЕВ, Максимальные экраны и характеризация $\mathfrak{F}$-проекторов, ДАН БССР, 22, № 1 (1978), 9-11.

9. Н.Т.ВОРОБЬЕВ, Максимальные экраны формаций, ДАН БССР, 22, № 7 (1978), 744-747.

10. Н.Т.ВОРОБЬЕВ, О максимальном экране порожденной формации, 6-й Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов, Киев, Наукова думка, 1978, с.14-15.

11. B.HUPPERT, Endliche Gruppen, 1, Berlin-Heidelberg-New York, (1967).

12. W.GASCHÜTZ, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen, Math. Z., 80, N 2 (1963), 300-305.

13. K.DOERK, Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, J.Algebra, 19, N5 (1969), 345-373.

14. K.DOERK and T.O.HAWKES, Two questions in the theory of formations, J.Algebra, 16, N 2 (1970), 456-460.

15. R.DOERK, Zwei Klassen von Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, deren Halbverband gesättigter Unterformationen genau ein maximales Element besitzt, Arch. Math., 21, N 2 (1970), 240-244.

16. K.DOERK, Zur Sättigung einer Formation endlicher auflösbauer Gruppen, Arch. Math. 28, N 5 (1977), 561-571.

17. C.WRIGHT. Jn screens and $\mathcal{L}$ -izers of finite solvable groups, Math. Z., 115, N 4 (1970), 273-282.

18. P.SCHMID, Lokale Formationen endlicher Gruppen, Math. Z., 137, N 1 (1974), 31-48.

19. R.CARTER, T.HAWKES, The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite solvable groups, J.Algebra, 5, N 2 (1967), 175-202.

20. K.DOERK, Die maximale lokale Erklärung einer gesättigten Formation, Math. Z., 133, N 2 (1973), 133-135.

21. J.C.BEIDLEMAN and A.R.MAKAN , On saturated formations which are special relative to the strong covering-avoidance property, Proc. Amer. Math.Soc., 47, N 1 (1975), 29-37.

22. B.HUPPERT, Zur Theorie der Formationen, J.Algebra, 18, N 3 (1969), 345-373.

23. K.U.SCHALLER, Einige Sätze über Deck-Meide Untegruppen endlicher auflösbarer Gruppen, Math.Z., 130, N 2 (1973), 199-206.

24. P.D'ARCY, On formations of finite groups, Arch. Math., 25, N 1 (1974), 1-6.

25. P.D'ARCY, $\mathfrak{F}$-Abnormality and theory of finite soluble groupps, J.Algebra, 28, N 4 (1974), 342-361.

26. R.W.CARTER, Nilpotent self-normalizig subgroups and system normalizers, Proc. London Math. Soc., 12, N 4 (1962), 535-563.

Поступило 30 ноября 1978 г.