Математические заметки

том 51 выпуск 3 март 1992

ЛОКАЛЬНОСТЬ РАЗРЕШИМЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н. Т. Воробьев

Большинство известных результатов, полученных в теории формаций конечных групп, посвящено изучению локальных формаций (см. монографию [1] и [2]). В связи с этим автору профессором Л. А. Шеметковым была предложена двойственная задача — задача нахождения и исследования объектов-аналогов локальным формациям в теории классов Фиттинга — классов конечных групп, наследственных относительно нормальных подгрупп и их произведений. Первоначальные попытки определения разрешимых локальных классов Фиттинга (хотя и различные) можно найти в работах Дарси [3] и Хартли [4] в связи с изучением свойств инъекторов. Используя понятие локальной групповой функции, введенное Л. А. Шеметковым [1], первые результаты, относящиеся к построению и исследованию локальных классов Фиттинга, были получены автором [5, 6]. Оказалось, что локальными классами Фиттинга являются многие известные классы групп. В частности, [5, 6] установлено, что примерами локальных классов Фиттинга являются наследственные классы групп: $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$. В настоящей работе удалось выделить обширное множество локальных классов Фиттинга. А именно, доказана

ТЕОРЕМА. *Каждый непустой разрешимый наследственный класс Фиттинга является локальным.*

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. Тогда их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — класс всех групп G таких, что $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$, где $G_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-радикал группы G [2].

Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга ассоциативно [7].

Если существует такая локальная групповая функция f [1], что $f(p)$ — класс Фиттинга для всех простых p, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем локальным (см. [6]) в случае, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}\cap(\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'})$. При этом f будем называть радикальной функцией класса $\mathfrak{F}$. Если $\pi=\varnothing$, то будем полагать $\mathfrak{G}_\varnothing=\mathfrak{E}$. В других обозначениях и определениях мы следуем монографии Л. А. Шеметкова [1] и книге [2]. Во всех случаях рассматриваются только конечные группы, в теореме — конечные разрешимые группы.

ЛЕММА 1. *Если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\{\mathfrak{H}_i \mid i\in I\}$ — некоторое множество классов Фиттинга, то*

$$\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}\mathfrak{H}_i=\mathfrak{F}(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{H}_i).$$

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ назовем локальным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — локальный класс Фиттинга.

ЛЕММА 2. *Пусть π, ω — некоторые множества простых чисел и $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}_\omega$. Тогда произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально с радикальной функцией f такой, что*

$$f(p)=\begin{cases}\mathfrak{F}\mathfrak{H}, & \text{если } p\in\omega,\\ \mathfrak{F}, & \text{если } p\in\pi\setminus\omega.\end{cases}$$

В частности,

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{S}_{\pi\cup\omega}\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_{\omega'}\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{S}_{(\pi\setminus\omega)'}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга с радикальной функцией f, описанной выше, и $\sigma=\pi\cup\omega$. Тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_\sigma\cap(\bigcap_{p\in\sigma}f(p)\cdot\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Учитывая определение функции f, получаем

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_\sigma\cap(\bigcap_{p\in\omega}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_{p'})\cap(\bigcap_{p\in\pi\setminus\omega}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{p'}).$$

Но тогда по лемме 1

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_\sigma\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_{\omega'}\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{S}_{(\pi\setminus\omega)'}=\mathfrak{S}_\sigma\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\omega(\mathfrak{S}_{\omega'}\cap\mathfrak{S}_{(\pi\setminus\omega)'}).$$

Следовательно, снова применяя лемму 1, мы получаем равенство:

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_\sigma\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_{\sigma'}=\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\omega=\mathfrak{F}\mathfrak{H}.$$

Лемма доказана.

Следуя Л. А. Шеметкову [1], введем частичный порядок на множестве Ω радикальных функций следующим образом: $f_k\leqslant f_l$ тогда и только тогда, когда $f_k(p)\subseteq f_l(p)$ для всех простых p $(f_k, f_l\in\Omega)$.

ЛЕММА 3. *Пересечение любого непустого множества локальных классов Фиттинга — локальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_i=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга с радикальной функцией f_i, $i\in I$. Построим групповую функцию $f=\bigcap_{i\in I}f_i$. Так как для всякого $i\in I$ и любой группы $G\neq 1$ имеет место равенство $f_i(G)=\bigcap_{p\in\pi(G)}f_i(p)$, то

$$f(G)=\bigcap_{i\in I}(\bigcap_p f_i(p))=\bigcap_p(\bigcap_{i\in I}f_i(p))=\bigcap_p f(p)$$

для всех простых $p\in\pi(G)$. Следовательно, f — радикальная функция. Покажем, что f определяет локально $\mathfrak{F}$. Пусть $\pi=\pi(\mathfrak{F})$ и

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_\pi\cap(\bigcap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}).$$

Так как $f\leqslant f_i$ для любого $i\in I$, то, очевидно, $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Пусть G — группа из $\mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{f_i(p)}\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для каждого $i\in I$, $p\in\pi$. Следовательно, $G/\bigcap_{i\in I}G_{f_i(p)}\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Но $\bigcap_{i\in I}G_{f_i(p)}=G_{f(p)}$. Итак, $G\in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для всех простых $p\in\pi$. Кроме того, $G\in\mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $G\in\mathfrak{S}_\pi\cap \cap(\cap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})=\mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

Следующая лемма дает один из методов построения локальных произведений классов Фиттинга и представляет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 4. *Каждое конечное произведение классов Фиттинга* $\mathfrak{F}=\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i(n\geqslant 2)$, *где* $\mathfrak{F}_i=\mathfrak{S}_{\pi_i}$. *для некоторого множества простых чисел* π_i *является локальным.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по числу сомножителей n. Для $n=2$ утверждение верно по лемме 2.

Предположим, что $n>2$ и все произведения длины, меньшей n, локальны. Пусть $\mathfrak{H}=\prod_{j=1}^{n-2}\mathfrak{F}_j$. Тогда, учитывая свойство ассоциативности умножения классов Фиттинга (см. лемму 1 [5]) и лемму 2, мы получаем, что

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}(\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{F}_n)=\mathfrak{H}(\mathfrak{S}_\sigma\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_{\omega'}\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{S}_{(\pi\setminus\omega)'}),$$

где $\pi_{n-1}=\pi$, $\pi_n=\omega$, $\sigma=\pi\cup\omega$. Следовательно, по лемме 1 $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\mathfrak{S}_\sigma\cap \cap\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_{\omega'}\cap\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{S}_{(\pi\setminus\omega)'}$, где $\mathfrak{X}=\mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$. Но $\mathfrak{H}\mathfrak{S}_\sigma$ произведение длины $n-1$ и поэтому оно локально по индукции, а произведения $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_{\omega'}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{S}_{\pi(\setminus\omega)'}$ локальны по следствию 2 теоремы [6]. Следовательно. $\mathfrak{F}$ – локальное произведение по лемме 3.

Лемма доказана.

Через $\mathrm{Fit}\,\mathfrak{X}$ обозначают [5] класс Фиттинга, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$. Следуя [1], радикальную функцию f класса $\mathfrak{F}$ назовем внутренней, если $f(p)\subseteq\mathfrak{F}$, и полной в случае, когда $f(p)= =f(p)\mathfrak{N}_p$ для всех простых p.

ЛЕММА 5. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *каждый локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *обладает единственной минимальной полной радикальной функцией* f *такой, что для каждого простого* $p\in\pi(\mathfrak{F})$ *имеет место равенство*

$$f(p)=\mathrm{Fit}\{G\in\mathfrak{F}\,|\,G^{\mathfrak{N}_p}\cong H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}}\,(H\in\mathfrak{F})\}\mathfrak{N}_p;$$

2) *если* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – *классы Фиттинга с минимальными полными радикальными функциями* f, h *соответственно, то* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$ *в том и только в том случае, когда* $f\leqslant h$.

Доказательство. Пусть Ω – множество всех полных радикальных функций локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Очевидно, $\Omega\neq\varnothing$. Пусть ψ – произвольный элемент из Ω. Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}\cap(\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}\psi(p)\cdot \cdot\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Обозначим через $\varphi(p)$ множество групп

$$\{G\in\mathfrak{F}\,|\,G^{\mathfrak{N}_p}\cong H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}}\,(H\in\mathfrak{F})\},\quad p\in\pi(\mathfrak{F}).$$

Если $G\in\varphi(p)$, то $G^{\mathfrak{N}_p}\cong H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}}$ для некоторой группы $H\in\mathfrak{F}$. Так как $H\in\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{N}_p}\cong H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}}\in\psi(p)$ и поэтому $G\in\psi(p)\mathfrak{N}_p=\psi(p)$. Итак, для каждого простого $p\in\pi(\mathfrak{F})$ имеет место включение $\varphi(p)\subseteq\psi(p)$. Следовательно, $f(p)=(\mathrm{Fit}\,\varphi(p))\mathfrak{N}_p\subseteq(\mathrm{Fit}\,\psi(p))\mathfrak{N}_p=\psi(p)$ для всех p из $\pi(\mathfrak{F})$. Значит, $f\leqslant\psi$ и

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}\cap(\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})\subseteq\mathfrak{F}.$$

Докажем, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{M}$. Пусть $X\in\mathfrak{F}$. Так как по лемме 1 [5] $(X^{\mathfrak{G}_{p'}})^{\mathfrak{N}_p}=X^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}}$ $(p\in\pi(\mathfrak{F}))$, то $X^{\mathfrak{G}_{p'}}\in\varphi(p)\subseteq f(p)$. Следовательно, $X\in f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, $X\in\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Значит, $X\in\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}\cap(\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'})=\mathfrak{M}$.

2) Если $f\leqslant h$, то, очевидно, $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$. Но тогда по утверждению 1) ввиду определения операции Fit получаем непосредственно $f\leqslant h$.

Лемма доказана.

Любое множество $\{\mathfrak{F}_i|i\in I\}$ локальных классов Фиттинга будем считать частично упорядоченным с отношением порядка $\subseteq$.

ЛЕММА 6. *Объединение любой непустой цепи локальных классов Фиттинга — локальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i|i\in I\}$ — некоторая цепь локальных классов Фиттинга и $\mathfrak{F}=\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Докажем, что класс $\mathfrak{F}$ локален. По лемме 5 для каждого $i\in I$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ обладает единственной минимальной полной радикальной функцией f_i. Пусть $\Omega=\{f_i|i\in I\}$ — цепь таких функций и $f=\cup_{i\in I}f_i$. Вначале установим, что f — радикальная функция. Очевидно, $f(p)$ — класс Фиттинга для всех простых p. Покажем, что для любой группы $G\neq 1$ имеет место равенство $f(G)=\cap_p f(p)$, где p пробегает все простые делители из $\pi(G)$. Так как $f(G)=\cup_{i\in I}f_i(G)$ и для любого $i\in I$ и $p\in\pi(G)$ справедливо $f_i(G)=\cap_p f_i(p)$, то $f(G)\subseteq\cap_p f(p)$. Проверим справедливость обратного включения. Пусть $|G|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ и $X\in\cap_p(\cup_{i\in I}f_i(p))$. Тогда $X\in(\cup_{i\in I}f_i(p_1))\cap\cap(\cup_{i\in I}f_i(p_2))\cap\dots\cap(\cup_{i\in I}f_i(p_k))$. Следовательно, $X\in f_{i_1}(p_1)\cap f_{i_2}(p_2)\cap\dots\cap f_{i_k}(p_k)$ для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_k\in I$. Без ограничения общности, можно считать, что $f_{i_1}\leqslant f_{i_2}\leqslant\dots\leqslant f_{i_k}$. Значит, $X\in f_{i_k}(p_1)\cap f_{i_k}(p_2)\cap\dots\cap f_{i_k}(p_k)$. Следовательно, $X\in\cap_p f_{i_k}(p)\subseteq\cup_{i\in I}(\cap_p f_i(p))$. Итак, $\cap_p f(p)\subseteq f(G)$ и f — радикальная функция. Остается выяснить, что f — радикальная функция класса $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}\cap(\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})}f(p)\times\times\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'})$. Так как $f_i\leqslant f$, то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{M}$. Пусть L — группа из $\mathfrak{M}$. Тогда $L^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}}\in f(p)$ для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Но $f(p)=\cup_{i\in I}f_i(p)$. Следовательно, существует такое $i_l\in I$, что $L^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}}\in f_{i_l}(p)$ для всех простых $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Значит, $L\in\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F}_i)}f_{i_e}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$. Так как $L\in\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то $L\in\mathfrak{G}_\pi(\mathfrak{F}_{i_m})$ для некоторого $i_m\in I$. Из того, что $\mathfrak{F}_{i_m}$ и $\mathfrak{F}_{i_l}$ элементы цепи, следует, что либо $\mathfrak{F}_{i_m}\subseteq\mathfrak{F}_{i_l}$, либо $\mathfrak{F}_{i_l}\subseteq\mathfrak{F}_{i_m}$. Но тогда либо $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_m})}\subseteq\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_e})}$, либо $\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_e})}\subseteq\mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F}_{i_m})}$, и по лемме 5 либо $f_{i_m}\leqslant f_{i_l}$, либо $f_{i_l}\leqslant f_{i_m}$. В каждом из этих случаев легко видеть, что $L\in\mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

В дальнейшем для доказательства теоремы будем использовать понятие разрешимой примитивной насыщенной формации [8], которое мы напомним. Пусть $\mathcal{F}_0$ семейство формаций, состоящее из формаций $\varnothing$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}$. Для всякого $i>0$ определяют семейство формаций $\mathcal{F}_i$ индуктивно следующим образом: $\mathfrak{F}\in\mathcal{F}_i$ в том и только в том случае, если либо $\mathfrak{F}\in\mathcal{F}_{i-1}$, либо $\mathfrak{F}$ — формация с локальным экраном f таким, что $f(p)\in\mathcal{F}_{i-1}$ для всех простых p. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех таких формаций $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F}=\bigcup_j\mathfrak{F}_j$, где $\mathfrak{F}_j\in\bigcup_i\mathcal{F}_i$ и $\mathfrak{F}_j\subseteq\mathfrak{F}_{j+1}$. Формацию $\mathfrak{Y}$ называют примитивной, если $\mathfrak{Y}\in\mathcal{F}$.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимый наследственный класс Фиттинга. Тогда по теореме 1.1 [9] $\mathfrak{F}$ является формацией. Но всякая наследственная радикальная формация по теоремам 1 и 4 [8] является примитивной насыщенной. Относительно $\mathfrak{F}$ теперь представляются две возможности:

1. $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^k$ для некоторого натурального k, т. е. $\mathfrak{F}$ имеет ограниченную нильпотентную длину. В этом случае по лемме 2.3 [10] $\mathfrak{F}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathfrak{F}_i$, причем каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ является произведением классов Фиттинга конечной длины вида $\mathfrak{S}_{\pi_1}$, $\mathfrak{S}_{\pi_2}$, ..., $\mathfrak{S}_{\pi_n}$, где π_1, π_2, ..., π_n — некоторые множества простых чисел. Следовательно, по лемме 4 $\mathfrak{F}_i$ — локальный класс Фиттинга для любого $i\in I$ и поэтому по лемме 3 $\mathfrak{F}$ — локальный.

2. Нильпотентная длина $\mathfrak{F}$ неограничена. Пусть $\mathfrak{F}_i=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}^i$, где $i\geqslant 1$. Легко видеть, что $\mathfrak{F}_i$ наследственный класс Фиттинга ограниченной нильпотентной длины для каждого $i\geqslant 1$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ локальный класс Фиттинга для всех $i\geqslant 1$ по случаю 1. Но тогда $\mathfrak{F}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{F}_i$ — объединение цепи локальных классов Фиттинга и по лемме 6 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — непустые разрешимые наследственные классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и пересечение $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ локальны.*

Важное место в исследованиях разрешимых классов Фиттинга занимает проблема описания классов Фиттинга, удовлетворяющих условию Локетта, $\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{F}_*=\bigcap\{\mathfrak{X}\mid\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*\}$, $\mathfrak{S}_*$ — минимальный нормальный класс Фиттинга и $\mathfrak{F}^*=\{G\in\mathfrak{S}\mid(G\times G)_{\mathfrak{F}}=(G_{\mathfrak{F}}\times G_{\mathfrak{F}})\langle g, g^{-1}\rangle\mid g\in G\}$ (см., например, [10]). В [6] было установлено, что каждый разрешимый локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}\supseteq\mathfrak{N}$ — класс Фиттинга с условием Локетта. Нетрудно показать аналогичными, как и в [6] рассуждениями, что произвольный разрешимый локальный класс — класс Фиттинга с условием Локетта. Поэтому, учитывая этот факт и доказанную теорему, мы получаем конкретизацию основных результатов [6] как

Следствие 2. *Каждый непустой разрешимый наследственный класс Фиттинга — класс Фиттинга с условием Локетта.*

Следствие 3. *Если $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$ — множество непустых разрешимых наследственных классов Фиттинга, то $\mathfrak{F}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга с условием Локетта.*

Из следствия 2 вытекает положительное решение вопроса 8.30 из [11] для случая наследственных классов Фиттинга.

Первоначально определение разрешимых локальных классов Фиттинга было предложено Б. Хартли [3] как классов вида $\bigcap_p f(p)\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p$, где f — некоторая радикальная функция. Однако уже для $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ в 4.2 [3] доказано, что $\mathfrak{F}$ наследственный класс Фиттинга и не является локальным в смысле такого определения. Этих недостатков нам удалось избежать: понятно, что каждый локальный класс Фиттинга в смысле определения Хартли является локальным в смысле определения, которое мы рассматриваем. В частности, произведения $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ и $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p$ локальны по лемме 2.

В заключение отметим, что результат, двойственный доказанной теореме в теории формаций конечных групп, неверен: например, разрешимые формации $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ наследственны, но нелокальны (см. [7]). Доказанная теорема в общем случае не допускает обращения: если $\mathfrak{X}$ — разрешимый ненаследственный класс Фиттинга, то легко видеть, что произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ — локальный, но ненаследованный класс Фиттинга.

Витебский государственный
педагогический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
19.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[2] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
[3] Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. V. 3, № 9. P. 103–115.
[4] D'Arcy P. Locally defined Fitting classes // J. Austral. Math. Soc. 1975. V. 20, № 1. P. 25–31.
[5] Воробьев Н. Т. О локальных радикальных классах // Вопросы алгебры. Минск: Изд-во «Университетское». 1986, № 2. С. 41–50.
[6] Воробьев Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Математические заметки, 1988. Т. 43, вып. 2. С. 161–168.
[7] Gaschütz W. Lectures on Subgroups of Gulow type in finite soluble groups // Notes in Pure Mathematics. Canberra: Austral. Nat. Univ. 1979. V. 11.
[8] Hawkes T. O. On Fitting formations / Math. Z. 1970. Bd 117, № 1–4. S. 177–182.
[9] Bryce R. A., Cossey J. Subgroup closed Fittingclasses are formations // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1982. V. 91, № 2. P. 225–258.
[10] Bryce R. A., Cossey J. A problem in Theory of Normal Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd 141, № 2. S. 99–100.
[11] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1982.