Доклады Академии наук БССР
1978 Том XXII № 7

УДК 519.44

Н. Т. ВОРОБЬЕВ

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭКРАНЫ ФОРМАЦИЙ

(Представлено академиком АН БССР С. А. Чунихиным)

Понятие экрана, введенное Л. А. Шеметковым в работах [1, 2], имеет важное значение в вопросах классификации формаций. Формация может иметь несколько экранов, и возникает задача нахождения максимального из них. Эта задача, предложенная автору профессором Л. А. Шеметковым, рассматривалась нами в [4, 5]. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Экран f назовем $\mathfrak{X}$-экраном, если $f(G)\subseteq\mathfrak{X}$ для любой группы G. Максимальный элемент множества всех однородных (локальных) $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$ назовем максимальным однородным (соответственно локальным) $\mathfrak{X}$-экраном. В случае $\mathfrak{X}=\mathfrak{F}$ максимальный однородный (локальный) $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$ назовем максимальным внутренним однородным (соответственно локальным) экраном.

В § 1 настоящей работы мы приводим некоторые новые результаты о максимальных локальных экранах формации $\mathfrak{F}$. В частности, дается явное описание максимального локального $\mathfrak{X}$-экрана формации $\mathfrak{F}$, обладающего заданным свойством, в случае $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ — множество всех групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом.

В § 2 установлена эквивалентность условий вложения локальных формаций и соответствующих максимальных внутренних локальных экранов этих формаций. Указывается также существование максимальной по вложению однородной (локальной) подформации во множестве всех однородных (соответственно локальных) подформаций формации всех конечных групп.

В § 3 исследуются новые классы групп, построенные с помощью пар локальных формаций. В частном случае эти классы групп совпадают с классами групп, которые изучались К. Дёрком в работе [7].

В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны. Обозначения и определения см. в [1, 3, 5, 10].

§ 1. **Определение 1.** Пусть G — группа, H — некоторая подгруппа из G. Локальный экран f формации $\mathfrak{F}$ назовем $(H—G)$-монотонным, если из $H\subseteq L\subseteq K\subseteq G$ следует $L^{f(p)}\subseteq K^{f(p)}$ для каждого простого числа $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Локальный экран f формации $\mathfrak{F}$, являющийся $(H—G)$-монотонным для любой подгруппы H из G, назовем G-монотонным. Если же f — G-монотонный локальный экран формации $\mathfrak{F}$ для любой группы G, то f назовем монотонным.

Будем называть локальный экран f формации $\mathfrak{F}$ S-замкнутым, если для каждого простого p формация $f(p)$ замкнута относительно взятия подгрупп.

Пример. Пусть f—S-замкнутый локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Проверкой легко установить, что f — монотонный локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

Пусть в дальнейшем $\mathfrak{F}$ — локальная формация, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Обозначим через $f^*(p)$ класс всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор существует и принадлежит $f(p)$. Если $f(p)=\varnothing$, то положим $f^*(p)=\varnothing$. Пусть $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq$

$\subseteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. Определим ψ как функцию, сопоставляющую каждому простому числу p класс групп $\psi(p)=f^*(p)\cap \mathfrak{X}$.

Лемма 1. *Пусть G — группа, в которой существует $\mathfrak{F}$-проектор F. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для каждого простого $p\in\pi(\mathfrak{F})$ $\psi(p)$-корадикал группы G совпадает с нормальным замыканием в G $f(p)$-корадикала группы F;*

2) *ψ — $(F-G)$-монотонный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$.*

Теорема 1. *Пусть G — группа, в которой существует $\mathfrak{F}$-проектор F. Пусть $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. Тогда ψ — единственный максимальный элемент множества всех $(F-G)$-монотонных локальных $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$.*

Из теоремы 1 следует утверждение 1.11 из ([8]).

Теорема 2. *Пусть φ — произвольный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если f — такая функция, что $f(p)=\mathfrak{S}_p\varphi(p)\cap\mathfrak{F}$ для каждого простого p, то f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. Пусть φ — произвольный локальный $\mathfrak{X}$-экран. Тогда если f — максимальный внутренний экран формации $\mathfrak{F}$, причем $f(p)=\mathfrak{S}_p\varphi(p)\cap\mathfrak{F}$ для каждого простого p, то φ — локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$.*

§ 2. Условимся до конца статьи обозначать через $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ локальные формации, f_1, f_2 — соответственно максимальные внутренние локальные экраны формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Если $f_1(p)\subseteq f_2(p)$ для каждого простого p, то положим $f_1\leqslant f_2$.

Теорема 4. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$, когда $f_1\leqslant f_2$.*

Теорема 5. *Множество всех однородных (локальных) подформаций формации всех групп не пусто и имеет по крайней мере один максимальный по включению элемент.*

§ 3. Определение 2. Определим $\mathfrak{X}(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$ как класс всех групп, в которых $\mathfrak{F}_1$-проектор существует и каждый f_1^*-центральный главный фактор является $\mathfrak{F}_2$-центральным.

Пусть $\pi=\pi(\mathfrak{F}_1)$. Положим $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{X}(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_1$. Назовем z локальной групповой функцией, если z сопоставляет каждому простому числу p класс групп (возможно, пустой) $z(p)$. Будем говорить, что z — локальная групповая функция формации $\mathfrak{Z}$, если $\mathfrak{Z}$ совпадает с множеством всех групп, обладающих z-центральными рядами ([1]).

Теорема 6. *Класс групп $\mathfrak{X}^*$ — формация, обладающая такой локальной групповой функцией x^*, что $x^*(p)=((\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_1\setminus f_1^*(p))\cap\mathfrak{X}^*)\cup f_2(p)$ для каждого простого p.*

Отметим, что если $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}_2=\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{X}^*$ — класс всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор покрывает только $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы (см. ([6,7])). Обозначим его через $\mathfrak{X}_\mathfrak{F}$.

Следствие. Если $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}_2=\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{X}_\mathfrak{F}$ — формация, обладающая такой локальной групповой функцией φ, что $\varphi(p)=((\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}\setminus f^*(p))\cap\mathfrak{X}_\mathfrak{F})\cup f(p)$ для каждого простого p.

Теорема 7. *Если $\mathfrak{Z}$ — формация, обладающая локальной групповой функцией z, то $\mathfrak{S}_p\mathfrak{Z}$ — формация, обладающая такой локальной групповой функцией, что $z^*(p)=\mathfrak{Z}$ и $z^*(q)=z(q)\cap\mathfrak{Z}$ для q, отличного от p.*

Из теорем 6, 7 получаем

Следствие 1. Класс групп $\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}^*$ — формация, обладающая локальной групповой функцией x^{**}, такой, что $x^{**}(p)=\mathfrak{X}^*$ и $x^{**}(q)=((\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_1\setminus f_1^*(q))\cap\mathfrak{X}^*)\cup f_2(q)$ для q, отличного от p.

В случае $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}_2=\mathfrak{F}$ имеем

Следствие 2. Класс групп $\mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_\mathfrak{F}$ — формация, обладающая локальной групповой функцией ψ, такой, что $\psi(p)=\mathfrak{X}_\mathfrak{F}$ и $\psi(q)=((\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}\setminus f^*(q))\cap\mathfrak{X}_\mathfrak{F})\cup f(q)$ для q, отличного от p.

Если $y(p) \subseteq z(p)$ для любого простого p, то для соответствующих локальных групповых функций y и z формации $\mathfrak{Z}$ положим $y \leqslant z$.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Пусть $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех локальных формаций, которые содержат $\mathfrak{X}$. Класс $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ назовем локальной формацией, порожденной множеством $\mathfrak{X}$.

Известно (см. ([11])), что $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран. В случае, если $\mathfrak{X}$ — формация, будем говорить, что $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ — локальная формация, порожденная данной формацией $\mathfrak{X}$. Пусть в дальнейшем до конца параграфа все рассматриваемые группы π-разрешимы, где $\pi = \pi(\mathfrak{X}^*)$.

Теорема 8. *Пусть* $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*$ — *локальная формация, порожденная формацией* $\mathfrak{X}^*$. *Пусть* x^* — *локальная групповая функция формации* $\mathfrak{X}^*$ (определение x^* см. в теореме 6). *Тогда если* x — *максимальный внутренний локальный экран* $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*$ *и* $f_1 \leqslant f_2$, *то* $x^* \leqslant x$.

Следующая теорема дает явное описание максимального внутреннего локального экрана формации $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*$.

Теорема 9. *Пусть* $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*$ — *локальная формация, порожденная формацией* $\mathfrak{X}^*$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $f_1 \leqslant f_2$, *то локальный экран* x *такой, что для любого простого* p *имеет место*

$$x(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}^*, & \text{если } f_1(p) \subset \mathfrak{F}_1, \\ f_2(p), & \text{если } f_1(p) = \mathfrak{F}_1, \end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*$;

2) *если* $f_1^* \leqslant f_2^*$, $\mathfrak{F}_2 \ll l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*$, *то локальный экран* x *такой, что для любого простого* p *имеет место*

$$x(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}^*, & \text{если } f_2(p) \subset \mathfrak{F}_2, \\ l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*, & \text{если } f_2(p) = \mathfrak{F}_2, \end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^*$.

Теорема 10. *Пусть* $\mathfrak{F}_1 \ll \mathfrak{F}_2$, *причем* $l\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}^*$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f_1^* \cap x^* \leqslant f_2$;

2) *если* $f_1(p)$ *не содержится в* $f_2(q)$ *для некоторого простого* p, *то* $f_1(p) = \mathfrak{F}_1$;

3) *существует такое множество простых чисел* σ, *что либо* $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{S}_{\sigma'}$, *либо* $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{S}_{\sigma'}\mathfrak{T}$, *где* $\mathfrak{T}$ — *такая формация, что* $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$.

Теорема 11. *Пусть* σ — *некоторое множество простых чисел. Пусть* $\mathfrak{T}$ — *такая непустая формация, что* $\mathfrak{S}_{\sigma'}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$. *Тогда если* $f_1 \leqslant f_2$ *и* $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{S}_{\sigma'}$ *или* $f_1 \leqslant f_2$ *и* $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{S}_{\sigma'}\mathfrak{T}$, *то локальный экран* x *такой, что для любого простого имеет место*

$$x(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}^*, & \text{если } f_1(p) \subset \mathfrak{F}_1, \\ f_2(p), & \text{если } f_1(p) = \mathfrak{F}_1, \end{cases}$$

является максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{X}^*$.

В частном случае, если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$; следствиями теорем 9 — 11 являются результаты работы К. Дёрка ([7]): из теоремы 9 вытекает теорема 4.8 из ([7]), из теорем 10 и 11 — теорема 4.9 из ([7]).

Summary

The paper gives an explicit description of the maximal local $\mathfrak{X}$-screen of formation $\mathfrak{F}$, which possesses the given property in the case of $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. The formations constructed with the help of pairs of the local formations are studied. In particular, the maximal inner local screen of the local formation generated by one of these formations is described.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шеметков Л. А. Матем. сб., 94, № 4, 628, 1974. [2] Шеметков Л. А. УМН, 30, вып. 2 (182), 179, 1975. [3] Шеметков Л. А. Алгебра и логика, 15, № 6, 616, 1976. [4] Huppert B. Endliche Gruppen, I, Berlin — Heidelberg — New York, 1967. [5] Воробьев Н. Т. 14-я Всесоюзная алгебраическая конференция, Тезисы докладов, ч. 1, Новосибирск, 1977, с. 16. [6] Doerk K. J. Algebra, 13, 3, 345, 1969. [7] Doerk K. Arch. Math., 21, 3, 240, 1970. [8] D'Arcy P. J. Algebra, 28, 2, 34, 1974. [9] Воробьев Н. Т. ДАН БССР, 22, № 1, 9, 1978. [10] Cline E. Pacif. J. Math., 29, 3, 491, 1969. [11] Schmid P. J. London Math. Soc., 7, 83, 1973.

Гомельский государственный университет

Поступило 20.12.77