МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 34, № 2 (1983)

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ЛОКАЛЬНОСТИ ФОРМАЦИОННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Н. Т. Воробьев

Центральное место в теории формаций занимают вопросы конструирования формаций. Наряду с методами конструирования формаций с помощью групповых функций и экранов (см. главу I монографии [1], а также работы [2—8]), существуют методы, позволяющие с помощью двух формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ конструировать третью, которую естественно называть формационным произведением. Простейший случай формационного произведения введен в книге Л. А. Шеметкова [1]. Известно (см. работы [5—7]) пять важных типов формационных произведений — формационные произведения i-го рода $\mathfrak{F} *_i \mathfrak{H}$, $1 \leqslant i \leqslant 5$. Возникает следующая задача: отыскать те значения формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, для которых формация $\mathfrak{F} *_i \mathfrak{H}$ локальна.

Настоящая заметка посвящена решению этой задачи, предложенной автору Л. А. Шеметковым, для формационных произведений 2-го рода.

Предположим, что мы занимаемся изучением такого непустого класса групп $\mathfrak{U}$, замкнутого относительно операций S, Q, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{A}}$, что каждая группа G из $\mathfrak{U}$ обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-проектором и любые два $\mathfrak{F}$-проектора сопряжены в G ($\mathfrak{F}$ — локальная формация из $\mathfrak{U}$). В дальнейшем под группой мы будем всегда подразумевать только группу из $\mathfrak{U}$, под классом групп (в частности, формацией) — подкласс (формацию) из $\mathfrak{U}$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{H}$ — произвольная формация. Обозначим через

$\mathfrak{F} * {}_2\mathfrak{H}$ класс всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор принадлежит $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H} = \varnothing$, то $\mathfrak{F} * {}_2\mathfrak{H} = \varnothing$.

Очевидно, класс $\mathfrak{F} * {}_2\mathfrak{H}$ — формация, которая в общем случае не является локальной. Отметим, что специальные случаи формации $\mathfrak{F} * {}_2\mathfrak{H}$ изучались ранее разными авторами. Так в классе разрешимых групп Дёрк [8], Дарси [9], Бейдлеман и Макан [10] изучали формацию $\mathfrak{F} * {}_2f(p)$ (f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, p — простое), Блессеноль [11] — формацию $\mathfrak{S}_\pi * {}_2\mathfrak{H}$ и Дёрк [12] $\mathfrak{F} * {}_2\mathfrak{H}$ в случае, когда $\mathfrak{H}$ локальна. В [5—7] изучалась формация $\mathfrak{F} * {}_2f(p)$ в классе групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом.

Через $\mathfrak{U}_\pi$ будем обозначать формацию всех π-групп из $\mathfrak{U}$.

Локальный экран f назовем:

1) полным, если $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ для каждого простого p;

2) S-замкнутым, если формация $f(p)$ S-замкнута для каждого простого p.

Все другие обозначения и определения можно найти в монографии Л. А. Шеметкова [1].

Приведем вначале без доказательства в виде трех лемм результаты, полученные ранее в [5, 6].

ЛЕММА 1. *Пусть f_1, f_2 — максимальные внутренние локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Тогда $\mathfrak{F}_1$ является подформацией $\mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — формация с максимальным внутренним локальным экраном f, то через f^* мы обозначали такой локальный экран [5], что $f^*(p) = \mathfrak{F} * {}_2f(p)$ для каждого простого p.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация с максимальным внутренним локальным экраном f. Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал, то справедливы следующие утверждения:*

1) *$\mathfrak{F}$-проектор F группы G покрывает каждый f^*-центральный главный фактор группы G;*

2) *каждый главный фактор группы G, покрываемый $\mathfrak{F}$-проектором F группы G, является f^*-центральным.*

ЛЕММА 3. *Если $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация и π — некоторое множество простых чисел, причем $\mathfrak{U}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, то локальный экран f такой, что для каждого* *простого f имеет место*

$$f(p)=\begin{cases}\mathfrak{F}, & \text{если } p\in\pi,\\ \mathfrak{U}_{\pi'}\mathfrak{F}, & \text{если } p\in\pi',\end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{U}_{\pi'}\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 4. *Если $\mathfrak{F}$ — локальная формация и φ — полный локальный экран, то локальный экран φ^* такой, что $\varphi^*(p)=\mathfrak{F}*_2\varphi(p)$ для каждого простого p, является полным.*

Доказательство. Очевидно, $\varphi^*(p)\subseteq\mathfrak{N}_p\varphi^*(p)$. Пусть $G\in\mathfrak{N}_p\varphi^*(p)$ и F — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда $F/F\cap O_p(G)\simeq FO_p(G)/O_p(G)\in\varphi(p)$. Так как $F\cap O_p(G)\subseteq O_p(F)$, то $F/O_p(F)\in\varphi(p)$. Но φ — полный экран. Поэтому $F\in\mathfrak{N}_p\varphi(p)=\varphi(p)$. Отсюда $G\in\varphi^*(p)$. Лемма доказана.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, f — локальный экран $\mathfrak{F}$. Подгруппу H группы G назовем f-$\mathcal{D}$-подгруппой, если H покрывает только f-центральные главные факторы группы G.

Если $\mathfrak{F}$ — локальная формация с максимальным внутренним локальным экраном f, то примерами f^*-$\mathcal{D}$-подгрупп (f-$\mathcal{D}$-подгрупп) в группах с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом являются $\mathfrak{F}$-проекторы групп (соответственно $\mathfrak{F}$-нормализаторы групп).

ЛЕММА 5. *Пусть $\mathfrak{F}_1\supseteq\mathfrak{F}_2$ — формации с максимальными внутренними локальными экранами f_1, f_2 соответственно. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $l\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_1*_2\mathfrak{F}_2)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\varphi\leqslant f$, где φ — такой локальный экран, что $\varphi(p)=\mathfrak{F}_1*_2f_2(p)$ для каждого простого p;*

2) *если $\mathfrak{F}_i$-проектор каждой группы G является f_i^*-$\mathcal{D}$-подгруппой в G (f_i^* — такой локальный экран, что $f_i^*(p)=\mathfrak{F}_i*_2f_i(p)$ для всех простых p) $i=1, 2$, то*

а) *$f(p)$ является подформацией $\varphi_1(p)$, где $\varphi_1(p)=\mathfrak{U}_{p'}\varphi(p)$, φ — тот же экран, что и в* 1) *и p — такое простое, что $\mathfrak{F}_2\subseteq f_1(p)$;*

б) *$f\leqslant\varphi_1$ и $f=\varphi$, если $\mathfrak{F}_2\subseteq f_1(p)$ для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{F}_1)$, а экраны φ и φ_1 те же, что и в* 1), а).

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Предположим, что оно неверно. Тогда существует такое простое p, что $\varphi(p)$ не содержится в $f(p)$. Выберем в классе $\varphi(p) \setminus f(p)$ группу G, имеющую наименьший порядок. Так как экран f, ввиду теоремы 3.3 из книги [1] полный, то $O_p(G) = 1$. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = P\wr G$, где $|P| = p$. Тогда $\Gamma = N \rtimes G$ и $N = O_p(\Gamma) = F_p(\Gamma)$. Пусть F — $\mathfrak{F}_1$-проектор группы G. Так как $G \in \varphi(p)$, то $F \in f_2(p)$. Но $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}_2$. Следовательно, по лемме 1 $F \in f_1(p)$. Теперь, применяя лемму 2 из работы [13], получаем, что подгруппа $FC_N(F^{f_1(p)}) = FN$ является $\mathfrak{F}_1$-проектором группы Γ, Так как из теоремы 3.3 из [1] вытекает, что экран f_2 полный и $F/F \cap N \simeq FN/N \in f_2(p)$, то $FN \in \mathfrak{N}_p f_2(p) = f_2(p)$. Следовательно, $\Gamma \in \varphi(p) \subseteq l\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2)$. Отсюда вытекает, что $G \simeq \Gamma/N \in f(p)$. Получили противоречие. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Чтобы установить справедливость а), ввиду леммы 3 и определения формации $l\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2)$, достаточно показать, что $\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$ является подформацией формации $\mathfrak{U}_{p'}\,\varphi(p)$, где p — такое простое, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq f_1(p)$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$ и H/K — pd-главный фактор группы G. Тогда $G/C_G(H/K) \in f_1^*(p)$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1$-проектор F группы G покрывает H/K. Так как $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$ и $G \in \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$, то легко видеть, что F является $\mathfrak{F}_2$-проектором группы G. Поэтому по условию $G/C_G(H/K) \in f_2^*(p)$. Отсюда вытекает, что

$$G/O_{p'}(G)/F_p(G)/O_{p'}(G) \simeq G/F_p(G) \in f_2^*(p) \cap (\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2).$$

Нетрудно заметить, что $f_2^*(p) \cap (\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2) = \varphi(p)$. Но из леммы 4 следует, что φ — полный экран. Следовательно, $G/O_{p'}(G) \in \varphi(p)$, и поэтому $G \in \mathfrak{U}_{p'}\,\varphi(p)$. Итак, $\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{U}_{p'}\,\varphi(p)$.

Теперь утверждение б) вытекает непосредственно из лемм 1 и 3 и 1). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — локальные формации. Если $\mathfrak{F}_i$-проектор каждой группы G из $\mathfrak{U}$ является f_i^*-$\mathfrak{D}$-подгруппой в G $(i = 1, 2)$, причем $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{U}_\pi$, то формация $\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$ локальна.*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2 \subseteq l\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2)$. Докажем, что $l\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2) \subseteq \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$. Предположим, что это не так. Выберем в классе $l\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2) \setminus (\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2)$ группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой K, совпадающей с $G^{(\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2)}$.

Пусть K является π'-группой и F — $\mathfrak{F}_1$-проектор группы G. Тогда $F \simeq F/F \cap K \in \mathfrak{F}_2$, и поэтому $G \in \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$. Получили противоречие.

Предположим, что $O_{\pi'}(G) = 1$. Если K — неабелева, то, очевидно, $C_G(K) = 1$. Следовательно, $G \in f(K)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации l form $(\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2)$. Легко видеть, что формация $\mathfrak{F}_1$ обладает таким максимальным внутренним локальным экраном f_1, что

$$f_1(p) = \begin{cases} \mathfrak{F}_1, & \text{если } p \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq f_1(p)$ для всех простых $p \in \pi$. Пусть ψ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ ($\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ локальна, ввиду леммы 3.7 из книги [1]). Тогда, применяя утверждение 2) из леммы 5, имеем $f(K) \subseteq f(p) \subseteq \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$ для некоторого простого $p \in \pi$. Но $\mathfrak{F}_1 *_2 \psi(p) \subseteq \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$. Получили противоречие.

Остается принять следующий случай: K — абелева p-группа, $p \in \pi$. Так как $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \subseteq f_1(p)$, то по утверждению 2) из леммы 5, следует $G/C_G(K) \in \mathfrak{F}_1 *_2 \psi(p)$. Следовательно, $F/C_F(K) \simeq FC_G(K)/C_G(K) \in \psi(p)$. Рассмотрим главный ряд

$$F_0 = F \supset F_1 \supset \ldots \supset F_k = F \cap K \supset F_{k+1} \supset \ldots \supset F_t = 1 \quad (*)$$

группы F. На участке $F \supset \ldots \supset F \cap K$ все факторы ряда $(*)$ $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)$-центральны, так как $F/F \cap K \simeq FK/K \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. Легко видеть, что $C_F(K) \subseteq C_F(F_{i-1}/F_i)$, $i = k, k+1, \ldots, t$. Следовательно, $F/C_F(F_{i-1}/F_i) \in \psi(p)$. Итак, $F \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_2$, и поэтому $G \in \mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}_i$ — локальная формация ($i = 1, 2$). Если каждая группа из $\mathfrak{U}$ имеет $\pi(\mathfrak{F}_i)$-разрешимый $\mathfrak{F}_i$-корадикал, причем $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{U}_\pi$, то $\mathfrak{F}_1 *_2 \mathfrak{F}_2$ — локальная формация.*

Доказательство. По лемме 2 каждый $\mathfrak{F}_i$-проектор группы из $\mathfrak{U}$ является f_i^*-$\mathscr{D}$-подгруппой этой группы ($i = 1, 2$). Теперь $\mathfrak{F}_1 * {}_2\mathfrak{F}_2$ локальна по доказанной теореме.

Из следствия 1 легко вытекает следующий известный результат Блессеноля, доказанный другими методами.

С л е д с т в и е 2 (Блессеноль [11]). *Пусть* $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ *— локальная формация. Если* H *— π-холловская подгруппа группы* G *и* $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 15.2 книги [1] множество всех $\mathfrak{S}_\pi$-проекторов группы G и множество всех π-холловских подгрупп группы G совпадают. Так как $H\Phi(G)/\Phi(G) \simeq H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{S}_\pi * {}_2\mathfrak{F}$. Но по теореме 4.2 из монографии [1] и следствию 1 вытекает, что формация $\mathfrak{S}_\pi * {}_2\mathfrak{F}$ насыщенная. Следовательно, $G \in \mathfrak{S}_\pi * {}_2\mathfrak{F}$, и поэтому $H \in \mathfrak{F}$.

Витебский государственный
педагогический институт

Поступило
9.VII.1982

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш е м е т к о в Л. А., Формации конечных групп, М., «Наука», 1978.

[2] Ш е м е т к о в Л. А., Два направления в развитии непростых конечных групп, Успехи матем. наук, 30, № 2 (1975), 179—211.

[3] Ш е м е т к о в Л. А., Ступенчатые формации групп, Матем. сб., 94, № 2 (1974), 264—268.

[4] Ш е м е т к о в Л. А., Экраны произведения формаций, Докл. АН БССР, 25, № 8 (1981), 677—680.

[5] В о р о б ь е в Н. Т., Максимальные экраны локальных формаций. Алгебра и логика, 18, № 2 (1979), 137—161.

[6] В о р о б ь е в Н. Т., Вложение локальных экранов, Матем. заметки, 30, № 2 (1981), 305—311.

[7] В о р о б ь е в Н. Т., Максимальные экраны порожденных формаций, Докл. АН БССР, 23, № 2 (1979), 115—117.

[8] D o e r k K., Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, J. Algebra, 13, № 3 (1969), 345—373.

[9] D'A r c y P., $\mathfrak{F}$-abnormality and the theory of finite solvable groups, J. Algebra, 28, № 2 (1974), 342—361.

[10] B e i d l e m a n J. C., M a k a n A. K., On saturated formations which are special relative to the strong coveravoidance property, Proc. Amer. Math. Soc., 47, № 1 (1975), 29—36.

[11] B l e s s e n o h l D., Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen, Math. Z., 142, № 3 (1975), 299—300.

[12] D o e r k K., Zur Sättigung einer Formationen endlicher auflosbarer Gruppen, Arch. Math., 28, № 5 (1977), 561—571.

[13] D'A r c y P., On formations of finite groups, Arch. Math., 25, № 1 (1974), 3—7.