Доклады Академии наук БССР

1979 Том XXIII № 2

УДК 519.44

Н. Т. ВОРОБЬЕВ

# МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭКРАНЫ ПОРОЖДЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

*(Представлено академиком АН БССР С. А. Чунихиным)*

В работе [1] профессором Л. А. Шеметковым было доказано, что каждому экрану $f$ соответствует некоторая непустая формация $\langle f \rangle$, причем $\langle f \rangle$ состоит из всех групп, обладающих $f$-центральными рядами. В связи с этим возникает обратная задача. Если имеется конкретная ступенчатая формация $\mathfrak{F}$, то задача состоит в том, чтобы отыскать способы ее построения, т. е. описать те экраны $f$, для которых $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$. Если же данная формация не ступенчатая, то естественной является постановка аналогичной задачи для наименьшей ступенчатой формации, содержащей данную. Решению этой задачи, предложенной автору Л. А. Шеметковым, и посвящена настоящая работа

В § 1 нами найдены две новые формации групп, построенные с помощью пар локальных формаций, и указаны способы построения (в частности, описываются максимальные локальные экраны) наименьших локальных формаций, содержащих эти формации.

В § 2, 3 приведен ряд критериев локальности этих формаций.

Нами рассматриваются только конечные группы, причем в § 3 только разрешимые группы. Напомним, что если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, то экран $f$ назовем $\mathfrak{X}$-экраном, если $f(G) \subseteq \mathfrak{X}$ для любой группы $G$. Любое множество $\Omega$ $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$ будем считать частично упорядоченным с отношением $\leqslant$, которое задается следующим образом. Если $f_1, f_2 \in \Omega$, то будем говорить, что экран $f_1$ вложен в экран $f_2$, и обозначать $f_1 \leqslant f_2$, если $f_1(G) \subseteq f_2(G)$ для любой группы $G$. Максимальный элемент множества всех локальных $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$ назовем максимальным локальным $\mathfrak{X}$-экраном. В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ максимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$ назовем максимальным внутренним локальным экраном. Через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}_p$ будем обозначать формации всех нильпотентных групп и всех $p$-групп соответственно; через $\mathfrak{F}_{\mathfrak{Y}}$ — класс всех групп, $\mathfrak{F}$-нормализаторы которых принадлежат некоторой формации $\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{F}$ — некоторая локальная формация. Другие определения и обозначения см. в [1–5].

§ 1. Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — некоторые локальные формации. Определим $\mathfrak{Y}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ как класс всех групп, которые обладают по крайней мере одним $\mathfrak{F}_1$-проектором, содержащимся в некотором $\mathfrak{F}_2$-нормализаторе.

Положим $\mathfrak{Y}^* = \mathfrak{Y}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{Y}_1 \cap \mathfrak{Y}_2$, где $\mathfrak{Y}_i$ — формация всех групп с $\pi(\mathfrak{F}_i)$-разрешимым $\mathfrak{F}_i$-корадикалом, $i = 1, 2$.

Лемма 1. *Класс групп $\mathfrak{Y}^*$ — формация.*

Используя лемму 5 работы [4], легко видеть, что в случае $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$ класс групп $\mathfrak{Y}^*$ — формация всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор совпадает с $\mathfrak{F}$-нормализатором (см. [6–8]).

Определение 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая формация групп. Пусть $l\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех локальных формаций, которые содержат

$\mathfrak{X}$. Класс $l\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ назовем локальной формацией, порожденной формацией $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. *Пусть $l\mathrm{form}\,\mathfrak{Y}^*$ — локальная формация, порожденная формацией $\mathfrak{Y}^*$. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — такие локальные формации, что каждая группа из $\mathfrak{F}_1$ разрешима, а каждая группа из $\mathfrak{F}_2$ имеет $\pi(\mathfrak{F}_1)$-разрешимый $\mathfrak{F}_1$-корадикал. Тогда если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{Y}^*$ и $f_1$, $f_2$ — максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, то локальный экран $y$, такой, что для каждого простого $p$ имеет место*

$$y(p) = \begin{cases} f_2(p), \text{ если } f_1(p) = \mathfrak{F}_1, \\ \mathfrak{G}_p\mathfrak{Y}^*, \text{ если } f_1(p) \subset \mathfrak{F}_1, \end{cases}$$

*является максимальным внутренним локальным экраном $l\mathrm{form}\,\mathfrak{Y}^*$.*

Из теоремы 1 и теоремы 2 работы ([1]) вытекает

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{Y} = l\mathrm{form}\,\mathfrak{Y}^*$ — локальная формация, порожденная формацией $\mathfrak{Y}^*$, и локальные формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ таковы, как и в условии теоремы 1. Тогда если $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет $\pi(\mathfrak{Y})$-разрешимый $\mathfrak{Y}$-корадикал, то локальный $\mathfrak{X}$-экран $y$, такой, что для каждого простого $p$ имеет место

$$y(p) = \begin{cases} \mathfrak{Y}_{f_2(p)} \cap \mathfrak{X}, \text{ если } f_1(p) = \mathfrak{F}_1, \\ \mathfrak{Y}_{\mathfrak{G}_p\mathfrak{Y}^*} \cap \mathfrak{X}, \text{ если } f_1(p) \subset \mathfrak{F}_1, \end{cases}$$

является максимальным локальным $\mathfrak{X}$-экраном формации $\mathfrak{Y}$, где $f_1$, $f_2$ — максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$.

Отметим, что в частном случае, когда $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$, следствием теоремы 1 является основной результат работы Дёрка, Хоукса ((7), теорема 1.2).

Теорема 2. *Пусть локальные формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ таковы, как и в условии теоремы 1. Пусть $\mathfrak{Y}^*$ — локальна и $\sigma$ — множество всех таких простых $p$, что $f_1(p) \subset \mathfrak{F}_1$. Тогда если $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{X}$, а каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет $\pi(\mathfrak{Y}^*)$-разрешимый $\mathfrak{Y}^*$-корадикал, то локальный $\mathfrak{X}$-экран $y$, такой, что для каждого простого $p$ имеет место*

$$y(p) = \begin{cases} f_2(p), \text{ если } p \in \sigma', \\ \mathfrak{X}, \text{ если } p \in \sigma, \end{cases}$$

*является локальным $\mathfrak{X}$-экраном формации $\mathfrak{Y}^*$, где $f_2$ — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}_2$.*

Напомним, что подгруппу $H$ группы $G$ называют $\mathscr{D}M$-подгруппой (9), если $H$ либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы $G$.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — локальные формации и $f_1$ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}_1$. Определим $\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ как класс всех групп, которые обладают по крайней мере одним $\mathfrak{F}_2$-проектором, являющимся $\mathscr{D}M$-подгруппой, принадлежащей $f_1(p)$ для каждого простого $p$.

Если $f_1(p) = \varnothing$ для некоторого простого $p$, то положим $\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = \varnothing$. Обозначим через $\mathfrak{Z}^*$ класс $\mathfrak{Z}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{Z}_1$, где $\mathfrak{Z}_1$ — класс всех групп с $\pi(\mathfrak{F}_2)$-разрешимым $\mathfrak{F}_2$-корадикалом.

Лемма 2. *Класс $\mathfrak{Z}^*$ — формация.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — некоторые локальные формации и $f_1$, $f_2$ — максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Пусть $\mathfrak{Z} = l\mathrm{form}\,\mathfrak{Z}^*$ — локальная формация, порожденная формацией $\mathfrak{Z}^*$. Если $f_1 \leqslant f_2$, то локальный экран $z$, такой, что для каждого простого $p$ имеет место*

$$z(p) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } \mathfrak{N} \text{ не содержится в } \mathfrak{F}_1, \\ \mathfrak{G}_p\mathfrak{Z}^*, \text{ если } \mathfrak{N} \text{ содержится в } \mathfrak{F}_1. \end{cases}$$

*является максимальным внутренним локальным экраном $\mathfrak{Z}$.*

Из теоремы 3 и теоремы 2 работы ([4]) вытекает

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — некоторые локальные формации и $f_1$, $f_2$ — максимальные внутренние локальные экраны соответственно $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Если $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{Z}\subseteq\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$-корадикал каждой группы из $\mathfrak{X}$ $\pi(\mathfrak{Z})$-разрешим, причем $f_1\leqslant f_2$, то локальный $\mathfrak{X}$-экран $z$, такой, что для каждого простого $p$

$$z(p)=\begin{cases}\varnothing, \text{ если } \mathfrak{N}_p \text{ не содержится в } \mathfrak{F}_1,\\ \mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}_p\mathfrak{Z}^*}\cap\mathfrak{X}, \text{ если } \mathfrak{N}_p \text{ содержится в } \mathfrak{F}_1,\end{cases}$$

является максимальным локальным $\mathfrak{X}$-экраном формации $\mathfrak{Z}$.

§ 2. Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — такие локальные формации, что каждая группа из $\mathfrak{F}_1$ разрешима, а каждая группа из $\mathfrak{F}_2$ имеет $\pi(\mathfrak{F}_1)$-разрешимый $\mathfrak{F}_1$-корадикал, причем $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{Y}^*$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *формация $\mathfrak{Y}^*$ — локальна;*

2) *если $f_1$ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}_1$, то $\mathfrak{G}_p\mathfrak{Y}^*=\mathfrak{Y}^*$ для каждого простого $p$ такого, что $f_1(p)\subset\mathfrak{F}_1$.*

Следуя ([6]), локальную формацию $\mathfrak{F}_1$ назовем сильно вложенной в некоторую локальную формацию $\mathfrak{F}_2$ и обозначим $\mathfrak{F}_1\ll\mathfrak{F}_2$, если в любой группе $G$, обладающей разрешимым $\mathfrak{F}_1$-корадикалом, $\mathfrak{F}_1$-проектор из $G$ содержится в некотором $\mathfrak{F}_2$-проекторе из $G$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — некоторые локальные формации. Если $\mathfrak{F}_1\ll\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1\supseteq\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_2\cap\mathfrak{X}$ — единственная максимальная по включению локальная подформация формации $\mathfrak{Y}^*$, где $\mathfrak{X}$ — класс всех групп с разрешимым $\mathfrak{F}_1$-корадикалом.*

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — некоторые локальные формации. Пусть $\mathfrak{F}_1\ll\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1\supseteq\mathfrak{N}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $\mathfrak{Y}^*$ — локальная формация;

2) $\mathfrak{Y}^*=\mathfrak{N}\mathfrak{F}_2\cap\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — класс всех групп с разрешимым $\mathfrak{F}_1$-корадикалом.

§ 3. Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — локальные формации и $f_2$ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}_2$. Пусть $\mathfrak{F}_1\ll\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1\supseteq\mathfrak{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{Y}^*$ локальна, то существует такое простое $p$, что $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{G}_{p'}f_2(p)$;*

2) *если $\mathfrak{F}_2$-проектор каждой группы $G$ из $\mathfrak{Y}^*$ покрывает только $\mathfrak{F}_2$-центральные главные факторы группы $G$ и $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{G}_{p'}f_2(p)$ для некоторого простого $p$, то $\mathfrak{Y}^*$ локальна.*

Отметим, что следствиями теорем 5 и 6 являются результаты работ ([6–8]): из теоремы 5 вытекают теорема 4.6 из ([6]), теорема 1.2 из ([8]); из теоремы 6 — теорема 1.3 из ([7]).

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — некоторые локальные формации, причем $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1\supseteq\mathfrak{N}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *формация $\mathfrak{Z}^*$ локальна;*

2) *$\mathfrak{Z}^*$ — формация всех разрешимых групп.*

**Summary**

The paper deals with the investigation of the two new group formations with the help of description of local maximum screens of local formations generated by these formations.

**Литература**

[1] Шеметков Л. А. Матем. сб., **94**, № 4, 628, 1974. [2] Шеметков Л. А. УМН, **30**, вып. 2 (182), 179, 1975. [3] Шеметков Л. А. Алгебра и логика, **15**, № 6, 648, 1976. [4] Воробьев Н. Т. ДАН БССР, **22**, № 1, 9, 1978. [5] Huppert B. Endliche Gruppen, I, Berlin — Heidelberg — New York, 1967. [6] Doerk K. J. Algebra, **13**, № 3, 345, 1969. [7] Doerk K., Hawkes T. J. Algebra, **16**, № 3, 456, 1970. [8] Doerk K. Arch. Math., **21**, № 3, 240, 1970. [9] Schaller K. U. Math. Z., **130**, № 2, 199, 1973.

*Гомельский государственный университет* *Поступило 24.05.78*