Доклады Академии наук БССР

1978 Том XXII № 1

УДК 519.44

Н. Т. ВОРОБЬЕВ

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭКРАНЫ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ $\mathfrak{F}$-ПРОЕКТОРОВ

(Представлено академиком АН БССР С. А. Чунихиным)

В работах Л. А. Шеметкова ([1, 2]) введено определение экрана. Под экраном f понимается функция, сопоставляющая каждой группе G некоторую (возможно, пустую) формацию $f(G)$, причем выполняются следующие условия:

1) если α — гомоморфизм группы G, то $f(G)\subseteq f(G^{\alpha})\cap f(\mathrm{Ker}\,\alpha)$, где G^{α} и $\mathrm{Ker}\,\alpha$ — соответственно образ и ядро α;

2) $f(1)\neq\varnothing$, где 1 — единичная группа.

В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Экран f назовем $\mathfrak{X}$-экраном, если $f(G)\subseteq\mathfrak{X}$ для любой группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Экран f является экраном формации $\mathfrak{F}$ ([1]), если $\mathfrak{F}=\langle f\rangle$, где $\langle f\rangle$ — множество всех групп, обладающих f-центральными рядами. Введем на множестве всех $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$ отношение частичной упорядоченности. Если $\varphi(G)\subseteq f(G)$ для любой группы G, то для соответствующих $\mathfrak{X}$-экранов φ и f формации $\mathfrak{F}$ положим $\varphi\ll f$. Максимальный элемент этого частично упорядоченного множества назовем максимальным $\mathfrak{X}$-экраном формации $\mathfrak{F}$. Задача описания максимального $\mathfrak{X}$-экрана формации была предложена автору профессором Л. А. Шеметковым. В настоящей работе указывается существование максимального однородного $\mathfrak{X}$-экрана формации $\mathfrak{F}$ (определение однородного экрана см. в ([1])) и дается явное описание его в случае, когда $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ — множество всех групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается объединение множеств всех различных простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$. Приводится также характеризация $\mathfrak{F}$-проекторов групп из множества $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ посредством свойств покрытия-изолирования. При необходимости определения и обозначения, которые здесь не приведены, можно найти в ([1–3]).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, содержащий некоторую однородную формацию $\mathfrak{F}$. Тогда множество всех однородных $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$ не пусто и имеет максимальный элемент.*

В работах ([4, 5]) Л. А. Шеметковым введено понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной группы, которое мы будем использовать.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{Y}$ — некоторая формация, $\mathfrak{F}$-однородная формация. Определим $\mathfrak{F}_{\mathfrak{Y}}$ как класс всех групп, $\mathfrak{F}$-нормализаторы которых принадлежат $\mathfrak{Y}$. В случае, когда $\mathfrak{Y}=\varnothing$, положим $\mathfrak{F}_{\mathfrak{Y}}=\varnothing$.

Обозначим $\mathfrak{F}_{\mathfrak{Y}}\cap\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^*$.

Лемма 1. *Класс групп $\mathfrak{F}^*$ — формация.*

Лемма 2. $\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}^*$.

Напомним, что экран f называется внутренним ([1]), если $f(G)\subseteq\langle f\rangle$ для любой группы G.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. Тогда, если ψ — максимальный внутренний однородный экран формации $\mathfrak{F}$, то функция f, сопоставляющая каждой группе G класс $\mathfrak{F}_{\psi(G)}\cap\mathfrak{X}$, является максимальным однородным $\mathfrak{X}$-экраном формации $\mathfrak{F}$.*

В случае, когда $\mathfrak{X}=\mathfrak{F}$, получаем

С л е д с т в и е. Если $\mathfrak{F}$ — однородная формация, то множество всех ее внутренних однородных экранов имеет единственный максимальный элемент.

Из теоремы 2 следуют результат К. Дёрка ([6]), теорема 1.2 из ([7]) и лемма 3.1 из ([8]).

Локальный экран ψ называют полным ([10]), если для каждого простого числа p имеет место равенство $\mathfrak{S}_p\psi(p)=\psi(p)$, где $\mathfrak{S}_p$ — формация всех p-групп.

Пусть в дальнейшем до конца статьи $\mathfrak{F}$ обозначает локальную формацию, имеющую полный внутренний экран f.

О п р е д е л е н и е 2. Определим $f^*(p)$ как класс всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор существует и принадлежит $f(p)$. Если $f(p)=\varnothing$, то положим, что $f^*(p)=\varnothing$.

Из теоремы 1 работы ([9]) легко следует, что если в группе G $\mathfrak{F}$-корадикал $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим, то в G существует $\mathfrak{F}$-проектор и любые два $\mathfrak{F}$-проектора сопряжены.

Л е м м а 3. *Класс групп $f^*(p)\cap\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ — формация.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. Построим f^* как функцию, сопоставляющую каждому простому числу p класс групп $f^*(p)\cap\mathfrak{X}$.

Напомним, что локальный экран f называется замкнутым ([10]), если для каждого простого числа p формация $f(p)$ замкнута относительно взятия подгрупп.

Л е м м а 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) f^* — полный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$;

2) если φ есть либо замкнутый, либо внутренний локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$, то $\varphi\ll f^*$.

Можно показать, что в группе G из множества $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — множество всех групп с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом, $\mathfrak{F}$-проектор совпадает с $\mathfrak{F}$-нормализатором. Отсюда и из теоремы 2 легко следует, что если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то f^* — максимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$.

Л е м м а 5. *Пусть $G\in\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$-проектор группы G содержит некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G.*

Из данной леммы и теоремы 5.1 из ([5]) следует, что $\mathfrak{F}$-проектор группы $G\in\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G. Следующие теоремы подчеркивают значение введенного класса групп $f^*(p)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $G\in\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$. Пусть F — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) F покрывает каждый f^*-центральный главный фактор группы G;

2) каждый главный фактор группы G, покрываемый F, является f^*-центральным.

Т е о р е м а 4. *Пусть $G\in\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{F}$-проектор из G покрывает каждый f^*-центральный главный фактор группы G и изолирует каждый ее f^*-эксцентральный главный фактор. Если H — некоторая подгруппа группы G, обладающая таким же свойством покрытия-изолирования, то H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G.*

Следствиями теорем 3, 4 являются теоремы 2.9, 5.2 из работы ([10]) в случае, когда G — разрешимая группа.

Говорят, что подгруппа H группы G обладает свойством сильного покрытия-изолирования ([11]), если выполняются следующие условия:

1) H либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G;

2) $H\cap L/H\cap K$ — главный фактор группы H, если L/K — главный фактор группы G, покрываемый H.

Определение 3. Определим $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{F}}$ как класс всех групп, в которых $\mathfrak{F}$-проектор существует и обладает свойством сильного покрытия-изолирования.

Обозначим $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{F}}\cap\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^{**}$. Используя теорему 3, легко получить обобщение результатов 1, 2 из работы [11].

Лемма 6. *Пусть $G\in\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$. Пусть F — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Если F либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор в данном главном ряду группы G и пересечение F с ним — главный ряд группы F, то $G\in\mathfrak{F}^{**}$.*

Теорема 5. *Класс групп $\mathfrak{F}^{**}$ — формация.*

Summary

In this paper an explicit description of a maximal homogeneous $\mathfrak{X}$-screen is obtained in the case of $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{F}$. New characterizations of $\mathfrak{F}$-projectors are found by means of the covering-avoidance property.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Шеметков, Матем. сб., **94**, № 4, 628, 1974. [2] Л. А. Шеметков, УМН, **30**, вып. 2 (182), 179, 1975. [3] B. Huppert, Endliche Gruppen, I, Berlin—Heidelberg—New York, 1967. [4] Л. А. Шеметков, Всесоюзный алгебраический симпозиум, Тезисы докладов, ч. 1, Гомель, 1975, с. 80. [5] Л. А. Шеметков, Алгебра и логика, **15**, № 6, 616, 1976. [6] K. Doerk, Math. Z., **133**, No 2, 133, 1973. [7] R. Carter, T. Hawkes, J. Algebra, **5**, No 2, 175, 1967. [8] P. Schmid, J. London Math. Soc., **7**, No 1, 83, 1973. [9] Э. Ф. Шмигирев, в сб.: Конечные группы, Минск, «Наука и техника», 1975, стр. 213. [10] K. Doerk, J. Algebra, **13**, No 3, 345, 1969. [11] J. C. Beidleman and A. R. Makan, Proc. Amer. Soc., **47**, No 1, 29, 1975.

Гомельский государственный университет *Поступило 11.05.1977*