Математические заметки

том 78 выпуск 2 август 2005

УДК 512.542

КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОДГРУПП ХОЛЛА

В. Н. Загурский, Н. Т. Воробьев

В теории формаций конечных разрешимых групп известен результат Блессеноля о том, что для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ класс всех тех групп, для которых холловская π-подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$, – также локальная формация. В настоящей работе получен результат, в точности дуальный указанному в теории классов Фиттинга. Доказано, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален, то и класс всех тех групп, холловские π-подгруппы которых из $\mathfrak{F}$, также локален.

Библиография: 8 названий.

Введение. Ряд исследований канонических подгрупп конечных разрешимых групп связан с изучением классов конечных групп, определяемых заданными свойствами подгрупп Холла. В теории формаций хорошо известна своими приложениями для изучения свойств подгрупп Холла конструкция класса $B_\pi(\mathfrak{X})$ всех тех групп, холловская π-подгруппа которых принадлежит локальной формации $\mathfrak{X}$. Это обусловлено, прежде всего, результатом Блессеноля [1] о том, что класс $B_\pi(\mathfrak{X})$ является локальной формацией для любой локальной формации $\mathfrak{X}$. В теории классов Фиттинга Хауком [2] введена аналогичная конструкция класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ всех тех групп, холловская π-подгруппа которых принадлежит классу Фиттинга $\mathfrak{F}$. Известно (см., например, [3, глава 9, п. 1.24]), что такой класс является классом Фиттинга. В дальнейшем Бризоном [4] в терминах класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ были описаны $\mathfrak{F}$-радикалы холловских π-подгрупп. Однако вопрос о локальности класса Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{F})$ оставался открытым. В настоящей работе мы дуализируем указанный результат Блессеноля: доказано, что для любого разрешимого локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ является локальным. Более того, установлено, что данный результат справедлив и для частично локальных классов Фиттинга.

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то через G_π обозначают холловскую π-подгруппу группы G, т.е. подгруппу, порядок которой есть π-число, а индекс – π'-число.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой группе G существует единственная $\mathfrak{F}$-максимальная нормальная подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы G. Ее называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G. Через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначают произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, т.е. класс всех тех групп G, для которых $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Мы будем использовать концепцию частичной локализации Шеметкова–Скибы [5], которая состоит в следующем.

Пусть $\varnothing \neq w \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $w' = \mathbb{P} \setminus w$. Всякое отображение

$$f\colon w \cup \{w'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называется *w-локальной функцией Хартли* или *w-локальной H-функцией* [5]. Для каждой w-локальной H-функции f полагаем

$$\mathrm{Supp}(f) = \{a \in w \cup \{w'\} \mid f(a) \neq \varnothing\}$$

– носитель f.

Следуя [5], положим

$$LR_w(f) = \Big(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{S}_{p'}\Big) \cap \Big(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\Big) \cap f(w')\mathfrak{S}_w,$$

где $\pi_1 = \mathrm{Supp}(f) \cap w$, $\pi_2 = w \setminus \pi_1$ и $\mathfrak{S}_w$ – класс всех разрешимых w-групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *w-локальным* [5], если $\mathfrak{F} = LR_w(f)$ для некоторой w-локальной H-функции f.

Заметим, что в случае $w = \mathbb{P}$ w-локальный класс Фиттинга называют *локальным*, а w-локальную функцию Хартли – *локальной функцией Хартли* или *локальной H-функцией.*

В работе рассматриваются только конечные и разрешимые группы.

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [3], [6].

1. Свойства класса $K_\pi(\mathfrak{F})$. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $K_\pi(\mathfrak{F})$ обозначают класс всех тех групп, в которых холловская π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой, т.е.

$$K_\pi(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{S} : G_\pi \in \mathfrak{F}).$$

Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то положим $K_\pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$. В случае, когда $\pi = \varnothing$ и $\pi = \mathbb{P}$, положим $K_\varnothing(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}$ и $K_\mathbb{P}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ соответственно.

Мы будем неоднократно использовать известные свойства класса $K_\pi(\mathfrak{F})$, которые представляет следующая

Лемма 1.1 [4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, π – множество простых чисел, G – группа и G_π – ее холловская π-подгруппа. Тогда*

1) $K_\pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}) = K_\pi(\mathfrak{F}) \cap K_\pi(\mathfrak{X})$ *и, если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, *то* $K_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq K_\pi(\mathfrak{X})$;
2) *если* $\mathfrak{F}$ – *непустой класс, то* $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap G_\pi = (G_\pi)_\mathfrak{F}$;
3) $K_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X}) = K_\pi(\mathfrak{F})K_\pi(\mathfrak{X})$.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – множество простых чисел. Тогда*

1) *если* $p \in \pi$, *то* $K_\pi(\mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_{p'}$;
2) *если* $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ *и* $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$ *для некоторого простого* p, *то* $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p = K_\pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{S}_{p'} \subseteq K_\pi(\mathfrak{S}_{p'})$. Пусть группа $G \in K_\pi(\mathfrak{S}_{p'})$ и G_π – холловская π-подгруппа G. Тогда $|G_\pi|$ является p'-числом. Но $p \in \pi$, и поэтому $\pi' \subseteq p'$. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}_{p'}$ и $K_\pi(\mathfrak{S}_{p'}) \subseteq \mathfrak{S}_{p'}$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть $G \in K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$. Так как по утверждению 2) леммы 1.1 $G_\pi \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})} = (G_\pi)_\mathfrak{F}$, то ввиду изоморфизма

$$G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cong G_\pi/(G_\pi \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})}) = G_\pi/(G_\pi)_\mathfrak{F}$$

имеем

$$G_\pi/(G_\pi)_\mathfrak{F} \cong G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}.$$

Но холловская π-подгруппа $G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ группы $G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ является p-группой. Следовательно, $G_\pi/(G_\pi)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_p$ и $G_\pi \in \mathfrak{F}$, и справедливо включение

$$K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p \subseteq K_\pi(\mathfrak{F}).$$

Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π, σ – множества простых чисел, причем $\sigma \cap \pi = \varnothing$. Тогда*

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi = K_\sigma(\mathfrak{F}).$$

Доказательство. Очевидно, что $K_\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi$.

Пусть $G \in K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi$. По утверждению 2) леммы 1.1 $G_\sigma \cap G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} = (G_\sigma)_\mathfrak{F}$. Учитывая изоморфизм

$$G_\sigma G_{K_\sigma(\mathfrak{F})}/G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} \cong G_\sigma/(G_\sigma \cap G_{K_\sigma(\mathfrak{F})}) = G_\sigma/(G_\sigma)_\mathfrak{F},$$

получаем

$$G_\sigma/(G_\sigma)_\mathfrak{F} \cong G_\sigma G_{K_\sigma(\mathfrak{F})}/G_{K_\sigma(\mathfrak{F})}.$$

Но тогда из того, что $G/G_{K_\sigma(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{S}_\pi$, следует $G_\sigma/(G_\sigma)_\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}_\pi$ и поэтому $G_\sigma = (G_\sigma)_\mathfrak{F}$. Следовательно, $G_\sigma \in \mathfrak{F}$ и $G \in K_\sigma(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

Следствие 1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π, σ – множества простых чисел, причем $\sigma \cap \pi = \varnothing$. Тогда*

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_\pi = K_\sigma(\mathfrak{F}).$$

Доказательство следует из того, что по лемме 1.3

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_\pi \subseteq K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_\pi = K_\sigma(\mathfrak{F}).$$

Следствие 1.5. *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и π – множество простых чисел, то*

$$K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'} = K_\pi(\mathfrak{F}).$$

2. Локальность класса $K_\pi(\mathfrak{F})$. Основной результат настоящей работы представляет следующая

Теорема 2.1. *Если $\mathfrak{F}$ – w-локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то $K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})$ – w-локальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{F} = \varnothing$. Так как класс Фиттинга $\varnothing$ является w-локальным (см., [5, пример 10]), то класс $K_{\pi\cap w}(\varnothing)$ w-локален и в этом случае теорема справедлива.

Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Если $w \cap \pi = \varnothing$, то по определению $K_\varnothing(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}$. Определим H-функцию следующим образом: $f(a) = \mathfrak{S}$ для всех a из $w \cup \{w'\}$. Тогда, очевидно,

$$LR_w(f) = \left(\bigcap_{p\in w} \mathfrak{S}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\right) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{S}_w = \mathfrak{S}$$

и класс Фиттинга $K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})$ w-локален.

Предположим, что $w\cap\pi \neq \varnothing$. Так как $\mathfrak{F}$ – w-локальный класс Фиттинга, то по теореме 9 из [5] существует w-локальная H-функция F такая, что $\mathfrak{F} = LR_w(F)$, ее значения $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p из w и $F(w') = \mathfrak{F}$.

Обозначим

$$\pi_1 = \mathrm{Supp}(F) \cap w, \qquad \pi_2 = w \setminus \pi_1.$$

Тогда

$$\mathfrak{F} = LR_w(F) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{S}_{p'}\right) \cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\right) \cap \mathfrak{F}\mathfrak{S}_w.$$

Построим w-локальную H-функцию следующим образом:

$$f(p) = \begin{cases} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p)), & \text{если } p \in \pi_1 \cap \pi; \\ K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F}), & \text{если } p \in w \setminus \pi; \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi_2 \cap \pi, \end{cases}$$

и $f(w') = K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})$.

Легко видеть, что $\mathrm{Supp}(f) = (\pi_1 \cap \pi) \cup (w \setminus \pi) \cup \{w'\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} LR_w(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2\cap\pi} \mathfrak{S}_{p'}\right) &\cap \left(\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\right) \\ &\cap \left(\bigcap_{p\in w\setminus\pi} K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\right) \cap K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_w. \end{aligned}$$

Покажем вначале, что справедливо равенство

$$\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}). \tag{1}$$

Так как $\mathfrak{F}$ – w-локальный класс Фиттинга и $F(p) = F(p)\mathfrak{N}_p$ для всех p из w, то $\mathfrak{F} \subseteq \bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} F(p)\mathfrak{S}_{p'}$. Тогда по утверждению 1) леммы 1.1

$$K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}) \subseteq K_{\pi_1\cap\pi}\left(\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} F(p)\mathfrak{S}_{p'}\right) = \bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p)\mathfrak{S}_{p'}).$$

Следовательно, по утверждению 3) леммы 1.1 и утверждению 1) леммы 1.2 получаем

$$\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p)\mathfrak{S}_{p'}) = \bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{S}_{p'}.$$

Кроме того, по утверждению 2) леммы 1.2 для любого $p \in \pi_1 \cap \pi$ имеет место

$$K_{\pi_1\cap\pi}(F(p)) \subseteq K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p.$$

Значит,

$$K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}.$$

Докажем обратное включение. Действительно, из того, что $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p из w, из утверждения 1) леммы 1.1 следует включение

$$K_{\pi_1\cap\pi}(F(p)) \subseteq K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{S}_{p'} \subseteq K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'}$$

и по утверждению 2) леммы 1.2

$$K_{\pi_1\cap\pi}(F(p)) = K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p$$

для любого p из $\pi_1 \cap \pi$. Следовательно,

$$\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(\pi_1\cap\pi)'}.$$

Кроме того, по следствию 1.5

$$K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(\pi_1\cap\pi)'} = K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$\bigcap_{p\in\pi_1\cap\pi} K_{\pi_1\cap\pi}(F(p))\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \subseteq K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}),$$

и равенство (1) доказано.

Установим теперь, что

$$\bigcap_{p\in w\setminus\pi} K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(w\setminus\pi)'}. \tag{2}$$

По лемме 1.3 $K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F}) = K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w\setminus\pi}$. Кроме того, $\mathfrak{S}_{w\setminus\pi}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{w\setminus\pi}$ для любого p из $w \setminus \pi$. Следовательно,

$$\bigcap_{p\in w\setminus\pi} K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = \bigcap_{p\in w\setminus\pi} K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w\setminus\pi}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} = \bigcap_{p\in w\setminus\pi} K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w\setminus\pi}\mathfrak{S}_{p'}$$

и

$$\bigcap_{p\in w\setminus\pi} K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w\setminus\pi}\mathfrak{S}_{p'} = \bigcap_{p\in w\setminus\pi} K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{p'} = K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(w\setminus\pi)'},$$

что доказывает равенство (2).

Таким образом, мы доказали справедливость равенства

$$LR_w(f) = \mathfrak{S}_{(\pi_2\cap\pi)'} \cap K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}) \cap K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{(w\setminus\pi)'} \cap K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w}. \tag{3}$$

Теперь, учитывая (3), для доказательства теоремы достаточно выяснить справедливость равенства

$$\mathfrak{S}_{(\pi_2\cap\pi)'} \cap K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}) = K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F}). \tag{4}$$

Пусть $G \in K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})$. Тогда из того, что $\mathfrak{F} = LR_w(F)$, следует $G_{\pi\cap w} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi_2'}$ и поэтому $|G_{\pi\cap w}|$ является $(\pi_2' \cap \pi \cap w)$-числом. Кроме того, $|G : G_{\pi\cap w}|$ является $(\pi \cap w)'$-числом. Легко видеть, что $(\pi \cap w)' \cup (\pi_2' \cap \pi \cap w) = (\pi_2 \cap \pi)'$ и, значит, $G \in \mathfrak{S}_{(\pi_2\cap\pi)'}$. Так как $\pi_1 \subseteq w$, то $(\pi \cap w)' \subseteq (\pi_1 \cap \pi)'$ и $|G : G_{\pi\cap w}|$ является $(\pi_1 \cap \pi)'$-числом. Далее из $\pi_1 \cap \pi \cap w \subseteq \pi_1 \cap \pi$ следует, что $|G_{\pi\cap w}|$ есть $(\pi_1 \cap \pi)$-число. Тогда $(\pi\cap w)$-холловская подгруппа $G_{\pi\cap w}$ группы G является также $(\pi_1\cap\pi)$-холловской подгруппой группы G. Значит, $G_{\pi_1\cap\pi} \in \mathfrak{F}$ и $G \in K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})$. Следовательно,

$$K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}_{(\pi_2\cap\pi)'} \cap K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}).$$

Покажем обратное включение. Пусть теперь $G \in \mathfrak{S}_{(\pi_2\cap\pi)'} \cap K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F})$. Тогда $G_{\pi_1\cap\pi} \in \mathfrak{F}$. Так как $(\pi_2\cap\pi)'\setminus(\pi_1\cap\pi) = (\pi\cap w)'$, то $|G : G_{\pi_1\cap\pi}|$ является $(\pi\cap w)'$-числом. Теперь, ввиду $\pi_1 \cap \pi \subseteq \pi \cap w$, получаем, что $|G_{\pi_1\cap\pi}|$ является $(\pi \cap w)$-числом. Значит, $(\pi_1 \cap \pi)$-холловская подгруппа G является $(\pi \cap w)$-холловской подгруппой G и поэтому $G_{\pi\cap w} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})$. Это означает, что

$$\mathfrak{S}_{(\pi_2\cap\pi)'} \cap K_{\pi_1\cap\pi}(\mathfrak{F}) \subseteq K_{\pi\cap w}(\mathfrak{F})$$

и равенство (4) доказано.

Теорема доказана.

В случае $w = \mathbb{P}$ из теоремы вытекает результат, в точности дуальный указанному во введении результату Блессеноля [1].

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Если $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то $K_\pi(\mathfrak{F})$ – локальный класс Фиттинга.*

Из следствия вытекает, что семейство всех тех классов Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которых $K_\pi(\mathfrak{F})$ является локальным, обширно, так как оно содержит все локальные классы Фиттинга. Однако в общем случае класс Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{F})$ локален не для всякого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Это подтверждает следующий

Пример 2.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный нетривиальный (отличный от классов (1) и $\mathfrak{S}$) нормальный класс Фиттинга. Покажем, что $\mathfrak{F}$ нелокален. Действительно, если $\mathfrak{F}$ локален, то по лемме 5 из [7] $\mathfrak{F}$ является классом Локетта и поэтому ввиду [3, теорема X.3.7] $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} = \mathfrak{S}$. Полученное противоречие показывает, что любой нетривиальный нормальный класс Фиттинга нелокален.

Пусть теперь p и q – такие простые числа, что $p \mid (q-1)$, $G = D^p_{q^n}$ – монолитическая группа с нормальной абелевой силовской q-подгруппой экспоненты q^n и циклической холловской q'-подгруппой порядка p. Пусть $\pi = \pi(G)$ и $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. Тогда, ввиду результата Бергера (см. свойство 3 из [8]) группа $G \notin \mathfrak{S}_*$ и поэтому $G \notin K_\pi(\mathfrak{S}_*)$. Следовательно, $K_\pi(\mathfrak{S}_*) \neq \mathfrak{S}$ и класс Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{S}_*)$ нетривиален. Но по теореме Хаука (см. [2, теорема 3.4]) $K_\pi(\mathfrak{S}_*)$ – нормальный класс Фиттинга и, следовательно, нелокален.

В заключение, заметим, что если $\mathfrak{F}$ – непустой w-локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, причем $w \cap \pi = \varnothing$, то класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ является также w-локальным. Действительно, в этом случае определяя значения w-локальной H-функции равенством $f(a) = K_\pi(\mathfrak{F})$ для всех a из $w \cup \{w'\}$, получаем, что

$$LR_w(f) = \left(\bigcap_{p\in w} K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\right) \cap K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_w = K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_w\mathfrak{S}_{w'} \cap K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_w.$$

Теперь, учитывая следствие 1.4, получаем, что $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_w = K_\pi(\mathfrak{F})$ и

$$LR_w(f) = K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{w'} \cap K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_w = K_\pi(\mathfrak{F})(\mathfrak{S}_{w'} \cap \mathfrak{S}_w) = K_\pi(\mathfrak{F}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Blessenohl D. Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1975. V. 142. №3. P. 299–300.

[2] Hauck P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse // J. Algebra. 1978. V. 53. P. 395–401.

[3] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

[4] Brison O. J. Hall operators for Fitting classes // Arch. Math. (Basel). 1979. V. 33. P. 1–9.

[5] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. №2. С. 114–147.

[6] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[7] Воробьев Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. 1988. Т. 43. №2. С. 161–168.

[8] Berger T. K. More normal Fitting classes of finite solvable groups // Math. Z. 1976. V. 151. №1. P. 1–3.

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
(Беларусь, г. Витебск)
E-mail: zagurski@yandex.ru, nicholas@vsu.by

Поступило
13.09.2004